Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Ing. A. Lotze

6. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten

Über ein kombiniertes Warte-Verlust-System mit Prioritäten

von WERNER WAGNER

1968

Inhalt

Schrifttum

I. Verkehrstheorie

[1] BROCKMEYER, E., HALSTRØM, H.L. und JENSEN, A., The life and works of A.K. Erlang. Acta Polytech. Scandinavica, 1960, Copenhagen.

[2] COBHAM, A., Priority assignment in waiting line problems. Journ. Operations Research Soc. America 2 (1954), 70 - 76.

[3] COBHAM, A., Priority assignment - a correction. Journ. Operations Research Soc. America 3 (1955), 547.

[4] COX, D.R. und SMITH, W.L., Queues. Methuen, London, J. Wiley, New York, 1961.

[5] COX, R.E., Traffic flow in an exponential delay system with priority categories. Proc. Inst. El. Eng. Part B 102 (1955), 815 - 818.

[6] DAVIS, R.H., Waiting-time distribution of a multiserver, priority queueing system. Journ. Operations Research Soc. America 14 (1966), 133 - 136.

[7] DIETRICH, G., Über die Abfertigungsreihenfolge in Wartesystemen der Vermittlungstechnik. Nachrichtentechn. Zeitschr. 18 (1965), 719 - 722.

[8] DRESSIN, S.A. und REICH, E., Priority assignment on a waiting line. Quarterly of Applied Math. 15 (1957), 208 - 211.

[9] ERLANG, A.K., Lösung einiger Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Bedeutung für die selbsttätigen Fernsprechämter. Elektrotechn. Zeitschr. (1918), 504 - 508.

[10] HOLLEY, J., Waiting line subject to priorities. Journ. Operations Research Soc. America 2 (1954), 341 - 343.

[11] KENDALL, D.G., Some problems in the theory of queues. Journ. Roy. Statist. Soc. Ser. B 13 (1951), 151 - 184.

[12] KENDALL, D.G., Stochastic processes occuring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain. Annals Math. Statist. 24 (1953), 338 - 354.

[13] KESTEN, H. und RUNNENBURG, J.T., Priority in waiting line problems. Proc. Kon. Ned. Akad. van Weten. Ser. A 60 (1957), 312 - 336.

[14] KHINTCHINE, A.J., Mathematical methods in the theory of queueing. Translated by Andrews, D.M., und Quenouille, M.H., Griffin London, 1960.

[15] LEWANDOWSKI, R., Zur Theorie der Warteschlangen.
Teil I Elektron. Datenverarb. 8 (1966), 149 - 160,
Teil II Elektron. Datenverarb. 8 (1966), 208 - 218,
Teil III Elektron. Datenverarb. 8 (1966), 251 - 263.

[16] LOTZE, A., Gefahrzeit oder Verlust als Maß für die Betriebsgüte im Fernsprechverkehr? Fernmeldetechn. Zeitschr. 6 (1953), 564 - 570.

[17] LOTZE, A., Berechnung der Verkehrsgrößen im Wartezeitsystem aus den Verkehrsgrößen eines Verlustsystems. Fernmeldetechn. Zeitschr. 7 (1954), 443 - 453.

LOTZE, A. und SCHWIDERSKI, E., Wartezeitprobleme im Fernsprechverkehr. Nachrichtentechn. Zeitschr. 8 (1955), 646 - 649.

[18] LOTZE, A., Über Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik. Habilitationsschrift, Technische Hochschule Stuttgart, 1958.

[19] PALM, C., Research on telephone traffic carried by full availability groups. TELE (1957) 1, 1 - 107.

[20] PIESCH, J., Die Beanspruchung der Bündel im modernen Fernsprechverkehr.
Teil I Archiv el. Übertrag. 8 (1954), 324 - 328,
Teil II Archiv el. Übertrag. 8 (1954), 353 - 362,
Teil III Archiv el. Übertrag. 8 (1954), 411 - 419.

[21] POLLACZEK, F., Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie. Math. Zeitschr. 32 (1930), 64 - 100, 729 - 750.

[22] POLLACZEK, F., Theorie des Wartens vor "Schaltern". Telegraphen- und Fernsprechtechnik (1930), 71 - 78.

[23] POLLACZEK, F., Gesprächsverluste und Wartezeiten. ENT 8 (1931), 279 - 289.

[24] POLLACZEK, F., Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparantés. Mémorial des Sciences mathématiques No 136, Gauthier - Villars Paris, 1957.

[25] POLLACZEK, F., Théorie analytique des problèmes stochastiques relatifs à un groupe de lignes téléphoniques avec dispositif d'attente. Mémorial des Sciences mathématiques No 150, Gauthier - Villars Paris, 1961.

[26] RANDAZZO, F.P., Optimale Auslegung von Nachrichtennetzen mit Hilfe der Wartezeittheorie. Elektr. Nachrichtenwesen 38 (1963), 524 - 537.

[27] RENNER, L. und WAGNER, W., Drei verschiedene Abfertigungsdisziplinen in einfachen Wartesystemen. Semesterarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Studienarbeit 44, Technische Hochschule Stuttgart, 1963.

[28] RIORDAN, J., Stochastic service systems. J. Wiley New York, London, 1962.

[29] SMITH, J.R.W., und SMITH, J.L., Loss and delay in telephone call queueing systems. A T E Journ. 18 (1962), 18 - 30.

[30] STÖRMER, H., Wartezeitlenkung in handbedienten Vermittlungsanlagen. Archiv el. Übertrag. 10 (1956), 58 - 64.

[31] STÖRMER, H., Über ein Warteproblem aus der Vermittlungstechnik. Zeitschr. angew. Math. Mech. 40 (1960), 236 - 246. Siemens Entwicklungsber. 23 (1960), 189 - 198.

[32] SYSKI, R., Introduction to congestion theory in telephone systems. Oliver and Boyd, Edinburgh, London, 1960.

[33] ZIMMERMANN, G.O. und STÖRMER, H., Wartezeiten in Nachrichtenvermittlungen mit Speichern. R. Oldenbourg München, 1961.

II. Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung

[34] FELLER, W., An introduction to probability theory and its applications. Volume I. J. Wiley New York, London, 2. Aufl. 1961.

[35] FISZ, M., Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Deutscher Verl. der Wissenschaften Berlin, 1958.

III. Simulation

[36] KIRSCH, R. und WAGNER, W., Simulationsprogramm für Wartesysteme mit Prioritäten nach der zeittreuen Testmethode. Semesterarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Studienarbeit 157, Technische Hochschule Stuttgart, 1966.

[37] KOSTEN, L., On the measurement of congestion quantities by means of fictitious traffic. P T T Bedrijf (1948/49), 15 - 25.

[38] NEOVIUS, G., Artificial traffic trials using digital computers. Ericsson Technics 11 (1955), 279 - 291.

[39] WAGNER, H., Traffic simulation according to the time-true model (Methods and results). 4. Internat. Teletraffic Congr. 1964, London, Doc. 52. Post Office Telecommun. Journ. 1964 Special Issue, 39.

[40] WAGNER, H. und DIETRICH, G., Bestimmung der Verkehrsleistung von Wartesystemen durch künstlichen Fernsprechverkehr. Nachrichtentechn. Zeitschr. 17 (1964), 273 - 279.

Bezeichnungen

Soweit es möglich ist, werden für die Bezeichnungen die Vorschläge des Nomenklatur-Komitees des International Teletraffic Congress benützt. Die erste Liste enthält die Grundbezeichnungen, die durch die zusätzlichen Kennzeichen der zweiten Liste für den untersuchten Fall spezialisiert werden.

1. Grundbezeichnungen

A	Angebot; mittlere Zahl von Rufen, die während einer mittleren Belegungsdauer ankommen (Zusätze 1,2)
α	spezifisches Angebot; Angebot je Leitung (Zusätze 1,2)
B	Verlustwahrscheinlichkeit (Zusätze 1,3,4,7)
C	Konstante
D_1, D_2	Konstanten
d_j	mittlere (erfolgreiche) Wartezeit eines k-Rufs vom Warteplatz j aus (Zusätze 3,4)
E	Blockierungswahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit, daß alle n Leitungen belegt sind
E_S	Speicherbelegungswahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit, daß mindestens ein Ruf wartet
$E_{1,n}(A)$	Verlustwahrscheinlichkeit nach der 1. Erlangschen Formel
$E_{2,n}(A)$	Wartewahrscheinlichkeit nach der 2. Erlangschen Formel
ε	Wahrscheinlichkeitsdichte für das Enden einer Belegung: $\varepsilon = \frac{1}{h} = 1$
$F_j(>u)$	Wahrscheinlichkeit, daß ein k-Ruf, der zum Zeitpunkt u=0 auf Warteplatz j steht, länger als bis zum Zeitpunkt u wartet (im Wartesystem); Mindestwertverteilungsfunktion
$f_j(u)$	zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte
$G_j(>\tau)$	Wahrscheinlichkeit, daß ein k-Ruf, der zum Zeitpunkt τ=0 auf Warteplatz j steht, erst nach dem Zeitpunkt τ seine Wartezeit (erfolgreich) beendet; Mindestwertverteilungsfunktion (Zusätze 3,4)
$g_j(\tau)$	zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte
$h=1$	mittlere Belegungsdauer

j Nummer des Warteplatzes: $j=1,2,\ldots s$

K Zahl der Prioritätsklassen

k Prioritätsklassenindex, mit abnehmender Dringlichkeit $k=1,2,\ldots K$

k^* Grenzpriorität, für die im Wartesystem noch ein stationärer Zustand erreicht wird

$\varkappa$ Hilfsvariable zum Prioritätsklassenindex k

$\lambda=\alpha(<k)$ spezifisches Angebot der Prioritätsklassen $1,2,\ldots k-1$

$M_{\nu(k)}$ Anfangsmoment ν-ter Ordnung der Wartezeiten der (erfolgreich) wartenden k-Rufe (Zusätze 3,4)

$m_{\nu,j}$ Anfangsmoment ν-ter Ordnung der Wartezeiten der k-Rufe vom Warteplatz j aus (bis zum Warteerfolg) (Zusätze 3,4)

$\mu=\alpha(\leqq k)$ spezifisches Angebot der Prioritätsklassen $1,2,\ldots k$

n Zahl der Leitungen des Bündels

Ω Wartebelastung (Zusätze 1,2)

$\omega_k(\sigma)$ Laplace-Transformierte der Wahrscheinlichkeitsdichte $w_k(\tau)$ im Wartesystem

p Wahrscheinlichkeit für Gewinn beim Ruin-Problem

$p_{j,k}$ Wahrscheinlichkeit, daß einem ankommenden k-Ruf der Warteplatz j zugewiesen wird (Zusatz 7)

$P(\zeta_k,\leqq k;t)$ Wahrscheinlichkeit, daß das Bündel zum Zeitpunkt t belegt ist und daß ζ_k Rufe der Prioritätsklassen $1,2,\ldots k$ warten

$p(\zeta_k,\leqq k)$ zugehörige stationäre Wahrscheinlichkeit

$P_x(t)$ Wahrscheinlichkeit, daß zum Zeitpunkt t insgesamt x Rufe beliebiger Prioritätsklassen im System sind

p_x zugehörige stationäre Wahrscheinlichkeit

Q_j Wahrscheinlichkeit, daß ein k-Ruf von Warteplatz j aus erfolgreich ist (Zusätze 3,4)

q Zahl der Verkehrsquellen (nur in der Einleitung)

q Wahrscheinlichkeit für Verlust beim Ruin-Problem (ab Kapitel 5)

s Zahl der Warteplätze im Wartespeicher

σ bei der Laplace-Transformation Variable im Bildraum (oder Oberbereich), zugeordnet zur Variablen u im Orginalraum (oder Unterbereich)

σ_{wk} Varianz der Wartezeiten der wartenden k-Rufe

T_j mittlere Zahl der Ausspielungen beim Ruin-Problem

t Zeit (mit festem Nullpunkt)

τ Zeit (mit verschiebbarem Nullpunkt)

τ_w mittlere Wartezeit (Zusätze 1,2,3,4,5,6,7)

u normierte Zeit; die Zeiteinheit ist der mittlere Abstand der Belegungsenden im Bündel mit n belegten Leitungen

W Wartewahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit für erfolgreiches Warten) (Zusätze 1,3,4,7)

$W(>\tau)$ Wahrscheinlichkeit für Überschreiten einer Wartedauer τ, bezogen auf die wartenden Rufe (Zusätze 1,3,4)

$w(\tau)$ zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte

x Zahl der Rufe beliebiger Prioritätsklassen im System

$y(x)$ Abkürzung einer Umformung von $\omega_k(\sigma)$

$z=\zeta_K$ Zahl wartender Rufe beliebiger Prioritätsklassen

ζ_k Zahl der Rufe der Prioritätsklassen $1,2,\ldots k$, die vor dem belegten Leitungsbündel warten

2. Zusätzliche Kennzeichen

1) Index k	bezogen auf k-Rufe
2) ($\leqq$k) nachgestellt	bezogen auf Rufe der Prioritätsklassen $1,2,\ldots k$
($<$k) nachgestellt	bezogen auf Rufe der Prioritätsklassen $1,2,\ldots k-1$
3) Apostroph '	bezogen auf das Schicksal im Ankunftszeitpunkt: sofortiges Abweisen oder Wartebeginn
4) " (zweigestrichen)	bezogen auf verdrängte Rufe
5) * hochgestellt	bezogen auf alle Rufe
6) ** hochgestellt	bezogen auf alle nicht abgewiesenen Rufe
7) (i) hochgestellt	bei inverser Reihenfolge

1. Einleitung

1.1 Betriebsarten von Vermittlungssystemen

Die Wählvermittlungssysteme der Fernsprech- und Fernschreibtechnik können nach der Betriebsabwicklung in Verlustsysteme, Wartesysteme und Kombinationen aus beiden Betriebsarten eingeteilt werden.

In Verlustsystemen erhält der anrufende Teilnehmer das Besetztzeichen, sobald im Zuge des Verbindungsaufbaus kein erreichbarer nachfolgender Leitungsabschnitt frei ist. Der Versuch, eine Verbindung herzustellen, wird dann abgebrochen. Das gleiche gilt auch für Schaltglieder der Vermittlungstechnik, die ihrerseits mit einer oder mit mehreren zentralisierten Baugruppen der Steuerung zusammenarbeiten müssen und nicht sofort eine solche Baugruppe erreichen.

Wenn in einem Verlustsystem ein Versuch, eine Verbindung herzustellen, abgebrochen werden mußte, dann muß der Teilnehmer zu einem späteren Zeitpunkt erneut versuchen, ob die Verbindung hergestellt werden kann. In Wartesystemen dagegen kann ein Anruf, der nicht sofort von einer Koppelanordnung auf eine weiterführende freie Leitung durchgeschaltet werden kann, auf Abfertigung warten. Wieviele Rufe gleichzeitig warten können, richtet sich nach der technisch verfügbaren Anzahl von Warteplätzen.

Die Abfertigung von Rufen, die am Eingang einer Koppelanordnung auf Durchschaltung warten, kann nach vielen verschiedenartigen Disziplinen geregelt werden. Solche Disziplinen sind z.B., daß die Reihenfolge der Abfertigung mit der Reihenfolge des Eintreffens der Rufe übereinstimmt, oder daß die Abfertigung nach vorgegebenen Prioritäten verschiedener Klassen von Rufen erfolgt. Es kommt auch in Frage, daß Rufe niederer Priorität von Rufen höherer Priorität von ihren Warteplätzen verdrängt werden. Schließlich wäre es auch denkbar, Prioritäten einzuführen, die von der bereits verbrachten Wartezeit abhängen.

Wichtige Kriterien für die Güte der Verkehrsabwicklung in Vermittlungssystemen sind:

1. die Wartewahrscheinlichkeit als die Wahrscheinlichkeit, daß ein eintreffender Ruf nicht sofort eine freie Leitung findet und daß er deshalb auf einen Warteplatz gelangt;
2. die Verlustwahrscheinlichkeit als die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf weder sofort noch später eine Leitung belegen kann;
3. die mittlere Wartezeit als die mittlere Zeit, die ein Ruf, der warten muß, im Wartespeicher verbringt;
4. die Wartezeitverteilung als die Wahrscheinlichkeit für Überschreiten einer bestimmten Wartezeit.

Jeweils, wo es nötig ist, werden diese Werte für jede einzelne Klasse von Rufen angegeben.

Für die Berechnung dieser Verkehrsgrößen als Funktion des Verkehrs, der Betriebsweise und der Struktur der betrachteten Koppelanordnung ist das mathematische Modell wichtig, das für den Anrufprozeß zugrunde gelegt wird. Ebenso wichtig ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Belegungsdauern.

a) Anrufprozeß

Eine häufig verwendete Annahme für das Eintreffen der Rufe ist ein POISSON-Prozeß. Die zeitlichen Abstände zwischen eintreffenden Rufen gehorchen dann einer negativ exponentiellen Verteilung. Die Anrufe kommen aus q Verkehrsquellen zur Koppelanordnung. Der POISSON-Prozeß entspricht dem Fall einer unbegrenzt großen Zahl von Verkehrsquellen: $q \to \infty$. Er wird angewendet, wenn die Zahl der Quellen sehr viel größer ist als die Zahl abgehender Leitungen n.

b) Belegungsdauerverteilung

Die Belegungsdauern können konstant sein. Sie können auch z.B. negativ exponentiell um den Mittelwert verteilt sein. Für verschiedene Klassen von Rufen können die Belegungsdauerverteilungen verschieden sein.

Negativ exponentielle Verteilung der Belegungsdauern und POISSON-Rufprozeß bilden zusammen den "Zufallsverkehr 1. Art".

c) Vollkommene Erreichbarkeit

Es wird stets der Fall vollkommener Erreichbarkeit betrachtet; d.h. jeder Anruf kann in jedem Zustand des Systems - bei jedem Augenblicksmuster von Belegungen - alle n Leitungen auf frei oder besetzt absuchen. Der Fall unvollkommener Erreichbarkeit, bei dem die Anrufe in verschiedenen Eingangsgruppen der Koppelanordnung eintreffen und jeweils nur eine beschränkte Anzahl aus n Leitungen - abhängig oder unabhängig vom Zustand des Systems - absuchen können, wird hier nicht betrachtet.

d) Wartespeicher

Im reinen Wartesystem wartet jeder Ruf, der nicht sofort durchgeschaltet werden kann. Während des Wartens belegt der Ruf seinen Eingang, oder er wird auf einen Warteplatz gestellt, von denen immer genügend viele vorhanden sind.

Andererseits ist die Speicherkapazität in der Praxis stets begrenzt. Die Zahl der Warteplätze s ist beschränkt. Dann werden bei voll belegtem Wartespeicher eintreffende Rufe abgewiesen. Der anrufende Teilnehmer erhält das Besetztzeichen, der Ruf wird nicht abgefertigt. Man bezeichnet diese Betriebsart als kombiniertes Warte-Verlust-System oder als Wartesystem mit beschränktem Wartespeicher [28].

Eine Übersicht über die drei wichtigsten Betriebsarten für Vermittlungssysteme ohne Prioritäten gibt das folgende Bild 1.1 (Seite 14); außerdem sind sechs mögliche Betriebsweisen mit Prioritäten aufgeführt, die im folgenden Abschnitt e) erläutert werden.

e) Prioritäten

Man möchte gewissen Rufen einen Vorrang vor anderen Rufen zuerkennen, um die Wartezeiten dieser Rufe zu verringern. Kleine Wartezeiten werden gefordert, wenn Wert und Dringlichkeit der von außen kommenden Rufe sehr groß sind. Kleine Wartezeiten werden für bestimmte Rufe auch dann verlangt, wenn es in einem System, das in Baugruppen aufgeteilt ist, unerwünscht ist, daß ein Ruf eine hochwertige Baugruppe durch Warten auf eine nächste Baugruppe untätig belegt. Deshalb führt man Prioritäten ein. Die Rufe werden in Prioritätsklassen eingestuft.

Ohne Prioritäten müßte das System so ausgelegt werden, daß für alle Rufe die Wartezeiten nur mit genügend kleiner Wahrscheinlichkeit eine gegebene Zeitschranke überschreiten. Durch Prioritäten wird das System an die speziellen Anforderungen angepaßt.

Solange noch eine erreichbare Leitung frei ist, wird sie von einem neu ankommenden Ruf sogleich belegt. Die Priorität des Rufs wird nicht beachtet. Ist keine erreichbare Leitung mehr frei, dann muß ein ankommender Ruf warten. Er wird nach Maßgabe seiner Priorität abgefertigt. Es bieten sich verschiedene Möglichkeiten an, wie stark die Prioritäten wirken sollen.

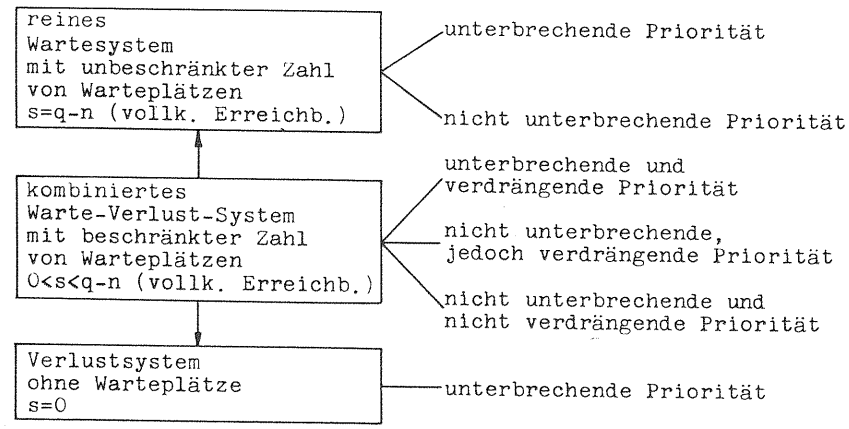

Bild 1.1 Übersicht über die wichtigsten Betriebsarten für Vermittlungssysteme

Betrachten wir zuerst ein Wartesystem mit unbeschränkt vielen Warteplätzen. Rufe höherer Priorität reihen sich in der Warteschlange vor Rufen von geringerer Priorität ein. Rufe, die bereits eine Leitung belegt haben, werden auch dann nicht unterbrochen, wenn neu ankommende Rufe höherer Priorität warten müssen: nicht unterbrechende Priorität (non-preemptive priority) [2,10,3,5,8,13,31,s.a.32,4,28,33].

Betont man die Wichtigkeit der Rufe höherer Priorität noch mehr, dann kann eine der bestehenden Belegungen geringerer Priorität unterbrochen werden, wenn ein Ruf höherer Priorität eintrifft. Aus den n Belegungen im Leitungsbündel wird dann diejenige von geringster Priorität ausgesucht. Sie wird unterbrochen und wird auf einen Warteplatz zurückgestellt; der neue Ruf belegt die dadurch frei gewordene Leitung. Diese Betriebsart heißt unterbrechende Priorität (preemptive priority) [4,28].

Bei Wartesystemen sind diese beiden Betriebsarten in Bild 1.1 (Seite 14) angegeben.

Betrachten wir nun ein Warte-Verlust-System mit beschränkter Zahl von Warteplätzen. Ist der Wartespeicher voll belegt, dann werden die Rufe von geringster Priorität unter den wartenden Rufen zunächst auf den letzten Warteplätzen stehen. Die Regel, daß sich Rufe höherer Priorität im Wartespeicher vor Rufen von geringerer Priorität einreihen, wird stets durchgeführt. Reiht sich ein neuer Ruf ein, dann werden alle bereits wartenden Rufe, die geringere Priorität haben, um einen Warteplatz zurückgeschoben. Ein Ruf, der bereits auf dem letzten Warteplatz stand, wird aus dem Wartespeicher verdrängt. Diese Betriebsart soll deshalb als verdrängende Priorität bezeichnet werden.

Soll die Wirkung der Prioritäten geringer sein, dann werden, wenn der Wartespeicher voll belegt ist, alle Rufe, ohne Ansehen ihrer Priorität, als Verlustrufe abgewiesen. Diese Betriebsart heißt dann nicht verdrängende Priorität.

Im Warte-Verlust-System beeinflußt die Priorität die Abfertigung am stärksten bei unterbrechender und verdrängender Priorität, weniger stark bei nicht unterbrechender, jedoch verdrängender Priorität, und am wenigsten bei nicht unterbrechender und nicht verdrängender Priorität. Bei kombinierten Warte-Verlust-Systemen sind diese drei Betriebsarten in Bild 1.1 auf Seite 14 angegeben.

Falls nicht Leitungen für Rufe höherer Priorität reserviert werden, ist im Verlustsystem nur unterbrechende Priorität sinnvoll.

f) Abfertigungsreihenfolge

Welcher unter den wartenden Rufen kommt zuerst daran, eine soeben frei gewordene Leitung zu belegen? Zunächst wird auf die Priorität geachtet, dann auf die Abfertigungsreihenfolge. Gebräuchlich ist die Annahme, daß die wartenden Rufe, die der gleichen Prioritätsklasse angehören, in der Reihenfolge ihrer Ankunft abgefertigt werden. Die Reihenfolge nach dem zeitlichen Eintreffen oder "Ankunftsreihenfolge" erscheint gerecht. Sie heißt auch zeitlich geordnete Abfertigung, natürliche Abfertigungsreihenfolge, order of arrival service, "first come, first served", strict queueing [20,28,40]. Bei Ankunftsreihenfolge muß genau geordnet werden; der technische Aufwand ist groß, weil die Ankunftszeiten oder die Positionsnummern der wartenden Rufe gespeichert, abgefragt und ausgewertet werden müssen.

Oft wird der Wartespeicher, beginnend bei einer zufälligen Ausgangsstellung, zyklisch abgesucht. Die Wartezeittheorie behandelt auch diese zufällige Reihenfolge. Sie heißt auch ungeregelte Abfertigung oder service at random [20,28,40]. Unter den wartenden Rufen der höchsten Priorität im Wartespeicher wird gewissermaßen durch Würfeln derjenige ermittelt, der die soeben frei gewordene Leitung belegen darf.

Der Ankunftsreihenfolge steht als anderes Extrem die inverse Reihenfolge gegenüber. Unter den wartenden Rufen einer Prioritätsklasse wird der zuletzt gekommene bevorzugt; darum heißt die inverse Reihenfolge auch "last come, first served" [28,40]. Sie grenzt mit der Ankunftsreihenfolge die denkbaren Reihenfolgen von beiden Seiten ein. Die Abfertigungsreihenfolge innerhalb der wartenden Rufe jeder einzelnen Prioritätsklasse beeinflußt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartezeiten. Die Streuung der Wartezeiten wird bei inverser Reihenfolge besonders groß. Es kommt einerseits oft zu ganz kleinen Wartezeiten. Andererseits müssen Rufe, die schon lange warten, häufig noch weiterhin warten.

Für jede Kombination von Anrufprozeß und Belegungsdauerverteilung ist die Fragestellung bei den verschiedenen Betriebsarten dieselbe; jeweils sollen die auf Seite 12 angegebenen Verkehrsgrößen, welche die Güte der Verkehrsabwicklung charakterisieren, ermittelt werden.

In der vorliegenden Arbeit wurden erstmalig für die Betriebsart "kombiniertes Warte-Verlust-System mit Prioritäten" die kennzeichnenden Verkehrsgrößen (vgl. Seite 12) berechnet. Außerdem wurde der Einfluß der Abfertigungsreihenfolge durch die Untersuchung der inversen Reihenfolge aufgezeigt.

1.2 Die Aufgabenstellung im einzelnen

Diese Arbeit untersucht ein kombiniertes Warte-Verlust-System und als Sonderfall ein reines Wartesystem mit folgenden Eigenschaften:

a) POISSON-Anrufprozeß;
b) negativ exponentielle Verteilung der Belegungsdauern;
c) vollkommene Erreichbarkeit von $n \geq 1$ Leitungen;
d) Wartesystem oder Warte-Verlust-System;
e) nicht unterbrechende Priorität im Wartesystem oder nicht unterbrechende, jedoch verdrängende Priorität im Warte-Verlust-System; endlich viele Prioritätsklassen mit beliebigen vorgegebenen Anteilen der Rufe;
f) Ankunftsreihenfolge oder inverse Reihenfolge.

Im folgenden werden diese Eigenschaften noch erläutert.

Prioritäten

Weil nicht alle Rufe gleichermaßen dringend sind, werden die Rufe in die Prioritätsklassen 1,2,3,...k,...K eingestuft. Rufe höchster Dringlichkeit gehören zur ersten Prioritätsklasse; mit wachsendem k nimmt der Vorrang ab. Rufe höherer Priorität reihen sich in der Warteschlange vor Rufen niedrigerer Priorität ein.

Belegungsdauerverteilung

Alle Rufe sollen die gleiche negativ exponentielle Verteilung der Belegungsdauern mit der einheitlichen mittleren Belegungsdauer h haben. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $\frac{1}{h}$ für das

Enden einer bestimmten Belegung ist dann unabhängig davon, wie lange sie schon andauert, stets gleich groß. Die mittlere Belegungsdauer h wählen wir für alle folgenden Betrachtungen als Zeiteinheit. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Enden einer bestehenden Belegung ist dann

$$\varepsilon = \frac{1}{h} = 1 \qquad (1.1)$$

im Maßstab der auf h normierten Zeit. (Um die Herleitung klar zu gestalten, wird die Endewahrscheinlichkeitsdichte ε in den Gleichungen zunächst angeschrieben. Die in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen werden in einer Liste auf Seite 8 aufgeführt.)

Anrufprozeß

In der Zeiteinheit treffen im Mittel A_k Rufe der Prioritätsklasse k ein. A_k ist das Angebot in der Prioritätsklasse k. Wird nach den Rufen dieser Priorität und dringenderen Rufen gefragt, dann ist das Angebot (in der von H. STÖRMER eingeführten Schreibweise [31])

$$A(\leq k) = A_1 + A_2 + \ldots + A_k \qquad (1.2)$$

Rufe der Prioritätsklasse k werden von nun an nach dem Vorbild von H. KESTEN und J.T. RUNNENBURG k-Rufe genannt [13].

Die Rufabstände sind für jede Prioritätsklasse negativ exponentiell verteilt um den Erwartungswert $1/A_k$. Die Wahrscheinlichkeitsdichte A_k für das Eintreffen eines k-Rufs soll unabhängig davon sein, wann die vorangehenden Rufe angekommen sind, und auch unabhängig davon, wieviele Rufe im System vorhanden sind. Das ist dann erfüllt, wenn der Anteil der tätigen Verkehrsquellen innerhalb aller Quellen immer verschwindend klein ist. Es wird also vorausgesetzt, daß die Anrufdichte für jede Prioritätsklasse konstant ist.

Der zeitliche Abstand von Ruf zu Ruf, gleichgültig, welche Priorität die Rufe besitzen, ist damit ebenfalls negativ exponentiell verteilt um den Erwartungswert des Rufabstands $\frac{1}{A}$. Dabei ist A die mittlere Zahl von Rufen während einer mittleren Belegungsdauer.

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots + A_K = A(\leq K) \qquad (1.3)$$

Die Größe A wird Gesamtangebot genannt.

Zusammenfassend ergibt sich das folgende Schema (Bild 1.2).

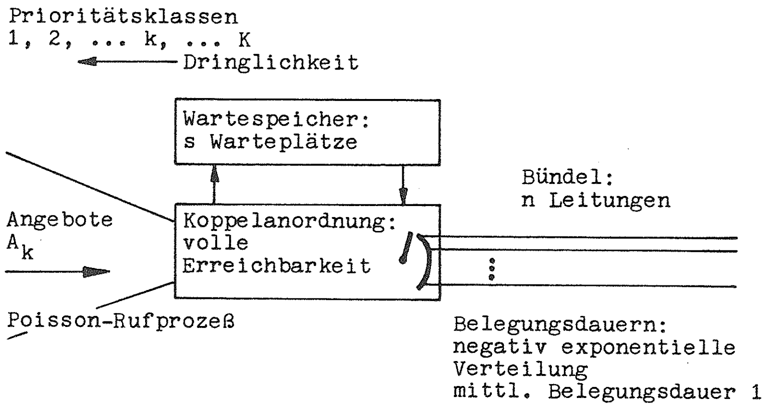

Bild 1.2 Kombiniertes Warte-Verlust-System mit Prioritäten

Das kombinierte Warte-Verlust-System wird behandelt, weil die Speicherkapazität in der Praxis stets begrenzt ist. In der Theorie umfaßt das kombinierte Warte-Verlust-System zugleich die beiden Sonderfälle, das reine Wartesystem ($s \to \infty$) und das Verlustsystem (s=0).

"Lost calls cleared", keine Verzichte

Rufe, die abgewiesen oder verdrängt worden sind, sind Verlustrufe. Beide Arten von Verlustrufen "verschwinden". Sie verlassen das System und haben keinen Einfluß auf den Rufprozeß ("lost calls cleared" [28]). Es gibt in der Theorie keine Anrufwiederholungen. Tatsächlich auftretende Anrufwiederholungen sollen nur so erfolgen, daß im Anrufprozeß keine Abhängigkeit zwischen den Rufabständen erkennbar ist.

Jeder Ruf wartet so lange, bis er eine Leitung belegen darf oder bis er von einem ankommenden Ruf höherer Priorität verdrängt wird. Das Warten ist an keine Zeitbedingung geknüpft; auch bei langen Wartezeiten kommt es nie zu Verzichten. [28]

Die Untersuchungen sind für drei Fälle von zunehmendem Interesse:

a) Für Fernschreibsondernetze, bei denen Telegramme verschiedener Dringlichkeit vermittelt werden. Wenn auf der Teilstrecke bis zur nächsten Vermittlungsstelle eine Leitung frei ist, dann wird das Telegramm gesendet. Andernfalls wird es gespeichert und wartet, bis eine Leitung frei wird. Luftfahrtgesellschaften, Flugsicherungsbehörden, Wetterdienste und andere Stellen betreiben solche Fernschreibsondernetze mit Speichervermittlungen.

b) Für Wählvermittlungen, bei denen für die einzelnen Koppelanordnungen die Durchschaltung vom Bereitstellen einer oder mehrerer zentralisierter Steuereinheiten abhängt. Bis zum Bereitstellen dieser Steuereinheiten können Wartezeiten auftreten.

c) Für Datenverarbeitungsanlagen, die mehreren Benutzern gleichzeitig zur Verfügung stehen. Auch hier können bis zur Abfrage eines Benutzers oder bis zum Bereitstellen einer bestimmten Funktionseinheit der Datenverarbeitungsanlage, z.B. des Rechenwerks, Wartezeiten auftreten. Dabei ist auch das Einführen von Prioritäten für verschiedene Benutzerklassen oder für verschiedenartige Programme allgemein üblich, z.B. für Echtzeitprogramme, die Vorrang vor anderen Aufgaben haben.

Die umfangreiche Literatur über derartige und ähnliche Wartesysteme stammt oft aus anderen Arbeitsbereichen als der Vermittlungstechnik. Deshalb ist dort mit Ruf, Nachricht, Meldung, Transaction, Anforderung oder Einheit jeweils das gleiche gemeint; ebenso gelten die Worte belegen, abfertigen und bedienen als gleichbedeutend. Die Bezeichnungen Kanal, Einrichtung, Funktionseinheit, Abfertigungsplatz, Bedienungsstation oder Schalter können in den Veröffentlichungen das Wort Leitung ersetzen. Statt Prioritätsklasse sind auch die Begriffe Dringlichkeitsstufe und Rang gebräuchlich.

Man geht immer vom gleichen theoretischen Modell aus, um die mannigfachen tatsächlichen Gegebenheiten zu studieren. Im folgenden werden die Begriffe und Bezeichnungen der Vermittlungstechnik benützt. Dies schränkt die Allgemeinheit nicht ein.

Im System kommen Rufe an. Sie belegen eine freie Leitung des Bündels oder einen freien Warteplatz des Speichers. Hat ein Ruf eine Leitung belegt, wird er als Belegung bezeichnet.

Es ist üblich, daß der <u>höheren</u> Priorität der <u>kleinere</u> Prioritätsklassenindex k , der <u>geringeren</u> Priorität der <u>größere</u> Prioritätsklassenindex zugeordnet ist [8,28]. (Mit den Worten höher und geringer soll Priorität als Qualitätsmerkmal gekennzeichnet werden, dem die Prioritätsklasse als Zahl gegenübersteht. Dafür werden die Worte kleiner und größer verwendet.)

<u>Gesuchte Größen</u>

Gegeben sind die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Belegungsdauern, der Anrufprozeß mit den K Teilangeboten A_k, die Koppelanordnung und die Abfertigungsdisziplin. Daraus sollen die interessierenden Größen für Wartesysteme berechnet werden:

1) die Wartewahrscheinlichkeit W als die Wahrscheinlichkeit, daß ein ankommender Ruf warten muß;
2) die mittlere Wartedauer τ_w als der Erwartungswert der zufälligen Wartezeiten der Rufe, die überhaupt warten müssen, bezogen auf die mittlere Belegungsdauer;
3) die Mindestwertverteilungsfunktion $W(>\tau)$ als die Wahrscheinlichkeit, daß ein wartender Ruf länger als das τ-fache der mittleren Belegungsdauer warten muß (Wahrscheinlichkeit $W(>\tau)$ für Überschreiten einer Wartedauer τ).

Um das Verkehrsverhalten eines <u>kombinierten Warte-Verlust-Systems</u> zu beschrieben, sind weitere Größen erforderlich, die in den folgenden Kapiteln definiert werden, sobald sie während der Untersuchung auftreten:

1) die Wahrscheinlichkeiten für Wartebeginn; für sofortiges Abweisen als Verlustruf; für nachträgliches Verdrängen; für erfolgreiches Warten;
2) die mittleren Wartezeiten aller Rufe; der Rufe, die zu warten beginnen; der erfolgreich wartenden Rufe; der nachträglich verdrängten Rufe;

3) die Mindestwertverteilungsfunktionen für die Wartezeiten aller wartenden Rufe; der erfolgreich wartenden Rufe; der nachträglich verdrängten Rufe.

2. <u>Zustandswahrscheinlichkeiten</u>

2.1 <u>Zufälliger Zustand des Systems</u>

Rufe der verschiedenen Prioritätsklassen treffen zufällig im System ein. Die Belegungen enden zu zufälligen Zeitpunkten. Die Zahl bestehender Belegungen und die Zahl wartender Rufe der K Prioritätsklassen sind Zufallsvariable. Für jede einzelne Prioritätsklasse k gibt eine Zufallsvariable die Zahl der k-Belegungen im Bündel und eine zweite Zufallsvariable die Zahl der wartenden k-Rufe im Wartespeicher an. Diese 2·K Zufallsvariablen beschreiben den augenblicklichen zufälligen <u>Zustand</u> des Systems. Man spricht vom augenblicklichen <u>Belegungsmuster</u> im System.

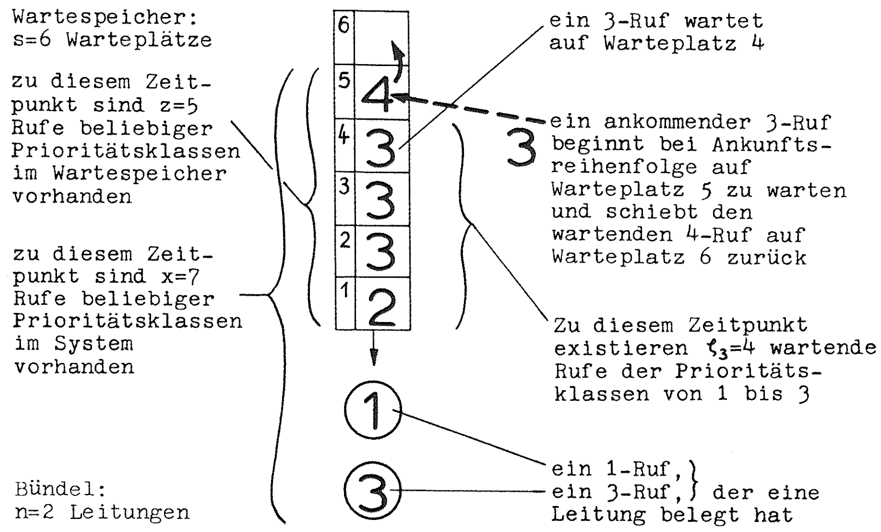

Bild 2.1 Ein Beispiel für einen augenblicklichen zufälligen Zustand

Zunächst werde die Einteilung in Prioritätsklassen nicht beachtet. Der Zustand des Systems ist dann zu jedem Zeitpunkt durch die Gesamtzahl x von Rufen gegeben, die im System vorhanden sind. In der Zahl x sind sowohl die Rufe, die eine Leitung belegt haben, als auch die Rufe, die auf einem Warteplatz warten, enthalten.

Nun soll der Einfluß der Prioritätsklassen ermittelt werden. Wenn ein k-Ruf im System eintrifft und alle n Leitungen besetzt vorfindet, muß er warten. Er reiht sich so in die Warteschlange ein, daß alle Rufe von geringerer Priorität (Prioritätsklassenindizes k+1, k+2, ... K) hinter ihm stehen. Alle Rufe von höherer Priorität (Prioritätsklassenindizes 1,2,... k-1) stehen vor ihm. Welchen Platz er unter den wartenden Rufen gleicher Priorität (Prioritätsklassenindex k) zugewiesen erhält, ist noch nicht festgelegt. Im Augenblickszustand nach Bild 2.1 (Seite 22) beginnt der ankommende 3-Ruf auf Warteplatz 5 zu warten *). Die Zahl ξ_3 der wartenden Rufe der Prioritätsklassen 1 bis 3 steigt um 1; der Warteplatz braucht noch nicht festgelegt zu werden. Der zufällige Zustand im Wartespeicher des Systems ist durch die zufällige Zahl ξ_k der Rufe der Prioritätsklassen von 1 bis k bestimmt ($1 \leq k \leq K$). Bei dem im Bild 2.1 dargestellten Beispiel für einen augenblicklichen Zustand ist $\xi_1=0$, $\xi_2=1$, $\xi_3=4$ und $\xi_4=5$.

Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit $P(\xi_k, \leq k; t)$, daß zum Zeitpunkt t das Bündel blockiert ist und daß ξ_k Rufe der Prioritätsklassen 1,2,...k bereits warten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zum Zeitpunkt t kein Ruf der Prioritätsklassen 1,2,...k wartet und daß zugleich n Belegungen im Bündel durchgeschaltet sind, wird mit $P(0, \leq k; t)$ bezeichnet.

---

*) Damit erreicht man eine Abfertigung in Ankunftsreihenfolge, wenn jeweils der gerade auf Warteplatz 1 stehende Ruf eine soeben frei gewordene Leitung belegen darf. Für die Zustandswahrscheinlichkeiten würde es auch keine Rolle spielen, wenn derselbe 3-Ruf auf Warteplatz 2, 3, 4 oder 5 eingereiht würde; dagegen werden andere Verkehrsgrößen von der Abfertigungsreihenfolge beeinflußt.

2.2 Die Gleichungen für die zeitabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeit $P(\xi_k, \leq k; t+\Delta t)$, daß zur Zeit $t+\Delta t$ gerade ξ_k Rufe mit Prioritätsklassen $\leq k$ vor dem belegten Bündel warten, ergibt sich aus den Zuständen, in denen sich das System zum vorhergehenden Zeitpunkt t befand, und den Änderungen im Abschnitt Δt, durch welche diese Zustände zur Zeit t in den betrachteten Zustand ξ_k zur Zeit $t+\Delta t$ übergehen.

Jedem Ruf wird bei der Ankunft ein Warteplatz zugewiesen; er kann auch zwischen andere wartende Rufe in die Warteschlange eingereiht werden. Wenn eine Belegung endet, dann soll stets der auf dem Warteplatz 1 wartende Ruf sogleich die frei gewordene Leitung belegen. Dann rücken alle anderen wartenden Rufe ohne jedes Umordnen je um einen Warteplatz vor.

Allen Rufen aus K verschiedenen Prioritätsklassen steht ein gemeinsamer Wartespeicher mit der beschränkten Zahl s von Warteplätzen zur Verfügung. Rufe, die warten müssen, reihen sich stets vor wartenden Rufen geringerer Priorität in die Warteschlange ein. Waren alle Warteplätze belegt, dann kann der auf dem Warteplatz s wartende Ruf aus dem Wartespeicher verdrängt werden. Dieser wartende Ruf der Klasse >k wird dann zum Verlustruf, obwohl er bereits begonnen hatte zu warten (Verlust durch nachträgliches Verdrängen).

Nur wenn alle Warteplätze durch Rufe von gleicher oder höherer Priorität besetzt sind, geht ein neu ankommender Ruf bei Ankunftsreihenfolge sofort verloren (Verlust durch sofortiges Abweisen).

Bei inverser Reihenfolge dagegen wird ein ankommender Ruf dann abgewiesen, wenn alle Warteplätze durch Rufe von höherer Priorität belegt sind. Ein Ruf der gleichen Priorität auf Warteplatz s wird nach Warten verdrängt und durch den neu eintreffenden Ruf ausgetauscht. Damit bleibt die Zahl wartender Rufe der Prioritätsklassen $\leq k$ unverändert.

a) Für $\xi_k=0$ im Zeitpunkt $t+\Delta t$ sind folgende Veränderungen im vorangehenden Zeitabschnitt Δt möglich:

1. Zum Zeitpunkt t hat kein Ruf der Prioritätsklassen $\leq k$ vor

dem voll belegten Bündel gewartet, und im Zeitintervall Δt ist weder ein Ruf gleicher oder höherer Priorität angekommen noch hat einer der n Rufe, welche die n Leitungen zum Zeitpunkt t belegen, geendet. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist mit $\varepsilon=1$ nach (1.1) (bis auf Glieder höherer Ordnung in Δt)

$$P(0,\leqq k;t)\cdot[\,1 - A(\leqq k)\cdot\Delta t\,]\cdot[\,1 - n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t\,]$$

oder

2. Zum Zeitpunkt t waren alle n Leitungen belegt, und zugleich warteten ein oder mehrere Rufe von geringerer Priorität als k (Prioritätsklassen >k) in der Warteschlange. Das sind jene Fälle, bei denen $\zeta_k=0$ Rufe der Prioritätsklassen $\leqq k$ zum Zeitpunkt t vor dem voll belegten Bündel warten [Wahrscheinlichkeit $P(0,\leqq k;t)$], aber mit Ausnahme des Falles, daß zum Zeitpunkt t insgesamt genau n Rufe im System vorhanden sind [Wahrscheinlichkeit $P_n(t)$]. Im letzteren Fall sind zwar alle n Leitungen belegt, aber kein Ruf wartet.

   Im Zeitintervall Δt endige eine der n Belegungen auf irgendeiner der n Leitungen; dann nimmt einer der wartenden Rufe von geringerer Priorität als k ihren Platz ein. Wahrscheinlichkeit:

$$[P(0,\leqq k;t) - P_n(t)]\cdot n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t$$

oder

3. Bereits zum Zeitpunkt t wartete gerade ein Ruf aus den Prioritätsklassen $\leqq k$ vor dem voll belegten Bündel und hat dann bei einem Ende im Zeitintervall Δt die freiwerdende Leitung sofort wieder belegt. Wahrscheinlichkeit:

$$P(1,\leqq k;t)\cdot n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t$$

oder

4. Das System befand sich zum Zeitpunkt t im Zustand n-1. Mit anderen Worten, es waren x=n-1 Rufe aus beliebigen Prioritätsklassen vorhanden, welche n-1 Leitungen belegten. Im Zeitintervall Δt fiel ein Ruf beliebiger Priorität ein, welcher die letzte noch freie Leitung belegte. Wahrscheinlichkeit:

$$P_{n-1}(t)\cdot A\cdot\Delta t$$

Die Gleichung für $\zeta_k=0$ ergibt sich aus der Summation der Wahrscheinlichkeiten aller Ausgangszustände zum Zeitpunkt t mit den zugehörigen Ereignissen im Zeitintervall Δt.

$$\begin{aligned} &P(0,\leqq k;t+\Delta t)\\ &\quad= P(0,\leqq k;t)\cdot[\,1 - A(\leqq k)\cdot\Delta t\,]\cdot[\,1 - n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t\,]\\ &\qquad+ [\,P(0,\leqq k;t) - P_n(t)\,]\cdot n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t\\ &\qquad+ P(1,\leqq k;t)\cdot n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t \quad + P_{n-1}(t)\cdot A\cdot\Delta t \end{aligned} \tag{2.1}$$

(Die Wahrscheinlichkeiten für mehr als eine Zustandsänderung im Zeitintervall Δt seien vernachlässigbar, weil Δt sehr klein angenommen wird.)

b) Zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ warten ζ_k Rufe der Prioritätsklassen $\leqq k$,

1. wenn zum Zeitpunkt t auch bereits ζ_k Rufe der Prioritätsklassen $\leqq k$ warteten und sich in Δt kein Ende einer der n Belegungen im Bündel und kein Ruf mit Prioritätsklassen $\leqq k$ ereignet,
2. wenn zum Zeitpunkt t gerade ζ_k-1 Rufe der Prioritätsklassen $\leqq k$ warteten und in Δt ein Ruf aus den Prioritätsklassen $\leqq k$ einfällt,
3. wenn zum Zeitpunkt t gerade ζ_k+1 Rufe der Prioritätsklassen $\leqq k$ warteten und in Δt eine der n bestehenden Belegungen endet.

Dabei wird angenommen, daß $1\leqq\zeta_k\leqq s-1$ ist, denn in diesem Bereich wird jeder neu ankommende Ruf aus den Prioritätsklassen $\leqq k$ in die Warteschlange eingereiht. Dieser neu eintreffende Ruf wird vor allen wartenden Rufen geringerer Priorität (Prioritätsklassen >k) in die Warteschlange eingereiht. Solche wartenden Rufe aus den Prioritätsklassen >k haben überhaupt keinen Einfluß auf die betrachtete Zustandsänderung, sie müssen notfalls den Wartespeicher verlassen (Verdrängung eines wartenden Rufes der Prioritätsklassen >k).

Unter diesen Annahmen ergibt sich für $1\leqq\zeta_k\leqq s-1$ als Zustandsgleichung:

$$P(\varsigma_k,\leqq k;t+\Delta t)$$
$$= P(\varsigma_k,\leqq k;t)\cdot[\,1 - A(\leqq k)\cdot\Delta t\,]\cdot[\,1 - n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t\,] \qquad (2.2)$$
$$+ P(\varsigma_k-1,\leqq k;t)\cdot A(\leqq k)\cdot\Delta t + P(\varsigma_k+1,\leqq k;t)\cdot n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t$$
$$\text{für } \varsigma_k=1,2,\ldots s-1$$

c) Für $\varsigma_k=s$ ist zu bedenken, daß bei s wartenden Rufen der Prioritätsklassen <k ein neu ankommender k-Ruf sogleich als Verlust abgewiesen wird. Wartet auf dem Warteplatz s ein k-Ruf, dann wird bei Ankunftsreihenfolge ein ankommender k-Ruf sofort abgewiesen. Bei inverser Reihenfolge wird ein ankommender k-Ruf gegen den auf Warteplatz s wartenden k-Ruf ausgetauscht. Ein eintreffender Ruf der Prioritätsklasse $\varkappa<k$ kann in beiden Abfertigungsreihenfolgen einen wartenden Ruf geringerer Priorität aus den Prioritätsklassen $\leqq k$ nachträglich aus dem Speicher verdrängen. Wenn kein solcher Ruf von geringerer Priorität (oder bei inverser Reihenfolge auch von gleicher Priorität) wartet, wird der neue Ruf sofort abgewiesen.

Der Zustand "s wartende Rufe aus den Prioritätsklassen $\leqq k$" kann also durch einen neuen Ruf aus diesen Prioritätsklassen nicht verändert werden. Deshalb lautet die Zustandsgleichung für $\varsigma_k=s$:

$$P(s,\leqq k;t+\Delta t) = P(s,\leqq k;t)\cdot(1 - n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t) + P(s-1,\leqq k;t)\cdot A(\leqq k)\cdot\Delta t \qquad (2.3)$$

d) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß n Leitungen belegt sind und eine beliebige Anzahl von Rufen $\varsigma_k\geqq 0$ wartet, ist die "Blockierungswahrscheinlichkeit" des Leitungsbündels. Die Blockierungswahrscheinlichkeit(time congestion) ist die Wahrscheinlichkeit für "den Zustand, bei dem der weitere Verbindungsaufbau gehemmt ist, weil eine einfallende Belegung nicht sofort vermittelt werden kann". Wir folgen der Bezeichnung von A.K. ERLANG und den Arbeiten schwedischer Verkehrstheoretiker und kennzeichnen die Blockierungswahrscheinlichkeit durch den Buchstaben E.

$$E(t) = \sum_{x=n}^{n+s} P_x(t) = \sum_{\varsigma_k=0}^{s} P(\varsigma_k,\leqq k;t) \qquad \text{für } k=1,2,\ldots K \qquad (2.4)$$

Mit dieser Bedingung wird die Wahrscheinlichkeit $P_x(t)$, daß zum Zeitpunkt t genau x Rufe beliebiger Priorität im System vorhanden sind, mit der Wahrscheinlichkeit $P(\varsigma_k,\leqq k;t)$ verknüpft, daß ς_k Rufe der Prioritätsklassen $\leqq k$ vor dem voll belegten Leitungsbündel warten.

Aus den Gleichungen (2.1, 2.2, 2.3) ergeben sich im Grenzübergang für immer kleinere Werte Δt Differentialgleichungen. Daraus können mit (2.4) die zeitabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten $P(\varsigma_k,\leqq k;t)$ bestimmt werden. Die einzige Voraussetzung ist, daß die Angebotswerte A_k und die mittlere Belegungsdauer zeitlich konstant sind. Wir wenden uns nun dem stationären Zustand zu, der für die Dimensionierung der betrachteten Systeme maßgebend ist.

2.3 <u>Stationäre Zustandswahrscheinlichkeiten</u>

Das System befinde sich im <u>stationären Zustand</u> (im "statistischen Gleichgewicht") [1]. Der Einfluß der Anfangsbedingungen ist verschwunden; die Übergänge zwischen den Zuständen gehen jedoch dauernd weiter. Die Ableitungen von $P_x(t)$ und $P(\varsigma_k,\leqq k;t)$ nach der Zeit verschwinden für den stationären Zustand. Damit erhält man Gleichungen für die zeitlich konstanten Wahrscheinlichkeiten p_x und $p(\varsigma_k,\leqq k)$ des eingeschwungenen Zustands. Diesen Gleichungen entspricht das <u>Zustandsdiagramm</u> mit den Übergangswahrscheinlichkeiten (Bild 2.2 Seite 29). Das Ereignis "x=n Rufe im System" ist ein Teilereignis von "ς_k=0 Rufe der Prioritätsklassen $\leqq k$ warten vor dem voll belegten Bündel", falls k<K ist. Das Ereignis "x=n Rufe im System" ist identisch mit dem Ereignis "ς_K=z=0 Rufe warten".

Aus dem Zustandsdiagramm (Bild 2.2 Seite 29) ist abzulesen, daß es genügt, 2 benachbarte Zustände zu betrachten. (Im nichtstationären Fall mußten jeweils 3 oder mehr benachbarte Zustände berücksichtigt werden.) Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen des statistischen Gleichgewichts, die sich mit den soeben angeführten Überlegungen aus (2.1, 2.2, 2.3) ergeben hatten, für das betrachtete Warte-Verlust-System:

$$A(\leqq k)\cdot p(\varsigma_k-1,\leqq k) = n\cdot p(\varsigma_k,\leqq k) \qquad \text{für } \varsigma_k=1,2,\ldots s \text{ und } k=1,2,\ldots K \qquad (2.5)$$

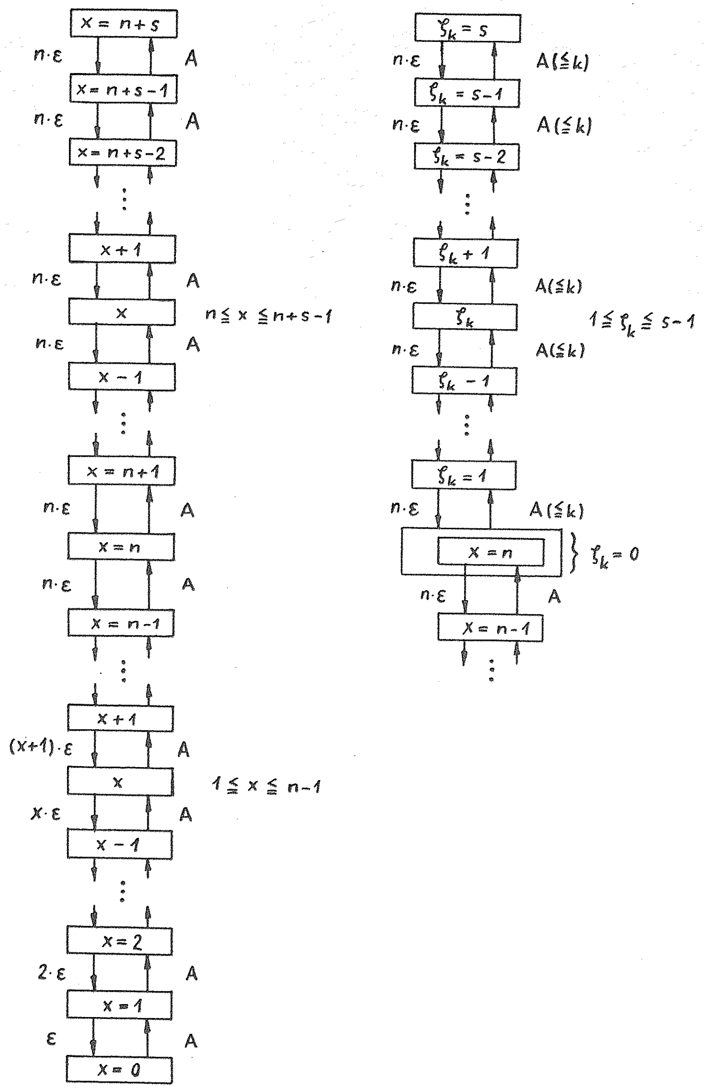

Bild 2.2 Zustandsdiagramm für die Gesamtzahl x von Rufen im System und die Zahl ξ_k von wartenden Rufen der Prioritätsklassen $\leqq$k mit den Übergangswahrscheinlichkeitsdichten durch ankommende Rufe $\uparrow$ und endende Belegungen $\downarrow$ im statistischen Gleichgewicht

Bei jedem der betrachteten Zustände sind alle n Leitungen belegt. Anders ausgedrückt, mindestens n Rufe beliebiger Prioritätsklassen sind im System vorhanden. Nach Gleichung (2.4) ist die Blockierungswahrscheinlichkeit

$$\sum_{\xi_k=0}^{s} p(\xi_k, \leqq k) = \sum_{x=n}^{n+s} p_x = E \qquad (2.6)$$

Die Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten $p(\xi_k, \leqq k)$ wird im Abschnitt 2.6 behandelt werden. Zunächst wird die Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten p_x ohne Berücksichtigung der Prioritäten durchgeführt.

2.4 Stationäre Wahrscheinlichkeiten der Gesamtzahl von Rufen

Beim Verdrängen wartender Rufe niedrigerer Priorität bleibt die Gesamtzahl x von Rufen beliebiger Priorität im System unverändert, weil dabei stets ein Ruf gegen einen anderen ausgetauscht wird. Deshalb gibt es, wenn man ausschließlich die Gesamtzahl x betrachtet, keinen Unterschied zwischen den Betriebsarten "ohne Prioritäten" und "mit Prioritäten". Die Wahrscheinlichkeiten p_x für die Gesamtzahl x von Rufen im System mit Prioritäten im stationären Zustand können daher ermittelt werden, wenn man das System ohne Prioritäten betrachtet.

Die Blockierungswahrscheinlichkeit E ist die Wahrscheinlichkeit der Zustände, daß ein eintreffender Ruf warten muß oder daß er abgewiesen wird. Bei der Betriebsart "nicht unterbrechende Prioritäten" geschieht das, falls alle n Leitungen von beliebigen Rufen belegt sind. Das gleiche gilt für die Betriebsart "ohne Prioritäten". Darum ergibt sich für die beiden Fälle "mit nicht unterbrechenden Prioritäten" und "ohne Prioritäten" die gleiche Blockierungswahrscheinlichkeit.

In diesem Abschnitt werden von H. STÖRMER und von J.R.W. SMITH und J.L. SMITH für die Betriebsart "ohne Prioritäten" hergeleitete Ergebnisse [30,29] benutzt, um die Zustandswahrscheinlichkeiten p_x und die Blockierungswahrscheinlichkeit E für das hier untersuchte System mit Prioritäten angeben zu können. Dabei werden die Beziehungen zwischen Wartesystem, Warte-

Verlust-System und Verlustsystem dargestellt.

Aus dem Zustandsdiagramm (Bild 2.2 Seite 29) liest man ab:

$$A \cdot p_{x-1} = x \cdot p_x \qquad \text{für } x=1,2,\ldots n \qquad (2.7)$$

$$A \cdot p_{x-1} = n \cdot p_x \qquad \text{für } x=n,n+1,\ldots n+s \qquad (2.8)$$

$$\sum_{x=0}^{n+s} p_x = 1 \qquad (2.9)$$

Das auf eine Leitung bezogene Gesamtangebot an das System ist das spezifische Angebot

$$\alpha = \frac{A}{n} = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_k + \ldots + A_K}{n} \qquad (2.10)$$

Die Lösung lautet für die Zustände ohne wartende Rufe

$$p_x = \frac{\frac{A^x}{x!}}{\sum_{\xi=0}^{n} \frac{A^\xi}{\xi!}} \cdot (1-E_s) \qquad \text{für } x=0,1,2,\ldots n \qquad (2.11)$$

und für voll belegtes Bündel und z=x-n wartende Rufe

$$p_x = p_{n+z} = \alpha^{x-n} \cdot E_{1,n}(A) \cdot (1-E_s) \qquad (2.12)$$
$$\text{für } x=n,n+1,\ldots n+s$$

E_s ist die Speicherbelegungswahrscheinlichkeit: "es wartet mindestens ein Ruf"

$$E_s = \sum_{x=n+1}^{n+s} p_x = \begin{cases} \dfrac{\alpha \cdot \frac{1-\alpha^s}{1-\alpha}}{\frac{1}{E_{1,n}(A)} + \alpha \cdot \frac{1-\alpha^s}{1-\alpha}} & \\ \dfrac{s}{\frac{1}{E_{1,n}(n)} + s} & \text{für } \alpha=1 \end{cases} \qquad (2.13)$$

mit der Verlustwahrscheinlichkeit nach der 1. Erlangschen Formel [9,1, u.a.]

$$E_{1,n}(A) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{\xi=0}^{n} \frac{A^\xi}{\xi!}} \qquad (2.14)$$

Zeitunabhängige Wahrscheinlichkeiten im kombinierten Warte-Verlust-System sind für jedes Angebot A erklärt, denn wie im reinen Verlustsystem wird stets ein stationärer Zustand erreicht. Die Zustandswahrscheinlichkeiten für das vollkommene

Bündel im Verlustsystem werden nur mit der Wahrscheinlichkeit $1-E_S$, daß kein Ruf im Speicher wartet, multipliziert, um zum kombinierten Warte-Verlust-System ohne Prioritäten überzugehen. (Das gleiche gilt nach A. LOTZE [17] für unbeschränkten Wartespeicher, aber endliche Quellenzahl.)

Im reinen Wartesystem ist die Zahl der Warteplätze unbegrenzt (Grenzübergang $s \to \infty$). Ein stationärer Zustand wird nur für $A < n$ erreicht. Ist das Angebot so groß, daß Sättigung [13] eintritt ($A \geq n$), dann wächst die Gesamtzahl der Rufe im System fortlaufend. Dann wartet sicher stets zumindestens ein Ruf ($E_s=1$), und es gibt keine zeitunabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten mehr ($p_x=0$).

2.5 Blockierungswahrscheinlichkeit

Die Blockierungswahrscheinlichkeit E ergibt sich aus (2.6) mit (2.12).

$$E = \sum_{x=n}^{n+s} p_x = \frac{1-\alpha^{s+1}}{1-\alpha} \cdot E_{1,n}(A) \cdot (1-E_s) \qquad (2.15)$$

A.K. ERLANG gab für die Blockierungswahrscheinlichkeit eines Verlustsystems an [9,1, u.a.]:

$$E = E_{1,n}(A) = \frac{\frac{A^n}{n!}}{\sum_{\xi=0}^{n} \frac{A^\xi}{\xi!}} \qquad (2.14)$$

H. STÖRMER [30] und J.R.W. SMITH und J.L. SMITH [29] leiteten die Blockierungswahrscheinlichkeit für ein kombiniertes Warte-Verlust-System her. Man setzt (2.13, 2.14) in (2.15) ein und erhält auch für Warte-Verlust-Systeme mit Prioritäten:

$$E = \frac{\frac{1-\alpha^{s+1}}{1-\alpha}}{\frac{1}{E_{1,n}(A)} + \alpha \cdot \frac{1-\alpha^s}{1-\alpha}} \qquad \text{für } s=0,1,2,\ldots \text{ endlich} \qquad (2.16)$$

Für den Sonderfall, daß das Gesamtangebot A der Leitungszahl n gleich ist, ergibt sich durch den Grenzübergang $\alpha \to 1$ in Gleichung (2.16):

$$E = \frac{s+1}{\frac{1}{E_{1,n}(n)} + s} \qquad \text{für } \alpha=1 \text{ und } s=0,1,2,\ldots \text{ endlich} \qquad (2.17)$$

A.K. ERLANG bestimmte auch die Blockierungswahrscheinlichkeit für ein Wartesystem. Man führt in (2.16) den Grenzübergang $s \to \infty$ durch und erhält:

$$E = E_{2,n}(A) = \frac{\frac{1}{1-\alpha}}{\frac{1}{E_{1,n}(A)} + \frac{\alpha}{1-\alpha}} = \frac{\frac{A^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-A}}{\sum_{\xi=0}^{n-1} \frac{A^\xi}{\xi!} + \frac{A^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-A}} \qquad \text{für } \alpha<1 \text{ und } s\to\infty \qquad (2.18)$$

$E_{2,n}(A)$ ist die Wartewahrscheinlichkeit nach der 2. Erlang-schen Formel [9,1,16,19,18,32, u.a.].

Bei einem Angebot $A \geq n$ muß stets gewartet werden. Das Bündel ist dauernd voll belegt.

$$E = 1 \qquad \text{für } \alpha \geq 1 \text{ und } s\to\infty \qquad (2.19)$$

2.6 Zustandswahrscheinlichkeiten für kombinierte Warte-Verlust-Systeme mit Prioritäten

Wie zuvor betrachten wir ein kombiniertes Warte-Verlust-System mit vollkommener Erreichbarkeit, aber berücksichtigen jetzt wieder die Einteilung der Rufe in Prioritätsklassen. Für die Zahl ξ_k bereits wartender Rufe von gleicher oder höherer Priorität als k ergeben sich im stationären Zustand die Wahrscheinlichkeiten $p(\xi_k, \leq k)$ aus den Gleichungen (2.5, 2.6, 2.16).

Das auf eine Leitung bezogene Teilangebot in der Prioritätsklasse k ist das spezifische Angebot der Prioritätsklasse k

$$\alpha_k = \frac{A_k}{n} \qquad (2.20)$$

entsprechend das spezifische Angebot der Prioritätsklassen 1 bis k

$$\alpha(\leq k) = \frac{A(\leq k)}{n} = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_k}{n} \qquad (2.21)$$

Die Potenzen von $\alpha(\leq k)$ werden vereinfacht bezeichnet

$$[\alpha(\leq k)]^j = \alpha(\leq k)^j \qquad (2.22)$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(\xi_k, \leq k)$ ergeben sich für die s+1 Zustände $\xi_k = 0,1,\ldots s$ als Lösung des Systems linearer

Gleichungen, das die s Gleichungen (2.5) und die eine Gleichung (2.6) umfaßt.

$$p(\xi_k, \leq k) = \alpha(\leq k)^{\xi_k} \cdot \frac{1-\alpha(\leq k)}{1-\alpha(\leq k)^{s+1}} \cdot E \qquad \begin{array}{l}\text{für } \xi_k = 0,1,\ldots s \\ \text{und } k = 1,2,\ldots K\end{array} \qquad (2.23)$$

In kombinierten Warte-Verlust-Systemen und in Verlustsystemen erreicht der Verkehr für <u>jeden</u> Wert des Angebots einen stationären Zustand, weil es wegen der endlichen Zahl von Warteplätzen zu Verlustrufen kommt.

Für den Sonderfall $A(\leq k)=n$ ergibt sich aus Gleichung (2.5), daß alle s+1 Zustände $\xi_k = 0,1,\ldots s$ gleichwahrscheinlich sind. Aus (2.5) und (2.6) erhält man dann

$$p(\xi_k, \leq k) = \frac{E}{s+1} \qquad \begin{array}{l}\text{für } \alpha(\leq k)=1 \\ \text{und } \xi_k = 0,1,2,\ldots s\end{array} \qquad (2.24)$$

Das gleiche Ergebnis liefert der in (2.23) ausgeführte Grenzübergang $\alpha(\leq k) \to 1$. Die Wahrscheinlichkeiten für die Zustände $\xi_k = 0,1,\ldots \left[\frac{s}{2}\right]$ sind bei $\alpha(\leq k)<1$ größer als für die Zustände $\left[\frac{s}{2}\right]+1,\ldots s$ und bei $\alpha(\leq k)>1$ kleiner; dazwischen liegt bei $\alpha(\leq k)=1$ die Gleichwahrscheinlichkeit aller s+1 Zustände.

Für die geringste Priorität (Prioritätsklasse k=K) spielt die Reihenfolge der wartenden Rufe in der Warteschlange und ihre Einteilung in verschiedene Prioritätsklassen für die Zahl ξ_K keine Rolle mehr. Insgesamt warten $z=\xi_K$ Rufe vor dem belegten Bündel. Die Gleichungen (2.23, 2.24) gehen in Gleichungen über, die auch für das kombinierte Warte-Verlust-System ohne Prioritäten gelten.

$$\xi_K = z \qquad \alpha(\leq K) = \alpha \qquad \text{für } k=K \qquad (2.25)$$

$$p(z, \leq K) = p_x = \begin{cases} \alpha^z \cdot \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{s+1}} \cdot E & \text{für } \alpha \neq 1 \\ & \text{für } x=n+z=n,n+1,\ldots n+s \\ \frac{E}{s+1} & \text{für } \alpha=1 \end{cases} \qquad (2.26)$$

Mit den Gleichungen (2.16, 2.17) mit (2.13, 2.14) geht (2.26) in die auf Seite 31 angegebene Gleichung (2.12) für $p_x = p_{n+z}$ über. Damit sind die Zustandswahrscheinlichkeiten p_x im kombinierten Warte-Verlust-System mit Prioritäten für x=n,n+1, ...n+s bestimmt worden.

Für x=0,1,...n gelten, nach den Einleitungsbemerkungen zu Abschnitt 2.4, die Werte p_x nach Gleichung (2.11). Mit (2.13, 2.14) ergibt sich aus (2.11)

$$p_x = \frac{\frac{A^x}{x!}}{\frac{A^n}{n!}\cdot\left[\frac{1}{E_{1,n}(A)} + \alpha\cdot\frac{1-\alpha^s}{1-\alpha}\right]} \qquad \text{für } x=0,1,\dots n \qquad (2.11')$$

2.7 Zustandswahrscheinlichkeiten für reine Wartesysteme

Für Wartesysteme umfaßt das System der Zustandsgleichungen (2.5) unendlich viele Gleichungen, da die Zahl der Warteplätze unbegrenzt ist. Die Wahrscheinlichkeit für den Zustand "ξ_k Rufe aus den Prioritätsklassen 1, 2, ... k warten vor dem voll belegten Bündel" ergibt sich aus (2.5, 2.6) zu

$$p(\xi_k, \leq k) = \alpha(\leq k)^{\xi_k}\cdot[1-\alpha(\leq k)]\cdot E \qquad (2.27)$$
$$\text{für } \alpha(\leq k)<1,\ s\to\infty,\ \xi_k=0,1,2,\dots \text{ und } k=1,2,\dots K$$

mit E nach (2.18) oder (2.19). Bis auf den Faktor E entsprechen die Wahrscheinlichkeiten $p(\xi_k, \leq k)$ einer geometrischen Verteilung [34]. Die Formel (2.27) wurde für n=1 von S.A. DRESSIN und E. REICH hergeleitet [8,28]. Die Blockierungswahrscheinlichkeit ist nach (2.18) mit (2.14)

$$E = \alpha \qquad \text{für } n=1,\ \alpha<1 \text{ und } s\to\infty \quad (2.28)$$

Im reinen Wartesystem ($s\to\infty$) wird der Gesamtverkehr nur im Falle A<n stationär. Dann ist der Verkehr auch für jede einzelne Prioritätsklasse stationär.

Ist der Gesamtverkehr nicht stationär, weil $A \geq n$, dann kann der Verkehr trotzdem für Rufe der höchsten Priorität (k=1) bis zu einer Grenzprioritätsklasse k^* noch stationär sein. Für die Prioritätsklassen von 1 bis k^* stellt sich ein stationärer Zustand ein, wenn

$$A(\leq k^*)<n, \text{ aber } A(\leq k^*+1)\geq n \qquad \text{für } s\to\infty \qquad (2.29)$$

ist [2,3,13,28], obwohl insgesamt kein stationärer Zustand mehr erreicht wird. Zum fortlaufenden Anwachsen der Warteschlange tragen im Mittel allein die weniger dringenden Rufe der Prioritätsklassen von k^*+1 bis K bei. Die Erwartungswerte für die Zahl der Rufe im Bündel und in der Warteschlange bleiben für die höchsten Prioritäten 1 bis k^* zeitlich konstant. Im Leitungsbündel werden im Mittel alle Belegungen der Prioritätsklassen 1 bis k^* und in den verbleibenden Zeitlücken noch einige Belegungen der Prioritätsklasse k^*+1 durchgeschaltet. Das gilt während eines Zeitabschnitts der Sättigung [13], mit $A(\leq k^*+1)\geq n$.

Mit den Zustandswahrscheinlichkeiten nach (2.23, 2.24) werden im Kapitel 3 die Warte- und Verlustwahrscheinlichkeiten bestimmt. Mittlere Wartezeiten werden im Kapitel 4 behandelt.

3. Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten

3.1 Bilanz der Verkehrswerte

Ein neu ankommender Ruf führt entweder zur Belegung oder er wird zum Verlustruf. Wir stellen eine Bilanz der mittleren Zahl von k-Rufen auf (Bild 3.1 Seite 37). Die mittlere Zahl der k-Rufe, die in der Zeiteinheit, der mittleren Belegungsdauer ankommen, ist gleich dem Angebot A_k der Prioritätsklasse k. Die Aufteilung dieser Rufe nach ihrem Schicksal - sie werden entweder Belegungen oder Verlustrufe - ergibt die Bilanz der Verkehrswerte.

3.2 Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten bei Ankunftsreihenfolge

a) Rufe zu ihren Ankunftszeitpunkten

Ankommende k-Rufe, die noch eine freie Leitung finden, belegen sie sofort. Das Bündel ist nicht blockiert, wenn noch mindestens eine Leitung frei ist; Wahrscheinlichkeit 1-E. Nur die Bündelblockierungswahrscheinlichkeit E ist unabhängig von der betrachteten Prioritätsklasse; E ist für alle Rufe gleich groß.

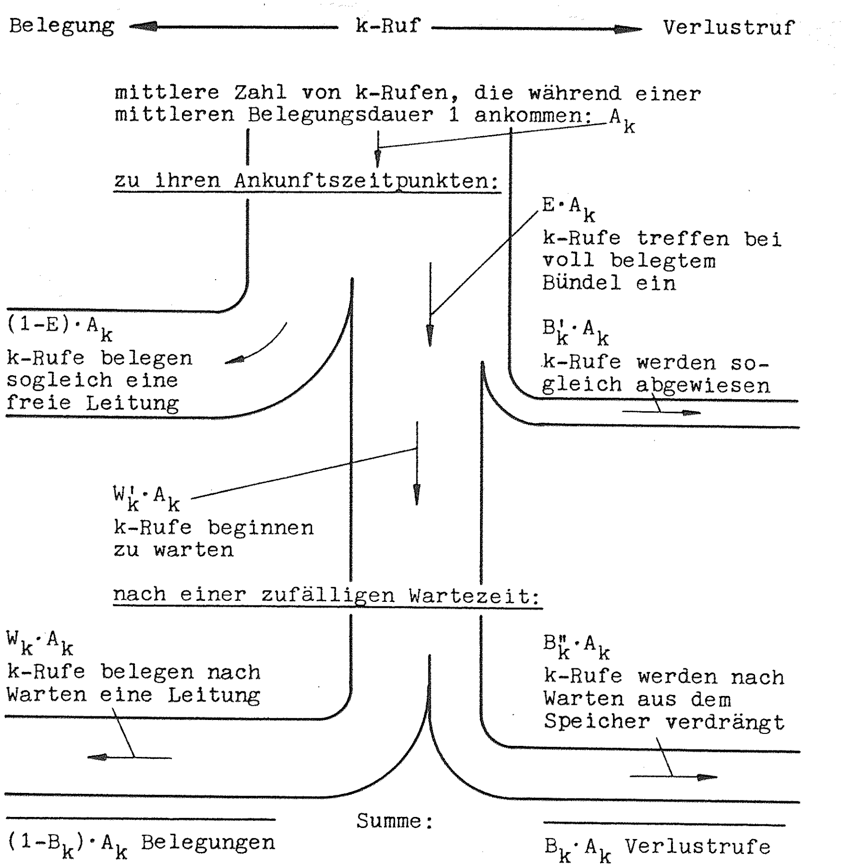

Bild 3.1 Bilanz der mittleren Zahl von k-Rufen während einer mittleren Belegungsdauer 1

Zustand und zugewiesener Warteplatz bei Ankunftsreihenfolge

In der Warteschlange sind die wartenden Rufe nach steigenden Prioritätsklassenindizes geordnet. Ein ankommender k-Ruf reiht sich in den Warteschlangenanteil aus wartenden k-Rufen ein. Es wurde noch nicht festgelegt, welchen Warteplatz innerhalb des Warteschlangenanteils aus k-Rufen der ankommende k-Ruf belegt. Alle wartenden Rufe höherer Priorität (Prioritätsklassen 1, 2, ... k-1) stehen im Wartespeicher stets vor

allen wartenden k-Rufen; alle wartenden Rufe geringerer Priorität (Prioritätsklassen k+1, k+2, ... K) sind stets hinter allen wartenden k-Rufen eingereiht. ζ_k Rufe von gleicher oder höherer Priorität (Prioritätsklassen 1, 2, ... k) warten vor dem voll belegten Bündel. Für die Zustandswahrscheinlichkeiten $P(\zeta_k, \leq k; t)$ und $p(\zeta_k, \leq k)$ kommt es nur auf die Zahl ζ_k an. Die Abfertigungsreihenfolge beeinflußt die Zustandswahrscheinlichkeiten nicht.

Bei Ankunftsreihenfolge reiht sich ein neuer k-Ruf so in die Warteschlange ein, daß alle Rufe von gleicher oder höherer Priorität vor ihm stehen. Im Augenblickszustand nach Bild 2.1 (Seite 22) belegt ein ankommender 3-Ruf den Warteplatz j=5. Einem k-Ruf wird bei Ankunft während eines Blockierungszeitabschnitts der Warteplatz

$$j = \zeta_k + 1 \qquad \text{für } \zeta_k = 0, 1, \ldots s-1 \text{ und } k = 1, 2, \ldots K \qquad (3.1)$$

zugewiesen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein neu ankommender k-Ruf den Warteplatz j zugewiesen erhält, ist bei Ankunftsreihenfolge gleich der Wahrscheinlichkeit, daß zum Ankunftszeitpunkt bereits $\zeta_k = j-1$ Rufe der Prioritätsklassen 1 bis k vor dem voll belegten Bündel warten.

$$p_{j,k} = p(j-1, \leq k) \qquad \text{für } k = 1, 2, \ldots K \qquad (3.2)$$

für j=1,2,...s und s endlich (Warte-Verlust-System)
und für j=1,2,... und $s \to \infty$ (Wartesystem)

Verlust durch Abweisen

Einige der während der Blockierungszeitabschnitte ankommenden k-Rufe werden sofort abgewiesen, nämlich dann, wenn alle s Warteplätze durch Rufe der Prioritätsklassen 1,2,...k besetzt sind. Bild 3.2 (Seite 39) zeigt eine Realisierung eines zufälligen Augenblickszustands. Alle s=6 Warteplätze sind von 1-Rufen, 2-Rufen und 3-Rufen belegt. Ankommende 3-Rufe oder 4-Rufe werden sofort abgewiesen, weil der gezeichnete Augenblickszustand zum Zustand $\zeta_3 = 6$ und zugleich zum Zustand $\zeta_4 = 6$ gehört.

Die Wahrscheinlichkeit für den Zustand $\zeta_k = s$ - alle s Warteplätze sind zu irgendeinem beliebigen Zeitpunkt von Rufen der Prioritätsklassen von 1 bis k belegt - ist gleich der

Wahrscheinlichkeit, daß ein einfallender k-Ruf sogleich abgewiesen wird und verloren geht. Diese Wahrscheinlichkeit heißt <u>Verlustwahrscheinlichkeit durch</u> sofortiges <u>Abweisen</u> B_k'. Nach (2.23) gilt für das kombinierte Warte-Verlust-System

$$B_k' = p(s,\leq k) = \alpha(\leq k)^s \cdot \frac{1-\alpha(\leq k)}{1-\alpha(\leq k)^{s+1}} \cdot E \qquad (3.3)$$

für k=1,2,...K
und s endlich

Für $\alpha(\leq k)=1$ ist nach (2.24) die Verlustwahrscheinlichkeit durch Abweisen

$$B_k' = p(s,\leq k) = \frac{E}{s+1} \qquad (3.4)$$

für $\alpha(\leq k)=1$
und s endlich

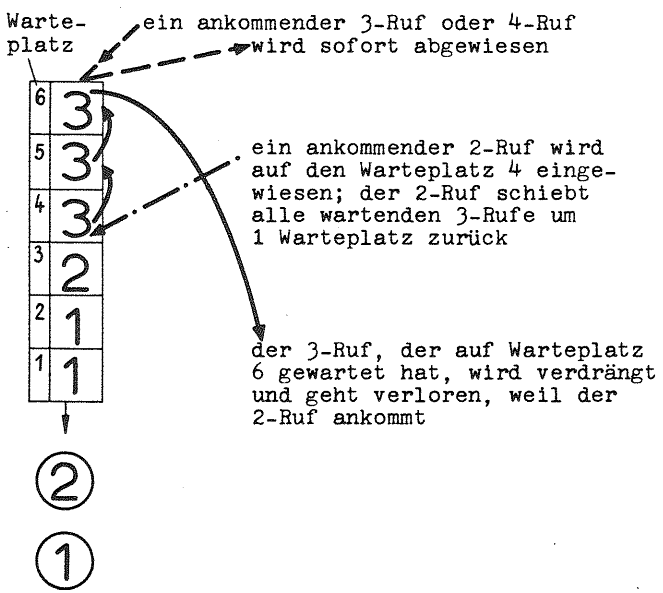

Bild 3.2 Ein Beispiel für einen augenblicklichen zufälligen Zustand. Er ist ein Beispiel für die folgenden Zustände: $\zeta_1=2$; $\zeta_2=3$; $\zeta_3=6=s$; $\zeta_4=6=s$.

Im reinen Wartesystem wird kein Ruf abgewiesen, weil die Zahl der Warteplätze unbeschränkt ist:

$$B_k' = 0 \qquad (3.5)$$

für k=1,2,...K
und $s \rightarrow \infty$

<u>Wartebeginn</u>

Wir betrachten nur k-Rufe. Im Mittel belegen $(1-E)\cdot A_k$ Rufe sofort eine freie Leitung und $B_k'\cdot A_k$ Rufe werden sofort abgewiesen. Die verbleibenden $W_k'\cdot A_k$ Rufe beginnen zu warten. Die <u>Wahrscheinlichkeit für Wartebeginn</u> ist deshalb

$$W_k' = \sum_{\zeta_k=0}^{s-1} p(\zeta_k,\leq k) = E - B_k' = \frac{1-\alpha(\leq k)^s}{1-\alpha(\leq k)^{s+1}}\cdot E \qquad (3.6)$$

für k=1,2,...K
und s endlich

Im Wartesystem beginnen alle k-Rufe zu warten, die während eines Blockierungszeitabschnitts ankommen:

$$W_k' = E \qquad (3.7)$$

für k=1,2,...K
und $s \rightarrow \infty$

Der Apostroph ' kennzeichnet die Wahrscheinlichkeiten für das Schicksal der Rufe zu ihren Ankunftszeitpunkten.

b) <u>Rufe, die gewartet haben</u>

<u>Verdrängen</u>

Wenn k-Rufe anfangen zu warten, gibt es zwei mögliche Schicksale. Im Mittel sind $W_k\cdot A_k$ Rufe erfolgreich; sie gelangen nach Warten ins Bündel. Die restlichen $B_k''\cdot A_k$ Rufe werden nach begonnenem Warten aus dem Speicher verdrängt. Die Ursache sind Rufe höherer Priorität (Prioritätsklassen 1, 2, ... k-1), die sich hinter Rufen höherer oder gleicher Priorität in die Warteschlange einreihen. Sie stehen dann vor den bereits wartenden k-Rufen. Dadurch schieben sie alle Rufe mit geringerer Priorität und auch die wartenden k-Rufe um einen Warteplatz zurück. Der Ruf, der bisher auf Platz s wartete, findet keinen Warteplatz mehr und wird nachträglich zum Verlustruf.

Bild 3.2 (Seite 39) zeigt ein Beispiel für einen zufälligen Augenblickszustand. Einem ankommenden 2-Ruf wird der Warteplatz 4 zugewiesen. Alle Rufe, die auf Warteplätzen hinter dem zugewiesenen Platz gewartet haben, werden um einen Platz zurückgeschoben. Der 3-Ruf, der auf Warteplatz 6 gewartet hat, wird aus der Warteschlange verdrängt und geht verloren. Um die verdrängten k-Rufe zu erfassen, genügt es nicht, eine Bilanz für die k-Rufe allein aufzustellen. Es müssen auch mögliche Ereignisse und Rufe höherer Priorität betrachtet werden, die das Verdrängen der k-Rufe verursachen können.

Wir benützen die formale Darstellung aller möglichen Ereignisse als Bereiche innerhalb eines Rechtecks, den Merkmalraum [34] (Bild 3.3 S.42). Der Zustand $\xi_{k-1}=s$ - alle s Warteplätze sind von Rufen der Prioritätsklassen von 1 bis k-1 besetzt - entspricht der Fläche des inneren Kreises. Rufe der Prioritätsklassen von k-1 bis K werden sogleich abgewiesen. Wenn der Zustand $\xi_k=s$ vorliegt, werden alle ankommenden Rufe aus den Prioritätsklassen von k bis K sogleich abgewiesen. Wenn $\xi_{k-1}=s$ vorliegt, dann gilt auch $\xi_k=s$; wenn s Rufe der Prioritätsklassen 1 bis k-1 warten, warten damit auch s Rufe der Prioritätsklassen 1 bis k. Das Ereignis $\xi_{k-1}=s$ ist ein Teilereignis von $\xi_k=s$; die Fläche des inneren Kreises $\xi_{k-1}=s$ ist in der Fläche des äußeren Kreises $\xi_k=s$ enthalten.

Die Ringfläche zwischen den beiden Kreisen stellt die Ereignisse dar, daß mindestens ein k-Ruf unter den s wartenden Rufen der Prioritätsklassen 1, 2, ... k ist, aber kein Ruf der Prioritätsklassen k+1, k+2, ... K. Die Wahrscheinlichkeit für diese Ereignisse ist $p(s,\leq k)-p(s,\leq k-1)$. Ein Ruf der Prioritätsklasse k wird sofort abgewiesen. Ein Ruf aus einer der Prioritätsklassen 1, 2, ... k-1 gelangt in den Wartespeicher und verdrängt einen k-Ruf.

Die mittlere Zahl der in der Zeiteinheit, der mittleren Belegungsdauer, sogleich bei ihrer Ankunft abgewiesenen k-Rufe ist

$$B'_k \cdot A_k \;=\; p(s,\leq k)\cdot A_k$$

Während einer mittleren Belegungsdauer werden im Mittel $B''_k \cdot A_k$ weitere k-Rufe nach begonnenem Warten durch neue Rufe aus Prioritätsklassen $\leq$k-1 aus dem Speicher verdrängt. Die "Verlustwahrscheinlichkeit durch Verdrängen" B''_k ergibt sich, wenn man die Gleichheit der Zahl verdrängender und verdrängter Rufe berücksichtigt, aus Bild 3.3 (Seite 42)

$$B''_k \cdot A_k \;=\; [p(s,\leq k)-p(s,\leq k-1)]\cdot A(\leq k-1)$$

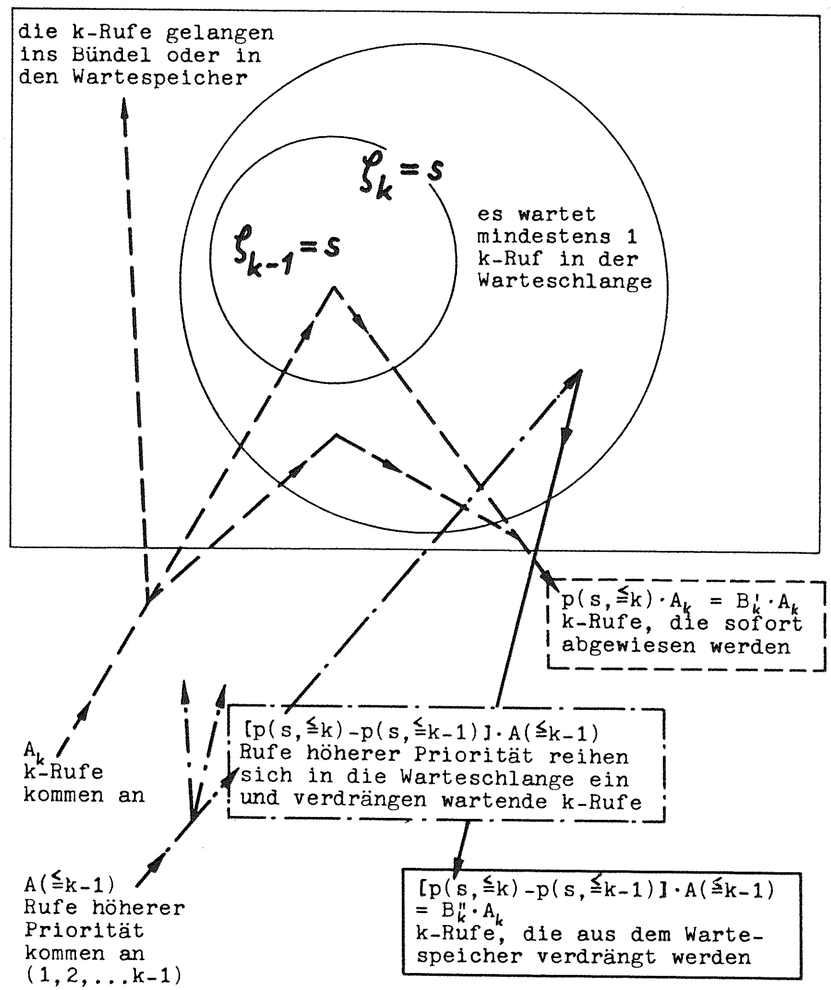

Bild 3.3 Merkmalraum mit Bereichen für die möglichen Ereignisse. Bilanz der mittleren Zahl von k-Rufen und der Rufe höherer Priorität während der mittleren Belegungsdauer 1

Daraus mit (3.3, 3.4) und (2.20, 2.21)

$$B''_k = (B'_k - B'_{k-1}) \cdot \frac{\alpha(\leq k-1)}{\alpha_k} \qquad \text{für } k=2,3,\ldots K \qquad (3.8)$$

Rufe der höchsten Priorität werden niemals verdrängt:

$$B''_1 = 0 \qquad \text{für } k=1 \qquad (3.9)$$

Verlustwahrscheinlichkeit

Die Verlustwahrscheinlichkeit B_k ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein k-Ruf entweder durch Abweisen oder durch Verdrängen verloren geht.

$$B_k = B'_k + B''_k = \frac{B'_k \cdot \alpha(\leq k) - B'_{k-1} \cdot \alpha(\leq k-1)}{\alpha_k} \qquad (3.10)$$
$$\text{für } k=1,2,\ldots K$$

(Dabei gilt $\alpha(\leq 0)=0$.)

Erfolgreiches Warten

Die Wahrscheinlichkeit W_k für Warten, das zum Belegen einer Leitung führt und von H. STÖRMER erfolgreiches Warten genannt wurde [30], ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeit für Wartebeginn W'_k und der Verlustwahrscheinlichkeit durch Verdrängen B''_k (vgl. Bild 3.1 Seite 37).

$$W_k = W'_k - B''_k = E - B_k \qquad \text{für } k=1,2,\ldots K \qquad (3.11)$$

Damit sind alle Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Verläufe, die in der Bilanz der k-Rufe (Bild 3.1 S. 37) aufgeführt sind, bestimmt. Die Wahrscheinlichkeiten, daß ein k-Ruf nicht gehemmt wird (1-E), daß er erfolgreich wartet (W_k), oder daß er verloren geht (B_k), bestimmen sein endgültiges Schicksal.

Bisher wurde immer die Ankunftsreihenfolge betrachtet. Warten mehrere Rufe aus derselben Prioritätsklasse, dann darf der Ruf, der zuerst im System ankam, zuerst eine frei gewordene Leitung belegen. Die Reihenfolge nach den Ankunftszeitpunkten ist ein gerechtes Verfahren. Die Steuerung eines Vermittlungssystems wird sehr kompliziert, wenn auch in Zeitabschnitten starken Verkehrs die Ankunftsreihenfolge streng einzuhalten

ist. In realisierten Systemen entspricht die wirkliche Reihenfolge der Abfertigung oft eher einer zufallsmäßigen Auswahl unter den wartenden Rufen. Zufällige Reihenfolge bedeutet, daß es keine Auswahlvorschrift gibt, welcher der wartenden Rufe vor den anderen wartenden Rufen der gleichen Prioritätsklasse zu bevorzugen ist. Wird einerseits bei Ankunftsreihenfolge der zuerst angekommene Ruf bevorzugt, dann kann andererseits auch der zuletzt angekommene Ruf bevorzugt werden (inverse Reihenfolge). Die tatsächlich vorkommenden Abfertigungsreihenfolgen liegen zwischen Ankunftsreihenfolge und inverser Reihenfolge. Deshalb werden die beiden gegensätzlichen Reihenfolgen untersucht, um den Einfluß der Abfertigungsreihenfolge zu erfassen.

In Ausnahmefällen kann die inverse Reihenfolge zweckmäßig sein. Bei Flugüberwachung ist z.B. die letzte Meldung aus einer Klasse am wichtigsten, weil der Überwachungszentrale stets vordringlich die neue Situation mitgeteilt werden muß.

3.3 Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten bei inverser Abfertigungsreihenfolge

a) Rufe zu ihren Ankunftszeitpunkten

Ankommende k-Rufe, die noch eine freie Leitung finden, belegen sie sofort; Wahrscheinlichkeit (1-E).

Zustand und zugewiesener Warteplatz bei inverser Reihenfolge

Ein k-Ruf komme während eines Blockierungszeitabschnitts an. Bei inverser Reihenfolge reiht er sich so in die Warteschlange ein, daß alle Rufe von höherer Priorität vor ihm stehen. Hinter ihm stehen alle Rufe von gleicher und von geringerer Priorität, die bei seiner Ankunft bereits gewartet haben. Im Augenblickszustand nach Bild 2.1 (Seite 22) würde ein ankommender 3-Ruf bei inverser Reihenfolge den Warteplatz j=2 belegen. Einem k-Ruf wird bei Ankunft während eines Blockierungszeitabschnitts der Warteplatz j zugewiesen.

$$j = \varrho_{k-1} + 1 \qquad \text{für } \varrho_{k-1}=0,1,\ldots s-1 \text{ und } k=2,3,\ldots K \qquad (3.12)$$

Ein 1-Ruf beginnt bei inverser Reihenfolge stets auf dem Warteplatz j=1 zu warten.

$$j = 1 \qquad \text{für } k=1 \qquad (3.13)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein neu ankommender k-Ruf den Warteplatz j zugewiesen erhält, ist bei inverser Reihenfolge gleich der Wahrscheinlichkeit, daß zum Ankunftszeitpunkt bereits $\zeta_{k-1}=j-1$ Rufe der Prioritätsklassen 1 bis k-1 vor dem voll belegten Bündel warten.

$$p_{j,k}^{(i)} = p(j-1, \leq k-1) \qquad \text{für } k=2,3,\ldots K \qquad (3.14)$$

$$p_{j,1}^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{für } j=1 \\ 0 & \text{für } j\neq 1 \end{cases} \qquad \text{für } k=1 \qquad (3.15)$$

für j=1,2,...s und s endlich (Warte-Verlust-System)
und für j=1,2,... und $s\to\infty$ (Wartesystem)

Verlust durch Abweisen

Ein ankommender k-Ruf wird sofort abgewiesen, wenn alle s Warteplätze von Rufen der Prioritätsklassen 1 bis k-1 besetzt sind. Das ist das Ereignis $\zeta_{k-1}=s$. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein ankommender k-Ruf abgewiesen wird, ist die Verlustwahrscheinlichkeit durch Abweisen; mit (3.3, 3.4) ergibt sich

$$B_k^{\prime(i)} = p(s, \leq k-1) = B_{k-1}^{\prime} \qquad \text{für } k=2,3,\ldots K \qquad (3.16)$$

Wartebeginn

Wenn die wartenden Rufe aus den Prioritätsklassen 1 bis k-1 weniger als s Warteplätze besetzt haben, beginnt der k-Ruf zu warten. Wahrscheinlichkeit für Wartebeginn

$$W_k^{\prime(i)} = \sum_{\zeta_{k-1}=0}^{s-1} p(\zeta_{k-1}, \leq k-1) = W_{k-1}^{\prime} \qquad \text{für } k=2,3,\ldots K \qquad (3.17)$$

Rufe der höchsten Priorität k=1 beginnen stets auf dem ersten Warteplatz zu warten, sie werden niemals abgewiesen.

$$B_1^{\prime(i)} = 0 \qquad \text{für } k=1 \qquad (3.18)$$

$$W_1^{\prime(i)} = E \qquad \text{für } k=1 \qquad (3.19)$$

Im Mittel belegen $(1-E)\cdot A_k$ Rufe sofort eine freie Leitung, $B_k^{\prime(i)}\cdot A_k$ Rufe werden sofort abgewiesen und $W_k^{\prime(i)}\cdot A_k$ Rufe beginnen zu warten. Damit sind die Wahrscheinlichkeiten für die drei Möglichkeiten, die das Schicksal der k-Rufe im Ankunftszeitpunkt beschreiben, bestimmt.

b) Rufe, die gewartet haben

Wenn k-Rufe anfangen zu warten, gibt es zwei mögliche Schicksale. Im Mittel sind $W_k^{(i)}\cdot A_k$ Rufe erfolgreich; sie gelangen nach Warten ins Bündel. Die restlichen $B_k^{\prime\prime(i)}\cdot A_k$ Rufe werden nach begonnenem Warten aus dem Speicher verdrängt. Die Ursache sind Rufe gleicher oder höherer Priorität (Prioritätsklassen 1, 2, ... k), die sich alle vor den bereits wartenden k-Rufen in die Warteschlange einreihen. Dadurch schieben sie alle wartenden Rufe aus den Prioritätsklassen k, k+1, ... K um einen Warteplatz zurück. Ein Ruf, der bisher auf Platz s wartete, findet keinen Warteplatz mehr und wird nachträglich zum Verlustruf.

Durch die inverse Abfertigungsreihenfolge, die als eine Regel inversen Einreihens in die Warteschlange durchgeführt wird, bekommen neu ankommende Rufe andere Warteplätze zugewiesen als bei Ankunftsreihenfolge. Im Beispiel für einen Augenblickszustand (Bild 3.2 Seite 39) würde einem 3-Ruf bei inverser Reihenfolge der Warteplatz 4 zugewiesen. Damit würde der wartende 3-Ruf von Warteplatz 6 nachträglich verdrängt.

Im Zustand $\zeta_{k-1}=s$ - alle s Warteplätze sind von Rufen der Prioritätsklassen von 1 bis k-1 besetzt - werden die k-Rufe und gleichermaßen Rufe von geringerer Priorität abgewiesen (Prioritätsklassen k, k+1, ... K). Die Ringfläche (Bild 3.3 S.42) stellt die Ereignisse dar, daß unter den s wartenden Rufen der Prioritätsklassen 1, 2, ... k mindestens ein k-Ruf ist. Die Wahrscheinlichkeit dieser Ereignisse ist $p(s,\leq k)-p(s,\leq k-1)$. Ein Ruf aus einer Prioritätsklasse k+1, k+2, ... K wird sofort abgewiesen. Ein Ruf aus einer der Prioritätsklassen 1, 2, ... k gelangt in den Wartespeicher und verdrängt einen k-Ruf.

In der Zeiteinheit werden im Mittel $B_k^{\prime(i)}\cdot A_k$ Rufe der Prioritätsklasse k sogleich bei ihrer Ankunft abgewiesen.

$$B_k^{\prime(i)}\cdot A_k = p(s,\leq k-1)\cdot A_k = B_{k-1}^{\prime}\cdot A_k$$

Während einer mittleren Belegungsdauer 1 werden im Mittel $B_k^{\prime\prime(i)}\cdot A_k$ weitere k-Rufe nach begonnenem Warten von neuen Rufen gleicher oder höherer Priorität (Prioritätsklassen $\leq k$)

aus dem Speicher verdrängt.

$$B_k^{''(i)} \cdot A_k = [p(s,\leq k) - p(s,\leq k-1)] \cdot A(\leq k)$$

Daraus ergibt sich mit (3.3, 3.4) und (2.20, 2.21) sowie (3.8) die Verlustwahrscheinlichkeit durch Verdrängen $B_k^{''(i)}$ bei inverser Reihenfolge

$$B_k^{''(i)} = (B'_k - B'_{k-1}) \frac{\alpha(\leq k)}{\alpha_k} = B''_k \cdot \frac{\alpha(\leq k)}{\alpha(\leq k-1)} \qquad \text{für } k=2,3,\ldots K \quad (3.20)$$

Für Rufe höchster Priorität wird die Ringfläche (Bild 3.3 S.42) zur Fläche des innersten kleinsten Kreises, der die Ereignisse darstellt, daß alle s Warteplätze von 1-Rufen belegt sind. Ein ankommender 1-Ruf verdrängt dann den auf Warteplatz s wartenden 1-Ruf. Mit (3.3, 3.4)

$$B_1^{''(i)} = p(s,\leq 1) = B'_1 \qquad \text{für } k=1 \quad (3.21)$$

Verlustwahrscheinlichkeit

Bei inverser Reihenfolge ist die Verlustwahrscheinlichkeit durch Abweisen kleiner und die Verlustwahrscheinlichkeit durch Verdrängen größer als bei Ankunftsreihenfolge, vgl. (3.16, 3.18, 3.20, 3.21). Die Verlustwahrscheinlichkeit insgesamt bleibt unverändert, denn mit (3.8, 3.16, 3.20) und mit (3.18, 3.21) ergibt sich

$$B_k^{(i)} = B_k^{'(i)} + B_k^{''(i)} = \frac{B'_k \cdot \alpha(\leq k) - B'_{k-1} \cdot \alpha(\leq k-1)}{\alpha_k}$$

$$B_k^{(i)} = B_k \qquad \text{für } k=1,2,\ldots K \quad (3.22)$$

Erfolgreiches Warten

Die Wahrscheinlichkeit für erfolgreiches Warten bleibt ebenfalls unverändert, denn mit (3.10, 3.17, 3.20, 3.22) und mit (3.19, 3.21) ergibt sich

$$W_k^{(i)} = W_k^{'(i)} - B_k^{''(i)} = W_k = E - B_k \qquad \text{für } k=1,2,\ldots K \quad (3.23)$$

Damit sind alle Wahrscheinlichkeiten für das endgültige Schicksal eines k-Rufs bei inverser Reihenfolge bestimmt.

3.4 Diagramme für die Blockierungs-, Warte- und Verlustwahrscheinlichkeiten

Blockierungswahrscheinlichkeit

Wir wollen zurückschauen. Da bei nicht unterbrechender Priorität bestehende Belegungen unangetastet bleiben, gelten die Blockierungswahrscheinlichkeit E und die Wahrscheinlichkeit 1-E für sofortigen Belegungsbeginn für alle Prioritätsklassen; vgl. (2.14 bis 2.19) und Bild 3.4. Die Kurven zeigen den Einfluß der Größe s des Wartespeichers. Die Extremfälle sind das Wartesystem ($s \to \infty$) und das Verlustsystem (s=0). Die Blockierungswahrscheinlichkeit E ist in den meisten Formeln als Faktor enthalten.

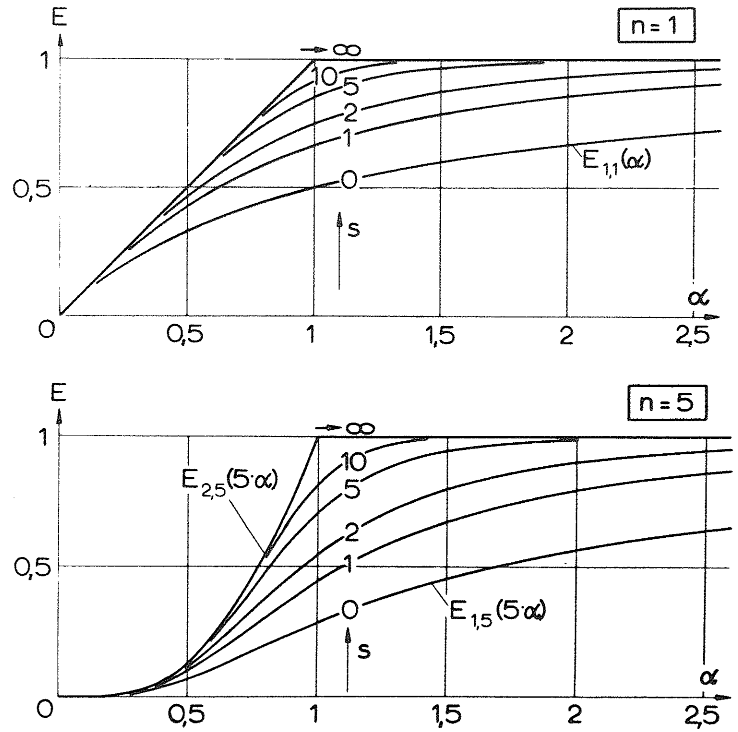

Bild 3.4 Die Blockierungswahrscheinlichkeit E hängt vom Gesamtangebot je Leitung α, von der Zahl der Warteplätze s und von der Leitungszahl n ab.

Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten

Die Größe B_k'/E stellt die Verlustwahrscheinlichkeit durch Abweisen B_k' bei Ankunftsreihenfolge dividiert durch die Blockierungswahrscheinlichkeit E dar, vgl. (3.3, 3.4). Sie ist im Bild 3.5 aufgezeichnet. Sie hängt nicht von der Zahl der Leitungen n ab, wenn das spezifische Angebot $\alpha(\leq k)$ der Prioritätsklassen 1 bis k benützt wird. Zuerst wird E aus Bild 3.4 bestimmt, dann wird Bild 3.5 zweimal angewendet: für die Prioritätsklassen 1 bis k und für die Prioritätsklassen 1 bis k-1. Damit können die Formeln (3.8, 3.10, 3.11) leicht ausgewertet werden. Für inverse Reihenfolge sind die Umrechnungen zur Ankunftsreihenfolge (3.16, 3.17, 3.20, 3.22, 3.23) zu beachten. Weil die Differenzen zweier aus den Kurven abgelesener Werte ungenau sein können, wurde außerdem ein ALGOL-Programm geschrieben, um alle Formeln dieser Arbeit numerisch auswerten zu können.

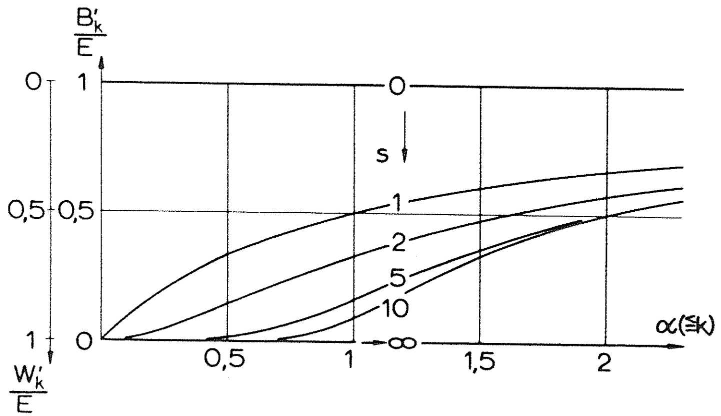

Bild 3.5 Die Verlustwahrscheinlichkeit durch Abweisen B_k' und die Wahrscheinlichkeit für Wartebeginn W_k', dividiert durch die Blockierungswahrscheinlichkeit E, hängen vom Angebot der Prioritätsklassen 1 bis k je Leitung $\alpha(\leq k)$ und von der Zahl der Warteplätze s ab.

3.5 Gesamtverlust- und Gesamtwartewahrscheinlichkeit

Werden die Rufe aus allen K Prioritätsklassen gemeinsam betrachtet und wird über alle K Prioritätsklassen mit dem Gewicht der Angebotsanteile $A_k/A = \alpha_k/\alpha$ gemittelt, dann ergibt sich die Gesamtverlustwahrscheinlichkeit B.

$$B = \sum_{k=1}^{K} B_k \cdot \frac{\alpha_k}{\alpha} \qquad (3.24)$$

Mit (3.10) folgt, daß sie gleich der Verlustwahrscheinlichkeit durch Abweisen der letzten Prioritätsklasse k=K ist. Mit (3.3) und $\alpha(\leq K)=\alpha$

$$B = B_K' = \alpha^s \cdot \frac{1-\alpha}{1-\alpha^{s+1}} \cdot E \qquad \text{für s endlich} \qquad (3.25)$$

Im kombinierten Warte-Verlust-System ergibt sich mit (2.26) für die Verlustwahrscheinlichkeit $B=p_{n+s}$ ebenfalls die Formel (3.25). Die Gesamtverlustwahrscheinlichkeit B ist demnach unabhängig vom Einteilen in Prioritätsklassen.

Die Gesamtwartewahrscheinlichkeit W ist ebenfalls unabhängig vom Einteilen der Rufe in Prioritätsklassen.

$$W = \sum_{k=1}^{K} W_k \cdot \frac{\alpha_k}{\alpha} = E - B = \frac{1-\alpha^s}{1-\alpha^{s+1}} \cdot E \qquad (3.26)$$

3.6 Ein Beispiel

Ein Beispiel soll veranschaulichen, wie sich das Einteilen in Prioritätsklassen auswirkt. In einem militärischen Fernschreibnetz [26] sind 3% der Meldungen "Sofort-Nachrichten". Ein Viertel aller Rufe sind "dringend". Zur dritten Kategorie mit dem Namen "Routine" gehören 32% der Nachrichten. Den geringsten Wert haben jene verbleibenden 40% "Zurückstellung".

k	1	2	3	4
A_k/A	3 %	25 %	32 %	40 %

(3.27)

Wir betrachten ein kombiniertes Warte-Verlust-System mit n=2 Leitungen und s=2 Warteplätzen. Die Verlustwahrscheinlichkeit ist für Rufe höchster Priorität am geringsten; für diese Rufe wirkt sich die Beschränkung auf nur 2 Warteplätze am wenigsten aus (Bild 3.6 Seite 51).

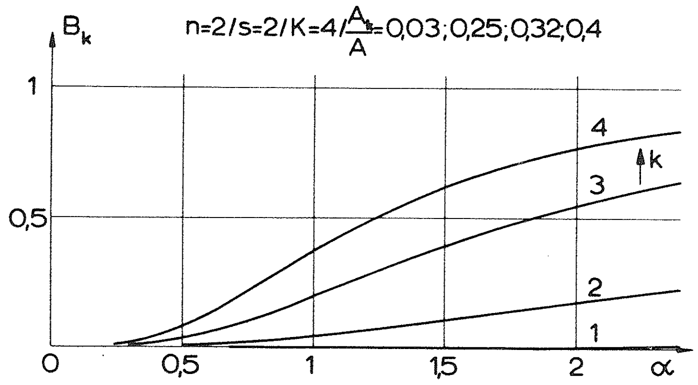

Bild 3.6 Verlustwahrscheinlichkeit B_k in Abhängigkeit vom spezifischen Gesamtangebot α; n=2; s=2.

Nun sollen nur Rufe der Prioritätsklasse 3 betrachtet werden. Mit wachsendem Gesamtangebot steigt für 3-Rufe die Wartewahrscheinlichkeit W_3 an. Erst bei noch mehr erhöhtem Gesamtangebot steigt die Verlustwahrscheinlichkeit B_3 merklich an; dann wirkt sich die beschränkte Zahl von Warteplätzen aus. (Bild 3.7)

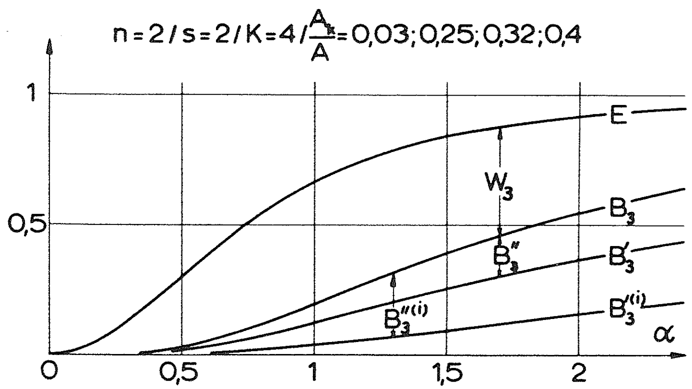

Bild 3.7 Blockierungswahrsch. E, Verlustwahrscheinlichkeiten B_3', B_3'' und B_3 sowie Wartewahrscheinlichkeit W_3 für 3-Rufe in Abhängigkeit vom spezifischen Gesamtangebot α; n=2; s=2. (i) kennzeichnet inverse Reihenfolge.

4. Mittlere Wartezeiten

4.1 Wartebelastung

Die mittlere Zahl der Rufe der Prioritätsklassen 1 bis k, die in der Warteschlange warten, heißt Wartebelastung $\Omega(\leq k)$. Aus (2.23) ergibt sich der Erwartungswert

$$\Omega(\leq k) = \sum_{\rho_k=0}^{s} \rho_k \cdot p(\rho_k, \leq k) = \alpha(\leq k) \cdot \frac{1-(s+1)\cdot\alpha(\leq k)^s + s\cdot\alpha(\leq k)^{s+1}}{[1-\alpha(\leq k)]\cdot[1-\alpha(\leq k)^{s+1}]} \cdot E$$

$$\Omega(\leq k) = \left[\frac{\alpha(\leq k)}{1-\alpha(\leq k)} - \frac{(s+1)\cdot\alpha(\leq k)^{s+1}}{1-\alpha(\leq k)^{s+1}}\right] \cdot E \qquad (4.1)$$

Aus (2.24) ergibt sich

$$\Omega(\leq k) = \frac{s}{2}\cdot E \qquad \text{für } \alpha(\leq k)=1 \qquad (4.2)$$

Für Wartesysteme mit unbegrenzt vielen Warteplätzen ($s\to\infty$) verschwindet das zweite Glied in der Klammer der Formel (4.1), falls $\alpha(\leq k)<1$ ist. Die mittlere Zahl wartender Rufe nimmt zu, wenn die Zahl der Warteplätze zunimmt.

Die mittlere Zahl wartender k-Rufe, der Warteschlangenanteil der wartenden Rufe der Prioritätsklasse k allein ist die Wartebelastung

$$\Omega_k = \Omega(\leq k) - \Omega(\leq k-1) \qquad \text{für } k=1,2,\ldots K \qquad (4.3)$$

(Rufe höchster Priorität gehören zur Prioritätsklasse k=1: $\Omega_1=\Omega(\leq 1)$; $\Omega(\leq 0)=0$.)

4.2 Mittlere Wartezeit aller Rufe

Wie die Zeit sind auch alle mittleren Wartezeiten auf die mittlere Belegungsdauer normiert. Die mittlere Wartezeit τ_{wk}^* ist auf alle k-Rufe bezogen, ob sie warten müssen oder nicht. Wenn der Zufallsprozeß des Verkehrsablaufs in der Prioritätsklasse k stationär ist, wird die Wartebelastung Ω_k

durch die im Mittel in dieser Zeit τ^*_{wk} ankommenden k-Rufe aufrechterhalten. Die Zahl der in der Zeit τ^*_{wk} eintreffenden k-Rufe ist $A_k \cdot \tau^*_{wk}$. Die Wartebelastung Ω_k ist also das Produkt aus der mittleren Anzahl A_k der in der Zeiteinheit (der mittleren Belegungsdauer) ankommenden k-Rufe multipliziert mit der mittleren Wartezeit τ^*_{wk} bezogen auf alle k-Rufe.

$$\Omega_k = A_k \cdot \tau^*_{wk} \tag{4.4}$$

Mit (2.20, 2.21) und der Abkürzung

$$\alpha(\leq k-1) = \alpha(<k) \tag{4.5}$$

wird (4.3) und (4.1) in (4.4) eingesetzt. Die <u>mittlere Wartezeit aller k-Rufe</u> ist

$$\tau^*_{wk} = \frac{E}{n} \cdot \left\{ \frac{1}{[1-\alpha(\leq k)]\cdot[1-\alpha(<k)]} - \frac{(s+1)\cdot[\alpha(\leq k)^{s+1} - \alpha(<k)^{s+1}]}{\alpha_k \cdot [1-\alpha(\leq k)^{s+1}]\cdot[1-\alpha(<k)^{s+1}]} \right\} \tag{4.6}$$

Eine zweite Formel für die mittlere Wartezeit τ^*_{wk} aller k-Rufe ergibt sich, wenn man einmal die Rufe aus den Prioritätsklassen 1 bis k, dann jene aus den Prioritätsklassen 1 bis k-1 zusammenfaßt. Die Wartebelastung $\Omega(\leq k)$ umfaßt alle Wartedauern aller wartenden Rufe aus den Prioritätsklassen $\leq k$; darin sind auch die Wartezeiten von Rufen, die nach begonnenem Warten aus dem Speicher verdrängt werden, enthalten. Die Wartebelastung $\Omega(\leq k)$ ist gleich dem Produkt aus der mittleren Zahl $A(\leq k)$ von Rufen der Prioritätsklassen 1 bis k, die in der Zeiteinheit eintreffen, und der mittleren Wartezeit $\tau^*_w(\leq k)$ bezogen auf alle Rufe der Prioritätsklassen von 1 bis k.

$$\Omega(\leq k) = A(\leq k) \cdot \tau^*_w(\leq k) \tag{4.7}$$

Daraus mit (2.21) und (4.1)

$$\tau^*_w(\leq k) = \frac{E}{n} \cdot \left[\frac{1}{1-\alpha(\leq k)} - \frac{(s+1)\cdot \alpha(\leq k)^s}{1-\alpha(\leq k)^{s+1}} \right] \tag{4.8}$$

Werden die Gleichungen (4.4, 4.7) in (4.3) eingesetzt, dann ergibt sich mit (2.20, 2.21) die mittlere Wartezeit τ^*_{wk} aller k-Rufe [30,33]

$$\tau^*_{wk} = \frac{\tau^*_w(\leq k)\cdot\alpha(\leq k) - \tau^*_w(\leq k-1)\cdot\alpha(\leq k-1)}{\alpha_k} \tag{4.9}$$

Die Gleichung (4.9) mit (4.8) ist äquivalent zu (4.6). Die Struktur der Gleichung (4.9) für die mittlere Wartezeit τ^*_{wk} aller k-Rufe stimmt mit der Struktur der Gleichung (3.10) für die Verlustwahrscheinlichkeit B_k überein. Um τ^*_{wk} zu bestimmen, benützt man $\tau^*_w(\leq k)$; die beiden Werte $\tau^*_w(\leq k)/E$ und $\tau^*_w(\leq k-1)/E$ liest man aus Bild 4.1 ab.

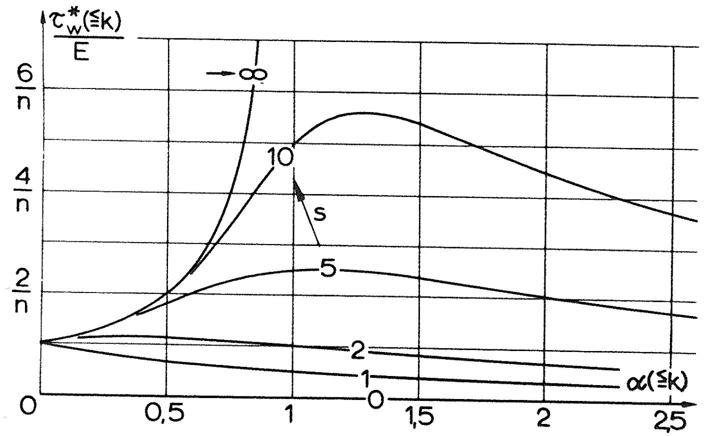

Bild 4.1 Die mittlere Wartezeit $\tau^*_w(\leq k)$ bezogen auf alle Rufe der Prioritätsklassen von 1 bis k, dividiert durch die Blockierungswahrscheinlichkeit E, hängt vom Angebot der Prioritätsklassen von 1 bis k je Leitung $\alpha(\leq k)$ und von der Zahl der Warteplätze s ab.

4.3 Wartende Rufe höchster Priorität bei Ankunftsreihenfolge

Für Rufe höchster Priorität ist k=1, $\alpha(\leq 1)=\alpha_1$ und $\alpha(<1)=0$. Die mittlere Wartezeit τ^*_{w1} für alle 1-Rufe ergibt sich aus (4.6)

$$\tau^*_{w1} = \frac{E}{n} \cdot \left[\frac{1}{1-\alpha_1} - \frac{(s+1)\cdot\alpha_1^s}{1-\alpha_1^{s+1}} \right] \qquad \text{für } s=1,2,\ldots\text{endlich} \quad (4.10)$$

Mit der Wahrscheinlichkeit W_1' nach (3.6) beginnt ein 1-Ruf im kombinierten Warte-Verlust-System zu warten. Bei Abfertigen in Ankunftsreihenfolge werden 1-Rufe niemals verdrängt: $W_1=W_1'$. Die mittlere Wartezeit τ_{w1} bezogen auf wartende 1-Rufe ist bei Ankunftsreihenfolge

$$\tau_{w1} = \frac{\tau^*_{w1}}{W_1} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{1-\alpha_1} - \frac{s\cdot\alpha_1^s}{1-\alpha_1^s} \right) \qquad \text{für } s=1,2,\ldots\text{endlich} \quad (4.11)$$

Für $s \to \infty$ (Wartesysteme) verschwindet das zweite Glied innerhalb der Klammern in den Gleichungen (4.10, 4.11), falls $\alpha_1<1$. (Vgl. Bild 4.2 Seite 56)

$$\tau_{w1} = \frac{1}{n\cdot(1-\alpha_1)} \qquad \text{für } \alpha_1<1 \text{ und } s\to\infty \quad (4.12)$$

Wenn sich α_1 dem Wert 1 nähert, strebt die mittlere Wartezeit τ_{w1} gegen ∞. Nur für $\alpha_1<1$ ist der Zufallsprozeß des Verkehrsablaufs stationär (vgl. Abschnitt 2.7).

In Warte-Verlust-Systemen mit einem einzigen Warteplatz muß bei Ankunftsreihenfolge jeder wartende 1-Ruf warten, bis eine der n Belegungen endet. Für s=1 ergibt sich aus (4.11)

$$\tau_{w1} = \frac{1}{n} \qquad \text{für } s=1 \quad (4.13)$$

Falls in Warte-Verlust-Systemen das spezifische Angebot $\alpha_1 \to \infty$ strebt, dann wird bei Ankunftsreihenfolge jedem 1-Ruf, der warten muß, der Warteplatz s zugewiesen. Er muß warten, bis s Belegungen geendet haben, und genau in diesem Zeitpunkt

belegt er eine Leitung (vgl. Bild 4.2).

$$\tau_{w1} \to \frac{s}{n} \qquad \text{für } \alpha_1 \to \infty \text{ und } s=1,2,\ldots \text{ endlich} \quad (4.14)$$

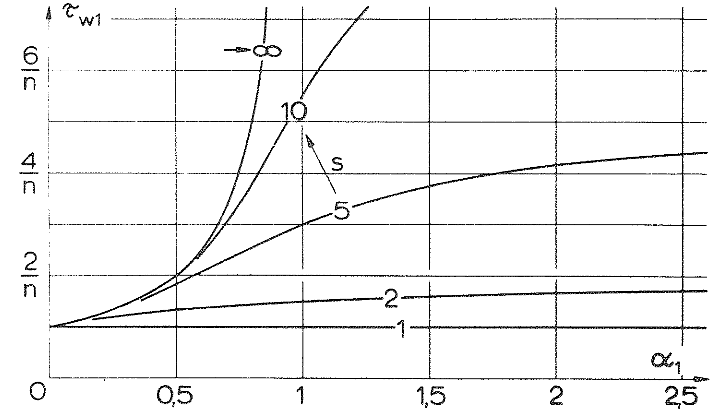

Bild 4.2 Die mittlere Wartezeit τ_{w1} bezogen auf die wartenden 1-Rufe hängt vom Angebot der Prioritätsklasse 1 je Leitung α_1 und von der Zahl der Warteplätze s ab. Für endliche Zahl von Warteplätzen s ist Abfertigen nach der Ankunftsreihenfolge vorausgesetzt.

Das System mit einer einzigen Prioritätsklasse stimmt mit dem System überein, in dem die Rufe nicht nach Prioritäten eingeteilt sind. In beiden Systemen werden wartende Rufe niemals verdrängt. Mit $\alpha_1=\alpha$ sind die Formeln (4.11 bis 4.13) und Bild 4.2 für die wartenden Rufe im Warte-Verlust-System ohne Prioritäteneinteilung gültig [30,29]. Mit $s\to\infty$ geht das Korrekturglied für endliche Zahl von Warteplätzen gegen 0; es ergibt sich der bekannte Wert $\tau_w=1/(n-A)$ [9,1,19,28,32,u.a.].

4.4 Wartende Rufe in Wartesystemen

In Wartesystemen sind alle wartenden Rufe erfolgreich; bei unbegrenztem Wartespeicher werden niemals wartende Rufe verdrängt. Die Wartebelastung Ω_k ist das Produkt aus der mittleren Anzahl $W_k \cdot A_k$ der in der Zeiteinheit mit Wartezeit auftretenden k-Rufe multipliziert mit der mittleren Wartezeit τ_{wk} der wartenden k-Rufe.

$$\Omega_k = W_k \cdot A_k \cdot \tau_{wk} \qquad \text{für } s \to \infty$$

Mit (4.3, 4.1) und W_k=E für $s \to \infty$ ergibt sich

$$\tau_{wk} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{[1-\alpha(\leq k)] \cdot [1-\alpha(<k)]} \qquad \text{für } s \to \infty \text{ und } \alpha(\leq k) < 1 \qquad (4.15)$$

[2,5, für n=1: 13,4,28]

Ohne Prioritäteneinteilung gilt für alle Rufe die gleiche mittlere Wartezeit $\tau_w^* = E \cdot \tau_w$; τ_w ergibt sich aus (4.12) mit $\alpha_1 = \alpha$. Werden die Rufe in Prioritätsklassen eingeteilt, dann geht die mittlere Wartezeit τ_w^* aller Rufe in die mittlere Wartezeit τ_{wk}^* aller k-Rufe über. Im Wartesystem hängt die Wartewahrscheinlichkeit W_k=E nicht von der betrachteten Prioritätsklasse k ab.

$$\frac{\tau_{wk}^*}{\tau_w^*} = \frac{\tau_{wk}}{\tau_w} = \frac{1-\alpha}{[1-\alpha(\leq k)] \cdot [1-\alpha(<k)]} \qquad \text{für } s \to \infty \text{ und } \alpha < 1 \qquad (4.16)$$

Die Formel (4.16) gibt die relative Verlängerung der mittleren Wartezeit durch Prioritäteneinteilung an. Sie gilt für

> das Wartesystem mit POISSON-Rufprozeß, negativ exponentieller Verteilung der Belegungsdauern und n≥1 Leitungen bei voller Erreichbarkeit.

Sie gilt sogar außerdem für

> ein Wartesystem mit POISSON-Rufprozeß, beliebiger Verteilung der voneinander unabhängigen Belegungsdauern und n=1 Leitung [2,13,31,33].

Beispiele

In einem Wartesystem mit unbeschränktem Wartespeicher sei die Einteilung der Prioritäten durch (3.27) gegeben. Bild 4.3

zeigt, daß der Einfluß des Einteilens in Prioritätsklassen bei größer werdendem Angebot immer deutlicher wird. Vergleicht man mit der mittleren Wartezeit bei der Betriebsart "ohne Prioritäten", dann sieht man, daß für die drei ersten Prioritätsklassen, für 60% der Rufe, die mittleren Wartezeiten deutlich verkleinert werden. Das System verharrt für die Rufe hoher Prioritäten auch bei höheren Angeboten im stationären Zustand und erreicht erst bei noch größeren Angebotswerten eine Sättigung. Diese Überlastungsunempfindlichkeit für die eiligen hochwertigen Rufe ist erwünscht. (Die obere und untere Grenze der mittleren Wartezeiten werden im Kapitel 8 behandelt.)

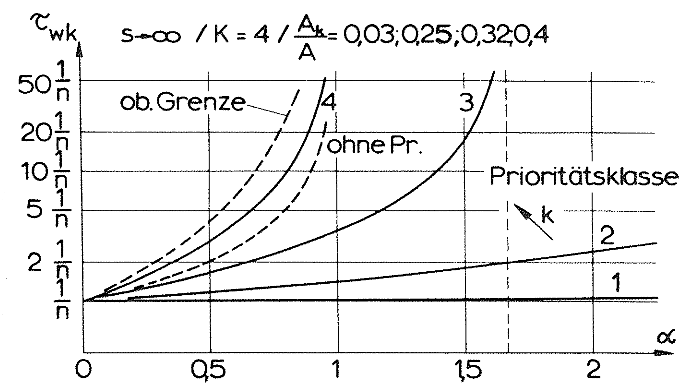

Bild 4.3 Mittlere Wartezeit τ_{wk} der wartenden k-Rufe in Abhängigkeit vom spezifischen Gesamtangebot α im reinen Wartesystem ($s \to \infty$)

Bild 4.4 (Seite 59) zeigt für den Fall von 4 Prioritätsklassen mit gleich großen Teilangeboten das Verhältnis der mittleren Wartezeiten bei den Betriebsarten "ohne Prioritäten" und "mit Prioritäten"; vgl. Gleichung (4.16). Für Rufe hoher Priorität werden die mittleren Wartezeiten durch Einteilen der Rufe in Prioritätsklassen deutlich verringert.

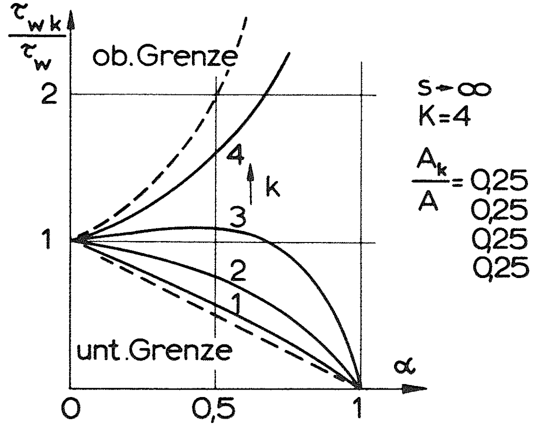

Bild 4.4 Das Verhältnis der mittleren Wartezeiten bei den Betriebsarten "mit Prioritäten" τ_{wk} und "ohne Prioritäten" τ_w nach Gleichung (4.16); K=4 Prioritätsklassen, je mit dem Anteil 25% des spezifischen Gesamtangebots α

4.5 Wartende Rufe in Warte-Verlust-Systemen

In Warte-Verlust-Systemen sind in der Wartebelastung Ω_k alle wartenden k-Rufe enthalten, gleichgültig, ob sie nach ihrer Wartezeit eine Leitung belegen oder ob sie nachträglich aus dem Wartespeicher verdrängt werden. Aus der mittleren Wartezeit τ^*_{wk} aller k-Rufe ergibt sich die mittlere Wartezeit τ^{**}_{wk} aller nicht abgewiesenen k-Rufe [Wahrscheinlichkeit für Verlust durch Abweisen B'_k nach (3.3, 3.4) bzw. (3.16, 3.18)]

$$\tau^{**}_{wk} = \frac{\tau^*_{wk}}{1-B'_k} \qquad \text{für } k=1,2,\ldots K \qquad (4.17)$$

und die mittlere Wartezeit τ'_{wk} aller k-Rufe, die zu warten beginnen [Wahrscheinlichkeit für Wartebeginn W'_k nach (3.6) bzw. (3.17, 3.19)]

$$\tau'_{wk} = \frac{\tau^*_{wk}}{W'_k} \qquad \text{für } k=1,2,\ldots K \qquad (4.18)$$

Die k-Rufe, die sofort eine Leitung belegen, und die k-Rufe, die sofort abgewiesen werden, haben die Wartezeit 0. Die mittleren Wartezeiten τ^{**}_{wk} und τ'_{wk} hängen, wie auch τ^*_{wk}, sowohl von $\alpha(\leq k)$ als auch von $\alpha(<k)$ ab; sie hängen beide von der Abfertigungsreihenfolge ab, während τ^*_{wk} davon unabhängig ist.

Die mittlere Wartezeit τ^*_{wk} aller k-Rufe läßt sich mit den bis hierher errechneten Werten nicht unterteilen in die mittlere Wartezeit τ_{wk} der k-Rufe, die erfolgreich warten, und die mittlere Wartezeit τ''_{wk} der k-Rufe, die nach begonnenem Warten aus dem Speicher verdrängt werden.

$$\tau^*_{wk} = W_k \cdot \tau_{wk} + (W'_k - W_k) \cdot \tau''_{wk} \qquad \text{für } k=1,2,\ldots K \qquad (4.19)$$

[Wahrscheinlichkeit für erfolgreiches Warten W_k nach (3.11) bzw. (3.23); Wahrscheinlichkeit für Verlust durch Verdrängen B''_k nach (3.8, 3.9) bzw. (3.20, 3.21)]

Um die mittleren Wartezeiten τ_{wk} und τ''_{wk} der erfolgreich und der vergebens wartenden k-Rufe zu bestimmen, muß der Warteplatz berücksichtigt werden, auf dem ein Ruf zu warten beginnt.

Wenn ein Ruf während eines Blockierungszeitabschnitts des Leitungsbündels ankommt, dann muß er warten. Es wird ihm ein Warteplatz zugewiesen; möglicherweise reiht er sich zwischen anderen wartenden Rufen in die Warteschlange ein. Durch diesen gleich bei der Ankunft dem Rufe zugewiesenen Warteplatz werden die beiden betrachteten Abfertigungsreihenfolgen verwirklicht.

Die Reihenfolge in der Warteschlange wird nun nicht mehr verändert, außer daß sich neu ankommende Rufe in der Warteschlange dazwischenschieben können. Endet eine Belegung, dann darf jeweils der gerade auf Warteplatz 1 stehende Ruf die frei gewordene Leitung sogleich neu belegen. Dann rücken alle wartenden Rufe je um einen Warteplatz vor.

5. Erfolgreiche Wartezeiten von den verschiedenen Warteplätzen aus

In diesem Kapitel wird ein k-Ruf betrachtet, der auf Warteplatz j steht: j=1,2,...s. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beendet er seine Wartezeit erfolgreich, indem er eine Leitung belegt? Wie lange dauert seine Wartezeit, bis er eine Leitung belegen kann? Zuerst werden die möglichen Ereignisse in einem infinitesimal kleinen Zeitabschnitt $\Delta\tau$ betrachtet. Daraus lassen sich Systeme von Gleichungen für die Wahrscheinlichkeitsdichten, Erfolgswahrscheinlichkeiten, Mindestwertverteilungen und mittleren Wartezeiten für k-Rufe auf Warteplatz j herleiten. Das Ziel dieses Kapitels ist es, die mittlere Wartezeit der erfolgreich wartenden k-Rufe zu bestimmen.

5.1 Gleichungssystem für die Wahrscheinlichkeitsdichten

Zuerst wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartezeiten erfolgreicher k-Rufe gesucht, wenn schon bekannt ist, daß dem betrachteten k-Ruf bei seiner Ankunft der Warteplatz j zugewiesen wird. Die Wahrscheinlichkeitsdichte, daß der im Zeitpunkt $\tau=0$ auf dem Warteplatz j wartende k-Ruf zum Zeitpunkt τ seine Wartezeit erfolgreich beendet, sei $g_j(\tau)$. Diese abkürzende Ausdrucksweise besagt, daß $g_j(\tau)\cdot\Delta t$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß der im Zeitpunkt $\tau=0$ auf dem Warteplatz j wartende k-Ruf seine Wartezeit im Zeitintervall von τ bis $\tau+\Delta t$ erfolgreich beendet. Wenn der Zeitpunkt $\tau=0$ der Ankunftszeitpunkt des betrachteten k-Rufs ist, dann ist τ seine zufällige erfolgreiche Wartezeit.

Zur Zeit t wartet ein k-Ruf auf Warteplatz j. Die Wahrscheinlichkeitsdichte, daß er zur Zeit $t+\tau+\Delta\tau$ seine Wartezeit erfolgreich beendet, ist $g_j(\tau+\Delta\tau)$. Ist der Prozeß stationär, dann sind die Wahrscheinlichkeitsdichten der Wartezeiten unabhängig vom Zeitpunkt t auf dem feststehenden Zeitmaßstab. Für Abfertigung in Ankunftsreihenfolge gilt:

a)

Mit der Wahrscheinlichkeit $A(<k)\cdot\Delta\tau$ wird der wartende k-Ruf im Zeitabschnitt $\Delta\tau$ auf den Warteplatz j+1 zurückgeschoben, weil ein Ruf höherer Priorität eintrifft. Mit der Wahrscheinlichkeit $n\cdot\varepsilon\cdot\Delta\tau$ rückt er auf den Warteplatz j-1 vor, weil eine Belegung endet. Er bleibt mit der Wahrscheinlichkeit $1 - A(<k)\cdot\Delta\tau - n\cdot\varepsilon\cdot\Delta\tau$ auf dem Warteplatz j stehen, weil weder ein Ruf höherer Priorität ankommt noch eine Belegung endet. Nach Verstreichen der Zeit $\Delta\tau$ wartet der k-Ruf noch die Zeit τ, bis er die Wartezeit beendet. Die Übergangsmöglichkeiten sind in Bild 5.1 (Seite 63) dargestellt. Es gibt Nachbarwarteplätze zu beiden Seiten des anfänglichen Warteplatzes j, falls j=2,3,...s-1 ist. Rufeinfall und Belegungsenden sind voneinander unabhängig. Wahrscheinlichkeiten für mehr als eine Zustandsänderung in $\Delta\tau$ sind klein von höherer Ordnung in $\Delta\tau$. Daraus ergibt sich als Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichten:

$$
\begin{aligned}
g_j(\tau+\Delta\tau) \;=\;& A(<k)\cdot\Delta\tau\cdot g_{j+1}(\tau) \\
&+ [1-A(<k)\cdot\Delta\tau - n\cdot\varepsilon\cdot\Delta\tau]\cdot g_j(\tau) \qquad (5.2)\\
&+ n\cdot\varepsilon\cdot\Delta\tau\cdot g_{j-1}(\tau) \qquad \text{für } j=2,3,\ldots s-1
\end{aligned}
$$

b)

Befindet sich der betrachtete k-Ruf an der Spitze der Warteschlange auf Warteplatz j=1, dann belegt er eine Leitung, die im Zeitabschnitt $\Delta\tau$ frei wird, sogleich. Damit beendet er seine Wartezeit im Zeitabschnitt $\Delta\tau$ erfolgreich. Ein k-Ruf auf dem Warteplatz 1 wartet die Zeit $\tau+\Delta\tau$, bis er die Wartezeit beendet, wenn im Zeitabschnitt $\Delta\tau$ eine der folgenden Möglichkeiten auftritt:

1. Ein Ruf höherer Priorität kommt an und schiebt den k-Ruf auf Warteplatz 2 zurück.
2. Kein Ruf höherer Priorität kommt an, und keine der n Belegungen endet. Der k-Ruf bleibt auf Warteplatz 1.

Danach wartet der k-Ruf noch die Zeit τ.

$$
\begin{aligned}
g_1(\tau+\Delta\tau) \;=\;& A(<k)\cdot\Delta\tau\cdot g_2(\tau) \qquad (5.1)\\
&+ [1-A(<k)\cdot\Delta\tau - n\cdot\varepsilon\cdot\Delta\tau]\cdot g_1(\tau) \qquad \text{für } j=1
\end{aligned}
$$

c)

Steht der betrachtete k-Ruf auf dem letzten Warteplatz j=s, dann wird er von einem Ruf aus einer Prioritätsklasse <k, der im Zeitabschnitt $\Delta\tau$ ankommt, aus dem Speicher verdrängt. Da-

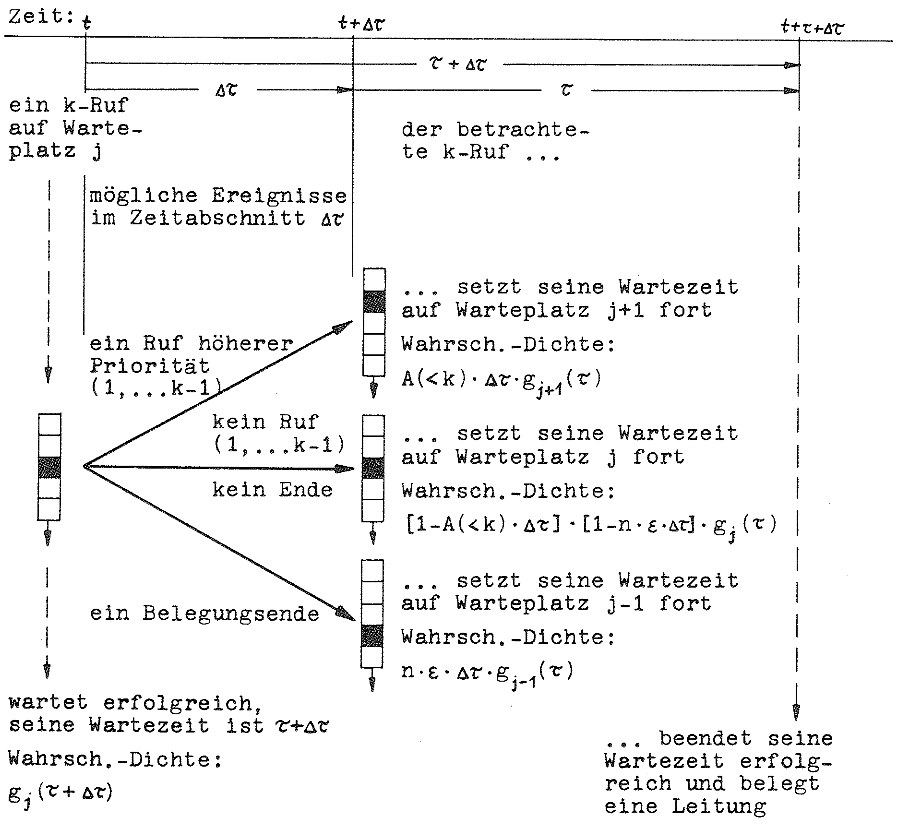

Bild 5.1 veranschaulicht die Herleitung der Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $g_j(\tau)$ (in der Darstellungsart nach C. PALM [19])

mit ist seine Wartezeit ohne Erfolg beendet. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $g_s(\tau+\Delta\tau)$ ergibt sich aus den Übergangsmöglichkeiten im Zeitabschnitt $\Delta\tau$

$$g_s(\tau+\Delta\tau) = [1-A(<k)\cdot\Delta\tau - n\cdot\varepsilon\cdot\Delta\tau]\cdot g_s(\tau) + n\cdot\varepsilon\cdot\Delta\tau\cdot g_{s-1}(\tau) \qquad \text{für } j=s \qquad (5.3)$$

d) Anfangsbedingungen

Die Wahrscheinlichkeitsdichten $g_j(\tau)$ gelten zu jedem Zeitpunkt t. Für die Ereignisse im unmittelbar an einen beliebigen Beobachtungsbeginn t anschließenden Zeitabschnitt Δt sind die Anfangswerte $g_j(0)$ maßgebend. Für erfolgreiche Wartezeiten gelten folgende Anfangsbedingungen:

Für einen k-Ruf auf dem Warteplatz j=1 wird die Wartezeit durch ein Belegungsende im infinitesimal kleinen Zeitabschnitt Δt sogleich erfolgreich beendet.

$$g_1(0)\cdot\Delta t = n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t \qquad \text{für } j=1 \qquad (5.4)$$

Für einen k-Ruf auf einem anderen als auf dem vordersten Warteplatz kann die Wartezeit im infinitesimal kleinen Zeitabschnitt Δt nicht erfolgreich enden.

$$g_j(0)\cdot\Delta t = 0 \qquad \text{für } j=2,3,\ldots s \qquad (5.5)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichten $g_j(\tau)$ beschreiben die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartezeiten nicht vollständig. Wir nehmen ein Resultat der folgenden Herleitung vorweg: Bei $\tau=0$ kommt zu $g_j(\tau)$ eine Einzelwahrscheinlichkeit $(1-Q_j)$ hinzu, nämlich die Wahrscheinlichkeit, daß die Wartezeit vom Warteplatz j aus nicht erfolgreich ist (vgl. Bild 5.2 Seite 69)

Differentialgleichungssystem für Wahrscheinlichkeitsdichten

Im Grenzübergang zu unbegrenzt verkleinerten Zeitabschnitten $\Delta\tau$ erhält man ein System von s linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Um die Gleichungen übersichtlich zu schreiben, wird nach (2.21) und (4.5)

$$\frac{A(<k)}{n} = \alpha(<k) = \lambda \qquad (5.6)$$

eingeführt. Damit und mit $\varepsilon=1$ (1.1) folgt aus (5.1, 5.2, 5.3):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{n}\cdot\frac{dg_1(\tau)}{d\tau} &= \lambda\cdot g_2(\tau) - (1+\lambda)\cdot g_1(\tau) && \text{für } j=1 && (5.7)\\
\frac{1}{n}\cdot\frac{dg_j(\tau)}{d\tau} &= \lambda\cdot g_{j+1}(\tau) - (1+\lambda)\cdot g_j(\tau) + g_{j-1}(\tau) && \text{für } j=2,3,\ldots s-1 && (5.8)\\
\frac{1}{n}\cdot\frac{dg_s(\tau)}{d\tau} &= - (1+\lambda)\cdot g_s(\tau) + g_{s-1}(\tau) && \text{für } j=s && (5.9)
\end{aligned}\right\}$$

Die Anfangsbedingungen für $\tau=0$ folgen aus (5.4, 5.5).

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{1}{n}\cdot g_1(0) & = 1 & \text{für } j=1 & (5.10) \\ \frac{1}{n}\cdot g_j(0) & = 0 & \text{für } j=2,3,\ldots s & (5.11) \end{array}\right\}$$

Aus dem System der Differentialgleichungen für die Wahrscheinlichkeitsdichten werden drei andere Gleichungssysteme hergeleitet.

5.2 Warteerfolg von den verschiedenen Warteplätzen aus

Die Wahrscheinlichkeit Q_j, daß ein Ruf auf Warteplatz j erfolgreich wartet, ist die Wahrscheinlichkeit, daß seine Wartezeit zu irgendeinem Zeitpunkt im Intervall nicht negativer Zeiten erfolgreich endet.

$$Q_j = \int_{\tau=0}^{\infty} g_j(\tau)\cdot d\tau \qquad \text{für } j=1,2,\ldots s \qquad (5.12)$$

Die Differentialgleichungen (5.7, 5.8, 5.9) werden integriert; die Integrationsgrenzen sind 0 und ∞. Für endliche mittlere Wartezeiten $\int_{\tau=0}^{\infty} \tau\cdot g_j(\tau)\cdot d\tau$ ist $\lim_{\tau\to\infty} g_j(\tau) = 0$:

$$\int_{\tau=0}^{\infty} \frac{dg_j(\tau)}{d\tau}\cdot d\tau = -g_j(0) \qquad \text{für } j=1,2,\ldots s \qquad (5.13)$$

Damit ergibt sich aus (5.7, 5.8, 5.9) ein System von s linearen Gleichungen für Q_j.

$$\left.\begin{array}{llll} \lambda\cdot Q_2 - (1+\lambda)\cdot Q_1 + 1 & = 0 & \text{für } j=1 & (5.14) \\ \lambda\cdot Q_{j+1} - (1+\lambda)\cdot Q_j + Q_{j-1} & = 0 & \text{für } j=2,3,\ldots s-1 & (5.15) \\ \quad - (1+\lambda)\cdot Q_s + Q_{s-1} & = 0 & \text{für } j=s & (5.16) \end{array}\right\}$$

Die Gleichungen werden durch $1+\lambda$ dividiert. Mit

$$p = \frac{\lambda}{1+\lambda} \qquad (5.17)$$

$$q = \frac{1}{1+\lambda} \qquad (5.18)$$

ergibt sich

$$\left.\begin{array}{llll} Q_1 & = p\cdot Q_2 + q & \text{für } j=1 & (5.19) \\ Q_j & = p\cdot Q_{j+1} + q\cdot Q_{j-1} & \text{für } j=2,3,\ldots s-1 & (5.20) \\ Q_s & = \qquad q\cdot Q_{s-1} & \text{für } j=s & (5.21) \end{array}\right\}$$

Das Gleichungssystem (5.14, 5.15, 5.16) kann unmittelbar gelöst werden. Durch Umformen erhalten wir aber die Gleichungen (5.19, 5.20, 5.21), die mit denen des in der Literatur bereits behandelten sogenannten Ruin-Problems übereinstimmen. Um die dafür bekannte Lösung benützen zu können, wenden wir uns dem Ruin-Problem zu.

Zufallsprozeß im Wartespeicher und Ruin-Problem

Der Zufallsprozeß, wie ein wartender k-Ruf in der Warteschlange bei einem Belegungsende um einen Warteplatz vorrückt oder durch einen ankommenden Ruf höherer Priorität um einen Warteplatz zurückgeschoben wird, hängt von der kontinuierlichen Zeit t ab. Der Zufallsprozeß entspricht dem Auf und Ab des Kapitals eines Spielers im Glücksspiel. Ein Spieler spielt mit seinem Gegner. Er gewinnt bei einem Ausspielen mit der Wahrscheinlichkeit p eine Münze aus dem Kapital seines Gegners; er verliert mit der Wahrscheinlichkeit q=1-p eine Münze an seinen Gegner. Das Ruin-Problem der zwei Spieler wurde von W. Feller in seinem Buch "An introduction to probability theory" [34] behandelt.

Der Warteplatz j, auf dem der k-Ruf steht, entspricht dem Kapital z des Glücksspielers. Die Zahl der Warteplätze, um 1 erhöht, s+1, entspricht dem kombinierten Kapital a beider Spieler. Die Wahrscheinlichkeit für Warteerfolg Q_j entspricht der Wahrscheinlichkeit für Ruin q_z des Spielers.

$$j = z; \qquad s+1 = a; \qquad Q_j = q_z \qquad (5.22)$$

Damit ist das Gleichungssystem (5.19, 5.20, 5.21) mit den Gleichungen (XIV.2.1, XIV.2.2) identisch, die W. Feller für das klassische Ruin-Problem angibt [34 S.313]. Mit (5.22) lautet dann die Lösung nach (XIV.2.4, XIV.2.5)

$$Q_j = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1} - \left(\frac{q}{p}\right)^{j}}{\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1} - 1} & \text{für } p \neq q \\[2ex] 1 - \dfrac{j}{s+1} & \text{für } p = q = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (5.23)$$

oder mit (5.17, 5.18) im Warte-Verlust-System

$$Q_j = \begin{cases} \dfrac{1 - \lambda^{s+1-j}}{1 - \lambda^{s+1}} & \text{für } \lambda \neq 1 \\[1ex] & \text{für } s = 1,2,\ldots \text{endlich} \\[1ex] 1 - \dfrac{j}{s+1} & \text{für } \lambda = 1 \end{cases} \qquad (5.24)$$

und im Wartesystem

$$Q_j = 1 \qquad \text{für } \lambda < 1 \text{ und } s \to \infty \qquad (5.25)$$

Wahrscheinlichkeit für erfolgreiches Warten

Mit der Wahrscheinlichkeit $p_{j,k}$ wird einem ankommenden k-Ruf der Warteplatz j zugewiesen. Von dort aus wartet er mit der Wahrscheinlichkeit Q_j erfolgreich. Die Wahrscheinlichkeit für erfolgreiches Warten W_k ist

$$W_k = \sum_{j=1}^{s} p_{j,k} \cdot Q_j \qquad \text{für } k = 1,2,\ldots K \qquad (5.26)$$

Werden die Gleichungen (3.2, 2.23, 5.6 und 5.24) eingesetzt, so ergibt sich

$$W_k = \frac{\alpha(\leqq k) - \alpha(<k) - \alpha(\leqq k)^{s+1} \cdot [1-\alpha(<k)] + \alpha(<k)^{s+1} \cdot [1-\alpha(\leqq k)]}{[1-\alpha(\leqq k)^{s+1}] \cdot [1-\alpha(<k)^{s+1}] \cdot [\alpha(\leqq k) - \alpha(<k)]} \cdot E \qquad (5.27)$$

für $\alpha(<k) \neq 1$, $\alpha(\leqq k) \neq 1$ und $\alpha_k = \alpha(\leqq k) - \alpha(<k) \neq 0$

Werden in (3.11) die Gleichungen (3.10, 3.3) eingesetzt, dann ergibt sich wiederum (5.27). Die Formel (5.27) vermeidet die Differenzen von Zahlen, die in manchen Fällen in der Gleichung (3.10) etwa gleich groß sind sein können.

Wahrscheinlichkeit für Verlust durch Verdrängen

Ein k-Ruf, der auf Warteplatz j zu warten beginnt, wird mit

der Wahrscheinlichkeit $1-Q_j$ keinen Erfolg haben. Die Wahrscheinlichkeit für Verlust durch Verdrängen ist

$$B''_k = \sum_{j=1}^{s} p_{j,k} \cdot (1-Q_j) \qquad (5.28)$$

5.3 Mindestwertverteilungsfunktionen

Gleichungssystem für die Mindestwertverteilungsfunktionen

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein zum Zeitpunkt $\tau=0$ auf Warteplatz j stehender k-Ruf länger als die Zeit τ wartet und danach seine Wartezeit erfolgreich beendet, ist die Mindestwertverteilungsfunktion

$$G_j(>\tau) = \int_{\vartheta=\tau}^{\infty} g_j(\vartheta) \cdot d\vartheta \qquad (5.29)$$

Die Differentialgleichungen (5.7, 5.8, 5.9) werden integriert; die untere Integrationsgrenze ist jetzt τ. Mit $\lim_{\tau\to\infty} g_j(\tau) = 0$ ergibt sich

$$\int_{\vartheta=\tau}^{\infty} \frac{dg_j(\vartheta)}{d\vartheta} \cdot d\vartheta = -g_j(\tau) = \frac{dG_j(>\tau)}{d\tau} \qquad (5.30)$$

somit

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n} \cdot \frac{dG_1(>\tau)}{d\tau} &= \lambda \cdot G_2(>\tau) - (1+\lambda) \cdot G_1(>\tau) && \text{für } j=1 && (5.31) \\ \frac{1}{n} \cdot \frac{dG_j(>\tau)}{d\tau} &= \lambda \cdot G_{j+1}(>\tau) - (1+\lambda) \cdot G_j(>\tau) + G_{j-1}(>\tau) && \text{für } j=2,3,\ldots s-1 && (5.32) \\ \frac{1}{n} \cdot \frac{dG_s(>\tau)}{d\tau} &= - (1+\lambda) \cdot G_s(>\tau) + G_{s-1}(>\tau) && \text{für } j=s && (5.33) \end{aligned}\right\}$$

Die Anfangsbedingungen der Mindestwertverteilungsfunktionen sind mit (5.12)

$$G_j(>0) = Q_j \qquad \text{für } j=1,2,\ldots s \qquad (5.34)$$

Das ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein k-Ruf, dem zum Ankunftszeitpunkt $\tau=0$ der Warteplatz j zugewiesen wird, eine beliebige Zeit $\tau>0$ wartet und daß er dann seine Wartezeit erfolgreich beendet. Das ist gerade die Wahrscheinlichkeit für Warteerfolg vom Warteplatz j aus.

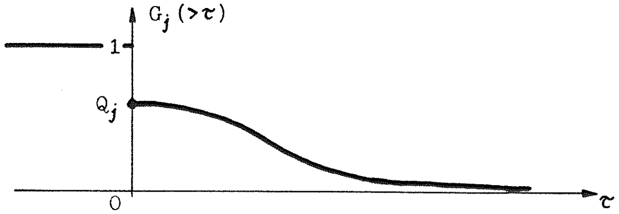

Bild 5.2 Die Form der Mindestwertverteilungsfunktion $G_j(>\tau)$

Mindestwertverteilungsfunktion der Wartezeit aller erfolgreich wartenden Rufe

Mit der Wahrscheinlichkeit $p_{j,k}$ beginnt ein k-Ruf auf dem Warteplatz j zu warten, j=1,2,...s. Mit der Wahrscheinlichkeit $G_j(>\tau)$ wartet er dann länger als die Zeit τ, bevor er seine Wartezeit erfolgreich beendet. Die Mindestwertverteilungsfunktion der Wartezeiten, die nur auf die erfolgreich wartenden k-Rufe bezogen ist, heißt $W_k(>\tau)$. Mit $G_j(>0)=Q_j$

$$W_k(>\tau) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{s} p_{j,k}\cdot G_j(>\tau)}{\sum\limits_{j=1}^{s} p_{j,k}\cdot G_j(>0)} \qquad (5.35)$$

Mit (5.26) folgt daraus schließlich die Wahrscheinlichkeit für Überschreiten der Wartedauer τ bezogen auf die erfolgreich wartenden k-Rufe

$$W_k(>\tau) = \frac{1}{W_k}\cdot\sum_{j=1}^{s} p_{j,k}\cdot G_j(>\tau) \qquad (5.36)$$

Die Auflösung des Systems von Differentialgleichungen (5.31 bis 5.34) wird im nächsten Kapitel behandelt. Zuerst wird die schon im Abschnitt 4.5 gestellte Frage nach der mittleren Wartezeit τ_{wk} der erfolgreichen k-Rufe beantwortet.

5.4 Mittlere erfolgreiche Wartezeiten von den verschiedenen Warteplätzen aus

Der Erwartungswert der erfolgreichen Wartezeiten vom Warteplatz j aus folgt aus der Wahrscheinlichkeitsdichte $g_j(\tau)$ mit

$$d_j = \int_{\tau=0}^{\infty} \tau\cdot g_j(\tau)\cdot d\tau \qquad (5.37)$$

Der Erwartungswert kann unmittelbar aus der Mindestwertverteilungsfunktion berechnet werden [19, 33 S.81].

$$d_j = \int_{\tau=0}^{\infty} G_j(>\tau)\cdot d\tau \qquad (5.38)$$

Die Differentialgleichungen (5.31, 5.32, 5.33) werden integriert. Die untere Integrationsgrenze ist τ=0. Mit (5.38, 5.30, 5.12) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{n}\cdot Q_1 &= \lambda\cdot d_2 - (1+\lambda)\cdot d_1 && \text{für } j=1 && (5.39)\\
-\frac{1}{n}\cdot Q_j &= \lambda\cdot d_{j+1} - (1+\lambda)\cdot d_j + d_{j-1} && \text{für } j=2,3,\dots s-1 && (5.40)\\
-\frac{1}{n}\cdot Q_s &= - (1+\lambda)\cdot d_s + d_{s-1} && \text{für } j=s && (5.41)
\end{aligned}\right\}$$

Die Gleichungen werden mit n durchmultipliziert. Mit

$$T_j = n\cdot(1+\lambda)\cdot d_j \qquad \text{für } j=1,2,\dots s \qquad (5.42)$$

ergibt sich mit (5.17, 5.18)

$$\left.\begin{aligned}
T_1 &= p\cdot T_2 + Q_1 && \text{für } j=1 && (5.43)\\
T_j &= p\cdot T_{j+1} + q\cdot T_{j-1} + Q_j && \text{für } j=2,3,\dots s-1 && (5.44)\\
T_s &= q\cdot T_{s-1} + Q_s && \text{für } j=s && (5.45)
\end{aligned}\right\}$$

Lösung der Differenzengleichung

Statt (5.43, 5.44, 5.45) gilt auch die inhomogene Differenzengleichung

$$T_j = p\cdot T_{j+1} + q\cdot T_{j-1} + Q_j \qquad \text{für } j=1,2,\dots s \qquad (5.46)$$

mit Q_j nach (5.23) und mit den Randbedingungen

$$T_0 = 0 \qquad T_{s+1} = 0 \qquad (5.47)$$

Wir wenden die Methode der Partikularlösungen an.

Zuerst betrachten wir den Fall $p \neq q$. Die homogene Differenzengleichung $T_j = p\cdot T_{j+1} + q\cdot T_{j-1}$ besitzt die Lösungen $T_j = 1$ und $T_j = \left(\frac{q}{p}\right)^j$. Der Ansatz

$$T_j = \frac{j}{q-p}\cdot\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1} + \left(\frac{q}{p}\right)^j}{\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1} - 1}$$

ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung (5.46). Die allgemeine Lösung ist

$$T_j = C_1 + C_2\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^j + \frac{j}{q-p}\cdot\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1} + \left(\frac{q}{p}\right)^j}{\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1} - 1} \qquad \text{für } j=0,1,\ldots s+1$$

Die Konstanten C_1 und C_2 werden so bestimmt, daß die Randbedingungen (5.47) erfüllt werden. Daraus ergibt sich die spezielle Lösung von (5.46, 5.47)

$$T_j = \frac{j}{q-p}\cdot\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1} + \left(\frac{q}{p}\right)^j}{\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1} - 1} - \frac{s+1}{q-p}\cdot 2\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1}\cdot\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^j - 1}{\left[\left(\frac{q}{p}\right)^{s+1} - 1\right]^2} \qquad (5.48)$$

für $p \neq q$

Für $p=q=\frac{1}{2}$ besitzt die homogene Differenzengleichung $T_j = 1/2\cdot T_{j+1} + 1/2\cdot T_{j-1}$ die Lösungen $T_j = 1$ und $T_j = j$. Der Ansatz

$$T_j = -j^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot j^3$$

ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung (5.46). Die allgemeine Lösung ist

$$T_j = C_1 + C_2\cdot j - j^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot j^3 \qquad \text{für } j=0,1,\ldots s+1$$

Die Konstanten C_1 und C_2 werden aus den Randbedingungen (5.47) ermittelt. Die spezielle Lösung von (5.46, 5.47) lautet

$$T_j = \frac{2}{3}\cdot(s+1)\cdot j - j^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}\cdot j^3 \qquad \text{für } p=q=\frac{1}{2} \qquad (5.49)$$

Mit (5.17, 5.18, 5.42) ergibt sich die mittlere Wartezeit eines k-Rufs vom Warteplatz j aus bis zum Erfolg bei Abfertigen in Ankunftsreihenfolge nach (5.48)

$$d_j = \frac{1}{n\cdot(1-\lambda)}\cdot\left[j\cdot\frac{1+\lambda^{s+1-j}}{1-\lambda^{s+1}} - 2\cdot(s+1)\cdot\frac{\lambda^{s+1-j} - \lambda^{s+1}}{(1-\lambda^{s+1})^2}\right] \qquad \text{für } \lambda \neq 1 \qquad (5.50)$$

mit $\lambda = \alpha(<k)$ nach (5.6). Für $\lambda = 1$ gilt (5.49) mit (5.42).

<u>Mittlere Wartezeit der erfolgreichen und der verdrängten Rufe</u>

Mit der Wahrscheinlichkeit $p_{j,k}$ wird einem ankommenden k-Ruf der Warteplatz j zugewiesen. Von dort aus gilt für ihn die mittlere Wartezeit d_j, bis er eine Leitung belegen kann. Die mittlere Wartezeit aller k-Rufe, die erfolgreich warten, ist bei Abfertigung in Ankunftsreihenfolge

$$\tau_{wk} = \frac{\sum_{j=1}^{s} p_{j,k}\cdot d_j}{\sum_{j=1}^{s} p_{j,k}\cdot Q_j} = \frac{1}{W_k}\cdot\sum_{j=1}^{s} p_{j,k}\cdot d_j \qquad (5.51)$$

Nachdem τ_{wk} aus (5.51) bekannt ist, kann nun die mittlere Wartezeit τ''_{wk} der nachträglich verdrängten k-Rufe mit Gleichung (4.19) berechnet werden.

<u>Warte-Verlust-System mit einem Warteplatz</u>

Für s=1 Warteplatz reduzieren sich die Gleichungssysteme (5.14 bis 5.16) und (5.39 bis 5.41) auf eine Gleichung für j=1. Die mittlere Wartezeit d_1 bis zum Erfolg vom Warteplatz 1 aus ist mit (5.6) nach (5.39)

$$d_1 = \frac{1}{n\cdot[1+\alpha(<k)]}\cdot Q_1 \qquad \text{für } s=1$$

Nach (5.26, 3.2, 2.23) ist die Wahrscheinlichkeit für erfolgreiches Warten

$$W_k = p_{1,k}\cdot Q_1 = \frac{1}{[1+\alpha(\leq k)]\cdot[1+\alpha(<k)]}\cdot E \qquad \text{für } s=1$$

Mit (5.51) ergibt sich daraus die mittlere Wartezeit der erfolgreichen k-Rufe

$$\tau_{wk} = \frac{1}{n\cdot[1+\alpha(<k)]} \qquad \text{für } s=1$$

Aus (4.6, 4.18) wird die mittlere Wartezeit τ'_{wk} der k-Rufe, die zu warten beginnen, berechnet:

$$\tau'_{wk} = \frac{1}{n\cdot[1+\alpha(<k)]} \qquad \text{für } s=1$$

Mit (4.18, 4.19) folgt daraus für das Warte-Verlust-System mit einem Warteplatz: Die mittlere Wartezeit τ'_{wk} der k-Rufe, die zu warten beginnen, ist gleich der mittleren Wartezeit τ_{wk} der erfolgreich wartenden k-Rufe und ist ferner gleich der mittleren Wartezeit τ''_{wk} der verdrängten k-Rufe.

$$\tau'_{wk} = \tau_{wk} = \tau''_{wk} = \frac{\tau^*_{wk}}{W'_k} \quad \text{für } s=1 \text{ und } k=2,3,\ldots K \qquad (5.52)$$

<u>Ein Beispiel</u> (vgl. Bild 5.3)

In einem kombinierten Warte-Verlust-System mit s=2 Warteplätzen kommen Rufe aus K=4 Prioritätsklassen an. Die Angebotsanteile sind nach (3.27) gegeben. Die mittleren Wartezeiten τ_{wk} bis zum Beginn der Belegungen bleiben wegen der geringen Zahl von Warteplätzen in einem schmalen Bereich. Die mittlere Wartezeit τ_{w4} der 4-Rufe steigt zuerst mit wachsendem Angebot an, genauso wie im reinen Wartesystem (vgl. Bild 4.3 Seite 58). Je größer das Angebot wird, desto mehr kommt es dazu, daß Rufe geringer Priorität entweder nach kurzer Wartezeit erfolgreich sind oder aber verdrängt werden. Darum erreicht die mittlere Wartezeit τ_{w4} ein Maximum und fällt dann wieder. Ähnliche Verläufe zeigen die mittleren Wartezeiten τ_{wk} für k≧2.

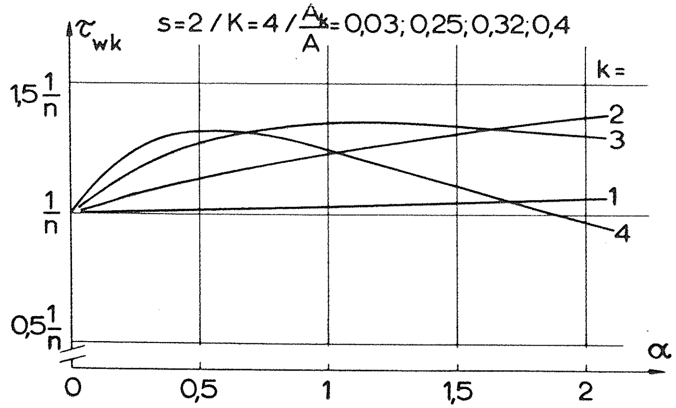

Bild 5.3 Mittlere Wartezeiten τ_{wk} der erfolgreich wartenden k-Rufe in Abhängigkeit vom spezifischen Angebot α

5.5 Erfolgreiche Wartezeiten bei inverser Reihenfolge

Zuerst wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartezeiten bis zum Belegen einer Leitung gesucht. Dabei ist als bekannt vorausgesetzt, daß dem betrachteten k-Ruf bei seiner Ankunft der Warteplatz j zugewiesen wird.

Bei Ankunftsreihenfolge schiebt jeder ankommende Ruf höherer Priorität (Prioritätsklassen <k) den betrachteten k-Ruf im Speicher um einen Warteplatz zurück. Bei inverser Reihenfolge schiebt jeder ankommende Ruf höherer oder gleicher Priorität (Prioritätsklassen ≦k) den betrachteten k-Ruf um einen Warteplatz zurück. Deshalb gelten die Ausgangsgleichungen (5.1 bis 5.5) auch für inverse Reihenfolge, wenn A(<k) jeweils durch A(≦k) ersetzt wird. Für λ ist deshalb einzusetzen

$$\lambda^{(i)} = \alpha(\leqq k) \qquad (5.53)$$

Ein k-Ruf warte in einem Warte-Verlust-System mit Abfertigen in inverser Reihenfolge. Seine Wartezeit hängt ab von den n Belegungsdauern im Leitungsbündel und von den Belegungsdauern der Rufe, hinter denen sich der betrachtete k-Ruf in die Warteschlange einreiht. Seine Wartezeit wird verlängert durch neu ankommende Rufe der Prioritätsklassen 1,2 bis k, die eine Leitung belegt haben müssen, bevor der betrachtete k-Ruf an die Reihe kommt. Das gleiche gilt Wort für Wort für die Wartezeit eines wartenden (k+1)-Rufs bei Ankunftsreihenfolge. Deshalb muß $\lambda^{(i)} = \alpha(<k+1) = \alpha(\leqq k)$ sein.

Einem ankommenden k-Ruf wird der Warteplatz j zugewiesen. Bei Ankunftsreihenfolge gilt die Wahrscheinlichkeit $p_{j,k}$ nach (3.2), bei inverser Reihenfolge gilt $p^{(i)}_{j,k}$ nach (3.14, 3.15). Man erhält also $p^{(i)}_{j,k}$ aus $p_{j,k}$, wenn $\alpha(\leqq k)$ durch $\alpha(\leqq k-1) = \alpha(<k)$ ersetzt wird. Deshalb gilt folgender Satz:

> Die für Ankunftsreihenfolge gültigen Gleichungen des 5. Kapitels gelten für inverse Reihenfolge, wenn $\alpha(\leqq k)$ durch $\alpha(<k)$ und außerdem $\alpha(<k)$ durch $\alpha(\leqq k)$ ersetzt werden. Satz (5.54)

6. Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartezeiten bis zum Belegen einer Leitung

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein zum Zeitpunkt $\tau=0$ auf Warteplatz j stehender k-Ruf länger als die Zeit τ wartet und danach seine Wartezeit erfolgreich beendet, indem er eine Leitung belegt, ist die Mindestwertverteilungsfunktion $G_j(>\tau)$, vergleiche (5.29). Sie wird aus dem System von Differentialgleichungen (5.31 bis 5.34) bestimmt. Dann wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit für Überschreiten der Wartedauer τ bezogen auf die erfolgreich wartenden k-Rufe $W_k(>\tau)$ berechnet, vergleiche (5.36).

Zeitmaßstab

Alle Zeiten sind auf die mittlere Belegungsdauer normiert. In den Gleichungen für die zeitabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten ist die Zeit t ein fester Maßstab, der nicht verschoben wird (Abschnitt 2.2). Die Wahrscheinlichkeiten $P(\xi_k, \leqq k; t)$ sind zeitabhängig, weil sie von den Anfangswerten beeinflußt werden. Sie hängen bei stationärem Prozeß nicht mehr vom Zeitpunkt t ab (Abschnitt 2.3). Die Wartezeit ist eine Zufallsvariable. Die Zeit τ ist der Maßstab für die Wartezeit; dieser Zeitmaßstab wird immer so verschoben, daß $\tau=0$ der Ankunftszeitpunkt des k-Rufs ist. Die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(\xi_k, \leqq k)$ hängen nicht vom Zeitpunkt t ab. Ebenso sind die Wahrscheinlichkeiten $G_j(>\tau)$ und $W_k(>\tau)$ zeitinvariant. Sie hängen beim stationären Prozeß nicht mehr vom Zeitpunkt t auf dem festen Zeitmaßstab ab, denn die Wartezeiten werden von den Anfangszuständen nicht mehr beeinflußt.

6.1 Wartende Rufe höchster Priorität bei Ankunftsreihenfolge

Wie bei den mittleren Wartezeiten im Abschnitt 4.3 werden zuerst wartende Rufe höchster Priorität betrachtet. Wartende 1-Rufe werden bei Ankunftsreihenfolge niemals zurückgeschoben, denn es gibt keine Rufe höherer Priorität. Das Differentialgleichungssystem (5.31 bis 5.33) vereinfacht sich, weil

$$\alpha(<1) = \lambda = 0 \qquad \text{für } k=1 \qquad (6.1)$$

Jeder 1-Ruf, der auf Warteplatz j zu warten beginnt, beendet seine Wartezeit erfolgreich. Die Anfangsbedingungen werden damit nach (5.34, 5.24)

$$G_j(>0) = Q_j = 1 \qquad \text{für } k=1 \text{ und } j=1,2,\ldots s \qquad (6.2)$$

Die Lösung des Systems von Differentialgleichungen (5.31 bis 5.34) lautet:

$$G_j(>\tau) = e^{-n\cdot\tau}\cdot\left[1 + \frac{n\cdot\tau}{1} + \frac{(n\cdot\tau)^2}{2!} + \ldots + \frac{(n\cdot\tau)^{j-1}}{(j-1)!}\right] \qquad (6.3) \text{ für } k=1$$

Das ist die Mindestwertverteilungsfunktion der Summe von j voneinander unabhängigen zufälligen Zeiten, die alle der gleichen negativ exponentiellen Verteilung $e^{-n\cdot\tau}$ gehorchen [28 S.20]. Gelangt ein 1-Ruf auf den Warteplatz j, dann muß er j Belegungsenden abwarten, bevor er selbst eine Leitung belegen kann.

In (5.36) werden W_1 nach (5.27), $p_{j,1}$ nach (3.2) und $G_j(>\tau)$ nach (6.3) eingesetzt. Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für Überschreiten der Wartedauer τ, bezogen auf die wartenden 1-Rufe, im kombinierten Warte-Verlust-System

$$W_1(>\tau) = e^{-n\cdot\tau}\cdot\frac{1}{1-\alpha_1^s}\cdot\left[1-\alpha_1^s + \frac{A_1\cdot\tau}{1}\cdot(1-\alpha_1^{s-1}) + \ldots + \frac{(A_1\cdot\tau)^{s-1}}{(s-1)!}\cdot(1-\alpha_1)\right]$$

$$= e^{-n\cdot\tau}\cdot\frac{1}{1-\alpha_1^s}\cdot\left[1-\alpha_1^s + \frac{n\tau}{1}\cdot(\alpha_1-\alpha_1^s) + \ldots + \frac{(n\cdot\tau)^{s-1}}{(s-1)!}\cdot(\alpha_1^{s-1}-\alpha_1^s)\right]$$

$$\text{für } \tau \geqq 0 \text{ und } k=1 \qquad (6.4)$$

oder mit (2.14)

$$W_1(>\tau) = e^{-n\cdot\tau}\cdot\frac{1}{1-\alpha_1^s}\cdot\frac{(A_1\cdot\tau)^{s-1}}{(s-1)!}\cdot\left[\frac{1}{E_{1,s-1}(A_1\cdot\tau)} - \frac{\alpha_1}{E_{1,s-1}(n\cdot\tau)}\right]$$

Für $A_1=n$ ergibt sich, wenn man W_1 aus (3.11, 3.4) berechnet und in (5.36) einsetzt

$$W_1(>\tau) = e^{-n\cdot\tau} \sum_{\zeta=0}^{s-1} \frac{(n\cdot\tau)^\zeta}{\zeta!}\left(1-\frac{\zeta}{s}\right) \qquad \text{für } \tau\geq 0 \text{ und } k=1 \quad (6.5)$$

$$= e^{-n\cdot\tau}\cdot\frac{(n\cdot\tau)^{s-1}}{(s-1)!}\cdot\left[\frac{1}{E_{1,s-1}(n\cdot\tau)} - \frac{s-1}{s}\cdot\frac{1}{E_{1,s-2}(n\cdot\tau)}\right]$$

Für unbegrenzten Wartespeicher $s\to\infty$ ergibt sich aus (5.36)

$$W_1(>\tau) = e^{-(1-\alpha_1)\cdot n\cdot\tau} \qquad \text{für } \tau\geq 0 \text{ und } \alpha_1<1 \quad (6.6)$$

Setzt man statt des spezifischen Angebots $\alpha_1=A_1/n$ der 1. Prioritätsklasse das spezifische Gesamtangebot $\alpha=A/n$ in (6.4) ein, dann erhält man die Wahrscheinlichkeitsverteilung der wartenden Rufe im kombinierten Warte-Verlust-System ohne Prioritäten mit Abfertigen in Ankunftsreihenfolge [30,29,27].

> Die Wartezeitverteilung der wartenden Nachrichten mit höchster Priorität ist identisch mit der Verteilung, die sich ergibt, wenn der Vermittlung nur das Angebot A_1 zugeführt wird. Satz (6.7)

Dieser Satz gilt für das kombinierte Warte-Verlust-System mit n Leitungen und s Warteplätzen bei Abfertigen in Ankunftsreihenfolge. H. STÖRMER hat den gleichlautenden Satz für den speziellen Fall eines reinen Wartesystems ($s\to\infty$) mit einer Leitung und unbegrenzt vielen Warteplätzen ausgesprochen [31,33,13]. Der Satz (6.7) ergibt sich aus folgender Überlegung: Bei nicht unterbrechender Priorität bewirken n Belegungen beliebiger Prioritätsklassen im Bündel, daß ein 1-Ruf warten muß. Wartet ein 1-Ruf, dann stehen alle bereits wartenden Rufe mit geringerer Priorität hinter ihm. Vor ihm sind nur wartende 1-Rufe. Alle während seiner Wartezeit ankommenden Rufe reihen sich hinter ihm ein. Daher ist der Ablauf des Wartens für einen 1-Ruf so, als würde dem System von dem Zeitpunkt unmittelbar vor der Ankunft des Rufs an während seiner Wartezeit nur das Angebot der höchsten Priorität A_1 zugeführt.

6.2 Wartende Rufe in Wartesystemen

Das Differentialgleichungssystem

Wie bei den mittleren Wartezeiten im Abschnitt 4.4 wird als nächstes das Wartesystem betrachtet. Das System (5.31 bis 5.33) umfaßt unendlich viele Differentialgleichungen. Wir führen eine neue normierte Zeit u ein:

$$u = n\cdot\tau \qquad (6.8)$$

Die neue Zeiteinheit ist der mittlere Zeitabstand von Belegungsende zu Belegungsende im voll belegten Bündel von n Leitungen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein zum Zeitpunkt u=0 auf Warteplatz j stehender k-Ruf länger als die Zeit u wartet, ist mit (6.8)

$$F_j(>u) = G_j(>\tau) \qquad (6.9)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, daß ein k-Ruf, der zur Zeit u=0 auf dem Warteplatz j steht, die Wartezeit u hat, ist mit (6.9) und (5.30)

$$f_j(u) = -\frac{dF_j(>u)}{du} = -\frac{1}{n}\cdot\frac{dG_j(>\tau)}{d\tau} = \frac{1}{n}\cdot g_j(\tau) \qquad (6.10)$$

Aus (5.31, 5.32) ergibt sich

$$\frac{dF_j(>u)}{du} = \lambda\cdot F_{j+1}(>u) - (1+\lambda)\cdot F_j(>u) + F_{j-1}(>u) \qquad (6.11)$$
$$\text{für } j=1,2,\ldots \text{ und } s\to\infty \text{ und } \lambda<1$$

mit der Randbedingung

$$F_0(>u) = 0 \qquad \text{für } j=0 \text{ und } u\geq 0 \quad (6.12)$$

Die Anfangswerte sind nach (5.34, 5.25) alle 1:

$$F_j(>0) = 1 \qquad \text{für } j=1,2,\ldots \text{ und } s\to\infty \quad (6.13)$$

Das System von Differentialgleichungen (6.11 bis 6.13) enthält wegen (6.8) die Leitungszahl n nicht mehr. Die Lösung für n=1 Leitung findet man bei S.A. DRESSIN und E. REICH [8]. Sie wird im folgenden angegeben und für beliebige Leitungszahl n modifiziert (vgl. [28 S.76 und S.106; 6]).

Die Laplace-Transformierte der Lösung

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $w_k(\tau)$, daß ein k-Ruf im Wartesystem die Wartezeit τ hat. Als Lösung des Differentialgleichungssystems (6.11 bis 6.13) wird die Laplace-Transformierte $\omega_k(\sigma)$ der Wahrscheinlichkeitsdichte $\frac{1}{n}\cdot w_k(\tau)$ angegeben. Dabei hat man sich durch Gleichung (6.16) von der Bedingung des speziellen Warteplatzes j freigemacht. Der dimensionslosen normierten Zeit $u=n\cdot\tau$ im Originalraum steht die komplexe Variable σ im Bildraum gegenüber.

$$\omega_k(\sigma) = \int_{u=0}^{\infty} e^{-\sigma\cdot u}\cdot\frac{1}{n}\cdot w_k\left(\frac{u}{n}\right)\cdot du = \int_{\tau=0}^{\infty} e^{-\sigma\cdot n\cdot\tau}\cdot w_k(\tau)\cdot d\tau \tag{6.14}$$

Die Lösung lautet [8,28]

$$\omega_k(\sigma) = \frac{2\cdot[1-\alpha(\leqq k)]}{1+\alpha(<k)-2\cdot\alpha(\leqq k)+\sigma+\sqrt{[1+\alpha(<k)+\sigma]^2-4\cdot\alpha(<k)}} \tag{6.15}$$

für $s\to\infty$ und $\alpha(\leqq k)<1$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeitsdichte $w_k(\tau)$ läßt sich nicht als geschlossener Ausdruck durch Rücktransformation aus $\omega_k(\sigma)$ herleiten. (1966 gab R.H. DAVIS eine Formel für die gesuchte Wartezeitverteilung $W_k(>\tau)$ an, die aber sehr umfangreiche Berechnungen erfordert [6].) Jede Wahrscheinlichkeitsverteilung ist auch durch ihre Momente bestimmt. Deshalb werden im folgenden die Momente der Wartezeitverteilung berechnet.

Außerdem kann man leicht den Anfangswert der Wahrscheinlichkeitsdichte $w_k(\tau)$ angeben. Aus (5.36) folgt durch Ableiten nach τ:

$$w_k(\tau) = \frac{1}{W_k}\cdot\sum_{j=1}^{s} p_{j,k}\cdot g_j(\tau) \tag{6.16}$$

Wird $p_{j,k}$ nach (3.2, 2.27), $g_j(0)$ nach (5.10, 5.11) und $W_k=E$ nach (3.11) eingesetzt, dann ergibt sich

$$w_k(0) = n\cdot[1-\alpha(\leqq k)] \tag{6.17}$$

Ableitung der Laplace-Transformierten und Anfangsmomente

Das auf den Ursprung $\tau=0$ bezogene Moment ν-ter Ordnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung wartender k-Rufe ist [35]

$$M_{\nu(k)} = \int_{\tau=0}^{\infty} \tau^{\nu}\cdot w_k(\tau)\cdot d\tau \tag{6.18}$$

Die ν-te Ableitung der Laplace-Transformierten $\omega_k(\sigma)$ nach σ ist nach (6.14)

$$\frac{d^{\nu}\omega_k(\sigma)}{d\sigma^{\nu}} = (-1)^{\nu}\cdot n^{\nu}\int_{\tau=0}^{\infty}\tau^{\nu}\cdot e^{-\sigma\cdot n\cdot\tau}\cdot w_k(\tau)\cdot d\tau$$

Sie ergibt, an der Stelle $\sigma=0$ genommen und mit $(-n)^{-\nu}$ multipliziert, das gesuchte Anfangsmoment ν-ter Ordnung:

$$M_{\nu(k)} = \frac{1}{n^{\nu}}\cdot(-1)^{\nu}\cdot\left.\frac{d^{\nu}\omega_k(\sigma)}{d\sigma^{\nu}}\right|_{\sigma=0} \tag{6.19}$$

Als 1. Schritt vereinfachen wir die Schreibweise und führen neue Variablen ein:

$$\lambda = \alpha(<k) \tag{5.6}$$

$$\mu = \alpha(\leqq k) \tag{6.20}$$

$$x = 1+\lambda+\sigma \tag{6.21}$$

$$R = \sqrt{x^2-4\cdot\mu} \tag{6.22}$$

$$y = \frac{\omega_k(\sigma)}{2\cdot(1-\mu)} = \frac{1}{x-2\mu+R} \tag{6.23}$$

Gesucht sind die Anfangsmomente $M_{\nu(k)}$.

$$M_{\nu(k)} = \frac{1}{n^{\nu}}\cdot(-1)^{\nu}\cdot 2\cdot(1-\mu)\cdot\left.\frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}}\right|_{x=1+\lambda}$$

Im 2. Schritt wird y nach x abgeleitet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-2\mu+R)^2\cdot R}\cdot(x+R)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{(x-2\mu+R)^3\cdot R^3}\cdot[x^3-3\lambda x-2\mu\lambda+(x^2-\lambda)\cdot R]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-24}{(x-2\mu+R)^4\cdot R^5}\cdot[x^5-4\lambda x^3-4\mu\lambda x^2+2\lambda^2x+2\mu^2\lambda x+8\mu\lambda^2+(x^4-2\lambda x^2-4\mu\lambda x)\cdot R]$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{192}{(x-2\mu+R)^5 \cdot R^7} [x^7 - 4\lambda x^5 - 10\mu\lambda x^4 + 5\mu^2\lambda x^3 - 2\mu^3\lambda x^2 + 35\mu\lambda^2 x^2 - 5\mu^2\lambda^2 x + 5\lambda^3 x - 2\mu^3\lambda^2 - 10\mu\lambda^3 + (x^6 - 2\lambda x^4 - 10\mu\lambda x^3 + 5\mu^2\lambda x^2 - 2\lambda^2 x^2 + 15\mu\lambda^2 x + 5\mu^2\lambda^2 + \lambda^3) \cdot R]$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{-1920}{(x-2\mu+R)^6 \cdot R^9} [x^9 - 3\lambda x^7 - 20\mu\lambda x^6 + 15\mu^2\lambda x^5 - 9\lambda^2 x^5 - 6\mu^3\lambda x^4 + 90\mu\lambda^2 x^4 + 2\mu^4\lambda x^3 - 21\mu^2\lambda^2 x^3 + 25\lambda^3 x^3 - 6\mu^3\lambda^2 x^2 - 66\mu\lambda^3 x^2 + 6\mu^4\lambda^2 x - 72\mu^2\lambda^3 x - 6\lambda^4 x + 8\mu^3\lambda^3 - 8\mu\lambda^4 + (x^8 - \lambda x^6 - 20\mu\lambda x^5 + 15\mu^2\lambda x^4 - 9\lambda^2 x^4 - 6\mu^3\lambda x^3 + 50\mu\lambda^2 x^3 + 9\mu^2\lambda^2 x^2 + 9\lambda^3 x^2 - 18\mu^3\lambda^2 x - 6\mu\lambda^3 x - 24\mu^2\lambda^3) \cdot R]$$

Im 3. Schritt werden die Ableitungen für die Stelle $x=1+\lambda$ und daraus die gesuchten Momente berechnet. Mit (5.6, 6.18) lauten die Ergebnisse:

für $s \to \infty$ und $\alpha(\leqq k)<1$: $M_{0(k)} = 1$

$$M_{1(k)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(1-\mu)\cdot(1-\lambda)} = \tau_{wk} \tag{4.15}$$

$$M_{2(k)} = \frac{2}{n^2} \cdot \frac{1-\lambda\mu}{(1-\mu)^2 \cdot (1-\lambda)^3} \tag{6.24}$$

Für den Fall n=1 wurden diese Formeln auf andere Weise hergeleitet [2,13,28 S.76]. Um die Wartezeitverteilung genauer angeben zu können, wurden die drei folgenden Momente berechnet.

$$M_{3(k)} = \frac{6}{n^3} \cdot \frac{1+\lambda-4\lambda\mu+\lambda\mu^2+\lambda^2\mu^2}{(1-\mu)^3 \cdot (1-\lambda)^5} \tag{6.25}$$

$$M_{4(k)} = \frac{24}{n^4} \cdot \frac{1}{(1-\mu)^4 \cdot (1-\lambda)^7} \cdot [1+\lambda\cdot(3-10\mu+5\mu^2-\mu^3) + \lambda^2(1-5\mu+10\mu^2-3\mu^3) - \lambda^3\mu^3] \tag{6.26}$$

$$M_{5(k)} = \frac{120}{n^5} \cdot \frac{1}{(1-\mu)^5 \cdot (1-\lambda)^9} \cdot [1+\lambda\cdot(6-20\mu+15\mu^2-6\mu^3+\mu^4) + 6\lambda^2\cdot(1-5\mu+9\mu^2-5\mu^3+\mu^4) + \lambda^3\cdot(1-6\mu+15\mu^2-20\mu^3+6\mu^4) + \lambda^4\mu^4] \tag{6.27}$$

Die Varianz

Die Varianz ist das 2. zentrale Moment, es gilt [35]

$$\sigma^2_{wk} = M_{2(k)} - M^2_{1(k)} \tag{6.28}$$

Aus (4.15, 6.24)

$$\sigma^2_{wk} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+\alpha(<k)\cdot[1-2\alpha(\leqq k)]}{[1-\alpha(\leqq k)]^2 \cdot [1-\alpha(<k)]^3} \tag{6.29}$$

$$\frac{\sigma^2_{wk}}{\tau^2_{wk}} = 1 + 2 \cdot \frac{1-\alpha(\leqq k)}{1-\alpha(<k)} \cdot \alpha(<k) > 1 \quad \text{für } s \to \infty \text{ und } \alpha(\leqq k)<1 \text{ und } k=2,3,\ldots K \tag{6.30}$$

Das Einteilen in Prioritätsklassen vergrößert immer die Varianz der Wartezeiten der wartenden k-Rufe, die nicht die höchste Priorität besitzen, gegenüber der negativ exponentiellen Verteilung.

Das 3. zentrale Moment

Das 3. zentrale Moment wird aus den Anfangsmomenten berechnet [35]

$$\mu_{3(k)} = M_{3(k)} - 3 \cdot M_{2(k)} \cdot M_{1(k)} + 2 \cdot M^3_{1(k)} \tag{6.31}$$

Aus (4.15, 6.24, 6.25)

$$\frac{\mu_{3(k)}}{2\cdot\tau^3_{wk}} = 1 + 3\cdot\alpha(<k)\cdot[1-\alpha(\leqq k)] \cdot \frac{2\cdot[1-\alpha(\leqq k)]+\alpha(\leqq k)\cdot[1-\alpha(<k)]}{[1-\alpha(<k)]^2} > 1$$

$$\text{für } s \to \infty \text{ und } \alpha(\leqq k)<1 \text{ und } k=2,3,\ldots K \tag{6.32}$$

Das Einteilen in Prioritätsklassen vergrößert immer das 3. zentrale Moment der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartezeiten der wartenden k-Rufe, die nicht zur höchsten Priorität k=1 gehören, gegenüber der negativ exponentiellen Verteilung.

Approximation der Wahrscheinlichkeitsverteilung

Aus (6.15) läßt sich kein einfacher Ausdruck für die Mindestwertverteilungsfunktion $W_k(>\tau)$ der Wartezeiten, bezogen auf die wartenden k-Rufe, herleiten. Außer dem Anfangswert $W_k(>0)=1$ und dem Endwert $\lim_{\tau\to\infty} W_k(>\tau) = 0$ können der Anfangswert der Wahrscheinlichkeitsdichte nach (6.17) und die sechs

Anfangsmomente $M_{0(k)}$ bis $M_{5(k)}$ nach (4.15, 6.24 bis 6.27) berechnet werden. Daraus kann eine Approximation ermittelt werden.

Eine einfache Näherung ist nach J. RIORDAN [28 S.105] die Summe von 2 Exponentialfunktionen:

$$W_k(>\tau) \approx C\cdot e^{-\frac{\tau}{M_{1(k)}+D_1}} + (1-C)\cdot e^{-\frac{\tau}{M_{1(k)}+D_2}} \qquad (6.33)$$

Die Konstanten C, D_1 und D_2 werden so bestimmt, daß die Momente $M_{1(k)}$, $M_{2(k)}$ und $M_{3(k)}$ der exakten Verteilungsfunktion $W_k(>\tau)$ mit den Momenten M'_1, M'_2 und M'_3 der Näherungsverteilungsfunktion übereinstimmen. Die Momente sind

$$M'_\nu = \nu!\cdot[\,C\cdot(M_{1(k)}+D_1)^\nu + (1-C)\cdot(M_{1(k)}+D_2)^\nu\,] \qquad (6.34)$$

Die Funktion nach (6.33) ist mit $0<C\leq 1$ als Approximation für Verteilungsfunktionen geeignet, deren Varianz und 3. zentrales Moment größer als bei einer einzelnen negativ exponentiellen Verteilung sind.

Die Bestimmungsgleichungen für die Konstanten C, D_1, D_2 sind:

$$\left.\begin{aligned}
C\cdot(D_1-D_2) &= -D_2 && (6.35)\\
C\cdot(D_1-D_2)\cdot(D_1+D_2) &= \tfrac{1}{2}\cdot M_{2(k)} - M_{1(k)} - D_2^2 && (6.36)\\
C\cdot(D_1-D_2)\cdot(D_1^2+D_1\cdot D_2+D_2^2) &= \tfrac{1}{6}\cdot M_{3(k)} - \tfrac{3}{2}\cdot M_{2(k)}\cdot M_{1(k)} + 2\cdot M_{1(k)}^3 - D_2^3 && (6.37)
\end{aligned}\right\}$$

Daraus lassen sich Summe und Produkt berechnen.

$$D_1\cdot D_2 = M_{1(k)}^2 - \tfrac{1}{2}\cdot M_{2(k)} = PRO \qquad (6.38)$$

$$D_1 + D_2 = \frac{\frac{1}{6}\cdot M_{3(k)} - 3\cdot\frac{1}{2}M_{2(k)}\cdot M_{1(k)} + 2\cdot M_{1(k)}^3}{\frac{1}{2}\cdot M_{2(k)} - M_{1(k)}^2} = SUM \qquad (6.39)$$

Schließlich ist

$$D_{1,2} = SUM \pm \sqrt{\left(\frac{SUM}{2}\right)^2 - PRO} \qquad (6.40)$$

Falls $\frac{1}{2}\cdot M_{2(k)} = M_{1(k)}^2$ ist, ergibt sich nur eine Exponential-

funktion:

$$W_k(>\tau) \approx e^{-\frac{\tau}{M_{1(k)}}} \qquad (6.41)$$

Vergleicht man das 4. und 5. Anfangsmoment nach (6.34) und den Anfangswert der Wahrscheinlichkeitsdichte mit den entsprechenden exakten Werten nach (6.26, 6.27, 6.17), dann findet man, daß die relativen Abweichungen höchstens Werte nahe bei 1% erreichen, falls bei Ankunftsreihenfolge $\alpha(<k)\leq 0{,}1$ und $\alpha(\leq k)<1$ ist. Für relative Abweichungen des 4. und 5. Moments und des Anfangswertes der Wahrscheinlichkeitsdichte, die unter 10% bleiben, ist bei Ankunftsreihenfolge der Bereich $\alpha(<k)\leq 0{,}3$ und $\alpha(\leq k)<1$ erlaubt. Damit werden vor allem die Werte der Wartezeitverteilung $W_k(>\tau)$ für sehr große Wartedauern τ geprüft.

Ein Beispiel

In einem Wartesystem mit unbeschränkter Zahl von Warteplätzen ($s\to\infty$) und mit n=10 Leitungen kommen Rufe aus K=4 Prioritätsklassen an. Das Gesamtangebot A=9,5 Erl ist nach (3.27) aufgeteilt. Bild 6.1 gibt den Verlauf der Wahrscheinlichkeiten $W_k(>\tau)$ für Überschreiten der Wartedauer τ an; k=1,...4. Die

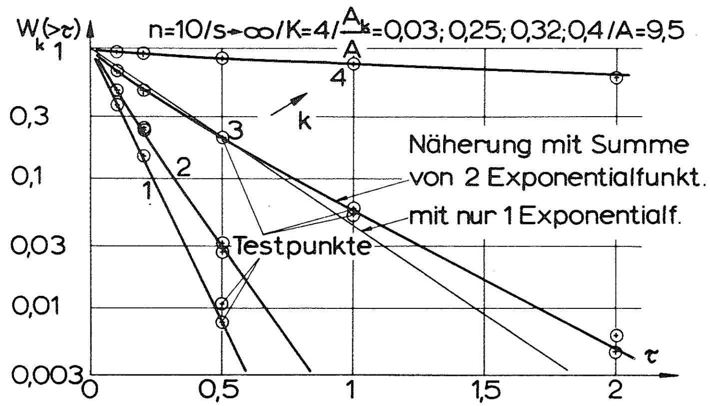

Bild 6.1 Wahrscheinlichkeit $W_k(>\tau)$, daß die Wartezeit wartender k-Rufe die Zeit τ überschreitet; n=10; $s\to\infty$; A=9,5

Näherung nach Gleichung (6.33) wurde mit Simulationsergebnissen verglichen.

Für das in dieser Arbeit untersuchte kombinierte Warte-Verlust-System mit Prioritäten wurden Simulationsprogramme geschrieben [36]. Sie beruhen auf dem zeittreuen Testverfahren [38,39,40]. Wird die Zahl der Warteplätze genügend groß gewählt, dann kann für ein bestimmtes Angebot ein reines Wartesystem simuliert werden.

Die Formeln (6.33) und (6.41) stellen die einzigen Näherungen in dieser Arbeit dar. Deshalb wurden nur hier die Simulationsergebnisse zusätzlich zu den berechneten Werten in das Diagramm (Bild 6.1 Seite 84) eingezeichnet.

Das Beispiel zeigt, daß es notwendig ist, für die Berechnung der Wartezeitverteilung $W_k(>\tau)$ mindestens 2 Exponentialfunktionen zu verwenden. Die Näherung ist dann einfach zu berechnen und für praktische Aufgaben ausreichend genau.

Inverse Reihenfolge

Nach Satz (5.54) genügt es, $\alpha(\leq k)$ und $\alpha(<k)$ zu vertauschen, um die Wahrscheinlichkeit für Überschreiten einer Wartedauer, bezogen auf die wartenden k-Rufe, bei inverser Reihenfolge aus der entsprechenden Wahrscheinlichkeit $W_k(>\tau)$ bei Ankunftsreihenfolge zu berechnen. Das gleiche gilt für die Momente.

6.3 Erfolgreich wartende Rufe in Warte-Verlust-Systemen

Die Gleichungen (5.31 bis 5.33) sind die Normalform eines Systems von s linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Lösungsverfahren werden in mathematischen Lehrbüchern behandelt.

Warte-Verlust-System mit einem Warteplatz

Falls nur s=1 Warteplatz vorhanden ist, gilt nur eine Differentialgleichung für j=1. Aus (5.31 bis 5.33) wird

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{dG_1(>\tau)}{d\tau} + (1+\lambda)\cdot G_1(>\tau) = 0 \qquad \text{für } s=1$$

Mit $Q_1=1/(1+\lambda)$ nach (5.24) ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, daß ein zum Zeitpunkt $\tau=0$ auf Warteplatz 1 stehender k-Ruf länger als die Zeit τ wartet und danach seine Wartezeit erfolgreich beendet:

$$G_1(>\tau) = \frac{1}{1+\lambda}\cdot e^{-(1+\lambda)\cdot n\cdot\tau} \qquad \text{für } \tau\geqq 0 \text{ und } s=1 \text{ und } k=2,3,\ldots K \qquad (6.42)$$

Mit (5.26) und (5.36) gelangt man zur gesuchten Wahrscheinlichkeit für Überschreiten der Wartedauer τ, bezogen auf die erfolgreich wartenden k-Rufe.

$$W_k(>\tau) = e^{-(1+\lambda)\cdot n\cdot\tau} \qquad \text{für } \tau\geqq 0 \text{ und } s=1 \text{ und } k=2,3,\ldots K \qquad (6.43)$$

Warte-Verlust-System mit zwei Warteplätzen

Für s=2 besteht das System (5.31 bis 5.33) aus den beiden Differentialgleichungen

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{dG_1(>\tau)}{d\tau} = -(1+\lambda)\cdot G_1(>\tau) + \lambda\cdot G_2(>\tau)$$

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{dG_2(>\tau)}{d\tau} = G_1(>\tau) - (1+\lambda)\cdot G_2(>\tau)$$

Die Lösungen lauten mit der Anfangsbedingung (5.34)

$$G_1(>\tau) = \frac{Q_1-\sqrt{\lambda}\cdot Q_2}{2}\cdot e^{-(1+\lambda+\sqrt{\lambda})\cdot n\cdot\tau} + \frac{Q_1+\sqrt{\lambda}\cdot Q_2}{2}\cdot e^{-(1+\lambda-\sqrt{\lambda})\cdot n\cdot\tau} \qquad (6.44)$$

$$G_2(>\tau) = \frac{Q_1-\sqrt{\lambda}\cdot Q_2}{2\cdot\sqrt{\lambda}}\cdot e^{-(1+\lambda+\sqrt{\lambda})\cdot n\cdot\tau} + \frac{Q_1+\sqrt{\lambda}\cdot Q_2}{2\cdot\sqrt{\lambda}}\cdot e^{-(1+\lambda-\sqrt{\lambda})\cdot n\cdot\tau} \qquad (6.45)$$

Dabei ist nach (5.24)

$$Q_1 = \frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2} \qquad Q_2 = \frac{1}{1+\lambda+\lambda^2} \qquad \text{für } s=2 \qquad (6.46)$$

Mit der Abkürzung μ nach (6.20) ist mit (3.2) und (2.23)

$$p_{1,k} = \frac{1}{1+\mu+\mu^2}\,E \qquad p_{2,k} = \frac{\mu}{1+\mu+\mu^2}\,E \qquad \text{für } s=2 \qquad (6.47)$$

Aus (5.35) findet man mit (6.44 bis 6.47) die gesuchte Wahrscheinlichkeit für Überschreiten der Wartedauer τ, bezogen auf die erfolgreich wartenden k-Rufe.

$$W_k(>\tau) = \frac{G_1(>\tau) + \mu\cdot G_2(>\tau)}{Q_1 + \mu\cdot Q_2} \qquad \text{für } \tau \geqq 0 \text{ und } s=2 \text{ und } k=2,3,\ldots K \qquad (6.48)$$

$$= \frac{1}{2\cdot(1+\lambda+\mu)}\cdot\left[(1+\lambda-\sqrt{\lambda})\cdot\left(1-\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right)\cdot e^{-(1+\lambda+\sqrt{\lambda})\cdot n\cdot\tau} + (1+\lambda+\sqrt{\lambda})\cdot\left(1+\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right)\cdot e^{-(1+\lambda-\sqrt{\lambda})\cdot n\cdot\tau}\right]$$

Warte-Verlust-System mit beliebig vielen Warteplätzen

Für Warte-Verlust-Systeme mit s>2 Warteplätzen werden keine expliziten Formeln angegeben, weil sie für s=3 und s=4 unübersichtlich werden. Für s>4 ist keine explizite Formel möglich. Es ergeben sich im allgemeinen Summen von s Exponentialfunktionen. Man beginnt beim System der Differentialgleichungen (5.31 bis 5.34) mit der numerischen Rechnung für bestimmte Angebotswerte.

Momente der Wartezeitverteilung

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $W_k(>\tau)$ kann durch ihre Momente bestimmt werden. Für die Momente $M_{\nu(k)}$ der Wartezeitverteilung der erfolgreichen k-Rufe können Systeme linearer Gleichungen angegeben werden.

Ein k-Ruf, der zur Zeit τ=0 auf dem Warteplatz j steht, wartet die Zeit τ, bis er eine Leitung belegt. Dafür gilt die Wahrscheinlichkeitsdichte $g_j(\tau)$ (vgl. Abschnitt 5.1). Das auf den Ursprung τ=0 bezogene Anfangsmoment ν-ter Ordnung ist

$$m_{\nu,j} = \int_{\tau=0}^{\infty} \tau^{\nu}\cdot g_j(\tau)\cdot d\tau \qquad \text{für } \nu=0,1,\ldots \qquad (6.49)$$

C. PALM gab eine Formel an, um die Momente $m_{\nu,j}$ unmittelbar aus der Mindestwertverteilungsfunktion $G_j(>\tau)$ zu berechnen [19]

$$m_{\nu,j} = \nu\cdot\int_{\tau=0}^{\infty} \tau^{\nu-1}\cdot G_j(>\tau)\cdot d\tau \qquad \text{für } \nu=1,2,\ldots \qquad (6.50)$$

Die Differentialgleichungen (5.31 bis 5.33) werden mit $\nu\cdot\tau^{\nu-1}$ multipliziert und von τ=0 bis $\tau\to\infty$ integriert. Mit (5.30, 6.49) ergibt sich

$$\int_{\tau=0}^{\infty} \nu\cdot\tau^{\nu-1}\cdot\frac{dG_j(>\tau)}{d\tau}\cdot d\tau = -\nu\cdot m_{\nu-1,j} \qquad \text{für } \nu=1,2,\ldots \qquad (6.51)$$

Dabei ist nach (5.12) $m_{0,j}=Q_j$. Mit (6.50, 6.51) findet man:

$$-\frac{1}{n}\cdot\nu\cdot m_{\nu-1,1} = \lambda\cdot m_{\nu,2} - (1+\lambda)\cdot m_{\nu,1} \qquad \text{für } j=1 \qquad (6.52)$$

$$-\frac{1}{n}\cdot\nu\cdot m_{\nu-1,j} = \lambda\cdot m_{\nu,j+1} - (1+\lambda)\cdot m_{\nu,j} + m_{\nu,j-1} \qquad \text{für } j=2,3,\ldots s-1 \qquad (6.53)$$

$$-\frac{1}{n}\cdot\nu\cdot m_{\nu-1,s} = -(1+\lambda)\cdot m_{\nu,s} + m_{\nu,s-1} \qquad \text{für } j=s \qquad (6.54)$$

Das System umfaßt s lineare Gleichungen für die Anfangsmomente. Für ν=1 erhält man wieder das System (5.39 bis 5.41) für die mittleren Wartezeiten $d_j=m_{1,j}$. Sind die Momente der Ordnung ν berechnet, können die Momente (ν+1)-ter Ordnung ermittelt werden. Aus den s linearen Gleichungen lassen sich die s Unbekannten $m_{\nu,j}$ für eine bestimmte Ordnung ν bestimmen, z.B. nach der Cramerschen Regel oder nach dem Gaußschen Algorithmus.

Gleichung (6.16) wird mit τ^{ν} multipliziert und von τ=0 bis $\tau\to\infty$ integriert. Mit (6.18) und (6.49) gelangt man zu den Anfangsmomenten $M_{\nu(k)}$ der Wartezeitverteilung der erfolgreichen k-Rufe.

$$M_{\nu(k)} = \frac{1}{W_k}\cdot\sum_{j=1}^{s} p_{j,k}\cdot m_{\nu,j} \qquad (6.55)$$

Für die mittlere Wartezeit $\tau_{wk}=M_{1(k)}$ gilt ν=1; dann stimmt (6.55) mit (5.51) überein. Für die Auflösung von Systemen linearer Gleichungen mit mehreren Unbekannten stehen Prozeduren bereit, die vom Gaußschen Algorithmus ausgehen; es ist damit möglich, die Momente der Wartezeitverteilung mit Ziffernrechenautomaten zu berechnen.

Für inverse Reihenfolge müssen in allen Formeln $\alpha(<k)$ und $\alpha(\leqq k)$ gegeneinander ausgetauscht werden, vgl. Satz (5.54).

7. Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartezeiten aller wartenden Rufe sowie der verdrängten Rufe

7.1 Wartezeiten der wartenden Rufe

Wieder wird ein k-Ruf betrachtet, der auf Warteplatz j steht. Die Wahrscheinlichkeitsdichte, daß der zum Zeitpunkt $\tau=0$ auf dem Warteplatz j stehende k-Ruf zum Zeitpunkt τ seine Wartezeit beendet, ist $g_j'(\tau)$. Er beendet seine Wartezeit erfolgreich, wenn er eine frei werdende Leitung sogleich belegt. Er beendet seine Wartezeit erfolglos, wenn er von einem anderen Ruf höherer Priorität aus dem Wartespeicher verdrängt wird.

Die Betrachtungen, die auf die Gleichungen (5.1 bis 5.3) führten, bleiben gültig, wenn $g_j(\tau)$ durch $g_j'(\tau)$ ersetzt wird. Der Unterschied liegt nur in den Anfangsbedingungen:

Für einen k-Ruf auf dem Warteplatz j=1 wird die Wartezeit durch ein Belegungsende im infinitesimal kleinen Zeitabschnitt Δt sogleich erfolgreich beendet.

$$g_1'(0)\cdot\Delta t = n\cdot\varepsilon\cdot\Delta t \qquad \text{für } j=1 \qquad (7.1)$$

Steht ein k-Ruf auf dem Warteplatz j=s, dann wird seine Wartezeit während Δt durch einen ankommenden Ruf höherer Priorität sogleich erfolglos beendet.

$$g_s'(0)\cdot\Delta t = A(<k)\cdot\Delta t \qquad \text{für } j=s \qquad (7.2)$$

Von einem Warteplatz j=2,3,...s-1 kann die Wartezeit während Δt weder erfolgreich noch erfolglos enden.

$$g_j'(0)\cdot\Delta t = 0 \qquad \text{für } j=2,3,\ldots s-1 \quad (7.3)$$

Das System (5.7 bis 5.9) der Differentialgleichungen für die Wahrscheinlichkeitsdichten bleibt für $g_j'(\tau)$ gültig, wenn die neuen Anfangsbedingungen eingeführt werden, wie sie sich aus (7.1 bis 7.3) ergeben.

Ein k-Ruf auf Warteplatz j beendet seine Wartezeit irgend-

wann, entweder erfolgreich oder erfolglos. Darum gilt statt (5.12)

$$Q_j' = \int_{\tau=0}^{\infty} g_j'(\tau)\cdot d\tau = 1 \qquad \text{für } j=1,2,\ldots s \qquad (7.4)$$

Für die Wahrscheinlichkeit $G_j'(>\tau)$, daß ein zum Zeitpunkt $\tau=0$ auf Warteplatz j stehender k-Ruf länger als die Zeit τ wartet und danach seine Wartezeit entweder erfolgreich oder erfolglos beendet, gilt das System von Differentialgleichungen (5.31 bis 5.34), wenn $G_j(>\tau)$ durch $G_j'(>\tau)$ und außerdem Q_j durch $Q_j'=1$ ersetzt wird. Ebenso muß in allen daraus abgeleiteten Beziehungen der Kapitel 5 und 6 jeweils $G_j(>\tau)$ durch $G_j'(>\tau)$, Q_j durch $Q_j'=1$, W_k durch W_k', d_j durch d_j', $W_k(>\tau)$ durch $W_k'(>\tau)$, $m_{\nu,j}$ durch $m_{\nu,j}'$ und $M_{\nu(k)}$ durch $M'_{\nu(k)}$ ersetzt werden.

Unverändert gelten die Formeln für wartende Rufe höchster Priorität bei Ankunftsreihenfolge (Abschnitt 6.1) und für wartende Rufe im Wartesystem (Abschnitt 6.2). In beiden Fällen warten alle Rufe erfolgreich, und $W_k(>\tau)$ und $W_k'(>\tau)$ sind identisch.

7.2 Wartezeiten der nachträglich verdrängten Rufe

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, daß ein zum Zeitpunkt $\tau=0$ auf dem Warteplatz j stehender k-Ruf zum Zeitpunkt τ seine Wartezeit erfolglos beendet, ist $g_j''(\tau)$. Der k-Ruf wird aus dem Wartespeicher verdrängt.

Das System der Differentialgleichungen (5.7 bis 5.9) gilt auf Grund der gleichen Betrachtungen auch für $g_j''(\tau)$. Die Anfangsbedingungen folgen daraus, daß ein erfolgloses Ende der Wartezeit während des Zeitabschnitts Δt nur vom letzten Warteplatz j=s aus möglich ist.

$$g_j''(0)\cdot\Delta t = 0 \qquad \text{für } j=1,2,\ldots s-1 \quad (7.5)$$

$$g_s''(0)\cdot\Delta t = A(<k)\cdot\Delta t \qquad \text{für } j=s \qquad (7.6)$$

Ein k-Ruf auf Warteplatz j beendet seine Wartezeit zu einem beliebigen Zeitpunkt erfolglos mit der Wahrscheinlichkeit

$$Q''_j = \int_{\tau=0}^{\infty} g''_j(\tau)\cdot d\tau = 1 - Q_j \qquad \text{für } j=1,2,\ldots s \qquad (7.7)$$

Das System von Differentialgleichungen (5.31 bis 5.34) und alle daraus hergeleiteten Beziehungen gelten für die erfolglosen Wartezeiten der verdrängten k-Rufe, falls die Größen $G''_j(>\tau)$, Q''_j, W''_k, d''_j, $W''_k(>\tau)$, $m''_{\nu,j}$ und $M''_{\nu(k)}$ an die Stelle der entsprechenden Größen ohne Apostrophe treten.

8. Verschiedene Arten des Einteilens in Prioritätsklassen und verschiedene Abfertigungsreihenfolgen

Die Aufteilung der Rufe auf die einzelnen Prioritätsklassen ist fest vorgegeben. Die mittlere Zahl A_k von k-Rufen in der Zeiteinheit ist gegeben. Wir haben untersucht, welchen Einfluß die Leitungszahl n hat. Wenn sie steigt, vermindert sich die Blockierungswahrscheinlichkeit E. Wir haben den Einfluß der Zahl der Warteplätze s bestimmt. Außerdem haben wir die beiden entgegengesetzten Reihenfolgen der Abfertigung betrachtet, Ankunftsreihenfolge und inverse Reihenfolge.

Die Aufteilung der Rufe ist dadurch vorgegeben, daß bestimmte Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten, mittlere Wartezeiten und Wahrscheinlichkeiten für Überschreiten einer gegebenen Wartedauer eingehalten werden müssen. Diese Forderungen lassen sich unter Umständen durch verschiedenes Einteilen der Rufe in Prioritätsklassen erfüllen. Wir fragen nach den Grenzwerten, den kleinstmöglichen Werten für die Rufe höchster Priorität und den größten Werten für die Rufe geringster Priorität, die für die Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten, für die mittleren Wartezeiten und die Wartezeitverteilungen erreicht werden können. Die Leitungszahl n, die Zahl der Warteplätze s und das Gesamtangebot A bleiben bei diesen Grenzbetrachtungen unverändert. Um die Grenzen zu ermitteln, unterstellen wir zwei neue Disziplinen. Die eine ist für die verschwindend wenigen Rufe höchster Priorität ganz besonders vorteilhaft. Die andere ist für die ebenfalls außerordentlich geringe Zahl von Rufen, dieses Mal der geringsten Priorität, so nachteilig als möglich. Wir betrachten also im folgenden zwei Arten von "Prüfrufen", um die extremen Werte der Kriterien für die Güte der Verkehrsabwicklung im untersuchten kombinierten Warte-Verlust-System kennenzulernen.

8.1 Untere Grenze

Wir betrachten solche Rufe, die, wenn sie warten müssen, auf den ersten Warteplatz gelangen. Kein anderer Ruf kann den betrachteten Ruf zurückschieben. Die Wahrscheinlichkeit für Wartebeginn ist gleich der Blockierungswahrscheinlichkeit E. Der Ruf beginnt immer auf dem Warteplatz 1 zu warten und wartet immer erfolgreich. Abweis- und Verdrängungsverlustwahrscheinlichkeit sind null. Der Ruf wartet bis zum nächsten Belegungsende, dann belegt er die frei gewordene Leitung. Deshalb gilt für die untere Grenze der Wahrscheinlichkeit, länger als die Zeit τ warten zu müssen [27]

$$W_u(>\tau) = e^{-n\cdot\tau} \qquad \text{für } \tau \geqq 0 \qquad (8.1)$$

Das ist die untere Grenze für alle möglichen Arten des Einteilens in Prioritätsklassen und für alle Abfertigungsreihenfolgen.

Ein solcher einzelner Ruf ist ein Prüfruf. Während seiner Wartezeit darf kein anderer Prüfruf dieser Art ankommen. Näherungsweise erreicht man die unteren Grenzwerte für ein sehr kleines Angebot A_1 in der Prioritätsklasse 1.

8.2 Obere Grenze

Für die "Prüfrufe" zweiter Art sollen folgende Annahmen gelten: Wir betrachten solche Rufe, die sich, wenn sie warten müssen, an das Ende der Warteschlange stellen. Jedesmal, wenn eine Leitung frei wird, rücken sie um einen Warteplatz vor. Sie lassen aber alle während ihrer Wartezeit ankommenden Rufe vor sich in die Warteschlange hinein. Ein solcher Prüfruf bleibt während seiner Wartezeit immer am Ende der Warteschlange. Er belegt nur dann eine frei werdende Leitung, wenn außer ihm überhaupt kein anderer Ruf wartet.

Im Warte-Verlust-System ohne Prioritäten gelangt ein ankommender Ruf auch ans Ende der Warteschlange, wenn die wartenden Rufe in Ankunftsreihenfolge abgefertigt werden. Es gibt dann kein Verdrängen wartender Rufe aus dem Speicher. Demnach sind für Prüfrufe zweiter Art die Wahrscheinlichkeit für Wartebeginn und die Verlustwahrscheinlichkeit durch Abweisen gleich groß wie die Werte W und B nach den Gleichungen (3.25) und (3.26).

Wenn während der Wartezeit eines Prüfrufs zweiter Art alle s Warteplätze belegt sind, dann steht der Prüfruf auf dem letzten Warteplatz. Jeder neu ankommende Ruf verdrängt dann den Prüfruf aus dem Wartespeicher.

Die obere Grenze der Wartezeitverteilungen hat E. VAULOT angegeben [28 S.5 und S.108, 27]. Alle überhaupt eintreffenden Rufe haben höhere Priorität als der wartende Prüfruf. Man muß im System der Differentialgleichungen (5.7, 5.8, 5.9) den Wert $\alpha(<k)$ durch α ersetzen. Der Warteplatz j wird dem Prüfruf zugewiesen, wenn j-1 Rufe warten. In Gleichung (3.2) mit (2.23) muß für Rufe geringster Priorität (Prioritätsklasse K) der Wert $\alpha(\leqq K)=\alpha$ eingesetzt werden. Man erhält die obere Grenze der Wahrscheinlichkeit, daß ein wartender Ruf länger als die Zeit τ warten muß, indem man in der Formel für die Wahrscheinlichkeit $W_k(>\tau)$, daß ein k-Ruf länger als die Zeit τ warten muß, sowohl $\alpha(\leqq k-1)$ als auch $\alpha(\leqq k)$ durch α ersetzt. Auch in die Formeln für die Momente der Wartezeitverteilungen muß $\alpha(<k)=\alpha(\leqq k)=\alpha$ eingesetzt werden, um die oberen Grenzwerte zu berechnen.

Näherungsweise erreicht man die oberen Grenzwerte für ein sehr kleines Angebot A_K in der letzten Prioritätsklasse K.

Zusammenfassung

Es wird angenommen, daß Rufe, die in einem Vermittlungssystem durchgeschaltet werden, verschiedene Dringlichkeit haben. Dann werden für verschiedene Arten von Rufen verschiedene Werte der Verkehrsgüte gefordert werden. Dadurch, daß die Rufe in Prioritätsklassen eingeteilt werden, kann die Vermittlungseinrichtung an die unterschiedlichen Forderungen angepaßt werden. Technische Systeme haben einen begrenzten Wartespeicher. Die vorliegenden Untersuchungen gehen deshalb von Rufen verschiedener Prioritätsklassen und von einer endlichen Zahl von Warteplätzen aus. Bestehende Belegungen werden niemals unterbrochen. In der Warteschlange wird die Reihenfolge nach den Prioritäten der wartenden Rufe strikt eingehalten, auch wenn Rufe, trotzdem sie bereits einige Zeit gewartet haben, nachträglich verdrängt werden. Für den Verkehr werden übliche Annahmen zu Grunde gelegt. Für die einzelnen Prioritätsklassen gelten getrennte POISSON-Rufprozesse. Die Belegungsdauern sind voneinander unabhängig und gehorchen einer negativ exponentiellen Verteilung; die mittlere Belegungsdauer ist für alle Rufe gleich groß. Das Leitungsbündel ist voll erreichbar.

Aus den stationären Zustandswahrscheinlichkeiten für die Zahl der Rufe, die zur betrachteten Prioritätsklasse gehören oder höhere Priorität besitzen und die vor dem belegten Bündel warten, werden die Warte- und Verlustwahrscheinlichkeiten berechnet. Ein Ruf wird zum Verlustruf, wenn er entweder sogleich bei seiner Ankunft abgewiesen wird oder wenn er nach begonnenem Warten aus dem Speicher verdrängt wird. Die Rufe einer Prioritätsklasse reihen sich entweder in der Ankunftsreihenfolge oder in der umgekehrten Reihenfolge in den Warteschlangenanteil aus Rufen ihrer Prioritätsklasse ein. Die Reihenfolge beeinflußt die Wahrscheinlichkeiten für Abweisen, für Wartebeginn und für Verdrängung. Die Verlustwahrscheinlichkeit und die Wahrscheinlichkeit für erfolgreiches Warten hängen nicht von der Rei-

henfolge ab.

Die mittleren Wartezeiten, bezogen auf alle Rufe einer Prioritätsklasse, folgen aus den Wartebelastungen, die sich unmittelbar aus den Zustandswahrscheinlichkeiten ergeben. Um die mittleren Wartezeiten der erfolgreichen und außerdem jene der verdrängten Rufe zu bestimmen, muß der Warteplatz berücksichtigt werden, auf dem ein neu ankommender Ruf zu warten beginnt. Das Differentialgleichungssystem der Wahrscheinlichkeitsdichten für die Wartezeiten wird aufgestellt. Daraus werden die mittleren Wartezeiten hergeleitet. Die Verkehrsgüte wird durch die Verlust- und Wartewahrscheinlichkeiten, durch die mittleren Wartezeiten und durch die Wahrscheinlichkeiten für Überschreiten einer Wartedauer bestimmt. Die Verteilungsfunktion der Wartezeiten wird aus dem System der Differentialgleichungen der Wahrscheinlichkeitsdichten hergeleitet. Für Wartespeicher mit einem oder zwei Warteplätzen sind die expliziten Lösungen angegeben. Die Verteilungsfunktion der Wartezeiten kann auch durch die Anfangsmomente gekennzeichnet werden. Formeln zum Berechnen der Momente sind bereitgestellt.

Im letzten Abschnitt wird der Einfluß des Einteilens in Prioritätsklassen gezeigt. Es lassen sich obere und untere Grenzen der mittleren Wartezeiten angeben, zwischen denen alle Werte für beliebiges Einteilen der Rufe in Prioritätsklassen liegen.