Eine optimale lineare Lernregel zur empirischen Bestimmung eines Erwartungswertes

von REINER BÄUERLE* und WERNER WAGNER**

Mitteilung aus dem Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart

(A.E.Ü. 23 [1969], Heft 10, 502–506; eingegangen am 20. Juni 1969)

DK 621.391:621.395.31

Wird die Wahrscheinlichkeit p für das wiederholte Auftreten eines Ereignisses durch Versuche bestimmt und geschätzt, so wird der Schätzwert von Versuch zu Versuch geändert und, als Erwartungswert betrachtet, verbessert. Die Wahrscheinlichkeit p wird vom Beobachter „gelernt". Aus den Versuchsergebnissen werden die Schätzwerte für p mit einer sogenannten „Lernregel", die Lernparameterfolgen verwendet, bestimmt; Lernparameterfolgen wurden von E. HENZE und G. MEYER-BRÖTZ und anderen untersucht.

Es wird gezeigt, daß bei Festlegung eines vernünftigen Kriteriums unter allen linearen Lernregeln nur eine bestimmte Lernparameterfolge ein optimales Ergebnis liefert. Diese spezielle Lernparameterfolge entspricht dem induktiven Verfahren von R. CARNAP.

Auch für Zufallsvariable, die mehrere Werte annehmen können, existiert nur eine optimale lineare Lernregel. Sie kann z. B. in der Vermittlungstechnik dazu benützt werden, die Belastung eines Leitungsbündels zu schätzen.

Durch geeignete Wahl des in diesem optimalen Verfahren noch enthaltenen freien Parameters kann erreicht werden, daß mit einem Anfangsschätzwert bessere Ergebnisse erzielt werden als durch die allgemein übliche Verwendung des arithmetischen Mittels aller beobachteten Ereignisse als Schätzwert des Erwartungswertes dieser Zufallsvariablen.

An Optimum Linear Rule of Learning for the Empirical Determination of an Expectation Value

When the probability p for the repeated occurrence of an event is determined by trial and estimated, the estimated value will be changed from one trial to the other. The expectation value of this estimate will be improved. The probability p will be "learned" by the observer. The estimates for p are determined by a rule "of learning", in which sequences of learning parameters are used, from the results of the trials. Sequences of learning parameters were investigated by E. HENZE and G. MEYER-BRÖTZ and others.

This paper shows that merely a certain sequence of learning parameters, among all linear rules of learning, will give an optimal result, if a reasonable criterion is defined beforehand. This special sequence of learning parameters corresponds to the inductive method of R. CARNAP.

Also for random variables which can assume several values there is only one optimal linear rule of learning. It my be used, e. g. in switching engineering, to estimate the load of a trunk group.

By a suitable selection of the free parameter still available in this optimal method it can be attained that better results are obtained with an initial estimated value than by the generally customary use of the arithmetic mean of all observed events as an estimated value of the expectation value of these random variables.

1. Einführung und Übersicht

Zur Schätzung der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses in einer Ereignisfolge benützt man in der Praxis meist die relative Häufigkeit des Auftretens dieses Ereignisses in der Ereignisfolge.

Es wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten einer „6" beim Würfeln mit einem bezüglich seiner Symmetrie unbekannten Würfel ermittelt werden soll. Der Schätzwert für p, den man nach dem n-ten Wurf gebildet hat, sei mit $\underline{w}_n$ bezeichnet. Der Schätzwert ist dann ebenfalls eine Zufallsvariable, die aus den einzelnen Zufallsvariablen $\underline{\varepsilon}_i$ berechnet wird. Die Zufallsvariablen $\underline{\varepsilon}_i$ beschreiben die Folge der Ereignisse oder Ausspielungen des unbekannten Würfels. Bei Benützung der „relativen Häufigkeit" als Schätzwert von p wäre

$$\underline{w}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underline{\varepsilon}_i \,, \tag{1}$$

wenn $\underline{\varepsilon}_i = 1$, falls beim i-ten Wurf eine „6" auftritt, und sonst $\underline{\varepsilon}_i = 0$.

Die Schätzung von p durch die relative Häufigkeit ist ein Spezialfall der sogenannten „linearen Lernregel" zum Schätzen oder „Erlernen" der Wahrscheinlichkeit p. Die Folge der Schätzwerte $\underline{w}_n$, die eine Folge von Zufallsvariablen ist, bezeichnet man als Lernprozeß. Bei der Beobachtung der Ereignisfolge „lernt" man den Wert p durch laufende Verbesserung des Schätzwertes $\underline{w}_n$.

Allgemein bezeichnet man als lineare Lernregel alle Verfahren, in denen ein Schätzwert $\underline{w}_i$ linear vom Schätzwert $\underline{w}_{i-1}$ abhängt. (Die Folge der $\underline{w}_i$ bildet dann einen linearen Lernprozeß.) Daß die relative Häufigkeit dazugehört, zeigt die Umformung von Gl. (1) in eine Rekursionsformel:

$$\underline{w}_i = \frac{i-1}{i}\, \underline{w}_{i-1} + \frac{\underline{\varepsilon}_i}{i} \,. \tag{2}$$

* Dipl.-Ing. R. BÄUERLE, im Institut für Elektroakustik der Technischen Hochschule, 8 München 13, Franz-Joseph-Straße 38.

** Dr. W. WAGNER, i. H. BASF, M-Gruppe, 67 Ludwigshafen.

LA 3

Es gibt nun eine Reihe von linearen Lernregeln (siehe Literaturangaben in [1]), die aber alle in einer von HENZE und MEYER-BRÖTZ in [1] konzipierten allgemeineren Lernregel als Spezialfälle enthalten sind.

In dieser allgemeinen Lernregel ist ein Parameter enthalten, über den bei geringfügigen Einschränkungen noch frei verfügt werden kann. In [1] wurde gezeigt, daß es auch bei weiterer Einschränkung der Wahl dieses Lernparameters λ_i unendlich viele lineare Lernprozesse gibt, die bei unendlich großer Stichprobenzahl ($n \to \infty$) erwartungstreue Schätzungen des Wertes p ergeben.

Hier wird nun gezeigt, daß bei Festlegung eines vernünftigen Gütekriteriums für endlich große Stichprobenzahl ($n = 1, 2, \ldots$) nur ein einziger linearer Lernprozeß existiert, der den besten Schätzwert für p liefert.

Die in [1] vorgeschlagene Lernregel wird dann verallgemeinert auf das „Erlernen" des Erwartungswertes einer vom Zufall abhängigen Größe. Auch dann läßt sich in gleicher Weise zeigen, daß es für endlich große Stichprobenzahl n nur *einen* linearen Lernprozeß gibt, der nach dem angegebenen Gütekriterium den „besten" Schätzwert des Erwartungswertes liefert.

Am Schluß der Arbeit wird noch darauf hingewiesen, daß man zeigen kann, daß die Schätzung bei geschickter Anwendung dieser „optimalen" Lernregel durch einen Anfangsschätzwert verbessert werden kann.

2. Die Lernregel von Henze und Meyer-Brötz

Es wird angenommen, es existiere für das Auftreten eines Ereignisses A in einer Ereignisfolge die

$$\text{Wahrscheinlichkeit } p = P\{A\}.$$

Dieser Wert sei unbekannt. Er sei ferner zeitinvariant und unabhängig vom Verlauf der Ereignisfolge. Als mögliche Ereignisse soll nur die Alternative A oder $\bar{A}$ mit $P\{\bar{A}\} = 1 - p$ auftreten können. Die Ereignisfolge soll beobachtet und daraus ein Schätzwert $\underline{w}_n$ für die Wahrscheinlichkeit p gebildet werden. Mit $\underline{w}_i$ wird der Schätzwert der Wahrscheinlichkeit p nach dem eingetretenen i-ten Ereignis bezeichnet. Mit der Zufallsvariablen $\underline{\varepsilon}_i = 1$, falls das Ereignis A im i-ten Versuch eintritt, und $\underline{\varepsilon}_i = 0$ bei Eintreten von $\bar{A}$, und für $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$ stellt sich die Lernregel von HENZE und MEYER-BRÖTZ als Rekursion dar:

$$\underline{w}_i = \underline{w}_{i-1}(1 - \lambda_i) + \underline{\varepsilon}_i \lambda_i\,. \tag{3}$$

Dabei ist λ_i ein Lernparameter, der bei der Bildung von $\underline{w}_i$ angewandt wird, nachdem das i-te Ereignis eingetreten ist; $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $1 \leq i \leq n$. Dabei soll der Lernprozeß mit einem geeignet gewählten festen Anfangsschätzwert w_0 beginnen. Nach Gl. (3) wird der Schätzwert $\underline{w}_i$ für p nach dem Eintreten des Ereignisses A oder $\bar{A}$ bei der i-ten Stichprobe gebildet aus dem mit einem sogenannten Lernparameter λ_i gewogenen Mittel aus dem vor diesem Ereigniseintritt ermittelten Schätzwert $\underline{w}_{i-1}$ und dem Ergebnis des i-ten Ereignisses $\underline{\varepsilon}_i$. Eine bedeutende Rolle spielt dabei die Lernparameterfolge $\{\lambda\}$. Einige Sonderfälle sollen die Rolle der Folge $\{\lambda\}$ veranschaulichen.

Für
$$\lambda_i = 1/i \tag{4}$$

stellt die Lernregel (3) die Schätzung der Wahrscheinlichkeit p durch die relative Häufigkeit dar. Gl. (3) ist dann mit Gl. (2) identisch.

Für
$$\lambda_i = \frac{1}{i + n_0} \tag{5}$$

ergibt sich das induktive Verfahren von CARNAP [2], das sich explizit aus Gl. (3) für das n-te als letztes Ereignis darstellen läßt

$$\underline{w}_n = \frac{1}{n + n_0}\left(\sum_{i=1}^{n} \underline{\varepsilon}_i + n_0 w_0\right), \tag{6}$$

n_0 ist dabei ein noch frei bestimmbarer Parameter.

Für Erwartungswert und Varianz der Lernprozeßzustände $\underline{w}_n$ ergeben sich bei dem Verfahren von CARNAP aus den Beziehungen, die für die Binomialverteilung gelten, die Formeln

$$\mathrm{E}\{\underline{w}_n\} = \frac{n\,p + n_0 w_0}{n + n_0}\,, \tag{7}$$

$$\sigma^2\{\underline{w}_n\} = p\,(1 - p)\,\frac{n}{(n + n_0)^2}\,. \tag{8}$$

Setzt man in die allgemeine Form (3) für $i = n$ die Formel (3) für $i = n-1, n-2, \ldots, 1$ ein, so ergibt sich explizit

$$\underline{w}_n = w_0 \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i) + \sum_{i=1}^{n} \underline{\varepsilon}_i \lambda_i \prod_{j=i+1}^{n} (1 - \lambda_j)\,. \tag{9}$$

Dabei soll gelten

$$\prod_{j=i+1}^{n} (1 - \lambda_j)\Big|_{i=n} \equiv 1\,. \tag{10}$$

Diese Beziehung soll im folgenden immer gültig bleiben. Der Erwartungswert der Lernprozeßzustände $\underline{w}_n$ ergibt sich mit $\mathrm{E}\{\underline{\varepsilon}_i\} = p$ zu (11a)

$$\mathrm{E}\{\underline{w}_n\} = w_0 \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i) + p \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=i+1}^{n} (1 - \lambda_j)\,.$$

Schreibt man die Summe der Produkte in Gl. (9) ausführlich an, dann findet man mit

$$1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \prod_{j=i+1}^{n} (1 - \lambda_j) \tag{12}$$

den Übergang zu

$$\mathrm{E}\{\underline{w}_n\} = p - (p - w_0) \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i)\,. \tag{11b}$$

Die Varianz der Lernprozeßzustände $\underline{w}_n$ hat wegen

$$\sigma^2\{C\,\underline{\varepsilon}_i\} = C^2 p\,(1 - p)\,,\quad C = \text{const}\,, \tag{13}$$

die Form

$$\sigma^2\{\underline{w}_n\} = p\,(1 - p) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \prod_{j=i+1}^{n} (1 - \lambda_j)^2\,. \tag{14}$$

HENZE und MEYER-BRÖTZ haben gezeigt, daß es unendlich viele Lernparameterfolgen und damit lineare Lernprozesse gibt, die bei einer Schrittzahl $n \to \infty$ für $\underline{w}_n$ eine entartete Verteilung mit verschwindender Varianz haben. Der Erwartungswert $\mathrm{E}\{\underline{w}_n\}$ stimmt mit dem zu schätzenden Wert p überein.

Wir stellen nun die Frage: Gibt es — auch bei endlicher Schrittzahl n — eine Lernparameterfolge, die ein optimales Ergebnis liefert? Dabei ist der Begriff „optimal" noch näher zu definieren. Diese Frage soll im folgenden beantwortet werden.

3. Beurteilung der Lernregel

Die Stichprobenzahl n sei endlich oder unendlich. Wenn man den Erwartungswert und die Varianz nach Gl. (7) und (8), die bei Lernprozessen nach der Regel von Carnap auftreten, betrachtet, so sieht man, daß für $n_0 > 0$ gegenüber der Schätzung durch die relative Häufigkeit (d.h. $n_0 = 0$) immer eine Varianzverringerung eintritt. Das muß jedoch im allgemeinen mit einer Abweichung des Erwartungswertes der Schätzwerte $\underline{w}_n$ vom zu schätzenden Wert p bezahlt werden. (Lediglich der Fall $w_0 = p$ ist eine triviale Ausnahme.) Die Schätzung durch die relative Häufigkeit ist nach [3] effektiv, d.h. die Varianz wird zu einem Minimum für erwartungstreue Schätzwerte. Daher ist anzunehmen, daß eine Varianzverringerung bei endlicher Schrittzahl n prinzipiell immer den Verlust der Erwartungstreue zur Folge hat.

Zum genauen Vergleich der Auswirkung der Lernparameterfolgen $\{\lambda\}$ auf die Konvergenz des Lernprozesses müßte man die Verteilung der Schätzwerte $\underline{w}_n$ kennen. Dazu ist aber wiederum die Kenntnis der Lernparameterfolge Voraussetzung. Bei der Schätzung durch die relative Häufigkeit und bei der Lernregel von Carnap liegt eine Binomialverteilung vor.

Deshalb sollen, um die Lernregeln allgemein zu beurteilen, die *Varianz* der Schätzwerte und die *Abweichung* des Erwartungswertes der Schätzwerte vom zu schätzenden Wert p herangezogen werden. Um die Zahl der Variablen zu verringern, wird hierzu normiert:

normierte Abweichung

$$u = \frac{\mathrm{E}\{\underline{w}_n\} - p}{w_0 - p} \quad \text{für} \quad w_0 \neq p\,, \tag{15}$$

normierte Varianz

$$v = \frac{\sigma^2\{\underline{w}_n\}}{p\,(1-p)} \quad \text{für} \quad 0 < p < 1\,. \tag{16}$$

Die Größe u ergibt sich daraus, daß die Abweichung des Erwartungswertes $\mathrm{E}\{\underline{w}_n\}$ vom zu schätzenden Wert p *nach* der Beobachtung von n Ereignissen auf die Abweichung des Anfangsschätzwertes w_0 vom zu schätzenden Wert p *vor* der Beobachtung der Ereignisfolge bezogen wird. Der Fall $w_0 = p$, daß der Anfangsschätzwert gleich dem zu schätzenden Wert ist, soll ausgeschlossen werden.

Die normierte Varianz ist das Verhältnis der Varianz der Schätzwerte $\underline{w}_n$ zur Varianz der Größe $\underline{\varepsilon}_i$ bei einem einzelnen Versuch, vgl. (13). Hier müssen die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ ausgeschlossen werden. In diesen Fällen verschwindet die Varianz der Zufallsvariablen $\underline{\varepsilon}_i$.

Es ist nun sicher einleuchtend zu sagen, daß eine Schätzung um so besser (konsistenter) ist, je kleiner die Werte u und v sind. Weil man die Verteilung der Schätzwerte $\underline{w}_n$ nicht kennt, kann man nicht angeben, welcher der beiden Größen u und v der Vorzug zu geben ist, um die Lernregel zu beurteilen. Deshalb soll ein „optimales Verhalten" partiell definiert werden:

a) Diejenige Lernregel, die für eine vorgegebene normierte Abweichung u die kleinste normierte Varianz v liefert, ist optimal, beziehungsweise umgekehrt:

b) Gibt man eine normierte Varianz v vor, so soll diejenige Lernregel optimal sein, welche die kleinste normierte Abweichung u liefert.

Nachdem so das „optimale Verhalten" definiert ist, soll die optimale Lernregel bestimmt werden.

4. Die optimale Lernregel

Der folgende *Satz* soll bewiesen werden.

Für eine lineare Lernregel

$$\underline{w}_i = \underline{w}_{i-1}(1-\lambda_i) + \underline{\varepsilon}_i\,\lambda_i \tag{3}$$

mit festem Anfangsschätzwert w_0 und für $i = 1, 2, \ldots, n$; n endlich oder $n \to \infty$, $0 \leqq \lambda_i \leqq 1$, λ_i reell, gilt immer

$$v \geqq \frac{1}{n}\,(1-u)^2\,, \tag{17}$$

beziehungsweise

$$u \geqq 1 - \sqrt{n\,v}\,. \tag{18}$$

Das Gleichheitszeichen in (17) gilt *dann und nur dann*, wenn der Lernparameter λ_i die Form

$$\lambda_i = \frac{1}{i + n_0} \tag{5}$$

hat mit $n_0 = \text{const.}$

Diese Gleichung gibt die Lernparameterfolge an, die Carnap in seinem Verfahren verwendet.

Setzt man Gl. (7) in Gl. (15) und Gl. (8) in Gl. (16) ein, so erhält man $u = n_0/(n + n_0)$ und $v = n/(n+n_0)^2$ und damit

$$v = \frac{1}{n}\,(1-u)^2\,. \tag{19}$$

Behauptung:

Es ist *hinreichend und notwendig*, unter allen möglichen Varianten der Lernregel von Henze und Meyer-Brötz nach (3) das induktive Verfahren von Carnap zu verwenden, wenn man optimale Ergebnisse im Sinne der Definitionen a) und b) des Abschnitts 3 erhalten will.

Beweis

Werden Gl. (11a) und (12) in Gl. (15) eingesetzt, dann ergibt sich mit der Abkürzung

$$\alpha_i = \lambda_i \prod_{j=i+1}^{n} (1-\lambda_j) \tag{20}$$

für u:

$$u = 1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\,. \tag{21}$$

Aus Gl. (16) bekommt man mit Gl. (14) und (20)

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\,. \tag{22}$$

Der folgende Ausdruck stellt eine Summe positiver

Zahlen dar, daher gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \geqq 0 \,. \tag{23}$$

Wird die linke Seite ausmultipliziert und umgeordnet, dann ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \geqq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right)^2 . \tag{24}$$

Werden die Gl. (22) und (21) in Gl. (24) eingesetzt, dann gilt

$$v \geqq \frac{1}{n} (1 - u)^2 \,. \tag{17}$$

Damit ist bewiesen, daß Gl. (17) für alle linearen Lernregeln (3) gilt. Die bereits hergeleitete Gl. (19) bestätigt somit, daß auf jeden Fall die Lernregel von Carnap optimal ist. Es muß nun noch gezeigt werden, daß die Lernregel von Carnap die einzige unter den möglichen Varianten der Lernregel von Henze und Meyer-Brötz ist, die im Sinne der Definitionen a) und b) optimal ist.

Das Gleichheitszeichen in (24) gilt nach (23) *nur* dann, wenn

$$\alpha_k = \alpha_l \tag{25}$$

ist für alle Indizes $k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, n$. Somit gilt das Gleichheitszeichen auch in (17) notwendigerweise nur dann, wenn für die nach Gl. (20) ausführlich angeschriebenen Ausdrücke (25) gilt:

$$\lambda_k \prod_{j=k+1}^{n} (1 - \lambda_j) = \lambda_l \prod_{j=l+1}^{n} (1 - \lambda_j) \,.$$

Nimmt man, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, $k \leqq l$ an, so ergibt sich

$$\lambda_k \prod_{j=k+1}^{l} (1 - \lambda_j) = \lambda_l \,.$$

Betrachtet man nun den Sonderfall zweier aufeinanderfolgender Indizes $k = i$ und $l = i + 1$, so erhält man die Rekursionsformel

$$\lambda_i (1 - \lambda_{i+1}) = \lambda_{i+1}$$

und daraus

$$\lambda_{i+1} = \frac{1}{\dfrac{1}{\lambda_i} + 1} \,. \tag{26}$$

Bezeichnet man mit λ_0 den Anfangswert der durch Gl. (26) definierten Lernparameterfolge, so erhält man aus Gl. (26) explizit

$$\lambda_i = \frac{1}{\dfrac{1}{\lambda_0} + i} \,. \tag{27}$$

Man sieht, daß die Gl. (27) für $\lambda_0 = 1/n_0$ identisch ist mit Gl. (5). Nur mit Gl. (27) gilt das Gleichheitszeichen in (17). Also liefert *nur* die Lernregel von Carnap das optimale Ergebnis. Damit ist der am Anfang von Abschnitt 4 aufgestellte Satz bewiesen.

5. Erweiterung der Lernregel von Henze und Meyer-Brötz

Das bisher behandelte „Lernen" der Wahrscheinlichkeit p kann man auch als Ermittlung des zeitlichen Mittelwertes oder Erwartungswertes einer ergodischen Zufallsvariablen $\underline{\varepsilon}_i$ auffassen. Dabei ist $\underline{\varepsilon}_i$ der zwei Werte 1 oder 0 fähig. Man kann allgemein nach einer optimalen linearen Lernregel zur Bestimmung des Erwartungswertes einer Zufallsvariablen, die mehrerer Werte fähig ist, fragen. Dazu sei ein Beispiel aus dem Fernsprechverkehr behandelt. Die Belastung Y eines Leitungsbündels mit N Leitungen soll durch Stichprobenmessungen festgestellt werden. Der Belegungszustand $\underline{x}_i$ ist die zufällige Zahl von Leitungen, die bei der i-ten Stichprobe belegt angetroffen wurden. Die Zufallsvariable $\underline{x}_i$ kann die Werte $0, 1, 2, \ldots, N$ annehmen. Der zeitliche Abstand zwischen zwei Stichproben sei so gewählt, daß der Belegungszustand $\underline{x}_i$ vom Belegungszustand $\underline{x}_{i-1}, \underline{x}_{i-2}, \ldots$ vorhergehender Stichproben unabhängig sei. Das Kriterium für den zeitlichen Abstand der Stichproben ist die Verteilung der Belegungsdauern (siehe [4]).

Es gelte bei jeder Stichprobe dieselbe Verteilung der Belegungszustände mit

$$P\{\underline{x} \text{ Leitungen belegt}\} = p_x \,.$$

Der Erwartungswert ist die gesuchte Belastung

$$\mathrm{E}\{\underline{x}_i\} = Y = \sum_{x=0}^{N} x\, p_x \,. \tag{28}$$

Die Varianz ist

$$\sigma^2\{\underline{x}_i\} = \sigma_x^2 = \sum_{x=0}^{N} (x - Y)^2 p_x \,. \tag{29}$$

Der Schätzwert für Y nach der i-ten Stichprobe sei $\underline{z}_i$, der feste Anfangsschätzwert sei z_0 mit $0 \leqq z_0 \leqq N$. Damit ergibt sich als erweiterte lineare Lernregel nach Henze und Meyer-Brötz, vgl. Gl. (3),

$$\underline{z}_i = \underline{z}_{i-1} (1 - \lambda_i) + \underline{x}_i \lambda_i \,. \tag{30}$$

Für den Erwartungswert $\mathrm{E}\{\underline{z}_n\}$ gelten die Gl. (11 a, b), wenn der Erwartungswert $\mathrm{E}\{\underline{\varepsilon}_i\} = p$ nach Gl. (28) durch Y ersetzt wird. Ebenso gilt Gl. (14) für die Varianz $\sigma^2\{\underline{z}_n\}$, wenn σ_x^2 nach Gl. (29) an die Stelle von $\sigma^2(\underline{\varepsilon}_i) = p(1 - p)$ tritt.

In Anlehnung an das Vorangegangene kann man eine *normierte Abweichung* des Erwartungswertes der Schätzwerte $\underline{z}_n$ vom Erwartungswert der Belegungszustände $\underline{x}_i$

$$u_x = \frac{\mathrm{E}\{\underline{z}_n\} - \mathrm{E}\{\underline{x}_i\}}{z_0 - \mathrm{E}\{\underline{x}_i\}} \tag{31}$$

und eine *normierte Varianz* der Lernprozeßzustände

$$v_x = \frac{\sigma^2\{\underline{z}_n\}}{\sigma^2\{\underline{x}_i\}} \tag{32}$$

definieren.

Es läßt sich zeigen, daß für die lineare Lernregel (30) ebenfalls immer

$$v_x \geqq \frac{1}{n} (1 - u_x)^2 \tag{33}$$

gilt. Der Beweis geht davon aus, daß die Gl. (3) und (33) formal übereinstimmen. Er benützt die abgeänderten Gl. (11 a, b) und (14), um analog zu Gl. (17) die Beziehung (33) zu erhalten.

Aus dem Beweis, der in den Gl. (20) bis (27) angegeben ist, folgt nun: Das Gleichheitszeichen in (33) gilt *dann und nur dann*, wenn die Lernparameterfolge $\{\lambda\}$ die Form

$$\lambda_i = \frac{1}{i + n_0} \tag{5}$$

hat. Damit ist bewiesen, daß nur die erweiterte Version der Lernregel (6) von Carnap

$$z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + n_0 z_0}{n + n_0} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{n_0}{n} z_0}{1 + \frac{n_0}{n}} \tag{34}$$

ein optimales Verhalten im Sinne der Definitionen a) und b) in Abschnitt 3 liefert, wenn der Erwartungswert einer Zufallsvariablen x_i durch die lineare Lernregel (33) empirisch bestimmt werden soll. Dabei entspricht $n_0 = 0$ der Schätzung durch das arithmetische Mittel der Belegungszustände x_i über die Folge der Stichproben.

Der Schätzwert z_n des Erwartungswertes Y der Belegungszustände x_i durch Gl. (34) wird durch einen im Verhältnis $n_0 : n$ gewogenen Mittelwert aus dem Anfangsschätzwert z_0 und dem arithmetischen Mittelwert $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ der beobachteten Zustände x_i gebildet.

In der Praxis erhebt sich die Frage, ob die Mitverwendung eines Anfangsschätzwertes z_0 die Schätzung verbessern kann. Welcher Wert n_0 ist zu wählen? Um das zu ermitteln, muß man die Verteilung der Zustände x_i sowie die Verteilung der Schätzwerte z_n kennen. Mit der Lernregel (34) gilt für die Schätzwerte z_n eine Polynomialverteilung. Diese Verteilung ist bei größeren Stichprobenzahlen n rechnerisch schwer auszuwerten. In [5] wurde gezeigt, daß es bei Ersetzen der Polynomialverteilung durch eine Normalverteilung und bei poissonverteilten Belegungszuständen x_i für jedes Wertequadrupel (Y, z_0, n, Δz) einen optimalen Wert für n_0 gibt derart, daß die Wahrscheinlichkeit

$$P\{|z_n - Y| < \Delta z\} \tag{35}$$

ein Maximum wird.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Abweichung des Schätzwertes z_n vom wahren Wert Y betragsmäßig kleiner als die „Ungenauigkeit" Δz wird, wird dadurch am größten, daß zu jeder Anzahl n von Stichproben und zu jedem Anfangsschätzwert z_0 der Wert n_0 geeignet gewählt wird. Durch $n_0 > 0$ wird die Wahrscheinlichkeit (35) am größten, aber zugleich ist z_n dann nicht mehr erwartungstreu: $\mathrm{E}\{z_n\} \neq Y$.

Das heißt, ein Anfangsschätzwert z_0 kann bei einem sinnvoll gewählten „Gewicht" n_0 die Schätzung für Y gegenüber dem arithmetischen Mittel als Schätzung für Y verbessern.

6. Ausblick auf einen „lernenden Markierer"

Das Fernsprechnetz besteht aus vielen Vermittlungsstellen als den Netzknotenpunkten und aus Leitungsbündeln als Verbindungen zwischen den Knoten. Die Leitungsbündel werden nach dem jeweiligen Verkehr dimensioniert, wobei die angewendete Leitweglenkung berücksichtigt wird. In den Vermittlungsstellen sind Markierer vorhanden, um die einzelnen Leitungsbündel in der Richtungswahl anzusteuern.

Der Verkehrsablauf kann stark von der Tageszeit oder vom Wochentag abhängen. Wenn der Markierer die einzelnen Leitungsbündel in regelmäßigen Abständen abtastet und so die Belegungszustände stichprobenweise erfaßt, dann kann er die einzelnen Belastungen schätzen. Damit stehen ihm Daten über den gesamten Verkehrsablauf zur Verfügung. Verändern sich die Belastungen von einem Satz von Planungswerten und stimmen zunehmend immer mehr mit einem anderen Satz von vorausberechneten Belastungen überein, dann kann der Markierer auf ein anderes Leitwegprogramm umschalten. Das ist das Prinzip des „lernenden Markierers".

Für dieses Prinzip ist es wichtig, für die einzelnen Bündelbelastungen Y bereits nach wenigen Stichproben solche Schätzwerte zu finden, die mit geringer Varianz in der Nähe der wahren Werte Y liegen. Daß die Schätzwerte bei immer größerer Zahl von Stichproben nicht zum wahren Wert hin konvergieren, kann für diese Anwendung bei annehmbar kleiner Abweichung (z.B. 20%) in Kauf genommen werden.

Durch die geringe Streuung der Schätzwerte bereits nach wenigen Stichproben kann mit hinreichend großer Sicherheit entschieden werden, ob die tatsächlichen Belastungen den jeweiligen geplanten Belastungen entsprechen, die den einzelnen einstellbaren Leitwegprogrammen zugrunde liegen. Um die geringe Streuung der Schätzwerte zu erreichen, wird man deshalb mit Vorteil Anfangsschätzwerte z_0 und Gewichte n_0 mitverwenden.

7. Schlußfolgerung

Es wurde gezeigt, daß ein Anfangsschätzwert beim „Lernen" eines Erwartungswertes einer Zufallsvariablen durch eine lineare Lernregel die Varianz der Schätzwerte verringern kann.

Die Verringerung muß aber immer (bis auf einen trivialen Sonderfall) damit bezahlt werden, daß der Erwartungswert der Schätzwerte vom wahren Wert, vom Erwartungswert der Zufallsvariablen abweicht.

Die Abweichung ist nur dann am geringsten, wenn die Lernregel nach CARNAP oder ihre hier aufgestellte Erweiterung (34) verwendet wird. Die Erweiterung schließt Zufallsvariable, die mehrere Werte annehmen können, ein.

In [5] wurde gezeigt, daß die Mitverwendung eines Anfangsschätzwertes die Schätzung des Erwartungswertes einer poissonverteilten Zufallsvariablen verbessern kann, wenn ein freier Parameter n_0 geeignet gewählt wird.

Herrn Professor Dr.-Ing. A. LOTZE, der diese Untersuchungen anregte, danken wir für wertvolle Hinweise und Diskussionen.

Schrifttum

[1] HENZE, E. und MEYER-BRÖTZ, G., Eine Klasse von Lernprozessen mit veränderlichen Parametern. Telefunken-Ztg. 37 [1964], 297–307.

[2] CARNAP, R. und STEGMÜLLER, W., Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit. Springer-Verlag, Wien 1958.

[3] SMIRNOW, N. W. und DUNIN-BARKOWSKI, I. W., Mathematische Statistik in der Technik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1963.

[4] STÖRMER, H., Zustandswahrscheinlichkeiten in Leitungsbündeln. A.E.Ü. 8 [1954], 439–446.

[5] BÄUERLE, R., Informationstheoretische Beschreibung von Lernprozessen. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart, Mai 1967.