

DK: 621.395.31

DEUTSCHE BUNDESPOST

Fernmeldetechnisches

Zentralamt

F 24 b

Technischer Bericht

4302 TBr 2

Dezember 1980

**Institut für
Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung
Universität Stuttgart
Prof. Dr.-Ing. A. Lotze
25. Bericht über
verkehrstheoretische Arbeiten**

Reduktion des Ranges
von
linearen Gleichungssystemen
zur
Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit
von
vielstufigen Koppelanordnungen

von
Wolfgang Urmoneit

DEUTSCHE BUNDESPOST Fernmeldetechnisches Zentralamt Referat F24	Reduktion des Ranges von linearen Gleichungssystemen zur Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit von vieltufigen Koppelanordnungen	FTZ 4203 TBr. 2 Dez. 1980
<p>Verfasser: W. Urmoneit</p> <p>Dieser Bericht entstand in Zusammenarbeit mit dem Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart, welches von Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Lotze geleitet wird.</p> <p>Im Rahmen der Arbeitsberichte des Instituts hat dieser Bericht die Nummer 25.</p> <p>Schlüsselwörter:</p> <p>Vieltufige Koppelanordnungen, Verlustwahrscheinlichkeit, exakte Berechnung, lineare Gleichungssysteme, Reduktionsalgorithmen, Partitionen</p>		
Fortsetzung Seite		

Reduction of the rank of the system of linear equations to be solved for the exact calculation of the loss probability of multistage connecting arrays

ABSTRACT

In modern switching systems, connections between telephone subscribers are frequently established via multistage switching networks. The latter have the following advantages over single-stage switching networks: smaller number of crosspoints at equal traffic capacity and more flexible wiring of the inlets and outlets in large systems.

In multistage switching networks, conjugate through-switching is used for the setting up of connections. This means that a call is connected through only if the control finds a free path through all stages of the switching network from its inlet to the free outlet.

Multistage switching networks are called link systems.

The state

- a call incoming at the inlet of the link system cannot be connected to the desired outlet

is termed "state of congestion" or, in brief, "congestion". The corresponding congestion probability can be determined by

- simulation
- approximation methods or
- exact calculation.

These methods are described in some detail in /8,11/. Above all, the approximation methods that were known until 1968 are analyzed and represented uniformly by Kümmerle /8/. Lörcher /11/, on the other hand, is concerned with the exact calculation of the congestion probability. In addition, the above three methods are dealt with in the comprehensive introduction to /11/. In this context, it is noteworthy that the approximation method CIRB (combined inlet route blocking) has meanwhile been developed

further (CLIGS method- 7th ITC, 1976). CLIGS is an approximation method employed to determine the congestion probability with group selection. The PPL method (abbreviation of point-to-point loss /12/), published by the 8th ITC, is used for point-to-point selection. Both CLIGS and PPL are currently applied by the Deutsche Bundespost.

Up to now, it has been in particular G.P. Basharin and W. Lörcher /1,2,9,10,11/ who have been concerned with the exact calculation of link systems. In their publications algorithms are indicated for setting up the state equations of link systems. Furthermore, V.E. Benes /4,5,6/ deals with a special type of link system where $K_s = I_s$, i.e. the switching matrices have the same number of inlets and outlets.

The number of unknowns (probabilities for the state patterns) occurring with the exact calculation is very great. However, under specific conditions, which are elaborated on under section 1.2, page 26, different probabilities have one and the same numerical value, for symmetry reasons /9,11,12/.

In the link system shown on page 24, the number of state patterns to be calculated is 12,576. But on the assumptions that

- each switching matrix of stage 1 carries the same traffic and that,
- in path finding for the through-switching of a call, a free outlet of a stage 1 switching matrix is chosen randomly,

a large number of state patterns have the same state probability.

This paper shows that there are, for instance, 123 groups (classes) of state in the above example. Each of these classes comprises state patterns whose probability of occurrence is the same. As a result, the determination of the state probability and the parameters to be derived therefrom (loss, etc.) is facilitated considerably. If, for example, the number of stage 1 switching matrices is increased to $G_1 = I_2 = 10$ and the other parameters re-

main unchanged, the number of unknowns is reduced further from 5,451,776 to 169.

To enable such an excessively strong reduction of the number of unknowns in the linear system of equations to be solved, a generally valid algorithm has to be found. If there were easy methods of reducing the number of unknowns, much larger link systems could be calculated exactly than in /11/. Such methods are developed in this paper.

For a better understanding of these methods, the reduction of the number of unknowns is initially derived for two-stage link systems with preselection. This procedure is then extended to two-stage link systems using group selection. Starting from three-stage systems, a reduction method is finally devised for an optional number of stage, s .

Inhalt	Seite
Schrifttumsverzeichnis	7
Abkürzungen, Bezeichnungen	10
Definitionen	21
1 Allgemeines	23
1.1 Einleitung	23
1.2 Die Randbedingungen	26
1.2.1 Vorbemerkungen	26
1.2.2 Die Strukturparameter	26
1.2.3 Die Betriebsart	27
1.2.4 Die Absuchverfahren	28
1.2.5 Die Verkehrscharakteristik	28
1.3 Der Lösungsansatz	28
2 Die Kennzeichnung und die Ermittlung der charakteristischen Zustandsmuster von zweistufigen Linksystemen bei geordneter Absuche der Ausgänge der Koppelvielfache der ersten Stufe und mit der Betriebsart "Mischwahl"	30
2.1 Vorbemerkungen	30
2.2 Die Zustandsmatrizen S , S^* und der Zustandsvektor \vec{S}	30
2.3 Die erlaubten Zustände	36
2.3.1 Definition der erlaubten Zustände, Spaltensumme s_j	36
2.3.2 Die Anzahl NE der erlaubten Zustandsmuster	39
2.4 Die charakteristischen Zustandsmuster	41
2.4.1 Äquivalente Zustandsmuster - Zeilenvertauschung	41
2.4.2 Die charakteristischen Matrizen \underline{SC} der Zustandsmuster	45
2.4.3 Die charakteristischen Vektoren \vec{C}	47
2.5 Berechnung der Mächtigkeiten M_β	52
2.6 Die Ermittlung der charakteristischen Vektoren \vec{C} der Zustandsmatrizen S_α für Strukturen von Linksystemen mit $K_2 = I_2 = G_1$	54
2.7 Die Ermittlung der charakteristischen Vektoren \vec{C} der Zustandsmatrizen S_α für Strukturen von Linksystemen mit $K_2 < I_2 = G_1$	57
2.7.1 Die "erlaubten Kombinationen mit Wiederholungen" der G_1 Elemente c_i von \vec{C} und der "EU-Algorithmus"	57
2.7.2 Die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} und \vec{TK}	59
2.7.3 Die Partitionen	62
2.7.4 Die Ordnungsmatrix Φ	67

2.8	Ordnungshierarchie für zweistufige Linkssysteme	72
2.8.1	Linkssysteme mit gleicher Erreichbarkeit K_1	72
2.8.1.1	Einführendes Beispiel	72
2.8.1.2	Die Mächtigkeitmatrix des Ranges Θ	74
2.8.1.3	Die Mächtigkeitsmatrix Ψ der Mächtigkeiten $M_{\beta,1}$	77
2.8.1.4	Die Ordnung der charakteristischen Zustände innerhalb der Teilmengen $\varphi_{n,m}$	80
2.8.2	Linkssysteme mit $K_1 = 1$	83
2.8.3	Linkssysteme mit $K_1 = 2$	85
3	Die Ermittlung der Partitionen	89
3.1	Aufgabenstellung	89
3.2	Die Vektoren (Partitionen) \vec{V}_j der Spalte j	91
3.3	Anzahl der Partitionen für Linkssysteme mit $K_1 = 3$	100
4	Die Kennzeichnung und die Ermittlung der charakteristischen Zustandsmuster von zweistufigen Linkssystemen bei zufälliger Auswahl eines freien Ausgangs eines Koppelvielfachs der ersten Stufe und mit der Betriebsart "Mischwahl"	103
4.1	Vorbemerkungen	103
4.2	Äquivalente Zustandsmuster durch Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix S	104
4.3	Die Zustandsmatrix Z^* und der Zustandsvektor \vec{Z}	111
4.4	Die Teilmengen der charakteristischen Vektoren von $\Omega^{(g)}$, die aus den allgemeinen Zustandsvektoren $\vec{T}\vec{K}$ entstehen	114
4.5	Die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} und $\vec{T}\vec{K}$	119
4.6	Die äquivalenten Zustandsmatrizen $SC_{i,n}^{(g)}$	120
4.7	Die charakteristischen Vektoren $\vec{C}^{(z)}$ der Zustandsmuster bei "zufälliger Auswahl"	125
4.8	Anzahl der Partitionen für Linkssysteme mit $K_1 = 3$, bei "zufälliger Auswahl"	127
5	Die Kennzeichnung und die Ermittlung der charakteristischen Zustandsmuster von zweistufigen Linkssystemen mit der Betriebsart Richtungswahl	129
5.1	Die Struktur der Linkssysteme	129
5.2	Der Belegungszustand der Zwischenleitungen	130
5.2.1	Die Zustandsmatrizen S und S^* , der Potenzvektor $\vec{P}\vec{V}$ und der Zustandsvektor \vec{S}	130
5.2.2	Die normierte Zustandsmatrix SN und die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} bzw. $\vec{T}\vec{K}$ und \vec{t} bzw. $\vec{t}\vec{K}$	135
5.2.3	Die erlaubten Zustände	138
5.2.4	Die Richtungsmatrizen TR und TR^* und der Richtungsvektor $\vec{T}\vec{R}$	141

	Seite	
5.3	Die charakteristischen Matrizen SC und die charakteristischen Vektoren \vec{C} bei Richtungswahl	145
5.3.1	Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix S ("geordnete Absuche")	145
5.3.2	Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix S ("zufällige Auswahl")	146
5.4	Die charakteristischen Vektoren (Matrizen) für zweistufige Linkssysteme mit gleicher Bündelgröße N_r und gleicher Bündelbelastung Y_r für alle Richtungen	147
5.4.1	Richtungsvertauschung	147
5.4.2	Der Richtungsvektor \vec{TRK}	154
5.4.3	Gleiche Elemente $tRK_{\chi,r}$ in dem Richtungsvektor \vec{TRK}_{χ}	155
5.4.4	Die charakteristischen Vektoren $\vec{C}^{(g,r)}$ bei "geordneter Absuche" und Richtungsvertauschung	157
5.4.5	Die charakteristischen Vektoren $\vec{C}^{(z,r)}$ bei "zufälliger Auswahl" und Richtungsvertauschung	158
5.5	Die charakteristischen Vektoren (Matrizen) für zweistufige Linkssysteme mit gleicher Bündelgröße N_r und gleicher Bündelbelastung Y_r für einen Teil der Bündel	159
5.6	Die Ermittlung der charakteristischen Vektoren \vec{C} der Zustandsmatrizen S_{α} für Strukturen von zweistufigen Linkssystemen mit $k_r = I_2 = G_1$	160
5.7	Die Ermittlung der charakteristischen Vektoren \vec{C} der Zustandsmatrizen S_{α} für Strukturen von Linkssystemen mit $k_r < I_2 = G_2$	165
5.7.1	Der "EU-Algorithmus"	165
5.7.2	Die Ermittlung der Richtungsmatrizen TR	166
5.7.2.1	Die erlaubten Richtungsmatrizen TR	166
5.7.2.2	Die Richtungsmatrizen TR für Linkssysteme mit $IK = K_2$ und gleichen Richtungserreichbarkeiten $k_r = k$ in alle Richtungen, $r \in \{1,2,\dots,R\}$	171
5.7.3	Die Partitionen bei zweistufigen Linkssystemen für Richtungswahl	174
5.7.4	Die Ordnungsmatrix Φ bei Richtungswahl	175
5.7.4.1	Zweistufige Linkssysteme mit gleicher Bündelgröße N_r für alle Richtungen $r \in \{1,2,\dots,R\}$	175
5.7.4.2	Zweistufige Linkssysteme mit beliebiger Richtungserreichbarkeit k_r	178
5.7.5	Ordnungshierarchie für zweistufige Linkssysteme, Richtungswahl	179
5.7.6	Die Ermittlung der Partitionen bei Richtungswahl	180
5.7.7	Darstellung der Reduktionsarten an Hand eines Beispiels	180
5.8	Tabellarische Zusammenstellung der Zustandsbeschreibungen von zweistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl oder Mischwahl	190
6	Die erlaubten charakteristischen Zustandsmuster von zweistufigen Linkssystemen mit Expansion in der Stufe 1	193

		Seite
7	Die Kennzeichnung und die Ermittlung der charakteristischen Zustandsmuster von dreistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl	195
7.1	Einleitung	195
7.1.1	Die Struktur der Linkssysteme	195
7.1.2	Vorbemerkungen	196
7.2	Beschreibung des Belegungszustandes von dreistufigen Linkssystemen	197
7.2.1	Beschreibung des Belegungszustandes von dreistufigen Linkssystemen mit <u>zwei</u> Zustandsmatrizen S_1 und S_2	197
7.2.2	Beschreibung des Belegungszustandes (Gesamtbelegungszustand) von dreistufigen Linkssystemen durch <u>einen</u> Zustandsraum S	199
7.2.3	Gegenüberstellung der beiden Zustandsbeschreibungen: Zustandsraum S - Zustandsmatrizen S_1 und S_2	206
7.2.4	Beschreibung des Belegungszustandes von dreistufigen Linkssystemen durch eine Zustandsmatrix mit Pseudorichtungen, der Zustandsmatrix E	209
7.2.5	Der Zustandsraum S , die Zustandsmatrix E und die Zustandsvektoren \vec{S} und \vec{E}	219
7.2.6	Der normierte Zustandsraum SN , die normierte Zustandsmatrix EN , die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T}_1 , \vec{T}_2 und \vec{T}_3	221
7.2.7	Die erlaubten Zustände	227
7.2.8	Die Richtungsräume TR und TR^* und der Richtungsvektor \vec{TR}	229
7.3	Die ch. Zustandsräume SC und die ch. Vektoren \vec{C} bei dreistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl	234
7.3.1	Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Vertauschung der Ebenen $i = \text{konstant}$ im Zustandsraum S bzw. Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix E	234
7.3.2	Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Vertauschung der Ebenen $j = \text{konstant}$ im Zustandsraum S mittels der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T}_2	236
7.3.3	Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Vertauschung der Ebenen $l = \text{konstant}$ im Zustandsraum S	241
7.3.4	Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Vertauschung der Ebenen $j = \text{konstant}$ im Zustandsraum S mittels der Zustandsvektoren \vec{S}_2	244
7.3.5	Zusammenhängende Darstellung der im Abschnitt 7.3 beschriebenen Reduktionsarten an Hand eines Beispiels	250
7.4	Die charakteristischen Vektoren (Matrizen) von dreistufigen Linkssystemen mit gleicher Bündelgröße N_r für alle Richtungen $r \in \{1, 2, \dots, R\}$	259
7.4.1	Richtungsvertauschung	259
7.4.2	Der Richtungsvektor \vec{TRK}	262
7.4.3	Gleiche Elemente tRK_r im Richtungsvektor \vec{TRK}	262
7.4.4	Die charakteristischen Vektoren $\vec{C}^{(g,r)}$ bei "geordneter Absuche" und Richtungsvertauschung	264
7.4.5	Die ch. Vektoren $\vec{C}^{(z,z,R)}$ bei "zufälliger Auswahl" in Stufe 1 und Stufe 2 und Richtungsvertauschung	264

		Seite
7.5	Die ch. Vektoren von dreistufigen Linkssystemen mit gleicher Bündelgröße N_r und gleicher Bündelbelastung Y_r für einen Teil der R Abnehmerbündel	265
7.6	Die Ermittlung der charakteristischen Zustandsräume SC_β der Zustandsräume S_α für Strukturen von dreistufigen Linkssystemen mit $k_r = k = I_3$ und $K_2 = I_2$	265
7.7	Die Ermittlung der charakteristischen Zustandsräume SC_β der Zustandsräume S_α für Strukturen von dreistufigen Linkssystemen mit $k_r < I_3$	271
7.7.1	Der "EU-Algorithmus"	271
7.7.2	Die Ermittlung der Richtungsräume TR_μ	271
7.7.3	Die Partitionen bei dreistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl	271
7.7.4	Die Ordnungshierarchie der dreistufigen Linkssysteme für Richtungswahl mit $k_r = k$ für alle Richtungen $r \in \{1, 2, \dots, R\}$	273
8	Die Kennzeichnung und die Ermittlung der charakteristischen Zustandsräume SC bei Linkssystemen für Richtungswahl mit s Stufen, d.h. beliebiger Stufenzahl $s \geq 3$	276
8.1	Einleitung	276
8.1.1	Die Struktur der Linkssysteme	276
8.1.2	Vorbemerkungen	280
8.2	Beschreibung des Belegungszustandes bei s- stufigen Linkssystemen	280
8.2.1	Beschreibung des Belegungszustandes von s- stufigen Linkssystemen mit s - 1 Zustandsmatrizen S	280
8.2.2	Beschreibung des Belegungszustandes der s- stufigen Linkssysteme mit einem s- dimensionalen Zustandsraum S	281
8.2.3	Die Zustandsmatrix E des zweistufigen Ersatzsystems	281
8.2.4	Die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T}_v mit $v \in \{2, 3, \dots, s\}$	284
8.3	Die charakteristischen Zustandsräume SC vom s- stufigen Linkssystem	285
8.4	Beispiel für den Zustandsraum S, die Zustandsmatrix E und für das Ersatzsystem	285
9	Beispiel eines Linksystems, für das die Funktion $B = f(Y/N)$ exakt berechnet wurde	296
9.1	Struktur des Linksystems und Anzahl der ch. Zustandsmuster	296
9.2	Die Zustandsgleichung für ein ch. Zustandsmuster	297
9.3	Die Funktion $B = f(Y/N)$	304
10	Zusammenfassung	305

Anhang

A1:	Kombinationen mit Wiederholungen	307
A2:	Permutationen mit Wiederholungen	310
A3:	Partitionen	312
A4:	Ermittlung der Spaltenvektoren \vec{D}_{j-1}, ρ, ξ	314
A5:	Die Ordnungsmatrix Φ und die Mächtigkeitenmatrix Ψ für das zwei- stufige Linksystem mit $K_1 = 3, G_1 = 3$ und $K_2 = 3$ und "geordneter Absuche"	322
A6:	Die Ordnungsmatrix Φ und die Mächtigkeitenmatrix Ψ für das zwei- stufige Linksystem mit $K_1 = 3, G_1 = 3$ und $K_2 = 3$ und "zufälliger Auswahl"	332

SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

Koppelanordnungen, Linksysteme

- / 1/ Basharin, G.P.: Derivation of equations of state for two-stage telephone circuits with losses
Telecommunications (1960) 1,79-90
- / 2/ Basharin, G.P.: On analytical and numerical methods of switching systems investigation
6. ITC München 1970, Congress-book, 231/1-231/11
- / 3/ Bazlen, D.; Kampe G.; Lotze A.: On the influence of hunting mode and link wiring on the loss of link systems
7. ITC Stockholm 1973, Congress-book, 232/1-232/12
- / 4/ Benes, V.E.: Mathematical theory of connecting networks and telephone traffic
Academic Press New York and London 1965
- / 5/ Benes, V.E.: Applications of group theory to connecting networks
The Bell System Technical Journal
Vol. 54, No 2, 407-421
- / 6/ Benes, V.E.: Proving the rearrangeability of connecting networks by group calculations
The Bell System Technical Journal
Vol. 54, No 2, 421-434
- / 7/ Hieber, L.: Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit und der mittleren Wartezeit von Linksystemen mit unbegrenzter Wartemöglichkeit
11. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten, Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart 1970
- / 8/ Kümmerle, K.: Berechnungsverfahren für mehrstufige Koppelanordnungen mit konjugierter Durchschaltung
Systematik und Analyse
9. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten, Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart 1969
- / 9/ Lörcher, W.: Exakte Berechnung von zweistufigen Linksystemen für Richtungswahl/Mischwahl mit Mischung zwischen Stufe 1 und 2
Monographie des Institutes für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung,
Universität Stuttgart 1967
- /10/ Lörcher, W.: a) Exact calculation of the probability of loss for two-stage link systems with preselection and groupselection
6. ITC München 1970, Congress-book 236/1-236/9
b) Exact calculation of the probability of loss for two-stage link systems with groupselection
AEÜ 25 (1971) 9/10, 471 476

- /11/ Lörcher, W.: Exakte Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten und der charakteristischen Verkehrsgrößen mehrstufiger Koppelanordnungen mit konjugierter Durchschaltung
20. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten, Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart 1973
- /12/ Lotze, A.; Röder, A.; Thierer, G.: PPL - A reliable method for the calculation of point-to-point loss in link systems
8. ITC, Melbourne 1976, Congress-book 547/1-547/14
- /13/ Urmoneit, W.: Exakte Berechnung von zweistufigen Linksystemen für Richtungswahl/Mischwahl mit Mischung zwischen Stufe 1 und 2.
Monographie des Institutes für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart 1970

Wahrscheinlichkeitsrechnung-Statistik und Verkehrstheorie

- /14/ Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik
VBE Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1958
- /15/ Syski, R.: Introduction to congestion theory in telephone systems
Oliver and Boyd, Edinburgh and London 1960

Kombinatorik

- /16/ Andrews, George E.: The Theory of Partitions
Reading, Mass etc.
Addison - Wesley 1976
(Encyclopedia of mathematics and its applications
Vol 2)
- /17/ Comtet, L.: Advanced combinatorics
J. Reidel Publishing Company
Dordrecht Holland, 1974
- /18/ Jeger, M.: Einführung in die Kombinatorik Band 1
Ernst Klett Verlag Stuttgart 1973
- /19/ Jeger, M.: Einführung in die Kombinatorik Band 2
Ernst Klett Verlag Stuttgart 1977
- /20/ Netto, E.: Lehrbuch der Kombinatorik 2. Auflage 1927
Chelsea Publishing Company New York, N.Y.

- /21/ Riordan, J.: An introduction of combinatorial analysis
Fourth Printing, April 1967
John Wiley & Sons, Inc.
- /22/ Sagalowitsch, J.L.: O tschisle tiopow ekwivalentnych matriz
(Über die Anzahl der Typen äquivalenter Matrizen)
Problemy Peredatschi Informazij, Vypusk 9,
Moskva 1961, 218 229
- /23/ Sloane, N.J.A.: A Handbook of integer sequences
Academic Press,
New York and London 1973

Lineare Gleichungssysteme

- /24/ Young, D.M.: Iterative solution of large lineare systems
Academic Press
New York and London 1971

Abkürzungen, Bezeichnungen

Bemerkungen:

Wegen der Vielfalt der Bezeichnungen wurden für die Bezeichnungen meistens mnemotechnische Ausdrücke verwendet. Insbesondere steht in den Bezeichnungen:

- C für Charakteristisch,
 - K für Kombinationen (mit oder ohne Wiederholungen),
 - M für Mächtigkeit,
 - N für Anzahl,
 - R für Richtungen;
- bei den Indizes:
- g für geordnet und
 - z für zufällig.

In der folgenden Liste der Bezeichnungen sind nur jene Bezeichnungen aufgeführt, die eine übergeordnete Bedeutung haben. Abschnittsindividuelle Bezeichnungen von untergeordneter Bedeutung werden in der folgenden Liste nicht aufgeführt. Außerdem werden in der Liste nur jene Bezeichnungen mit allgemeiner Bedeutung angegeben. Verschiedene Bezeichnungen können noch mit Indizes versehen sein, z.B. die Zustandsmatrix S mit α , d.h. S_{α} .

Abkürzungen:

	Seite
BL - Algorithmus	29
ch. charakteristisch	45
CIRB	23
CLIGS	23
EU - Algorithmus	58
EV Elementarvorrat	34
PPL	24
$p(\tilde{x})$ Zustandswahrscheinlichkeit des Zustandes "x-Zwischenleitungen belegt"	29
$\{\tilde{x}\}$ beliebiges Zustandsmuster "x-Zwischenleitungen belegt".	29

<u>Bezeichnungen:</u>		Seite
	<u>Verkehrsparameter</u>	
A	Angebot	28
B	Verlust	28
Y	Belastung	304
Y_r	Belastung in Richtung r, mit $r \in \{1, 2, \dots, R\}$	148
	<u>Strukturparameter</u>	
I_v	Anzahl der Eingänge je Koppelvielfach der Stufe v	26, 227
K_v	Anzahl der Ausgänge je Koppelvielfach der Stufe v	26, 227
k_r	Anzahl der Ausgänge je Koppelvielfach der letzten Stufe (Stufe s) in Richtung r, kurz: Richtungserreichbarkeit	26, 129
G_v	Anzahl der Koppelvielfache der Stufe v	26, 227
N_r	Anzahl der Abnehmerleitungen in Richtung r, kurz: Bündelstärke	26, 129
N	Anzahl der Abnehmerleitungen bei Mischwahl	30
R	Anzahl der Abnehmerbündel, gleich Anzahl der Richtungen	26, 129
s	Anzahl der Stufen des Linksystems	26
	<u>Indizes zur Abbildung der Struktur der Linksysteme</u>	
	Für die Numerierung der Koppelvielfache und deren Eingänge und Ausgänge werden die folgenden Indizes eingeführt. Sie werden ebenfalls bei den entsprechenden Zustandsmatrizen und Zustandsvektoren verwendet.	
	bei zweistufigen Linksystemen:	
$i \in \{1, 2, \dots, G_1 = I_2\}$	Ordnungsnummer der Koppelvielfache der Stufe 1, gleich Nummer der Eingänge eines Koppelvielfachs der Stufe 2	30
$j \in \{1, 2, \dots, K_1 = G_2\}$	Ordnungsnummer der Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe 1, gleich Nummer der Koppelvielfache der Stufe 2	30
	bei dreistufigen Linksystemen kommt noch hinzu:	
$l \in \{1, 2, \dots, K_2 = G_3\}$	Ordnungsnummer der Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe 2, gleich Nummer der Koppelvielfache der Stufe 3	197
	bei Linksystemen mit mehr als $s=3$ Stufen gilt:	
$v \in \{1, 2, \dots, s\}$	Ordnungsnummer der Stufen des Linksystems mit s Stufen	277

	Seite
$i_v \in \{1, 2, \dots, G_v = I_{v+1}\}$	277
Ordnungsnummer der Koppelvielfache der Stufe v , gleich Nummer der Eingänge eines Koppelvielfachs der Stufe $v+1$	
$j_v \in \{1, 2, \dots, K_v = G_{v+1}\}$	277
Ordnungsnummer der Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe v , gleich Nummer der Koppelvielfache der Stufe $v+1$	

spezielle Indizes

$m \in \{1, 2, \dots, K_s\}$	Ordnungsnummer für die Zahl der belegten Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe s (letzte Stufe), bei Linkssystemen mit Mischwahl	68,81
$m \in \{1, 2, \dots, k_r\}$	Ordnungsnummer für die Zahl der in Richtung r belegten Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe s , bei Linkssystemen mit Richtungswahl	176, 177
$n \in \{1, 2, \dots, G_1\}$	Ordnungsnummer für die Zahl der belegten Koppelvielfache in der Stufe 1	68,81
$p \in \{1, 2, \dots, PR\}$	Ordnungsnummer der Pseudorichtungen	
	- beim dreistufigen Linkssystem	210,211
	- beim s -stufigen Linkssystem	282
$r \in \{1, 2, \dots, R\}$	Ordnungsnummer für die Abnehmerbündel	26,129
$\alpha \in \{1, 2, \dots, NE\}$	Ordnungsnummer für die erlaubten Zustände	46
$\beta \in \{1, 2, \dots, NC\}$	Ordnungsnummer für die charakteristischen Zustände	46,47
$\gamma \in \{1, 2, \dots, NTK\}$	Ordnungsnummer für die allgemeinen Zustandsvektoren \overline{TK}	61,63,81
$\varepsilon \in \{1, 2, \dots, NT\}$	Ordnungsnummer für die allgemeinen Zustandsvektoren \overline{T}	81
$\eta \in \{1, 2, \dots, NP\}$	Ordnungsnummer für die Partitionen	65,81
$\chi \in \{1, 2, \dots, NTRK\}$	Ordnungsnummer für die Richtungsvektoren \overline{TRK}	154
$\mu \in \{1, 2, \dots, NTR\}$	Ordnungsnummer für die Richtungsmatrizen \overline{TR}	175

den Belegungszustand charakterisierende Größen

\overline{C}	ch. Vektor (in Abschnitt 2 und Abschnitt 3 gilt stets: $\overline{C} = \overline{C}^{(g)}$)	47
c_i	Element i des ch. Vektors	47

	Seite
$\vec{c}_{n,m,\gamma,\epsilon,\eta}$	ch. Zustandsvektor 81
$\vec{c}_{(g)}$	ch. Zustandsvektor beim Absuchverfahren
	" geordnete Absuche "
	- bei zweistufigen Linksystemen mit Mischwahl 104
	- bei zweistufigen Linksystemen mit Richtungswahl 146
	- bei dreistufigen Linksystemen 236
$\vec{c}^{(z)}$	ch. Zustandsvektor beim Absuchverfahren
	" zufällige Auswahl "
	- bei zweistufigen Linksystemen mit Mischwahl 104, 125, 126
	- bei zweistufigen Linksystemen mit Richtungswahl 147
	- bei dreistufigen Linksystemen 236
$\vec{c}_{1,\eta}^{(g)}$	ch. Vektor $\vec{c}^{(g)}$ für den gilt: $\vec{T} = \vec{TK}$ 115, 120
$\vec{c}_{(g,R)}$	ch. Vektor beim Absuchverfahren " geordnete Absuche "
	und möglicher Richtungsvertauschung
	- bei zweistufigen Linksystemen 157
	- bei dreistufigen Linksystemen 264
$\vec{c}^{(z,R)}$	ch. Vektor beim Absuchverfahren " zufällige Auswahl "
	und möglicher Richtungsvertauschung 158
$\vec{c}^{(zT)}$	ch. Vektor beim Absuchverfahren " zufällige Auswahl "
	mit T-Reduktion 237
$\vec{c}^{(zT,z)}$	ch. Vektor bei " zufälliger Absuche " in Stufe 1 242
	(T - Reduktion) und " zufälliger Absuche " in Stufe 2
$\vec{c}^{(z,z)}$	ch. Vektor bei " zufälliger Absuche " in Stufe 1 und 246
	Stufe 2
$\vec{c}^{(z,z,R)}$	ch. Vektor bei " zufälliger Absuche " in Stufe 1 und 264
	Stufe 2 und möglicher Richtungsvertauschung
\vec{D}_j	Spaltenvektor 94
$d_{j,i}$	Element i des Spaltenvektors \vec{D}_j 94
E	Zustandsmatrix des zweistufigen Ersatzsystems
	- für das dreistufige Linksystem 214, 215
	- für das s - stufige Linksystem 281
$e_{i,j}$	Element i, j der Zustandsmatrix E
	- für das dreistufige Linksystem 215
	- für das s - stufige Linksystem 281
E^*	Gewichtete Zustandsmatrix des Ersatzsystems 220
$e_{i,j}^*$	Element der gewichteten Zustandsmatrix E^* 220

	Seite	
\vec{E}	Zustandsvektor des zweistufigen Ersatzsystems	221
e_i	Element i von \vec{E}	221
EN	normierte Zustandsmatrix des Ersatzsystems	223
$en_{i,j}$	Element i,j von EN	223
\vec{PV}	Potenzvektor	
	- bei zweistufigen Linksystemen mit Mischwahl	59
	- bei zweistufigen Linksystemen mit Richtungswahl	134
pv_j	Element j von \vec{PV}	59, 134
S	Zustandsmatrix bei zweistufigen Linksystemen	
	- mit Mischwahl	31
	- mit Richtungswahl	131
	Zustandsraum bei Linksystemen mit $s \geq 3$ Stufen	
	- bei $s=3$ stufigen Linksystemen	199
	- bei s -stufigen Linksystemen	281
$s_{i,j}$	Element i,j der Zustandsmatrix S	31, 131
$s_{i,j,l}$	Element i,j,l des dreidimensionalen Zustandsraumes S	199
$s_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s}$	Element $i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s$ des s -dimensionalen Zustandsraumes S	281
S^*	- gewichtete Zustandsmatrix bei zweistufigen Linksystemen (Spalten von S gewichtet)	
	- mit Mischwahl	32
	- mit Richtungswahl	134
	- gewichteter Zustandsraum bei Linksystemen mit drei Stufen	219
$s_{i,j}^*$	Element i,j der Zustandsmatrix S^*	32, 134
$s_{i,j,l}^*$	Element i,j,l des Zustandsraumes S^*	219
\vec{S}	Zustandsvektor	
	- bei zweistufigen Linksystemen mit Mischwahl	35
	- bei zweistufigen Linksystemen mit Richtungswahl	134
	- bei dreistufigen Linksystemen	221
s_i	Element i des Zustandsvektors \vec{S}	35, 134, 221
SC	ch. Zustandsmatrix (in Abschnitt 2 und Abschnitt 3 gilt stets: $SC = SC^{(g)}$)	45
SC^*	gewichtete Zustandsmatrix	49

	Seite	
$SC^{(g)}$	- ch. Zustandsmatrix bei zweistufigen Linkssystemen und " geordneter Absuche " in Stufe 1	
	- bei Mischwahl	104
	- bei Richtungswahl	146
	- ch. Zustandsraum bei Linkssystemen mit $s \geq 3$ Stufen und " geordneter Absuche " in Stufe 1	236
$SC^{(z)}$	- ch. Zustandsmatrix bei zweistufigen Linkssystemen und " zufälliger Auswahl " in Stufe 1	
	- bei Mischwahl	104
	- bei Richtungswahl	147
	- ch. Zustandsraum bei Linkssystemen mit $s \geq 3$ Stufen und " zufälliger Auswahl " in Stufe 1	245
$SC_{1,\eta}^{(g)}$	- ch. Zustandsmatrix $SC^{(g)}$ bei zweistufigen Linkssystemen für die gilt: $\vec{T} = \vec{TK}$	120
	- ch. Zustandsraum $SC^{(g)}$ bei Linkssystemen mit $s \geq 3$ Stufen für die gilt: $\vec{T}_2 = \vec{TK}_2$	237
$SC^{(g,R)}$	ch. Zustandsmatrix bei zweistufigen Linkssystemen mit " geordneter Absuche " in Stufe 1 und möglicher Richtungsvertauschung	158
$SC^{(zT)}$	ch. Zustandsraum $SC^{(g)}$ für den gilt: $\vec{T}_2 = \vec{TK}_2$	238
$SC^{(zT,z)}$	ch. Zustandsraum bei " zufälliger Auswahl " in Stufe 1 mit T- Reduktion und " zufälliger Auswahl " in Stufe 2	242
$SC^{(z,z)}$	ch. Zustandsraum bei " zufälliger Auswahl " in Stufe 1 und Stufe 2	246
SN	- normierte Zustandsmatrix S bei zweistufigen Linkssystemen	135
	- normierter Zustandsraum S bei Linkssystemen mit $s \geq 3$ Stufen	222
S_1	Zustandsmatrix eines dreistufigen Linksystems, die den Belegungszustand der Zwischenleitungen zwischen Stufe 1 und Stufe 2 beschreibt	197
S_2	Zustandsmatrix eines dreistufigen Linksystems, die den Belegungszustand der Zwischenleitungen zwischen Stufe 2 und Stufe 3 beschreibt	192
S_2^*	gewichtete Zustandsmatrix S_2	244
\vec{S}_2	Zustandsvektor	244
S_v	Zustandsmatrix eines s stufigen Linksystems, die den Belegungszustand der Zwischenleitungen zwischen Stufe v und Stufe v+1 beschreibt	280

	Seite	
s_j	Spaltensumme der Zustandsmatrix S	36,138
\vec{T}	allgemeiner Zustandsvektor bei zweistufigen Linkssystemen	
	- mit Mischwahl	59
	- mit Richtungswahl	136
t_j	Element j des allgemeinen Zustandsvektors \vec{T}	59,136
\vec{TK}	allgemeiner Zustandsvektor \vec{T} , für den gilt: $t_1 \cong t_2 \cong \dots \cong t_j \cong \dots \cong t_{G_2}$	60
TR	- Richtungsmatrix bei zweistufigen Linksystemen	141
	- Richtungsraum bei Linksystemen mit $s \cong 3$	229
$tR_{r,j}$	Element r,j der Richtungsmatrix TR	141
$tR_{r,j,l}$	Element r,i,j des Richtungsraums TR	229
TR*	- gewichtete Richtungsmatrix TR bei zweistufigen Linksystemen	143
	- gewichteter Richtungsraum bei Linksystemen mit $s \cong 3$ Stufen	231
$tR_{r,j}^*$	Element r,j der Richtungsmatrix TR*	143
$tR_{r,j,l}^*$	Element r,i,j des Richtungsraums TR*	231
\vec{TR}	Richtungsvektor	
	- bei zweistufigen Linksystemen	144
	- bei dreistufigen Linksystemen	232
tR_r	Element r des Richtungsvektors \vec{TR}	144,232
\vec{TRK}	Richtungsvektor \vec{TR} für den gilt: $tR_1 \cong tR_2 \cong \dots \cong tR_r \cong \dots \cong tR_R$	154,262
tRK_r	Element r des Richtungsvektors \vec{TRK}	154,262
\vec{T}_2	allgemeiner Zustandsvektor bei dreistufigen Linksystemen	223
$t_{2,j}$	Element j von \vec{T}_2	223
\vec{T}_3	allgemeiner Zustandsvektor bei dreistufigen Linksystemen	223
$t_{3,l}$	Element l von \vec{T}_3	223
\vec{T}_v	allgemeiner Zustandsvektor v des s stufigen Linksystemen	284
t_{v,i_v}	Element i_v von \vec{T}_v	284
\vec{T}	allgemeiner Zustandsvektor	119,193
t_i	Element i von \vec{T}	119
\vec{TK}	allgemeiner Zustandsvektor \vec{T} für den gilt: $t_1 \cong t_2 \cong \dots \cong t_i \cong \dots \cong t_{G_1}$	119
tK_i	Element i von \vec{TK}	119
U_j^*	Untermatrix, Teil der Matrix S^*	95

		Seite
$u_{i,l}^x$	Element i,l der Untermatrix U^*	95
\bar{V}	spezieller Vektor	95
v_i	Element i von \bar{V}	95
Z^*	gewichtete Zustandsmatrix S (Zeilen von S gewichtet)	112
$z_{i,j}^*$	Element i,j von Z^*	112
\bar{Z}	Zustandsvektor	112
z_j	Element j von \bar{Z}	112

Ordnungshierarchien

Θ	Mächtigkeitmatrix des Ranges	74
$\vartheta_{n,m}$	Element n,m von Θ	74
Φ	Ordnungsmatrix für die charakteristischen Zustands- muster	68
$\varphi_{n,m}$	Element n,m von Φ (Teilmengen von ch. Zuständen)	68
Ψ	Mächtigkeitmatrix der Mächtigkeiten $M_{\beta,1}$	78
$\psi_{n,m}$	Element n,m von Ψ	78

Mengenbezeichnungen

Ω	Menge aller erlaubten Zustandsmuster	41
$\Omega^{(g)}$	Menge der ch. Zustandsmuster bei " geordneter Absuche " in Stufe 1	
	- bei zweistufigen Linkssystemen mit Mischwahl	104
	- bei zweistufigen Linkssystemen mit Richtungs- wahl	146
	- bei dreistufigen Linkssystemen	236
$\Omega^{(z)}$	Menge der ch. Zustandsmuster bei " zufälliger Absuche " in Stufe 1	
	- bei zweistufigen Linkssystemen mit Mischwahl	104,126
	- bei zweistufigen Linkssystemen mit Richtungs- wahl	147
	- bei dreistufigen Linkssystemen	246
$\Omega^{(g,R)}$	Menge der ch. Zustandsmuster bei " geordneter Absuche " in Stufe 1 und möglicher Richtungsvertauschung	158,264
$\Omega^{(z,R)}$	Menge der ch. Zustandsmuster bei " zufälliger Auswahl " in Stufe 1 und möglicher Richtungsvertauschung	159

		Seite
$\Omega^{(zT)}$	Menge der ch. Zustandsmuster bei " zufälliger Auswahl " in Stufe 1 und T- Reduktion	238
$\Omega^{(zT,z)}$	Menge der ch. Zustandsmuster bei " zufälliger Auswahl " in Stufe 1 und T- Reduktion <u>und</u> " zufälliger Auswahl " in Stufe 2	242
$\Omega^{(z,z)}$	Menge der ch. Zustandsmuster bei " zufälliger Auswahl " in Stufe 1 <u>und</u> Stufe 2	246
$\Omega^{(z,z,R)}$	Menge der ch. Zustandsmuster bei " zufälliger Auswahl " in Stufe 1 <u>und</u> Stufe 2 und möglicher Richtungsvertauschung	264
$\bar{\Omega}^{(g)}$	} Mengen von Zustandsmustern, die <u>nicht</u> die oben angeführten Eigenschaften haben	188
$\bar{\Omega}^{(z)}$		188
$\bar{\Omega}^{(g,R)}$		188
$\bar{\Omega}^{(z,R)}$		188
$\bar{\Omega}^{(zT)}$		259
$\bar{\Omega}^{(zT,z)}$		259
$\bar{\Omega}^{(z,z)}$		259
<u>Anzahlen, Mächtigkeiten</u>		
IK	maximaler Wert der Spaltensumme s_j	167
M_β	Mächtigkeit der Äquivalenzklasse β	47,52
$M_{\beta,1}$	Teil 1 von M_β	77
$M_{\beta,2}$	Teil 2 von M_β	77
MGR	Mächtigkeit des Vektors $\overline{C}^{(g,R)}$	157
MS2	Mächtigkeit des Vektors \overline{S}_2	265
MTK	Mächtigkeit des Vektors \overline{TK}	159
MTK2	Mächtigkeit des Vektors \overline{TK}_2	264
MTK3	Mächtigkeit des Vektors \overline{TK}_3	264
MTRK	Mächtigkeit des Vektors \overline{TRK}	157
MZ, $M^{(z)}$	Mächtigkeit des Vektors $\overline{C}^{(z)}$	126
MZR	Mächtigkeit des Vektors $\overline{C}^{(z,R)}$	159
MZZR	Mächtigkeit des Vektors $\overline{C}^{(z,z,R)}$	264
N_p^*	Anzahl der Abnehmer in Pseudorichtung p des Ersatzsystems	213
NC	Anzahl der ch. Zustandsmatrizen SC	47,55,66,75,162
$NC^{(g,R)}$	Anzahl der ch. Zustandsmatrizen $SC^{(g,R)}$	158

		Seite
NC ^(z)	Anzahl der ch. Zustandsmatrizen SC ^(z)	108
NC ^(z,R)	Anzahl der ch. Zustandsmatrizen SC ^(z,R)	159
NE	Anzahl der <u>er</u> laubten Zustandsmuster	39,41,165
NK	Anzahl der <u>k</u> ombinatorisch möglichen Zustandsmuster	266
NP	Anzahl der <u>P</u> artitionen	66
NRZ	<u>Z</u> ustands <u>n</u> ummer	46,164
NT	Anzahl der Vektoren \vec{T}	63
NTK	Anzahl der Vektoren \vec{TK}	63
NTR	Anzahl der Vektoren \vec{TR}	171
NTRK	Anzahl der Vektoren \vec{TRK}	154
NTRM	Anzahl der Vektoren \vec{TR} der Klasse <u>m</u>	177
NV	Anzahl der verschiedenen Elemente c_i im Vektor \vec{C}	121
PR	Anzahl der <u>P</u> seudor <u>r</u> ichtungen	
	- bei dreistufigen Linkssystemen	210,211
	- bei s - stufigen Linkssystemen	282
 <u>sonstige Größen</u>		
a	Anzahl der unterschiedlichen Dezimalzahlen, die jedes der Elemente c_i von \vec{C} annehmen kann	
	- bei zweistufigen Linkssystemen mit Mischwahl	55
	- bei zweistufigen Linkssystemen mit Richtungs- wahl	161
	- bei dreistufigen Linkssystemen	266
f _m	Anzahl der belegten Koppelvielfache n der Stufe 1, ab der keine weiteren charakteristischen Zustände auftreten	
	- bei zweistufigen Linkssystemen mit Mischwahl	70
	- bei zweistufigen Linkssystemen mit Richtungs- wahl	177
	- bei dreistufigen Linkssystemen	275

		Seite
MAX	$\{ tK_{\gamma,i} \}$	65
MIN	$\{ I_2, K_2 \}$	138
MIN	$\{ G_1, 2m \}$	87
IN	Bereich der natürlichen Zahlen	83
SP	Summe, aus der die Partitionen zu bilden sind	
	- bei zweistufigen Linkssystemen mit Mischwahl	65
	- bei zweistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl	174
	- bei dreistufigen Linkssystemen	272
$\binom{m}{n}$	Binominalkoeffizient	40

Definitionen

Seite

Zweistufige Linkssysteme mit Mischwahl

Definition 2-A: Zustandsmatrix S	31
Definition 2-B: Zustandsmatrix S^*	32
Definition 2-C: Zustandsvektor \vec{S}	35
Definition 2-D: Spaltensumme s_j	36
Definition 2-E: Erlaubte Zustandsmuster ("geordnete Absuche")	38
Definition 2-F: Äquivalente Matrizen - Zeilenvertauschung	43
Definition 2-G: Charakteristische Matrizen SC	46
Definition 2-H: Potenzvektor \vec{PV}	59
Definition 2-I: Allgemeiner Zustandsvektor \vec{T}	59
Definition 2-J: Allgemeiner Zustandsvektor \vec{TK}	60
Definition 2-K: Ordnungsmatrix ϕ	68
Definition 2-L: Mächtigkeitmatrix des Ranges Θ	74
Definition 2-M: Mächtigkeitenmatrix ψ	78
Definition 3-A: Spaltenvektor \vec{D}_j	94
Definition 3-B: Untermatrix U_j^*	95
Definition 3-C: Vektor \vec{V}_j	95
Definition 4-A: Äquivalente Matrizen - Zeilenvertauschung/ Spaltenvertauschung	107
Definition 4-B: Zustandsmatrix Z^*	112
Definition 4-C: Zustandsvektor \vec{Z}	112
Definition 4-D: Allgemeiner Zustandsvektor \vec{T}	119
Definition 4-E: Allgemeiner Zustandsvektor \vec{TK}	119
Definition 4-F: Charakteristischer Zustandsvektor $\vec{C}^{(z)}$	126

Zweistufige Linkssysteme mit Richtungswahl

Definition 5-A: Normierte Zustandsmatrix SN	135
Definition 5-B: Erlaubte Zustandsmuster ("zufällige Auswahl")	139
Definition 5-C: Richtungsmatrix TR	141
Definition 5-D: Richtungsmatrix TR^*	143
Definition 5-E: Richtungsvektor \vec{TR}	144
Definition 5-F: Richtungsvektor \vec{TRK}	154
Definition 5-G: Charakteristische Vektoren $\vec{C}^{(g,R)}$ bei "geordneter Absuche" und Richtungsver- tauschung	157
Definition 5-H: Charakteristische Vektoren $\vec{C}^{(z,R)}$ bei "zufälliger Auswahl" und Richtungsver- tauschung	158

		Seite
Definition 5-I: Erlaubte Richtungsmatrizen		169
Definition 5-J: Ordnungsmatrix ϕ bei Richtungswahl		176
<u>Dreistufige Linkssysteme mit Richtungswahl</u>		
Definition 7-A: Zustandsraum	S	199
Definition 7-B: Zustandsmatrix	E	214
Definition 7-C: Zustandsraum	S *	219
Definition 7-D: Zustandsmatrix	E *	220
Definition 7-E: Normierter Zustandsraum	SN	222
Definition 7-F: Erlaubte Zustände		228
Definition 7-G: Richtungsraum	TR	229
Definition 7-H: Richtungsraum	TR*	231
Definition 7-I: Richtungsvektor	$\overrightarrow{\text{TR}}$	232

1. Allgemeines

1.1 Einleitung

In der modernen Vermittlungstechnik werden die Verbindungen zwischen den Fernsprechteilnehmern häufig durch mehrstufige Koppelanordnungen hergestellt. Die Vorteile von mehrstufigen Koppelanordnungen gegenüber einstufigen Koppelanordnungen sind: geringerer Koppelpunktaufwand bei gleicher Verkehrsleistung und die freizügigere Beschaltung der Ausgänge bei größeren Systemen.

Die Durchschaltung einer Verbindung erfolgt bei mehrstufigen Koppelanordnungen konjugiert. Das bedeutet, daß bei einem Verbindungswunsch (Ruf) die Durchschaltung nur dann erfolgt, wenn die Steuerung von einem Eingang zu einem freien Ausgang der Koppelanordnung einen durchgehenden freien Weg durch sämtliche Stufen der Koppelanordnung findet.

Mehrstufige Koppelanordnungen werden als Zwischenleitungsanordnungen oder auch als Linksysteme bezeichnet.

Der Zustand

- ein am Eingang des Linksystems ankommender Ruf kann nicht mit dem gewünschten Ausgang verbunden werden

wird als Blockierungszustand oder kurz als Blockierung bezeichnet. Die Ermittlung der dazugehörenden Blockierungswahrscheinlichkeit kann erfolgen durch:

- Simulation
- Approximationsverfahren oder durch
- exakte Berechnung.

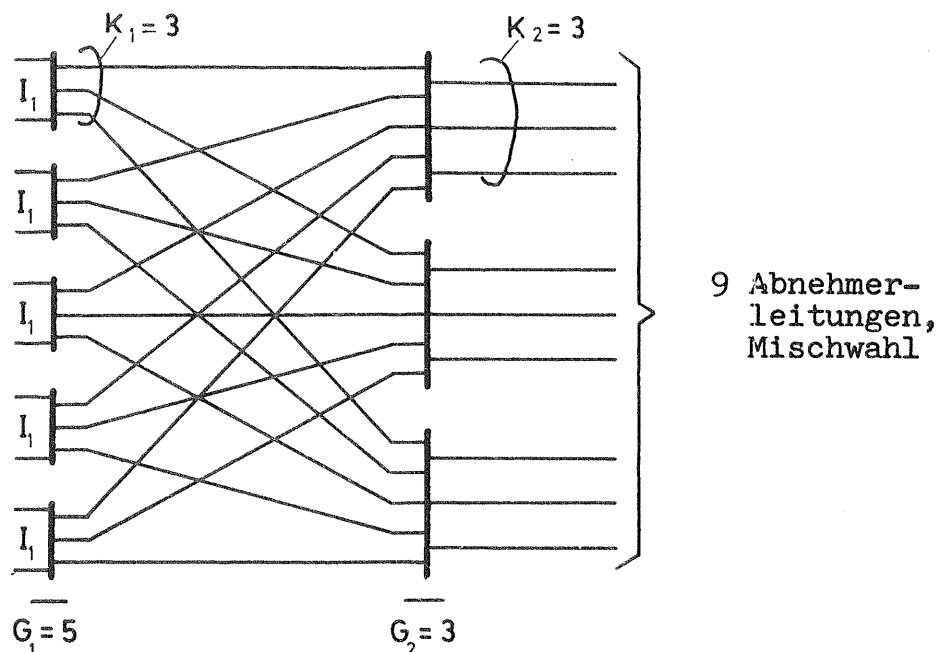
In /8,11/ werden diese Verfahren näher betrachtet. Dabei werden von Kümmerle /8/ insbesondere die bis 1969 bekannten Approximationsverfahren analysiert und einheitlich dargestellt. Demgegenüber wird von Lörcher /11/ die exakte Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit behandelt. Außerdem wird in der ausführlichen Einleitung von /11/ auf die oben genannten drei Verfahren näher eingegangen. In diesem Zusammenhang ist noch zu bemerken, daß das in /8/ erwähnte Approximationsverfahren CIRB (Combined Inlet - Route - Blocking) inzwischen weiterentwickelt wurde (Verfahren CLIGS - 7. ITC 1976). Das Verfahren CLIGS ist ein

Approximationsverfahren zur Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit bei Bündelwahl (Group Selection). Für Punkt zu Punktwahl wurde auf dem 8. ITC ein Approximationsverfahren mit der Kurzbezeichnung PPL (Point to Point Loss /12/) veröffentlicht. Die verfahren CLIGS und PPL sind die Näherungsverfahren, die z.Z. von der DBP verwendet werden.

Mit der e x a k t e n B e r e c h n u n g von Linksystemen haben sich insbesondere G.P. Basharin und W. Lörcher befaßt /1,2,9,10,11/. In den Arbeiten von Basharin und Lörcher werden Algorithmen zur Erstellung der Zustandsgleichungen eines Linksystems angegeben. Des weiteren wird in den Arbeiten von V.E. Benes /4,5,6/ ein spezieller Typ von Linksystemen mit $K_S = I_S$ behandelt, d.h. die Zahl der Eingänge und die Zahl der Ausgänge der Koppelvielfache sind gleich.

Die Zahl der bei der exakten Berechnung auftretenden Unbekannten (Wahrscheinlichkeiten für die Zustandsmuster) ist sehr groß. Unter ganz bestimmten Voraussetzungen, die in Abschnitt 1.2 Seite 26 näher behandelt werden, haben jedoch verschiedene Wahrscheinlichkeiten aus symmetrischen Gründen ein und denselben Zahlenwert /9,11,12/.

Beispiel 1 :



Bei dieser Struktur ist die Zahl der zu berechnenden Zustandsmuster des Linksystems gleich 12576. Unter den Voraussetzungen

- gleiche Belastung je Koppelvielfach der Stufe 1 und
- zufällige Auswahl eines freien Ausgangs eines Koppelvielfachs von Stufe 1 bei der Wegesuche zur Durchschaltung

treten jedoch sehr viele Zustandsmuster mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.

In dieser Arbeit wird gezeigt, das es z.B. im obigen Beispiel nur 123 Gruppen (Klassen) von Zuständen gibt. Jede dieser Klassen enthält Zustandsmuster, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Damit reduziert sich die Aufgabe: Ermittlung der Zustandswahrscheinlichkeiten und der daraus berechenbaren Parameter (Verlust etc.), beträchtlich. Erhöht man z.B. die Zahl der Koppelvielfache in der Stufe 1 auf $G_1 = I_2 = 10$ und läßt die anderen Strukturparameter gleich, so erhält man sogar eine Reduktion von 5 451 776 Unbekannten auf nur 169 Unbekannte.

Für diese außerordentlich große Reduktion der Zahl der Unbekannten, in den zu lösenden linearen Gleichungssystemen muß ein allgemein gültiger Algorithmus gefunden werden. Ist diese Reduktion der Zahl der Unbekannten in einfacher Weise möglich, dann können wesentlich größere Linksysteme exakt berechnet werden, als dies in /11/ möglich war. In der vorliegenden Arbeit werden diese Methoden entwickelt.

Zum besseren Verständnis der Reduktionsmethoden wird die Reduktion der Unbekannten zunächst für zweistufige Linksysteme für Mischwahl hergeleitet. Das Verfahren wird dann auf zweistufige Linksysteme für Richtungswahl erweitert. Anschließend wird - ausgehend von dreistufigen Linksystemen - die Reduktionsmethode für eine beliebige Stufenzahl s hergeleitet.

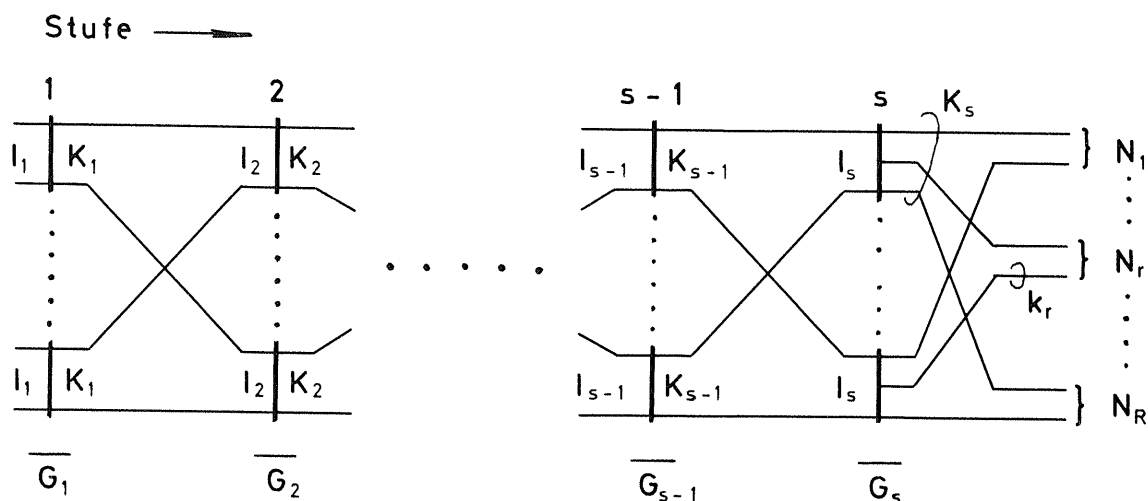
1.2 Die Randbedingungen

1.21 Vorbemerkungen

Die Aufgaben eines Linksystems sind in /11/ ausführlich beschrieben und sollen deshalb an dieser Stelle nicht wiederholt werden. Das gleiche gilt für die zahlreichen Unterscheidungsmerkmale von Linksystemen. In diesem Abschnitt sollen nur jene relevanten Unterscheidungsmerkmale angegeben werden, die für die folgenden Betrachtungen notwendig sind.

1.22 Die Strukturparameter

Bild 1.2: Linksystem mit s Stufen



Es bedeuten:

I_1 : Zahl der Eingänge eines Koppelvielfachs von Stufe 1

K_1 : Zahl der Ausgänge eines Koppelvielfachs von Stufe 1

G_1 : Zahl der Koppelvielfache von Stufe 1

k_r : Zahl der Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe s
in Richtung r

Analog dazu I_2, K_2, G_2 etc.

Für die Strukturparameter sollen die folgenden Bedingungen gelten:

K_v einheitlich über alle G_v Koppelvielfache der Stufe v .
 I_v einheitlich über alle G_v Koppelvielfache der Stufe v .
 mit $v \in \{ 1, 2, \dots, s \}$.

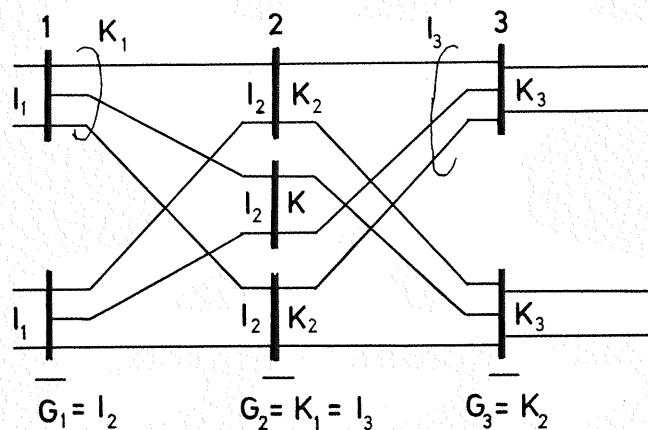
In den Abschnitten 2 bis 5 sei $I_1 \cong K_1$, d.h. keine Expansion in der Stufe 1. Der Fall $I_1 < K_1$ wird in Abschnitt 6 behandelt. Ab Abschnitt 7 gilt, wenn nicht besonders vermerkt, $I_1 \cong K_1$.

Die Verdrahtung zwischen den Stufen sei geordnet /3/ aufgelegt. Die Zahl der Zwischenleitungen l von einem Koppelvielfach der Stufe v zu einem Koppelvielfach der Stufe $v + 1$ sei im folgenden stets $l=1$. Das führt zu der Beziehung

$$\left. \begin{aligned} G_{v+1} &= K_v \text{ und} \\ I_{v+1} &= G_v, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

siehe Beispiel 2.

Beispiel 2 :



1.23 Die Betriebsart

Die Betriebsart der Linkssysteme sei Richtungswahl. Den Grenzfall " nur ein Abnehmerbündel " bezeichnet man als Mischwahl /11/.

1.24 Die Absuchverfahren

Es werden die beiden Absuchverfahren

- geordnetes Absuchen der Ausgänge der Koppelvielfache der Stufe v von einer festen Nullstellung (kurz als "geordnete Absuche" bezeichnet) und
- zufällsmäßige Auswahl eines freien Ausgangs der Koppelvielfache der Stufe v (kurz als "zufällige Auswahl" bezeichnet)

betrachtet /11/.

1.25 Die Verkehrscharakteristik

Der angebotene und verarbeitete Verkehr sei Zufallsverkehr 1. Art. Wenn nicht anders angegeben, sollen alle G_1 Koppelvielfache der Stufe 1 gleichmäßig belastet sein. Nach Abschnitt 1.22 der vorherigen Seite soll bei den in den Abschnitten 2 bis 5 betrachteten Linksystemen die Bedingung $I_1 \cong K_1$ erfüllt sein. Damit sind die in den Abschnitten 2 bis 5 dargestellten Zusammenhänge unabhängig von der Anzahl der Eingänge I_1 der Koppelvielfache der Stufe 1.

1.3 Der Lösungsansatz - das statistische Gleichgewicht -

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist das Ziel der verkehrstheoretischen Untersuchungen an Linksystemen die Ermittlung der Blockierungswahrscheinlichkeit B in Abhängigkeit des Verkehrsangebots A . Weitere Einflußgrößen sind

- die Struktur des Linksystems, gekennzeichnet durch die Strukturparameter (Abschnitt 1.22 Seite 26),
- die Betriebsart des Linksystems (Abschnitt 1.23 Seite 27),
- das Absuchverfahren (Abschnitt 1.24) und
- Zahl und Größe der Abnehmerbündel.

Die Blockierungswahrscheinlichkeit B ist also eine Funktion

$$B = f (\text{Angebot A, Struktur, Betriebsart,} \quad (1.2) \\ \text{Absuchverfahren, Abnehmerbündel }).$$

Der Lösungsansatz für die exakte Berechnung dieser Funktion ist das sogenannte statistische Gleichgewicht /11 - Seite 38/. Dabei wird der Fall des stationären Angebots betrachtet. Mit Hilfe des statistischen Gleichgewichts nach K. Erlang /15/ bekommt man für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(\vec{x})$ ein lineares Gleichungssystem. Darin ist $\{x\}$ ein Zustandsmuster, das zum Zustand " x - Zwischenleitungen belegt " beiträgt. Die Nomenklatur wurde entsprechend /11/ gewählt.

Dieser Lösungsansatz ist identisch mit der Chapman - Kolmogoroff - Gleichung für den stationären Geburt - Tod - Prozess.

Basharin und Lörcher /1,2,9,10,11/ haben Algorithmen ermittelt, mit deren Hilfe man das Zustandsgleichungssystem für das betrachtete Linksyst \ddot{e} m aufstellen kann. Im folgenden wird für diese Algorithmen die Abkürzung BL - A l g o r i t h m u s eingeführt (Basharin - Lörcher).

Eine geschlossene Lösung mit allgemeinen Strukturparametern in den Zustandsgleichungen ist, wegen der hohen Zahl von Unbekannten, z.Z. nicht möglich. Nur bei Sonderfällen /7 - Seite 23/ oder bei ganz kleinen Systemen /1/ ist eine geschlossene Lösung möglich. Z.Z. kann das Zustandsgleichungssystem nur numerisch gelöst werden.

Ein besonderes Merkmal dieser Gleichungssysteme ist, daß deren Koeffizientenmatrix dünn besetzt ist, jedoch von hohem Rang. Für solche Gleichungssysteme ist das Überrelaxationsverfahren das zweckmäßigste Lösungsverfahren /24,11/. Es ist ein iteratives Verfahren.

2. Die Kennzeichnung und die Ermittlung der charakteristischen Zustandsmuster von zweistufigen Linksystemen, bei geordneter Absuche der Ausgänge der Koppelvielfache der Stufe 1 und mit der Betriebsart " Mischwahl ".

2.1 Vorbemerkungen

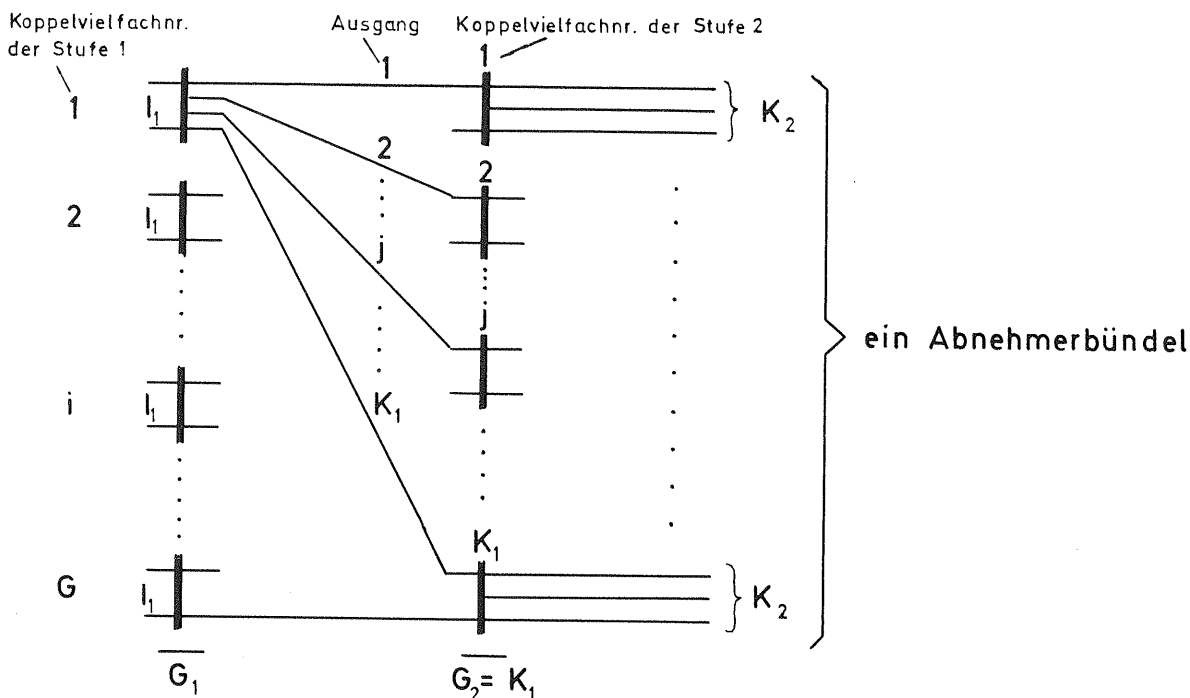
In der Kombinatorik werden mathematische Beweise häufig durch logische Schlußfolgerungen geführt. Da im folgenden kombinatorische Methoden angewendet werden, ist hier die gleiche Beweisführung für die aufgestellten Sätze möglich.

Die in den nachstehenden Ausführungen verwendeten Begriffe

- Zustandsmatrix und
- Zustandsvektor

beschreiben Belegungszustände eines Linksystems und haben keine mathematische Signifikanz. Die Zustandsmatrix ist ein Begriff, der in der Verkehrstheorie /1,2,4,8,9,10,11,13/ verwendet wird. Analog dazu wird in dieser Arbeit der Begriff "Zustandsvektor" eingeführt, als einspaltige bzw. einzeilige Zustandsmatrix.

2.2 Die Zustandsmatrizen S , S^* und der Zustandsvektor \bar{S}



Gegeben sei ein zweistufiges Links-System für Mischwahl entsprechend Bild 2.2 der vorangegangenen Seite. In diesem Bild ist die Numerierung der Koppelvielfache von Stufe 1 und 2 und die Numerierung der Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe 1 angegeben. Es wird jetzt die folgende Definition eingeführt.

Definition 2-A: Die binäre Zustandsmatrix S kennzeichnet eindeutig den Belegungszustand der Zwischenleitungen /1,2,4,5,8,9,10,13/. Die Dimension der Matrix ist $G_1 \cdot K_1$, gleich Anzahl der Zwischenleitungen. Ihre Elemente sollen mit $s_{i,j}$ bezeichnet werden.

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & \cdots & s_{1,j} & \cdots & s_{1,K_1} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & \cdots & s_{2,j} & \cdots & s_{2,K_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{i,1} & s_{i,2} & \cdots & s_{i,j} & \cdots & s_{i,K_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{G_1,1} & s_{G_1,2} & \cdots & s_{G_1,j} & \cdots & s_{G_1,K_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$$

$$j \in \{1, 2, \dots, K_1\}$$

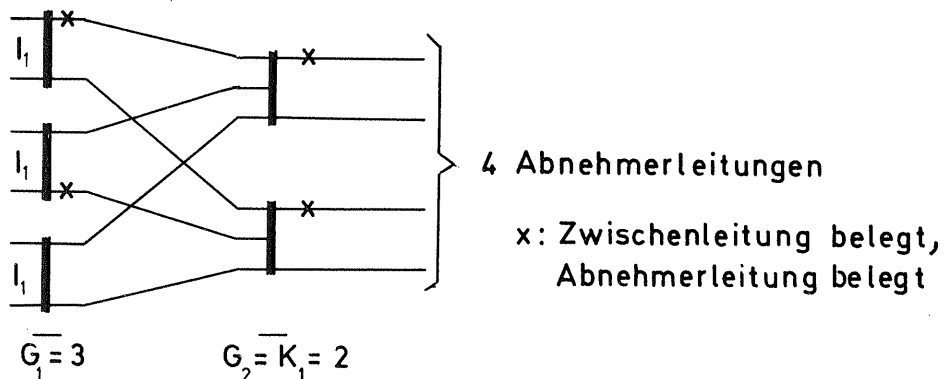
Die Anzahl der Zeilen von S ist gleich der Anzahl der Koppelvielfache in der Stufe 1, gleich G_1 . Die Anzahl der Spalten von S ist gleich der Anzahl der Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe 1, gleich Anzahl der Koppelvielfache der Stufe 2, gleich $K_1 = G_1$. Das Element $s_{i,j}$ kennzeichnet den Belegungszustand des Ausgangs j des Koppelvielfachs i der Stufe 1. Es sei

$$s_{i,j} = 0, \text{ wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \text{ der Stufe 1} \\ \text{nicht belegt ist und}$$

$$s_{i,j} = 1, \text{ wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \text{ der Stufe 1} \\ \text{belegt ist;}$$

siehe Beispiel 3 auf der nächsten Seite.

Beispiel 3 :



Die Zustandsmatrix der Zwischenleitungen ist für dieses Belegungsmuster:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Für die weiteren Betrachtungen ist es jetzt zweckmäßig (siehe später S^*) den Zustand

"Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 belegt"

so zu beschreiben, daß der Wert des Elements $s_{i,j}$ von der Spalte j abhängig ist. Es wird deshalb eine neue Zustandsmatrix, die Matrix S^* , definiert.

Definition 2-B: Die nichtbinäre Zustandsmatrix S^* , ebenfalls von der Dimension $G_1 \cdot K_1$, kennzeichnet den Belegungszustand der $G_1 \cdot K_1$ Ausgänge der Stufe 1. Es ist

$$s_{i,j}^* = 0, \text{ wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \text{ der Stufe 1}$$

$$\text{nicht belegt ist und}$$

$$s_{i,j}^* \equiv 2^{j-1}, \text{ wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \text{ der}$$

$$\text{Stufe 1 belegt ist, mit:}$$

$$i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$$

$$j \in \{1, 2, \dots, K_1\} .$$

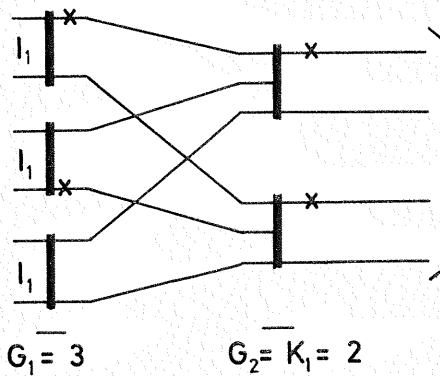
$$S^* = \begin{pmatrix} s_{1,1}^* & s_{1,2}^* & \dots & s_{1,j}^* & \dots & s_{1,K_1}^* \\ s_{2,1}^* & s_{2,2}^* & \dots & s_{2,j}^* & \dots & s_{2,K_1}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{i,1}^* & s_{i,2}^* & \dots & s_{i,j}^* & \dots & s_{i,K_1}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ s_{G_1,1}^* & s_{G_1,2}^* & \dots & s_{G_1,j}^* & \dots & s_{G_1,K_1}^* \end{pmatrix}$$

Zwischen den Elementen $s_{i,j}^*$ der Matrix S^* und den Elementen $s_{i,j}$ der Matrix S besteht also der Zusammenhang

$$s_{i,j}^* = s_{i,j} \cdot 2^{j-1}, \quad (2.1)$$

siehe auch Beispiel 4.

Beispiel 4 : Betrachtet wird das unten dargestellte Belegungsmuster.



4 Abnehmerleitungen

x bedeutet: Leitung belegt

Die Zustandsmatrix für dieses Belegungsmuster ist:

$$S = \begin{matrix} j: & 1 & 2 \\ \begin{matrix} i:1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad S^* = \begin{matrix} j: & 1 & 2 \\ \begin{matrix} i:1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$2^0 \ 2^1$ Gewichtung der Spalten

Durch die Gewichtung der Elemente der Spalte j von S mit 2^{j-1} erhält man die Matrix S^* .

Es werden jetzt alle Zustandsmuster des Koppelvielfachs 1 ($i=1$), der Stufe 1, des Linksystems nach Beispiel 4, betrachtet. Bei den beiden anderen Koppelvielfachen ($i=2,3$) der Stufe 1 sei keine Belegung vorhanden. Man erhält die folgenden Zustandsmuster:

Anzahl der Belegungen im Koppelvielfach 1	0	1	1	2
Zustandsmatrix S	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
Laufende Nummer der Zustandsmatrix	1	2	3	4
Der dezimale Wert der Dualzahl von Zeile 1	0	1	2	3
Spaltennummer j	1 2	1 2	1 2	1 2
Spaltengewicht	2^0 2^1	2^0 2^1	2^0 2^1	2^0 2^1
Zustandsmatrix S^*	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
Zeilensumme s_1 der Zeile 1 von S^*	0	1	2	3

Die Elemente einer Zeile i in der Zustandsmatrix S stellen eine "Dualzahl" dar, hier mit 2 Stellen, allgemein mit K_1 Stellen. Abweichend von der üblichen Schreibweise wächst die Stellenwertigkeit dieser "Dualzahl" von links nach rechts.

Die Anzahl der Zustandsmuster eines Koppelvielfachs der Stufe 1 ist damit gleich der Anzahl K_1 -stelliger Dualzahlen, d.h. allgemein gleich dem Elementarvorrat EV von K_1 -stelligen Dualzahlen. Im angeführten Beispiel beträgt der Elementarvorrat $EV=2^2=4$, allgemein ist $EV = 2^{K_1}$.

Die Zustandsmatrix S^* unterscheidet sich von der Matrix S nur durch die Gewichtung der Elemente $s_{i,j}$ mit 2^{j-1} . Bildet man jetzt die Zeilensumme $\sum_j s_{i,j}^*$ der Zeile 1 von S^* , so folgt aus der Tabelle der vorangegangenen Seite:

Die Zeilensumme der Zeile 1 von S^* und der dezimale Zahlenwert der Dualzahl in der Zeile 1 der Matrix S sind stets gleich.

Das gilt natürlich auch für alle Zustandsmuster der Koppelvielfache 2 und 3 (Zeile 2 und 3 von S bzw. S^*) und allgemein bei G_1 Koppelvielfachen der Stufe 1.

Kennzeichnet man den Belegungszustand auf den Zwischenleitungen eines zweistufigen Linksystems durch die Zustandsmatrix S^* , so beschreiben allein die G_1 Zeilensummen der Zustandsmatrix S^* ebenfalls eindeutig den Belegungszustand der Zwischenleitungen, mit anderen Worten: den Zustand der $G_1 \cdot K_1$ Ausgänge der Koppelvielfache der Stufe 1. Dieser Sachverhalt führt zu der Definition 2-C.

Definition 2-C: Die Zeilensumme der Zeile i der Zustandsmatrix S^* sei s_i . Die Zahlenfolge der Zeilensummen $s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_{G_1}$ wird als Zustandsvektor

$$\vec{S} = \left\{ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_{G_1} \end{array} \right\}$$

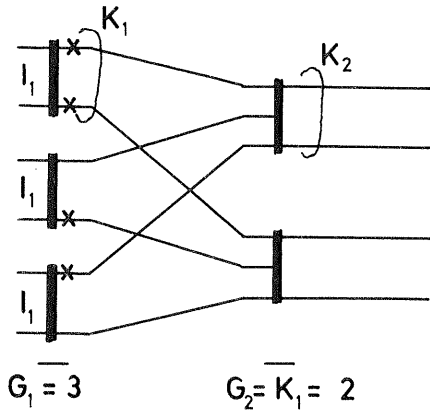
bezeichnet, mit $i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$ und $s_i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1} - 1\}$.

Wie in den folgenden Abschnitten gezeigt wird, ist diese Darstellung sehr vorteilhaft.

Zwischen den Elementen des Zustandsvektors \vec{S} und den Elementen der Zustandsmatrix S und S^* besteht der folgende Zusammenhang (Transformationsbeziehung):

$$s_i = \sum_{j=1}^{K_1} s_{i,j}^* = \sum_{j=1}^{K_1} 2^{j-1} s_{i,j} \quad (2.2)$$

Beispiel 5:



Die mit x gekennzeichneten Zwischenleitungen sind belegt. Für dieses Belegungsmuster erhält man die unten angegebenen Zustandsmatrizen S und S* und den Zustandsvektor \vec{S} .

Zustandsmatrix

Zustandsmatrix

Zustandsvektor

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$S^* = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{S} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$2^0 \quad 2^1$

Zeilensummen

Gewichte

2.3 Die erlaubten Zustände

2.31 Definition der erlaubten Zustände, Spaltensumme $s_{.j}$

Definition 2-D: Die Spaltensumme $s_{.j}$ einer gegebenen Zustandsmatrix S ist die Summe

$$s_{.j} = \sum_{i=1}^{G_1} s_{i,j}$$

$s_{.j}$ ist gleich die Summe der belegten Eingänge des Koppelvielfachs j der Stufe 2.

Für die Spaltensumme $s_{.j}$ gelten die Bedingungen (2.3) und (2.4).

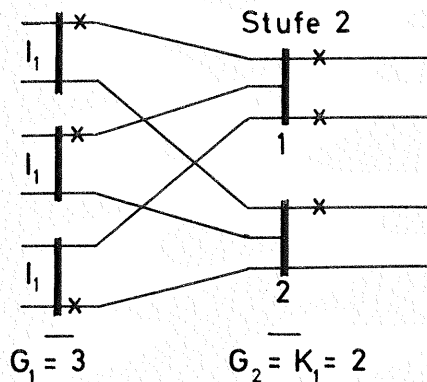
$$\text{Für } I_2 = K_2 \text{ gilt: } 0 \leq s_{.j} = K_2 = \underline{I_2} = G_1 \quad (2.3)$$

$$\text{Für } I_2 > K_2 \text{ gilt: } 0 \leq s_{.j} \leq K_2 < \underline{I_2} = G_1 \quad (2.4)$$

Im Fall (2.3) kann also der Zustand " G_1 Elemente $s_{i,j}$ der Spalte j belegt " eintreten. Im Fall (2.4) kann höchstens der Zustand " K_2 Elemente der G_1 vorhandenen Elemente $s_{i,j}$ der Spalte j belegt " eintreten.

Beispiel 6:

x: Leitung belegt



Zustandsmatrix

j: 1 2 — gleich Koppelvielfachnummer der Stufe 2

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

 2 1 — Spaltensumme $s_{.j}$, $s_{.1} = 2$, $s_{.2} = 1$

Im Koppelvielfach 1 der Stufe 2 sind die beiden zur Verfügung stehenden Ausgänge belegt. Es können nicht mehr als 2 von 3 Eingängen des Koppelvielfachs 1 bzw. 2 der Stufe 2 belegt werden (Aussage von (2.4)).

Ohne die technische Randbedingung $I_2 > K_2$ zu betrachten, wäre auch das folgende Zustandsmuster denkbar:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

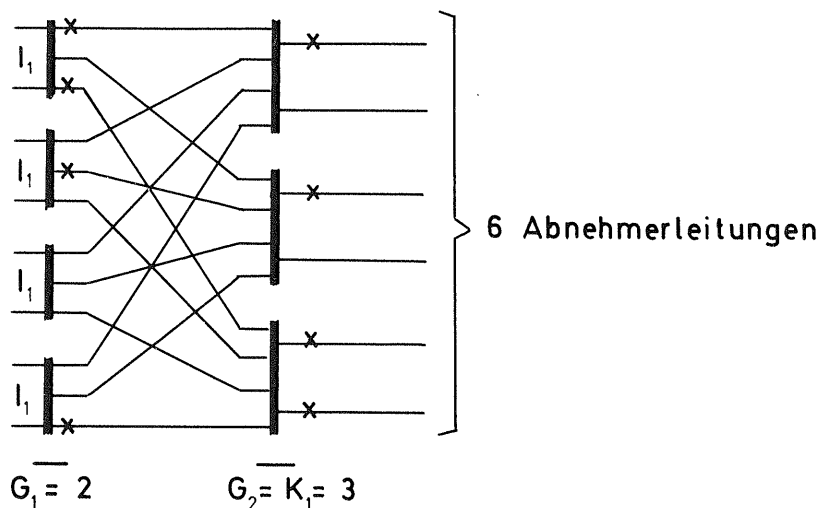
Dieses Muster wäre bei dem nach Beispiel 6 Seite 37 gegebenen Linkssystem nur denkbar bei einer Doppelbelegung eines Ausgangs des Koppelvielfachs 1 von Stufe 2. Das ist technisch sinnlos. Damit kommt man zu der

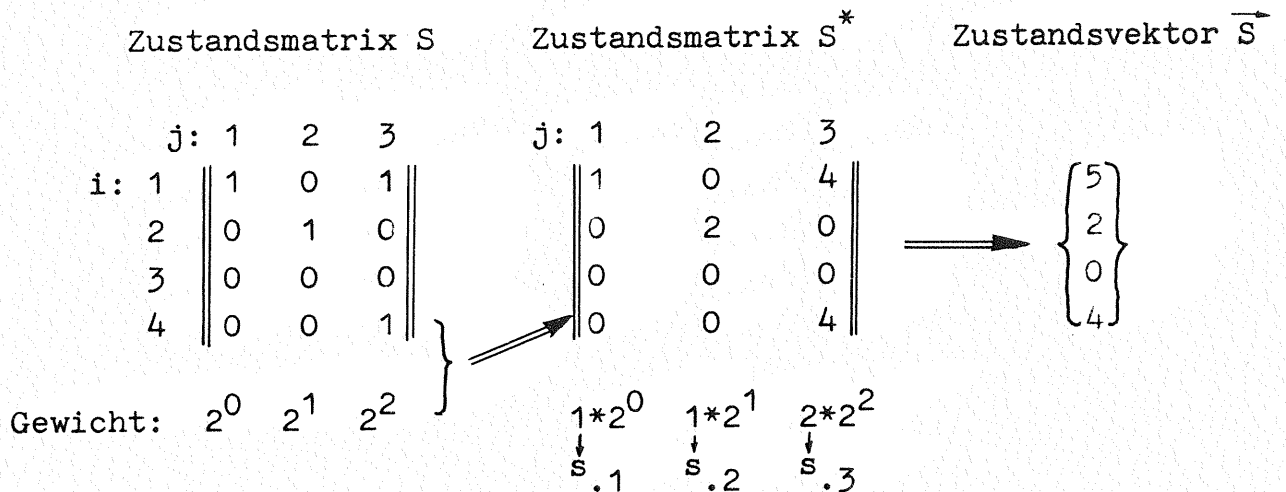
Definition 2-E: Zustandsmuster, die der Bedingung (2.4) genügen, sind "erlaubte Zustandsmuster". Erlaubte Zustandsmuster sind alle technisch sinnvollen Muster.

Bei Linkssystemen mit $I_2 = K_2$ gibt es nach (2.3) keine Beschränkung für die Spaltensumme $s_{.j}$. Das führt dazu, daß es in diesem Fall keine unerlaubten Zustandsmuster gibt. Alle denkbaren Muster, mit anderen Worten möglichen Zustandsmuster, sind erlaubte Zustandsmuster.

Die Bedeutung der Spaltensumme $s_{.j}$ bei der Zustandsmatrix S^* . Zunächst ein Beispiel.

Beispiel 7:





Ein Element $s_{i,j}^*$ der Spalte j hat den Wert 2^{j-1} , wenn in der Matrix S das entsprechende Element den Wert 1 hat. In einer binären Zustandsmatrix bedeutet $s_{.j}$ die Spaltensumme. Für die nichtbinäre Zustandsmatrix S^* gibt $s_{.j}$ also die Anzahl der 2-er Potenzen in der Spalte j an.

$s_{.j}$ ist die übliche Nomenklatur in /9,10,11,22/. Vereinfachend wird im folgenden

$$t_j = s_{.j} \tag{2.5}$$

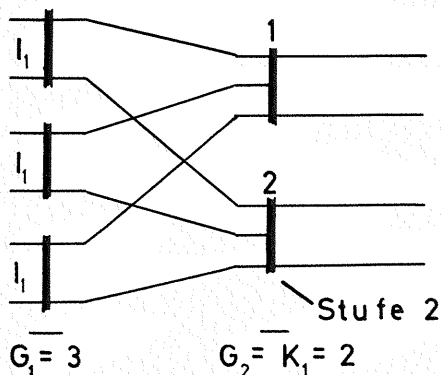
gesetzt.

Nach Definition 2-C Seite 35 sind die Elemente des Vektors \vec{S} gleich den Zeilensummen der Zustandsmatrix S^* . Entsprechend den vorangegangenen Ausführungen gibt damit t_j die Anzahl der Potenzen 2^{j-1} an, die in den Elementen s_i des Zustandsvektors \vec{S} enthalten sind.

2.32 Die Anzahl NE der erlaubten Zustandsmuster

Zunächst wird die Anzahl der erlaubten Zustandsmuster für ein Koppelvielfach der Stufe 2 bestimmt.

Beispiel 8:



Im Koppelvielfach 2 der Stufe 2 sei zunächst keine Belegung vorhanden. Es werden jetzt die Eingänge des Koppelvielfachs 1 von Stufe 2 betrachtet, d.h. die Spalte $j=1$ der Zustandsmatrix.

Belegungsmuster mit einer Belegung in der Spalte 1 von S.

Muster:	1	2	3	
	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	3 verschiedene Muster
Zahlenfolge	1	0	0	
in Spalte 1	0	1	0	
	0	0	1	

Belegungsmuster mit $2=K_2$ Belegungen in der Spalte 1 von S.

Muster:	1	2	3	
	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	3 verschiedene Muster
Zahlenfolge	1	1	0	
	1	0	1	
	0	1	1	

Mit dem Zustand " keine Belegung im Koppelvielfach 1 der Stufe 2 " gibt es demnach insgesamt 7 verschiedene Belegungsmuster für das Koppelvielfach 1 der Stufe 2.

Die Zahlenfolgen der angegebenen Muster sind " Permutationen mit Wiederholungen " von $I_2 = 3$ Elementen mit den Werten 1 oder 0. Für ihre Anzahl gilt nach /17-20/ die Formel

$$\sum_{n=0}^{K_2} \binom{I_2}{n} .$$

Darin ist n die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente in der jeweiligen Zahlenfolge. Für das Beispiel 8 der vorhergehenden Seite gilt also

Zustandsmuster mit $n = 0$: $\binom{I_2}{0} = \binom{3}{0} = 1$

Zustandsmuster mit $n = 1$: $\binom{I_2}{1} = \binom{3}{1} = 3$

Zustandsmuster mit $n = 2 = K_2$: $\binom{I_2}{2} = \binom{3}{2} = 3$.

Nach Beziehung (2.4) Seite 37 ist K_2 die maximale Anzahl von Belegungen in einem Koppelvielfach der Stufe 2.

Allgemein gilt also für die Anzahl der erlaubten Zustandsmuster eines Koppelvielfachs der Stufe 2

$$\sum_{n=0}^{K_2} \binom{I_2}{n} .$$

Da bei jedem der G_2 Koppelvielfache der Stufe 2 diese Muster (Zahlenfolgen) auftreten können, erhält man für die Gesamtzahl NE der erlaubten Zustandsmuster die Formel

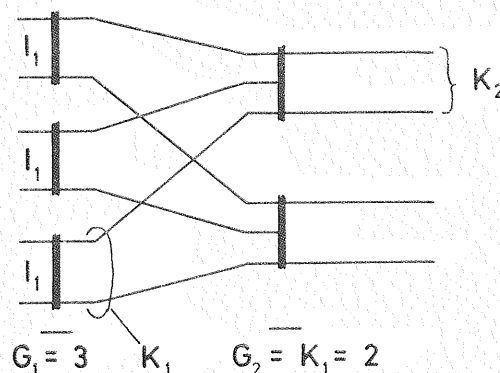
$$NE = \left[\sum_{n=0}^{K_2} \binom{I_2}{n} \right]^{G_2} = \left[1 + \sum_{n=1}^{K_2} \binom{I_2}{n} \right]^{G_2} . \quad (2.6)$$

Im Beispiel 8 erhält man damit $NE = 7^2 = 49$ erlaubte Zustandsmuster. Die Menge der erlaubten Zustände wird mit Ω bezeichnet.

2.4 Die charakteristischen Zustandsmuster

2.41 Äquivalente Zustandsmuster - Zeilenvertauschung

Bei dem bereits bekannten Linkssystem



werden die folgenden Zustandsmuster 1, 2a und 3a betrachtet.

Muster 1	Muster 2a	Muster 3a
1 1 1 0	3 1 0 0	2 1 0 0
2 1 0 0	1 1 1 0	3 1 0 0
3 1 0 0	2 1 0 0	1 1 1 0

↑
Zeilennummer

Muster 2b	Muster 3b
1 1 1 0	1 1 1 0
2 1 0 0	2 1 0 0
3 1 0 0	3 1 0 0

Es werden jetzt beim Muster 2a und 3a die Koppelvielfache der Stufe 1, mit anderen Worten, die Zeilen in der Zustandsmatrix S umnummeriert. Werden diese Zeilen nach steigender Ordnungsnummer umgeordnet, dann erhält man die Muster 2b und 3b. Durch diese Umordnung der Muster 2a und 3a in Muster 2b und 3b erhält man gleiche Zustandsmuster wie Muster 1.

Jedes Muster existiert mit einer bestimmten Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} p(\text{Muster 1}) \\ p(\text{Muster 2a}) \\ p(\text{Muster 3a}) \end{aligned}$$

Nach Abschnitt 1.25 Seite 28 soll bei den hier betrachteten Linkssystemen jedes Koppelvielfach der Stufe 1 gleich belastet sein. Durch die Überführung der Zustandsmuster 2a und 3a in das Muster 1 und wegen der gleichmäßigen Belastung aller Koppelvielfache der Stufe 1 kommt man zu der trivialen Schlußfolgerung

$$p(\text{Muster 1}) = p(\text{Muster 2a}) = p(\text{Muster 3a}) .$$

Mit anderen Worten: die Muster sind gleich wahrscheinlich.

Wie man leicht zeigen kann, gibt es noch weitere Muster, die durch Umordnung ineinander überführt werden können.

Nach Abschnitt 2.3 Seite 41 gibt es bei dem betrachteten Linkssystem $NE = 49$ erlaubte Zustandsmuster. Stellt man mit Hilfe der BL - Algorithmen (siehe Abschnitt 1.3, Seite 29) die Zustandsgleichungen auf, so erhält man ein lineares Gleichungssystem mit 49 Unbekannten. Diese Unbekannten sind die Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeiten $p(\bar{x})$. Darin ist $\{\bar{x}\}$ ein beliebiges erlaubtes Zustandsmuster. Wie auf der vorhergehenden Seite angeführt, können verschiedene Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeiten $p(\bar{x})$ systematisch ein und denselben Zahlenwert haben. Der Rang des Gleichungssystems reduziert sich dementsprechend, denn je Klasse gleicher Zustandswahrscheinlichkeit benötigt man nur ein Zustandsmuster als Vertreter dieser Klasse. Dieses Muster wird später als charakteristisches Zustandsmuster bezeichnet.

Der eben geschilderte Sachverhalt

-systematisch bedingte Gleichheit von Zustandswahrscheinlichkeiten, hervorgerufen durch den gleichmäßigen Aufbau der hier beschriebenen Linkssysteme-

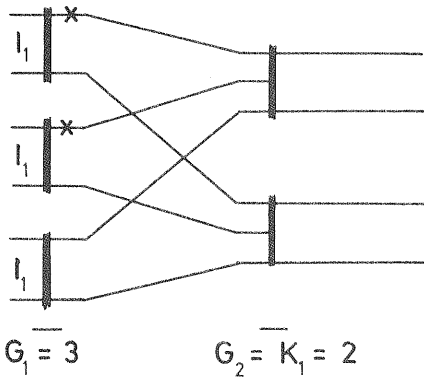
führt zu der folgenden

Definition 2-F: Zustandsmatrizen S , die durch Zeilenvertauschung (Umordnung) ineinander überführbar sind, werden als äquivalente Matrizen bezeichnet /9,10,11,22/. Äquivalente Matrizen gehören zu ein und derselben Klasse gleicher Zustandswahrscheinlichkeit. Die Klassen gleicher Zustandswahrscheinlichkeit werden als Äquivalenzklassen bezeichnet.

Im Beispiel Seite 42 sind die Zustandsmatrizen 1,2a und 3a äquivalente Zustandsmatrizen und gehören zu einer Äquivalenzklasse.

Welches Muster einer Äquivalenzklasse als Vertreter dieser Klasse gewählt wird, ist zunächst unbedeutend. Für einen Algorithmus zur Ermittlung des Vertreters einer Äquivalenzklasse ist es jedoch zweckmäßig sich auf ein ganz bestimmtes Muster mit entsprechenden Eigenschaften festzulegen. Das ist wichtig bei der Aufstellung der Zustandsgleichungen mit dem BL - Algorithmus und hier insbesondere bei der Ermittlung der Übergänge zwischen verschiedenen Zustandsmustern, siehe folgendes Beispiel, Seite 299 und /11/.

Beispiel 9:



x: Zwischenleitung belegt

Die Zustandsmatrix für diese Belegungsmuster ist:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Dieses betrachtete Muster kann entstehen aus dem Muster

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ - Koppelvielfach 1 von Stufe 1 ,

wenn im Koppelvielfach 1 der Stufe 1 eine Belegung einfällt. Wird dagegen als Vertreter dieser Äquivalenzklasse das Muster

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

gewählt, dann muß das Muster a) umgeordnet werden, denn in der reduzierten Liste ist dann nur das Muster b) als Vertreter der Äquivalenzklasse vorhanden. Bei der Umordnung ist es entscheidend, daß dadurch stets eindeutig der Vertreter der Klasse entsteht.

Bisher war kein einfacher Algorithmus bekannt, wie die Vertreter der Äquivalenzklassen gezielt ermittelt werden können. Die vor dieser Arbeit bekannten Suchalgorithmen /11,22/ sind sehr rechenzeitintensiv und deshalb nur für kleinste Systeme anwendbar.

In den folgenden Abschnitten werden Algorithmen hergeleitet die es gestatten, die Vertreter (später als charakteristische Muster bezeichnet) in einfacher Weise zu ermitteln. Bei Anwendung dieser Algorithmen können wesentlich größere Linkssysteme als bisher exakt berechnet werden.

2.42 Die charakteristischen Matrizen SC der Zustandsmuster

Die Muster, die als Vertreter einer Äquivalenzklasse gewählt werden, werden im folgenden als charakteristische Matrizen bezeichnet.

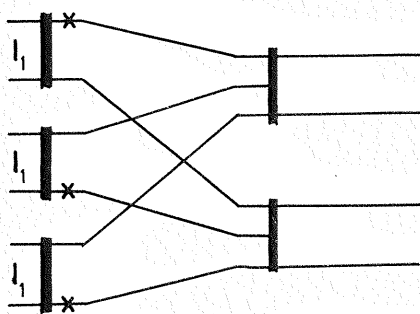
Es sollen jetzt die charakteristischen Matrizen (ch. Matrizen) definiert werden. Vor der Einführung der ch. Matrizen SC (C für charakteristisch) wird noch die folgende Überlegung angestellt.

Die Elemente $s_{i,j}$ der Zustandsmatrix S werden in geordneter Folge, zeilenweise hintereinander geschrieben.

$$\left| \underbrace{s_{1,1} \ s_{1,2} \ \dots \ s_{1,K_1}}_{i=1} \ \middle| \ \underbrace{s_{2,1} \ s_{2,2} \ \dots \ s_{2,K_1}}_{i=2} \ \middle| \ \dots \ \middle| \ \dots \ \middle| \ \underbrace{s_{G_1,1} \ s_{G_1,2} \ \dots \ s_{G_1,K}}_{i=G_1} \right|$$

Elemente mit i:

Beispiel 10: Es wird das folgende Belegungsmuster betrachtet.



$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \left| 1 \ 0 \ \middle| \ 0 \ 1 \ \middle| \ 0 \ 1 \right|$$

$$G_1 = 3 \quad G_2 = K_1 = 2$$

Diese binäre Zahlenfolge stellt eine $K_1 \cdot G_1$ -stellige Dualzahl dar, der genau eine Dezimalzahl entspricht. Diese Dezimalzahlen wurden schon in /13/ als Zustandsnummern NRZ bezeichnet. Nach Beziehung (2.6) Seite 41 gibt es NE verschiedene Zustandsmatrizen S und damit

NE Zustandsnummern NRZ. Die NE Zustandsmatrizen S_α werden indeziert mit $\alpha \in \{ 1, 2, \dots, NE \}$, wobei die Bedingung

$$NRZ_{\alpha-1} < NRZ_\alpha \quad (2.7)$$

gelten soll. Man kommt dann zu der folgenden zweckmäßigen Definition für die ch. Matrizen der Zustandsmuster.

Definition 2-G: Die Zustandsmatrizen S_α werden entsprechend der Bedingung (2.7) indiziert, mit $\alpha \in \{ 1, 2, \dots, NE \}$. Es sei β die Äquivalenzklasse einer Zustandsmatrix S_α . Als charakteristische Matrix SC_β der Äquivalenzklasse β wird jene Zustandsmatrix S_α definiert, welche die kleinste Zustandsnummer NRZ_α hat.

Beispiel 11: Die in Abschnitt 2.41 Seite 44 angegebenen Zustandsmuster

Muster 1	Muster 2	Muster 3
$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

gehören nach Definition 2-F Seite 43 zu einer Äquivalenzklasse. Die Zustandsnummern der Muster sind:

Muster 1							
Stelle w	1	2	3	4	5	6	
	1	0	0	0	0	0	zu der Dualzahl gehörende Dezimalzahl
							$NRZ_1 = 2^{w-1} = 2^0 = 1,$
Muster 2							
Stelle w	1	2	3	4	5	6	
	0	0	1	0	0	0	zu der Dualzahl gehörende Dezimalzahl
							$NRZ_2 = 2^{w-1} = 2^2 = 4,$
Muster 3							
Stelle w	1	2	3	4	5	6	
	0	0	0	0	1	0	zu der Dualzahl gehörende Dezimalzahl
							$NRZ_3 = 2^{w-1} = 2^4 = 16.$

Aus dem Vergleich der Dezimalzahlen NRZ folgt:

$$\text{NRZ}_1 < \text{NRZ}_2 < \text{NRZ}_3 .$$

Nach Definition 2-G, Seite 46 ist damit die zu Muster 1 gehörende Zustandsmatrix S die ch. Matrix SC dieser Äquivalenzklasse.

M_β sei die Anzahl der äquivalenten Matrizen in der Äquivalenzklasse β , mit anderen Worten: M_β ist die Mächtigkeit der Äquivalenzklasse β . NC sei die Anzahl der ch. Matrizen des gegebenen Linksystems. Zwischen der Anzahl der erlaubten Zustände entsprechend Gleichung (2.6), Seite 41 und M_β gilt die Beziehung

$$\text{NE} = \sum_{\beta=1}^{\text{NC}} M_\beta . \quad (2.8)$$

Aus der Definition 2-F Seite 43 folgt mit der Definition 2-G der

Satz 2-a: Sei S eine ch. Matrix SC_β . Dann sind alle Zustandsmatrizen S_α , die durch Zeilenvertauschung aus SC_β hervorgehen, in Bezug auf SC_β äquivalente Matrizen. Dabei gilt $\alpha \in \{1, 2, \dots, \text{NE}\}$ und $\beta \in \{1, 2, \dots, \text{NC}\}$.

2.43 Die charakteristischen Vektoren \vec{C}

Nach den Ausführungen im Abschnitt 2.2, sowie mit der Gleichung (2.2), Seite 36, besteht Eindeutigkeit zwischen den Zustandsmatrizen S_α und den dazugehörigen Zustandsvektoren \vec{S}_α . Damit gilt entsprechend der in Abschnitt 2.42 Seite 46 eingeführten Definition 2-G der

Satz 2-b: Jeder charakteristischen Matrix SC kann eindeutig ein charakteristischer Vektor \vec{C} zugeordnet werden.

$$\vec{C}_\beta = \left\{ \begin{array}{c} C_{\beta,1} \\ C_{\beta,2} \\ \vdots \\ C_{\beta,i} \\ \vdots \\ C_{\beta,G_1} \end{array} \right\}$$

Für die Elemente $c_{\beta,i}$ gilt nach Beziehung (2.2) Seite 36

$$c_{\beta,i} = \sum_{j=1}^{K_1} 2^{j-1} \cdot s_{c_{\beta,i,j}} \quad (2.9)$$

Jetzt tritt die Frage auf: Welche Operation entspricht der Operation "Zeilenvertauschung" bei den Zustandsmatrizen S, wenn an deren Stelle die zugehörigen Zustandsvektoren \vec{S} verwendet werden?

Antwort: Aus einer Zeile i der Zustandsmatrix S wird durch Anwendung der Beziehung (2.2), Seite 36 das Element s_i von \vec{S} erzeugt. Demzufolge entspricht der Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix S die Elementvertauschung bei dem Zustandsvektor \vec{S} . Wendet man dieses beim Satz 2-a an, so folgt

Satz 2-c: Sei \vec{C}_β ein charakteristischer Vektor, dann sind alle Zustandsvektoren \vec{S}_α , die durch Elementvertauschung aus \vec{C}_β hervorgehen, in Bezug auf \vec{C}_β äquivalente Zustandsvektoren. Dabei gilt: $\alpha \in \{1, 2, \dots, NE\}$ und $\beta \in \{1, 2, \dots, NC\}$.

Aus der Definition 2-G, Seite 46, mit der Beziehung (2.7) folgt für die Elemente $c_{\beta,i}$ des charakteristischen Vektors \vec{C}_β die Bedingung:

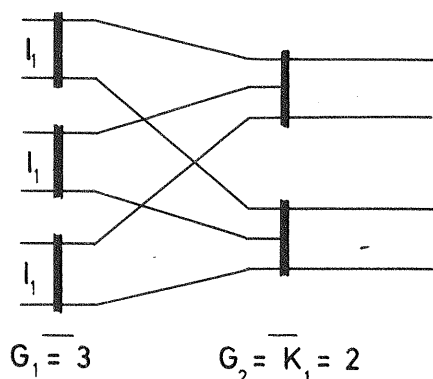
$$c_{\beta,1} \cong c_{\beta,2} \cong \dots \cong c_{\beta,i} \cong \dots \cong c_{\beta,G_1}$$

mit: $c_{\beta,i} \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1} - 1\}$,

$i \in \{1, 2, 3, \dots, G_1\}$.

(2.10)

Beispiel 12:



Für das gegebene Linksystem sind u.a. die folgenden Zustandsmuster möglich, siehe nächste Seite.

Lfd. Nr.:	Zustandsmatrix S	Zustandsvektor \vec{S}
1	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix}$
2	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Nach Definition 2-G Seite 46 folgt: Zustandsmatrix 1 ist die charakteristische Matrix dieser Äquivalenzklasse. Vergleicht man den dazugehörigen Zustandsvektor, dann sieht man, daß die Bedingung (2.10), Seite 48 erfüllt ist. Zunächst noch ein weiteres Beispiel.

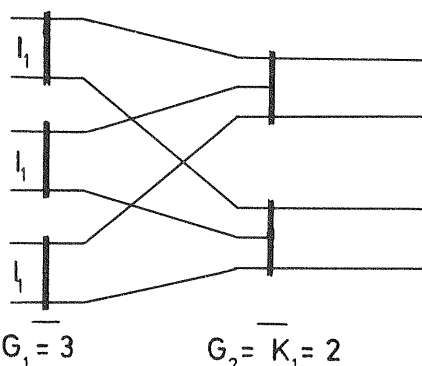
Beispiel 13: Für das im Beispiel 7, Seite 38 angegebene Zustandsmuster erhält man in einfacher Weise die ch. Matrix durch Anwendung der Bedingung (2.10), Seite 48 .

$$\begin{array}{ccccc}
 S & \Longrightarrow & S^* & \Longrightarrow & \vec{S} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} & & \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{Bmatrix} \\
 & & & & \Downarrow \text{(2.10) anwenden} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & & \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 SC & \longleftarrow & SC^* & \longleftarrow & \vec{C}
 \end{array}$$

Die Beziehung (2.10), Seite 48 führt zu dem in der Kombinatorik /17-21/ bekannten Begriff "Kombinationen mit Wiederholungen" von G_1 Elementen c_i aus der Zeichenmenge $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1} - 1\}$. Siehe Vektor \vec{C} im vorangegangenen Beispiel und Anhang A1, Seite 307. Mit der Bedingung (2.10), Seite 48 erhält man den

Satz 2-d: Die Sequenzen der Elemente c_i der ch. Vektoren \vec{C} können interpretiert werden als "Kombinationen mit Wiederholungen" von G_1 Elementen c_i aus der Zeichenmenge $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1} - 1\}$. Für i gilt: $i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$. Die Anzahl der ch. Vektoren ist gleich der Anzahl NC , der Anzahl der "erlaubten Kombinationen mit Wiederholungen" von G_1 Elementen.

Beispiel 14:



Nach Abschnitt 2.3, Seite 36 gibt es bei dem gegebenen Linksystem $NE = 49$ erlaubte Zustandsmuster. Prüft man, welche dieser 49 Zustandsmuster der Bedingung (2.10), Seite 48 genügen, so erhält man die Muster entsprechend der Tabelle 2.43-1, Seite 51.

Ausgehend von einem gegebenen ch. Vektor \vec{C}_β und mit Satz 2-c, Seite 48 folgt für alle die zu \vec{C}_β äquivalenten Zustandsvektoren \vec{S}_α der

Satz 2-e: Alle möglichen "Permutationen mit Wiederholungen" (Elementvertauschungen) der Elemente $c_{\beta,i}$ von \vec{C}_β bilden die zu \vec{C}_β äquivalenten Zustandsvektoren \vec{S}_α . Die Mächtigkeit M_β einer Äquivalenzklasse β ist gleich der Zahl der "Permutationen mit Wiederholungen" der durch \vec{C}_β vorgegebenen Elemente $c_{\beta,i} \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1} - 1\}$, mit $i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$.

Beispiel 15:

Links system wie im obigen Beispiel 14.

Aus der Tabelle 2.43-1, Seite 51 wird das Muster $\beta = 12$ gewählt. Mit dem obigen Satz 2-e erhält man die folgenden 3 Zustandsmuster, die zueinander äquivalent sind (siehe Seite 52).

lfd.Nr.β	\vec{C}_β	SC_β^*	SC_β	NRZ $_\beta$	M_β
1	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	0	1
2	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	1	3
3	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	2	3
4	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	3	3
5	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	5	3
6	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	6	6
7	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	7	6
8	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	10	3
9	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	11	6
10	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	15	3
11	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	21	3
12	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	26	3
13	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	27	6

Tabelle 2.43-1

$$\sum_{\beta} M_{\beta} = 49$$

lfd.Nr.	1	2	3
\vec{s}	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$= \vec{c}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$
			$\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$
s^*	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}$
s	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$

Ausgehend von den Elementen des ch. Vektors \vec{c} folgt:
 Durch Permutierung der Elemente von \vec{c} erhält man die Zustandsvektoren mit der lfd.Nr. 2 und 3. In der Äquivalenzklasse $\beta = 12$ gibt es also 3 Zustandsvektoren, die zueinander äquivalent sind. Die Mächtigkeit dieser Klasse ist also $M_{12} = 3$.
 In der Tabelle 2.43-1, Seite 51 sind die Mächtigkeiten aller 13 Äquivalenzklassen dieses Beispiels angegeben. Die Summe der M_β über alle β in Tabelle 2.43-1 ergibt 49 erlaubte Zustandsmuster. Diese stimmt mit der in Abschnitt 2.3, Beziehung (2.6), Seite 41 berechneten Anzahl überein.

2.5 Berechnung der Mächtigkeiten M_β

Nach Satz 2-e, Seite 50 ist die Mächtigkeit M_β , durch Permutierung der G_1 Elemente $c_{\beta,i} \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1} - 1\}$ des ch. Vektors \vec{c}_β bestimmt. Da im Vektor \vec{c}_β auch gleiche Elemente $c_{\beta,i}$ auftreten können, muß die Anzahl der "Permutationen mit Wiederholungen" der G_1 Elemente $c_{\beta,i}$ bestimmt werden. In einem allgemeinen ch. Vektor \vec{c}_β der Äquivalenzklasse β sollen m_w Elemente $c_{\beta,i}$ den gleichen Zahlenwert haben (siehe \vec{c}_β auf Seite 53). Die Anzahl v sei die Zahl der ungleichen Elemente $c_{\beta,i}$. Mit Anhang A2 Seite 310 erhält man dann die folgende Formel für die Mächtigkeiten M_β der Äquivalenzklasse β , siehe nächste Seite.

$$\vec{C}_\beta = \left(\begin{array}{c} c_{\beta,1} \\ c_{\beta,2} \\ c_{\beta,3} \\ c_{\beta,4} \\ c_{\beta,5} \\ \vdots \\ c_{\beta,i} \\ c_{\beta,i+1} \\ \vdots \\ c_{\beta,G_1} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} m_1 \\ \} m_2 \\ \vdots \\ \} m_w \\ \vdots \\ \} m_v \end{array} \right\}$$

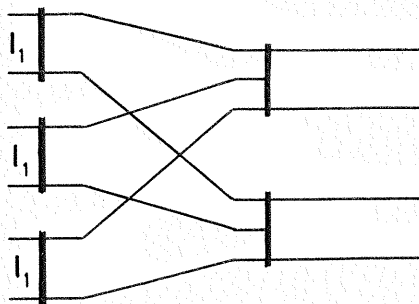
$$M_\beta = \frac{G_1!}{\prod_{w=1}^v m_w!} \quad (2.11)$$

Die Zahlen m_w sind, bei gegebenen ch. Vektoren \vec{C} , einfach zu ermitteln, denn die G_1 Elemente $c_{\beta,i}$ von \vec{C}_β bilden nach Satz 2-d, Seite 50 "Kombinationen mit Wiederholungen", und demzufolge stehen gleiche Elemente $c_{\beta,i}$ stets untereinander.

Ist n die Zahl der Elemente $c_{\beta,i}$, die ungleich Null sind, so erhält man mit der obigen Beziehung (2.11) die folgende Formel:

$$M_\beta = \frac{n!}{\prod_{w=1}^{v-1} m_w} \cdot \binom{G_1}{n} \quad (2.12)$$

Beispiel 16:



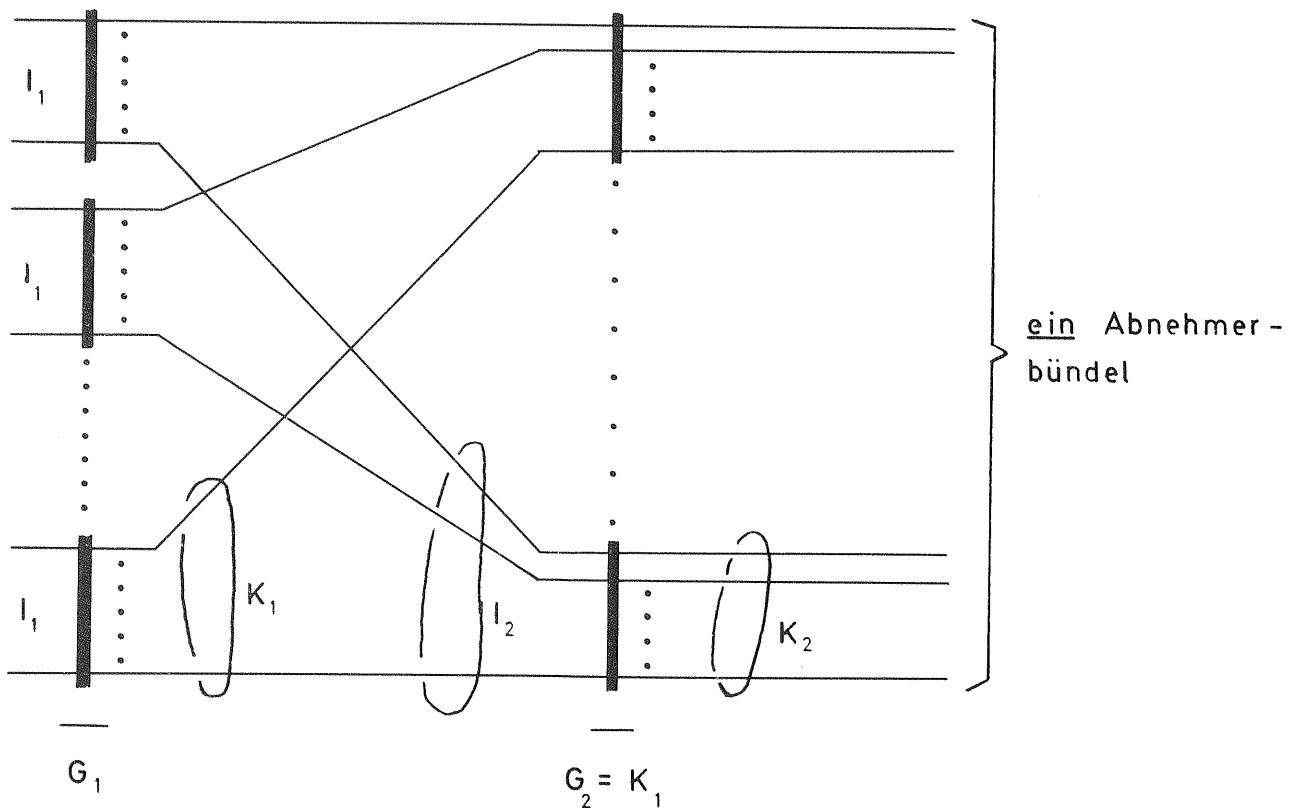
Berechnung der Mächtigkeit M_{12} für das Zustandsmuster $\beta = 12$ aus Tabelle 2.43-1, Seite 51.

$$\vec{C}_{12} = \left. \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \\ \left. \begin{matrix} m_1 = 2 \\ m_2 = 1 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\} \begin{matrix} v=2 \end{matrix} \quad M_{12} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \underline{\underline{3}}$$

Dieser Wert stimmt mit dem Wert M_{12} nach Tabelle 2.43-1, Seite 51 überein.

2.6 Die Ermittlung der charakteristischen Vektoren \vec{C} der Zustandsmatrizen S_α für Strukturen von Linkssystemen mit $K_2 = I_2 = G_1$

Linkssystemstruktur mit G_1 Koppelvielfachen in der Stufe 1 und der Erreichbarkeit K_1 in der ersten Stufe.



Für Linkssysteme mit der oben angeführten Struktur gibt es bei den Zustandsmustern keine "unerlaubten Zustände", da $K_2 = I_2 = G_1$ ist, und damit für die Spaltensumme s_j die Beziehung (2.3), Seite 37 gilt. Entsprechend Satz 2-d, Seite 50 sind alle "Kombinationen mit Wiederholungen" der G_1 Elemente s_i von \vec{S} ch. Vektoren \vec{C} . Die Anzahl NC , die Zahl der ch. Vektoren \vec{C} , ist damit gleich der Anzahl der "Kombinationen mit Wiederholungen".

Es sei

$$a = 2^{K_1} - 1$$

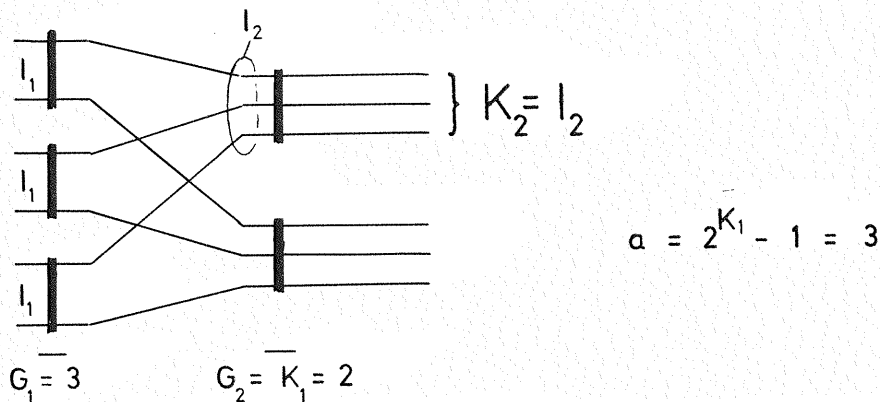
die Anzahl der unterschiedlichen Dezimalzahlen, die jedes der Elemente c_i , des ch. Vektors \overline{C} annehmen kann. Ausgeschlossen ist der Wert $c_i = 0$.

Außerdem sei n : Die Anzahl der Elemente c_i von \overline{C} , die von Null verschieden sind. Für NC gilt dann die nach /17-21/ bekannte Formel

$$NC = 1 + \sum_{n=1}^{G_1} \binom{a+n-1}{n} = 1 + \sum_{n=1}^{G_1} \prod_a^{(n)} . \quad (2.13)$$

Mit dem Summanden 1 wird der Nullzustand berücksichtigt.

Beispiel 17:



Für dieses Linksystem erhält man die Anzahl der ch. Vektoren von:

$$NC = 1 + \sum_{n=1}^3 \prod_3^{(n)} = 1 + 3 + 6 + 10 = 20 .$$

Die ch. Vektoren \overline{C} erhält man unmittelbar durch Aufzählung, siehe die folgende Tabelle 2.6-1 auf den nächsten beiden Seiten.

Aus der Summe der Mächtigkeiten M_β (siehe Tabelle 2.6-1) über alle β folgt wieder die Anzahl NE der erlaubten Zustände. Die gleiche Zahl erhält man, wenn NE nach Beziehung (2.6), Seite 41 berechnet wird. Für diese Linksysteme ($I_2 = K_2$) gilt allgemein:

$$NE = EV = 2^{G_1 \cdot K_1} .$$

Im obigen Beispiel: $NE = 2^{3 \cdot 2} = 64 .$

lfd.Nr. _β	\overrightarrow{C}_β	SC_β^*	SC_β	NRZ_β	M_β
1	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	0	1
2	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	1	3
3	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	2	3
4	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	3	3
5	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	5	3
6	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	6	6
7	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	7	6
8	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	10	3
9	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	11	6
10	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	15	3
11	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	21	1
12	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	22	3
13	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	23	3
14	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	26	3

lfd.Nr. β	\vec{C}_β	SC_β^*	SC_β	NRZ $_\beta$	M_β
15	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	27	6
16	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	31	3
17	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$	42	1
18	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$	43	3
19	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$	47	3
20	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$	63	1

$$NE = \sum_{\beta} M_{\beta} = 64$$

Tabelle 2.6-1

2.7 Die Ermittlung der charakteristischen Vektoren \vec{C} der Zustandsmatrizen S_{β} für Strukturen von Linksystemen mit $K_2 < I_2 = G_1$

2.7.1 Die " erlaubten Kombinationen mit Wiederholungen " der G_1 Elemente c_i von \vec{C} und der " EU - Algorithmus "

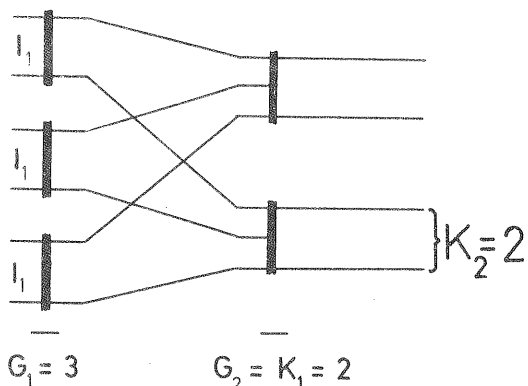
Bei Systemen mit $K_2 = I_2 = G_1$ können in Spalte j der Zustandsmatrix S alle möglichen Muster auftreten, d.h. in diesem Fall gilt die Bedingung (2.3), Seite 37 für die Spaltensumme s_j . Es gibt also keine unerlaubten Zustandsmuster, siehe Abschnitt 2.3, Seite 38.

Für Linksysteme mit $K_2 < I_2$ ist jedoch die Spaltensumme s_j nach Beziehung (2.4), Seite 37 begrenzt, d.h. es gilt

$$s_j \leq K_2 < I_2 \quad (2.14)$$

Das bedeutet, daß nicht alle möglichen Muster erlaubt sind, siehe Abschnitt 2.3, Seite 37.

Beispiel 18:



Die Strukturparameter G_1, K_1 und I_2 stimmen mit den Strukturparametern von Beispiel 17, Seite 55 überein. Nur K_2 ist hier kleiner als I_2 , d.h. es ist $K_2 = 2 < 3$. Die Anzahl der möglichen Zustandsmuster (Zustandsmatrizen S) sind also bei beiden Beispielen gleich. Für die Spaltensumme $s_{.j}$ gilt jetzt jedoch die Bedingung (2.14), Seite 57.

Für das Beispiel 17 Seite 55 sind die ch. Matrizen SC nach Tabelle 2.6-1, Seite 56-57 bekannt. Alle Matrizen SC dieser Tabelle, bei denen

$$s_{.j} > K_2 = 2$$

gilt, sind für das in diesem Beispiel betrachtete Linksystem unerlaubte Muster. Mit der obigen Bedingung und den SC nach Tabelle 2.6-1 folgt, daß die Muster mit der lfd.Nr.

$$\beta = 11, 13, 16, 17, 18, 19, 20$$

für das hier betrachtete Linksystem unerlaubte Zustandsmuster sind.

Die Bedingung (2.14), Seite 57 wurde in Satz 2-d, Seite 50 berücksichtigt, in dem dort von "erlaubten Kombinationen mit Wiederholung" gesprochen wurde.

Zur Ermittlung der ch. Vektoren \vec{C} für Linksysteme mit $K_2 < I_2$ kann man wie im obigen Beispiel 18 vorgehen. Für die vorgegebenen Zahlenwerte von G_1, K_1 und K_2 ermittelt man die ch. Vektoren \vec{C} unter der Bedingung

$$\underline{K_2^* = I_2 = G_1},$$

und entfernt alle Zustandsvektoren \vec{C} , die nicht der Bedingung (2.14), Seite 57 genügen. Man verwirft also alle Zustandsvektoren \vec{C} , für die $s_{.j} > K_2$ ist. Der Algorithmus, der nach diesem Prinzip arbeitet, soll als "EU - Algorithmus" bezeichnet werden. EU steht für Erlaubt - Unerlaubt, dem Auswahlkriterium bei diesem Algorithmus.

Die Frage, die jetzt zu stellen ist, lautet: Kann man bei Linkssystemen mit $K_2 < I_2 = G_1$ die ch. Vektoren \vec{C} auch direkt bestimmen, d.h. ohne EU-Algorithmus? Diese Frage führt zur Einführung neuer Vektoren.

2.7.2 Die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} und \vec{TK}

Ohne EU - Algorithmus zur Ermittlung der ch. Vektoren \vec{C} auszukommen bedeutet, daß man die erlaubten Spaltensummen s_j mit

$$s_j \in \{0, 1, 2, \dots, K_1\} \text{ und} \\ j \in \{1, 2, 3, \dots, K_1\}$$

vorgeben muß. Wie bereits im Abschnitt 2.3.1 Seite 39 erwähnt, wird, wegen einer einfacheren und übersichtlicheren Darstellung der folgenden Ausführungen, eine andere Abkürzung für die Spaltensumme s_j eingeführt. Es wird s_j jetzt mit t_j bezeichnet, d.h. es sei $t_j = s_j$.

Nach Abschnitt 2.3, Seite 36 gilt damit: t_j ist die Anzahl der belegten Eingänge des Koppelvielfachs j der Stufe 2, mit anderen Worten: t_j ist die Anzahl der Potenzen 2^{j-1} im Zustandsvektor \vec{S} bzw. der Zustandsmatrix S^* . Die t_j geben jedoch nicht an, welche Eingänge i des Koppelvielfachs j der Stufe 2 belegt sind. Die t_j beschreiben also einen "allgemeinen Zustand". Es werden jetzt die nachstehenden Definitionen eingeführt, die für die folgenden Betrachtungen zweckmäßig sind.

Definition 2-H: Der Potenzvektor

$$\vec{PV} = \{pv_1, pv_2, \dots, pv_j, \dots, pv_{K_1}\}$$

sei der Vektor, für dessen Elemente gilt: $pv = 2^{j-1}$, mit $j \in \{1, 2, \dots, K_1\}$.

Definition 2-I: Der Vektor

$$\vec{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_{K_1}\}$$

kennzeichnet einen allgemeinen Belegungszustand des Linksystems. Die Elemente von \vec{T} geben die Anzahl der im ch. Vektor \vec{C} enthaltenen Werte p_{vj} an. Für die Elemente t_j gilt:

$$t_j \in \{0, 1, 2, \dots, K_2\}$$

mit $j \in \{1, 2, 3, \dots, K_1\}$.

Aus Definition 2-I, Seite 59 folgt unmittelbar der Satz 2-f.

Satz 2-f: Die Elemente t_j von \vec{T} bilden K_1 -stellige "Permutationen mit Wiederholungen".

Für die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} , deren Elemente t_j "Kombinationen mit Wiederholungen" bilden, wird die nachstehende Definition 2-J eingeführt.

Definition 2-J: Der allgemeine Zustandsvektor

$$\vec{TK} = \{ tK_1, tK_2, \dots, tK_j, \dots, tK_{K_1} \}$$

ist gleich jenem Vektor \vec{T} , dessen Elemente t_j "Kombinationen mit Wiederholungen" bilden. Für die tK_j gilt:

$$tK_j \in \{0, 1, 2, \dots, K_2\}$$

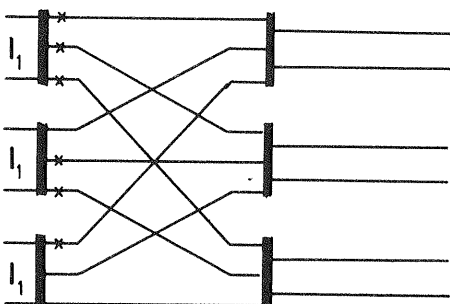
mit $j \in \{1, 2, 3, \dots, K_1\}$.

Für die Elemente tK_j soll des weiteren die Bedingung

$$tK_1 \cong tK_2 \cong \dots \cong tK_j \cong \dots \cong tK_{K_1}$$

gelten.

Beispiel 19:



Für das gegebene Linksystem erhält man durch Aufzählung die in der Tabelle 2.72-1, Seite 61 angegebenen allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK} . Das zu $\vec{TK}_{\gamma=10}$ gehörende Belegungsmuster ist im nebenstehenden Bild dargestellt. In der

lfd.Nr.	\overrightarrow{TK}_Y			SC			SC*			\overrightarrow{c}
	Y	j → 1 2 3		j → 1 2 3			j → 1 2 3			
1		{0 0 0}		{0 0 0}			{0 0 0}			{0}
2		{1 0 0}		{1 0 0}			{1 0 0}			{1}
3		{2 0 0}		{1 0 0}			{1 0 0}			{1}
4		{1 1 0}		{1 1 0}			{1 2 0}			{3}
5		{2 1 0}		{1 1 0}			{1 2 0}			{3}
6		{2 2 0}		{1 1 0}			{1 2 0}			{3}
7		{1 1 1}		{0 0 1}			{0 0 4}			{4}
8		{2 1 1}		{0 0 1}			{0 0 4}			{4}
9		{2 2 1}		{0 1 1}			{0 2 4}			{6}
10		{2 2 2}		{1 1 1}			{1 2 4}			{7}
Spaltensummen		t_j		2	2	2				

Tabelle 2.72-1

Tabelle 2.72-1, Seite 61 ist außerdem jeweils ein ch. Zustand, der zu dem gegebenen \overline{TK} gehört, angegeben.

Aus den Elementen von $\overline{TK}_{\gamma=9} = \{2\ 2\ 1\}$ können die untenstehenden allgemeinen Zustandsvektoren \overline{T} durch Elementvertauschung (Permutierung) in \overline{TK} abgeleitet werden:

$$\begin{array}{l} \overline{T} \\ \{2\ 2\ 1\} = \overline{TK} \\ \{2\ 1\ 2\} \\ \{1\ 2\ 2\} . \end{array}$$

2.7.3 Die Partitionen

Wie erhält man aus dem gegebenen allgemeinen Zustandsvektor \overline{T} die dazugehörenden ch. Vektoren \overline{C} ? Diese Frage soll hier behandelt werden.

Die Partition ist ein kombinatorischer Begriff. Als Partitionen bezeichnet man in der Kombinatorik die Zerlegung einer Summe (natürliche Zahl \mathbb{N}) in die möglichen Summenbildungen. Sie sind im Anhang A3, Seite 312 näher erläutert.

Es seien die Strukturparameter eines zweistufigen Linksystems G_1 , K_1 und K_2 gegeben. Damit liegen der Potenzvektor \overline{PV} und die Vektoren \overline{T} und \overline{TK} gemäß den Definitionen 2-H bis 2-J, Seite 59 fest. Explizit erhält man für den allgemeinen Zustandsvektor \overline{TK} , welcher einen momentanen Belegungszustand beschreibt, den Ausdruck (2.15), Seite 63. Darin bedeuten:

$NTK + 1$ ist die Anzahl von " Kombinationen mit Wiederholungen " von K_1 Elementen $tK_j \in \{0, 1, 2, \dots, K_2\}$.

Die allgemeinen Zustandsvektoren \overline{T} erhält man, nach Satz 2-f, Seite 60, durch Permutierung der Elemente tK_j von \overline{TK} .

Sei w die Anzahl der Elemente $tK_{\gamma,j}$ ungleich Null im Vektor \overline{TK}_{γ} und v die Anzahl der verschiedenen Werte $tK_{\gamma,j}$ in \overline{TK}_{γ} . Man erhält dann die Anzahl NT_{γ} , d.h. die Anzahl der Permutierungen der Elemente

$$\overrightarrow{TK}_\gamma$$

Spalte j: \rightarrow 1 2 3 K_1
 lfd.Nr. γ

0	{	0	0	0	0	}	}	(2.15)
1	{	1	0	0	0	}		
2	{	2	0	0	0	}		
⋮									
⋮									
K_1	{	K_1	0	0	0	}		
$K_1 + 1$	{	1	1	0	0	}		
⋮									
⋮									
$2 \cdot K_1$	{	K_1	1	0	0	}		
⋮									
⋮									
$(K_1 + 1) \cdot K_1$	{	K_1	K_1	0	0	}		
⋮									
⋮									
NTK	{	K_1	K_1	K_1	K_1	}		

$$NTK = \sum_{j=1}^{K_1} \binom{K_1 + j - 1}{j} \tag{2.16}$$

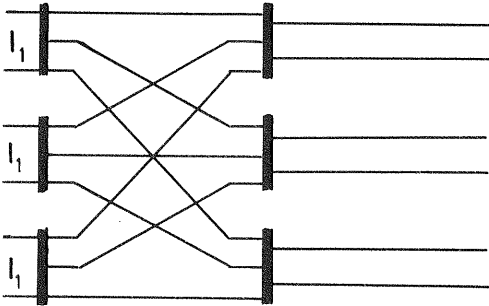
von $\overrightarrow{TK}_\gamma$, entsprechend Beziehung (2.12) Seite 53:

$$NT_\gamma = \frac{w}{\prod_{u=1}^{\gamma-1} m_u} \cdot \binom{K_1}{w} \tag{2.17}$$

Um die Indizierung einfacher zu gestalten, wird im folgenden vom allgemeinen Zustandsvektor \overrightarrow{TK} ausgegangen und nicht vom Vektor \overrightarrow{T} . Das bedeutet jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit. Gegeben sind also die allgemeinen Zustandsvektoren \overrightarrow{TK} nach der obigen Beziehung (2.15). Bevor jetzt die Partitionen eingeführt

werden, wird ein weiteres Beispiel betrachtet.

Beispiel 20:



Das hier betrachtete Links-system ist dasselbe wie in Beispiel 19, Seite 60. Aus der Tabelle 2.72-1, Seite 61 wird speziell der Vektor $\overrightarrow{TK}_\gamma$ für $\gamma = 8$ gewählt, d.h. $\overrightarrow{TK}_8 = \{ 2, 1, 1 \}$. Zu diesem allgemeinen Zustandsvektor \overrightarrow{TK} gehören die folgenden ch. Zustandsmatrizen, bzw. ch. Zustandsvektoren:

lfd.Nr. η	SC_η	SC_η^*	\overrightarrow{C}_η
1	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow c_1 \\ \leftarrow c_2 \\ \leftarrow c_3 \end{matrix}$
2	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$
$NP_8 = 4$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$

stets: $\overrightarrow{TK}_8 = \{ 2, 1, 1 \}$

Tabelle 2.73-1

Bei allen 4 Matrizen SC erhält man die Spaltensumme entsprechend den Elementen von \overrightarrow{TK}_8 .

Betrachtet man die Summe SP der Elemente c_i von \overrightarrow{C} der 4 ch. Vektoren, so folgt:

$$SP_{\gamma=8} = c_1 + c_2 + c_3 = 8 = \text{konstant} .$$

Das ist natürlich das gleiche, als wenn man die Summe

$$SP_8 = \sum_{j=1}^{K_1} tK_{8,j} \cdot pv_j = \sum_{j=1}^{K_1} tK_{8,j} \cdot 2^{j-1}$$

bildet.

Verallgemeinert man dies, dann erhält man:

$$SP_{\gamma} = \sum_{j=1}^{K_1} tK_{\gamma,j} \cdot pv_j = \sum_{i=1}^{G_1} c_{\eta,i} = \text{konstant} , \quad (2.18)$$

mit $\gamma \in \{1, 2, \dots, NTK\}$,
 $pv = 2^{j-1}$,
 $\eta \in \{1, 2, \dots, NP_{\gamma}\}$.

Es wird noch definiert NP_{γ} : Anzahl der ch. Vektoren \vec{C}_{η} , die aus dem allgemeinen Zustandsvektor \vec{TK}_{γ} hervorgehen (vergleiche Tabelle 2.73-1 von Seite 64).

Die Summe SP der Elemente $c_{\eta,i}$ von \vec{C}_{η} , die aus ein und demselben allgemeinen Zustandsvektor \vec{TK} (\vec{T}) hervorgehen, ist für alle \vec{C}_{η} gleich. Die Sequenz der Elemente $c_{\eta,i}$, jedes Vektors \vec{C}_{η} , stellt nach Satz 2-d, Seite 50 eine "Kombination mit Wiederholungen" dar aus der Zeichenmenge $c_{\eta,i} \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1} - 1\}$.

Zahlenfolgen, die eine konstante Summe haben, nennt man "PARTITIONEN ohne Berücksichtigung der Reihenfolge", siehe Anhang A3 Seite 312. Dieser Sachverhalt soll in einem Satz festgehalten werden.

Satz 2-g: Die Elemente $c_{\gamma,\eta,i}$ der aus dem allgemeinen Zustandsvektor \vec{TK}_{γ} (\vec{T}) hervorgehenden ch. Vektoren $\vec{C}_{\gamma,\eta}$ bilden "Partitionen der Länge n ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" zur Summe SP_{γ} . Für die Summe SP_{γ} gilt die obige Beziehung (2.18). NP_{γ} sei die Anzahl der Partitionen, die aus SP_{γ} hervorgehen. NTK ist nach Beziehung (2.16), Seite 63 die Gesamtzahl der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK} , die durch die Strukturparameter G_1 , K_1 und K_2 bestimmt sind. Für die Indizes gilt:

$\gamma \in \{1, 2, \dots, NTK\}$
 $\eta \in \{1, 2, \dots, NP_{\gamma}\}$
 $n \in \{\text{Max}[tK_{\gamma,j}], \dots, G_1\}$.

Darin ist $\text{Max}[tK_{\gamma,j}]$ gleich der minimalen Anzahl von Elementen $c_{\gamma,\eta,i}$ ungleich Null.

Anmerkung zu n: Bei dem Beispiel 20, Seite 64 ist $\text{MAX} [t_{K_{\gamma,j}}] = 2$.
Wie aus der Tabelle 2.73-1, Seite 64 hervorgeht,
sind mindestens zwei Elemente von \vec{C} ungleich Null,
d.h. zwei Belegungen in einer Spalte der Matrix SC.

Betrachtet man die Zustandsmatrix SC, so folgt durch eine triviale
Schlußfolgerung der Satz 2-h.

Satz 2-h: Jeder allgemeine Zustandsvektor \vec{T} , der durch Permutierung
der Elemente $t_{K_{\gamma,j}}$ von \vec{TK}_{γ} hervorgeht, hat die gleiche An-
zahl NP_{γ} Partitionen wie \vec{TK}_{γ} .

Für NC, der Anzahl von ch. Vektoren \vec{C} (NC: siehe Seite 47), erhält
man damit die Beziehung

$$NC = \sum_{\gamma=1}^{NTK} NT_{\gamma} \cdot NP_{\gamma} , \quad (2.19)$$

mit NTK: Anzahl der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK} nach
Beziehung (2.16), Seite 63.

NT_{γ} : Anzahl der Permutationen der Elemente von \vec{TK}_{γ} , mit
anderen Worten: Anzahl der allgemeinen Zustands-
vektoren \vec{T} , die durch Permutierung der Elemente
von \vec{TK}_{γ} hervorgehen.

NP_{γ} : Anzahl der Partitionen, die zu \vec{TK}_{γ} gehören und aus
der Summe SP_{γ} nach Beziehung (2.18), Seite 65 ge-
bildet werden können.

In der obigen Beziehung (2.19) ist die die Anzahl NP_{γ} noch unbe-
kannt. Die Ermittlung von NP_{γ} kann entsprechend Abschnitt 3
Seite 89 erfolgen.

Nach Satz 2-g, Seite 65 ist die Eigenschaft der ch. Vektoren \vec{C} , die
zu dem allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} gehören, bestimmt: Die Elemente
von \vec{C} bilden Partitionen zur Summe SP. In dem folgenden Abschnitt 3
Seite 89 wird ein neuer Algorithmus hergeleitet, mit dessen Hilfe
man die zu \vec{T} gehörenden Partitionen (\vec{C}) ermitteln kann. Vorher
soll jedoch ein zweckmäßiges Ordnungsschema für die ch. Vektoren \vec{C}
angegeben werden. Außerdem werden vorher zwei Sonderfälle von Link-
systemen behaldelt.

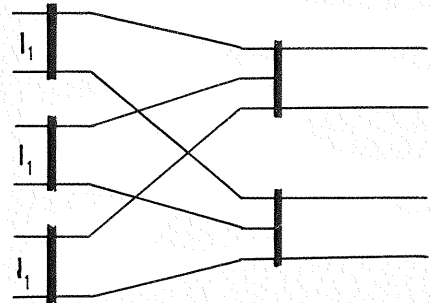
2.7.4 Die Ordnungsmatrix Φ

Zunächst ein einführendes Beispiel.

Beispiel 21:

Nach Tabelle 2.43-1, Seite 51 sind die ch. Vektoren \vec{C} für dieses Links-system bekannt.

Es werden jetzt die ch. Vektoren (Partitionen) nach den folgenden Kriterien geordnet:



I. Nach der Anzahl der belegten Koppelvielfache n der Stufe 1, mit anderen Worten: nach der Länge n der Partitionen (Anzahl der Elemente $c_i \neq 0$) und

II. nach den Elementen von den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} , in folgender Weise

(In der untenstehenden Tabelle bedeuten: Die eingekreisten Zahlen sind die lfd.Nr. der ch. Vektoren \vec{C} in der Tabelle 2.43-1, Seite 51).

	Klasse 1 <small>mindestens ein Element t_j hat den Wert "genau 1"</small>	Klasse 2 = K_2 <small>mindestens ein Element t_j hat den Wert "genau 2"</small>												
Vektoren $\vec{T} = \{t_1, t_2\}$	$\{1\ 0\}, \{0\ 1\}, \{1\ 1\}$	$\{2\ 0\}, \{0\ 2\}, \{2\ 1\}, \{1\ 2\}, \{2\ 2\}$												
$n = 1$	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">②</td> <td style="text-align: center;">③</td> <td style="text-align: center;">④</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$</td> </tr> </table>	②	③	④	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$							
②	③	④												
$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$												
$n = 2$	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">⑥</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$</td> </tr> </table>	⑥	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">⑤</td> <td style="text-align: center;">⑦</td> <td style="text-align: center;">⑧</td> <td style="text-align: center;">⑨</td> <td style="text-align: center;">⑩</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$</td> </tr> </table>	⑤	⑦	⑧	⑨	⑩	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$
⑥														
$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$														
⑤	⑦	⑧	⑨	⑩										
$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$										
$n = 3$		<table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;">⑪</td> <td style="text-align: center;">⑫</td> <td style="text-align: center;">⑬</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$</td> <td style="text-align: center;">$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$</td> </tr> </table>	⑪	⑫	⑬	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$						
⑪	⑫	⑬												
$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$												

Tabelle 2.74-1

Für die nachstehenden Ausführungen ist dieses Ordnungsschema sehr zweckmäßig. Es soll deshalb allgemein definiert werden. Zuvor wird für die Gesamtheit der ch. Vektoren \vec{C} die Bezeichnung $\Omega^{(g)}$ eingeführt.

Definition 2-K: Die $G_1 \cdot K_2$ -dimensionale Matrix

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & \dots & m & \dots & \dots & K_2 \\
 1 & \varphi_{1,1} & & & & & & \\
 2 & \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
 f_1 & \varphi_{f_1,1} & \varphi_{f_1,2} & & \varphi_{f_1,f_1} & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
 n & & \varphi_{n,m} & \dots & \dots & \dots & \varphi_{n,n} & \\
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
 f_m & & \varphi_{f_m,m} & & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & & & & \\
 \vdots & & \vdots & & & & & \\
 G_1 & & \varphi_{G_1,f_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \varphi_{G_1,K_2}
 \end{array}
 \end{array}
 = \Phi \quad (2.20)$$

Bereich I

Bereich II

sei die Ordnungsmatrix für die charakteristischen Vektoren \vec{C} (Partitionen) des gegebenen Linksystems mit den Strukturparametern G_1, K_1 und K_2 . Die Elemente von Φ werden mit $\varphi_{n,m}$ bezeichnet, sie sind Teilmengen von $\Omega^{(g)}$. Die ch. Vektoren \vec{C} , die zu $\varphi_{n,m}$ gehören, haben die folgenden Eigenschaften:

- 1.) Die Partitionen haben genau die Länge n, d.h. genau n Elemente der ch. Vektoren \vec{C} sind ungleich Null, mit anderen Worten: genau in n Koppelvielfachen der Stufe 1 sind Belegungen vorhanden.
- 2.) Mindestens für ein Element t_j des allgemeinen Zustandsvektors \vec{T} gilt

$$t_j = m.$$

Für die anderen $K_1 - 1$ Elemente von \vec{T} gilt

$$t_j \leq m.$$

Es sind also mindestens m Elemente von \vec{C} ungleich Null, mit anderen Worten: mindestens in m Koppelvielfachen der Stufe 1 sind Belegungen vorhanden und es sind genau m Ausgänge eines Koppelvielfachs j der Stufe 2 belegt.

Im folgenden wird von der Klasse m der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} bzw. \vec{TK} gesprochen.

Für die Klasse m der Vektoren \vec{TK} (\vec{T}) gilt:

$$\begin{array}{rcl}
 & j: & 1 \ 2 \ 3 \ 4 \dots\dots K_1 \\
 \vec{TK}_1 & = & \{m, 0, 0, 0, \dots, 0\} \\
 \vec{TK}_2 & = & \{m, 1, 0, 0, \dots, 0\} \\
 \vec{TK}_3 & = & \{m, 2, 0, 0, \dots, 0\} \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
 & \cdot & \\
 \vec{TK}_\gamma & = & \{m, m, m, m, \dots, m\}.
 \end{array}$$

Mit der Beziehung (2.16), Seite 63 folgt für die Anzahl γ der Vektoren \vec{TK} , die zu der Klasse m gehören, die Beziehung

$$\gamma = \underbrace{\binom{m+j-1}{j}}_{\text{Kombinationen der Klassen : } 1 \dots m} - \underbrace{\binom{m-1+j-1}{j}}_{1 \dots m-1}.$$

Diese Eigenschaften der Mengen $\varphi_{n,m}$, entsprechend den vorangegangenen Punkten 1.) und 2.), sind unmittelbar aus der Tabelle 2.74-1, Seite 67 zu erkennen, wenn man sich die dazugehörenden ch. Matrizen SC ansieht.

Beispiel 22: Betrachtet wird jetzt die Menge $\varphi_{n,m}$ für $n = m = 2$ des Beispiels 21, Seite 67.

Die unten angegebenen lfd.Nr. sind identisch mit den lfd.Nr. in der Tabelle 2.43-1, Seite 51.

lfd.Nr.	5	7	8	9	10	
\vec{c}	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$	
SC^*	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$n = 2$ Elemente von $\vec{c} (SC^*, SC)$ ungleich Null
SC	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	
\vec{T}	{ 2 0 }	{ 2 1 }	{ 0 2 }	{ 1 2 }	{ 2 2 }	
			$m = 2$			

In der Ordnungsmatrix Φ (siehe Definition 2-K Seite 68) gibt es zwei Bereiche innerhalb der die Mengen $\varphi_{n,m}$ leer sind, d.h. es gibt dort keine weiteren ch. Vektoren \vec{c} . Zunächst wird der Bereich I betrachtet.

Bereich I von Φ , d.h. $m > n$:

Aus den Eigenschaften 1.) und 2.) in Definition 2-K, Seite 68 folgt, daß es nur ch. Zustände im Bereich $m \leq n$ gibt. Wie man aus der Tabelle 2.74-1, Seite 67 sieht, gibt es in diesem Bereich überhaupt keine Zustandsmuster (technisch unmöglich).

Es wird die folgende Abkürzung eingeführt:

$$f_m = K_1 \cdot m = G_2 \cdot m \quad (2.21)$$

mit $m \in \{1, 2, \dots, K_1\}$.

Bereich II von Φ , d.h. $n > f_m$:

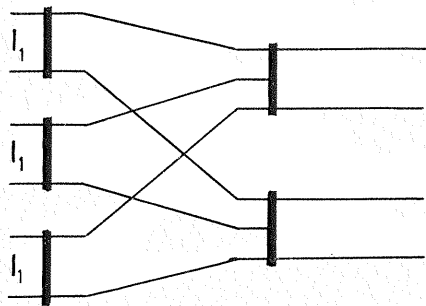
Im Bereich II sind die Mengen $\varphi_{n,m}$ ebenfalls leer, denn in der Spalte m der Matrix Φ können maximal K_1 Elemente t_j von \vec{T} den Wert m haben. Die maximale Anzahl von Belegungen der zur Klasse m von Φ

gehörenden Zustandsmatrizen ist $f_m = K_1 \cdot m$.

Diese f_m Belegungen können maximal $n = f_m$ Koppelvielfache der Stufe 1 (Partitionen der Länge n) belegen. Im vorangegangenen Beispiel 21, Seite 67 ist für $m = 1$: $f_m = K_1 = 2$.

Im Bereich II gibt es zwar erlaubte Zustandsmuster, aber die ch. Vektoren dieser Zustandsmuster liegen jedoch im Bereich $n \leq f_m$ von Φ , siehe Beispiel 23.

Beispiel 23:



Es wird das folgende erlaubte Zustandsmuster betrachtet:

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \implies \vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Es ist in dem obigen Zustandsmuster $m = 1$ Belegung im dritten ($n'=3$) Koppelvielfach der Stufe 1 vorhanden, d.h. es ist $n' > f_m = K_1 \cdot m = 2$. Das charakteristische Zustandsmuster, d.h. das Muster, das der Bedingung (2.10), Seite 48 genügt, ist:

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies SC = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Für das ch. Zustandsmuster gilt also $n = 1 < n' = 3$, d.h. es liegt im Bereich $n \leq f_m$ von Φ .

Im Bereich $n > f_m$ ändern sich nur die Mächtigkeiten M_β der ch. Vektoren \vec{C}_β , siehe Faktor $\binom{G_1}{n}$ in Beziehung (2.12), Seite 53.

2.8 Ordnungshierarchie für zweistufige Linkssysteme

2.8.1 Linkssysteme mit gleicher Erreichbarkeit K_1

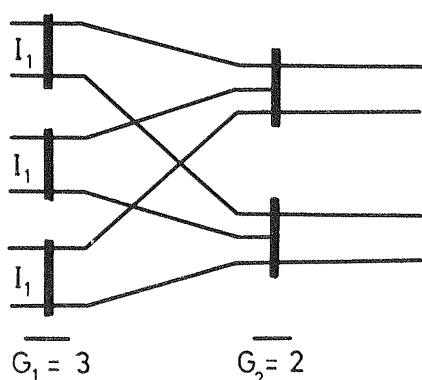
2.8.1.1 Einführendes Beispiel

Es werden jetzt Linkssysteme mit gleicher Erreichbarkeit K_1 betrachtet. Für die Strukturparameter G_1 und K_2 seien unterschiedliche Werte zugelassen.

Beispiel 24:

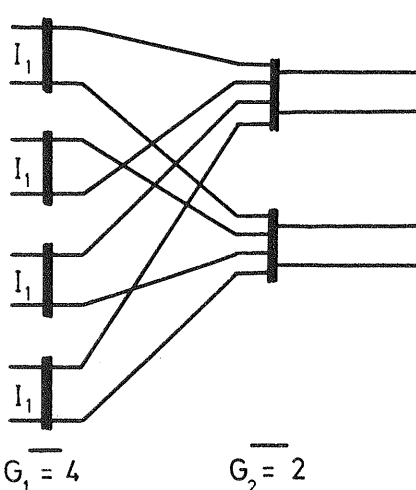
Linkssystem 1

$$G_1=3, \underline{K_1=2}, K_2=2;$$



Linkssystem 2

$$G_1=4, \underline{K_1=2}, K_2=2;$$



Die Ordnungsmatrizen Φ_1 und Φ_2 der ch. Vektoren \vec{C} sind auf der nächsten Seite angegeben.

Vergleicht man die ch. Vektoren \vec{C} der Untermengen $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{2,1}, \varphi_{2,2}, \varphi_{3,2}$ von Φ_1 und Φ_2 , so folgt, daß die von Null verschiedenen Elemente der ch. Vektoren \vec{C} für gleiche Wertepaare m und n übereinstimmen. Es werden jetzt in der Ordnungsmatrix Φ nur die n von Null verschiedenen Stellen der Elemente c_i von \vec{C} berücksichtigt. Bei gleicher Erreichbarkeit K_1 zweier Linkssysteme 1 und 2, sowie

$$\begin{array}{ccc} \text{System 1} & & \text{System 2} \\ G_{1,1} & \cong & G_{1,2} \\ K_{2,1} & \cong & K_{2,2} \end{array} \quad \text{und} \quad (2.22)$$

gilt dann der Satz 2-i.

Satz 2-i: Für Linkssysteme mit gleicher Erreichbarkeit K_1 sind die Teilmengen der ch. Vektoren \vec{C} , $\varphi_{n,m,1}$ und $\varphi_{n,m,2}$, identisch für

$$n \in \{1, 2, \dots, G_{1,1}\} \text{ und } m \in \{1, 2, \dots, K_{2,1}\} .$$

System

System 1: siehe Beispiel 21, Seite 67

n	m → 1	2	
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$		Bereich I
2	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$	= Φ_1
3	Bereich II	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	

System 2:

n	m → 1	2	
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$		Bereich I
2	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	= Φ_2
3	Bereich II	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	
4		$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	

Aus Satz 2-i, Seite 73 folgt unmittelbar der Satz 2-j.

Satz 2-j: Es seien für ein Linkssystem mit $G_{1,MAX}$ und $K_{2,MAX}$ alle ch. Vektoren \vec{C} bekannt und entsprechend der Ordnungsmatrix Φ geordnet. Es sind dann die ch. Vektoren \vec{C} der Linkssysteme mit gleicher Erreichbarkeit K_1 und den Strukturparametern

$$G_1 \in \{1, 2, \dots, G_{1,MAX}\} \quad \text{und} \\ K_2 \in \{1, 2, \dots, K_{2,MAX}\}$$

ebenfalls bekannt.

2.8.1.2 Die Mächtigkeitmatrix des Ranges Θ

Die Mächtigkeit der Mengen $\varphi_{n,m}$, mit anderen Worten: die Anzahl der ch. Vektoren \vec{C} , die zu einer Teilmenge $\varphi_{n,m}$ gehören, wird mit $\mathcal{V}_{n,m}$ bezeichnet. Für die Gesamtheit aller $\mathcal{V}_{n,m}$ wird die Definition 2-L eingeführt.

Definition 2-L: Die $G_1 \cdot K_2$ -dimensionale Matrix, deren Elemente $\mathcal{V}_{n,m}$ die Mächtigkeiten der Teilmengen $\varphi_{n,m}$ angeben, sei die Mächtigkeitmatrix des Ranges Θ .

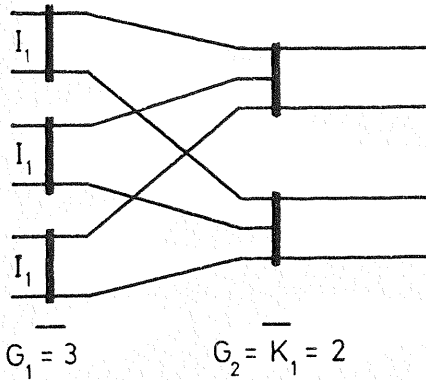
$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad \dots \quad m \quad \dots \quad K_2 \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 f_1 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 n \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 f_m \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 G_1
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc}
 \mathcal{V}_{1,1} & & & \\
 \mathcal{V}_{2,1} & \mathcal{V}_{2,2} & & \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \\
 \mathcal{V}_{f_1,1} & \mathcal{V}_{f_1,2} & & \mathcal{V}_{f_1,f_1} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \mathcal{V}_{n,m} & \dots & \dots & \mathcal{V}_{n,n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \mathcal{V}_{f_m,m} & \dots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \mathcal{V}_{G_1,f_1} & \dots & \dots & \mathcal{V}_{G_1,K_2}
 \end{array} \right. = \Theta \quad (2.23)
 \end{array}$$

Bereich I

Bereich II

Die Indizierung von Θ ist gleich wie bei der Matrix Φ nach Beziehung (2.20), Seite 68. Für die Bereiche I und II gelten ebenfalls die in Abschnitt 2.7.4, Seite 70 angegebenen Bemerkungen.

Beispiel 25:



Für dieses Linksystem erhält man aus Beispiel 24, Seite 72 die folgende Matrix Θ .

$$\begin{array}{c}
 m \longrightarrow 1 \quad | \quad 2 \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 n \downarrow \\
 1 \\
 \hline
 2 \\
 \hline
 3
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|}
 \hline
 3 & \\
 \hline
 1 & 5 \\
 \hline
 & 3 \\
 \hline
 \end{array}
 = \Theta
 \end{array}$$

Die Summe der Elemente $\vartheta_{n,m}$ ist gleich der Anzahl NC der ch. Vektoren \vec{C} (ch. Zustände) des betrachteten Linksystems, wenn man den Nullzustand hinzuaddiert, mit anderen Worten: NC ist der Rang des Gleichungssystems.

$$NC = 1 + \sum_{n=1}^{G_1} \sum_{m=1}^{K_2} \vartheta_{n,m} \tag{2.24}$$

Innerhalb einer Zeile von Φ , mit der Bedingung

$$n \cong m = K_2 \tag{2.25}$$

sind alle möglichen ch. Vektoren auch erlaubte ch. Vektoren, denn für diese ch. Vektoren gilt die zu Bedingung (2.4), Seite 37 entsprechende Bedingung

$$\begin{array}{c}
 (G_1 = I_2 = K_2) \\
 \uparrow \\
 n = m \text{ mit: } 0 \cong s_j = t_j \cong m = n = K_2 .
 \end{array}
 \tag{2.26}$$

Bei diesen Zustandsmustern sind weniger, höchstens gleich K_2 Eingänge eines Koppelvielfachs der Stufe 2 belegt. Diese Belegungen kommen von höchstens K_2 Koppelvielfachen der Stufe 1.

Beispiel 26: Für das gleiche Linksystm wie in Beispiel 24, Seite 72 gilt nach Abschnitt 2.8.1.1, Seite 73:

$$\begin{array}{c}
 n \downarrow \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 - \\
 2 \\
 - \\
 3
 \end{array}
 \end{array}
 \left(\begin{array}{c|c}
 \begin{array}{c}
 m \rightarrow 1 \\
 \begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array} \\
 \text{Bereich I} \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \hline
 \text{Bereich II}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 2 \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \end{array} \right) = \Phi$$

Ohne die Zustandsmatrizen, die zu den in Φ angeführten ch. Vektoren \vec{c} gehören, zu betrachten, sieht man: Die Bedingung (2.26), Seite 75 ist für die Zeilen 1 und 2 von Φ erfüllt, denn es sind bei den ch. Vektoren \vec{c} höchstens gleich $K_2 = 2$ Elemente c_i ungleich Null.

Aus der Matrix Φ sieht man des weiteren, daß in Zeile 1 und Zeile 2 alle möglichen "Kombinationen mit Wiederholungen" der Elemente c_i von \vec{c} vorhanden sind, mit $c_i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Daraus folgt mit der Beziehung (2.13), Seite 55 für eine Zeile n von Θ

$$\sum_{m=1}^n \vartheta_{n,m} = \binom{a+n-1}{n} \tag{2.27}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{mit } m, n \in \{1, 2, \dots, K_2\} \text{ und} \\
 a = 2^{K_1} - 1.
 \end{array}$$

Für das Beispiel 26, Seite 76 erhält man mit Beziehung (2.27),
Seite 76 und $a = 2^2 - 1 = 3$

in der Zeile 1 von $\Theta : \sum_{m=1}^1 \mathfrak{S}_{1,m} \left(3 + \frac{1}{1} - 1 \right) = 3$ und

in der Zeile 2 von $\Theta : \sum_{m=1}^2 \mathfrak{S}_{2,m} \left(3 + \frac{2}{2} - 1 \right) = 6$.

Aus der Mächtigkeitmatrix Θ folgt der Rang des Zustandsgleichungssystems.

2.8.1.3 Die Mächtigkeitenmatrix Ψ der Mächtigkeiten $M_{\beta,1}$

In Abschnitt 2.5, Seite 52 ist angegeben, wie die Mächtigkeit M_{β} eines ch. Vektors \vec{C}_{β} ermittelt werden kann. Für die ch. Vektoren \vec{C}_{β} wurde in Abschnitt 2.7.4, Seite 68 das Ordnungsschema, die Ordnungsmatrix Φ , eingeführt. Es soll jetzt ein entsprechendes Schema für die Mächtigkeiten $M_{\beta,1}$ aufgestellt werden.

Zunächst eine Vorbetrachtung:

Für die Mächtigkeit M_{β} des ch. Vektors \vec{C}_{β} gilt die Beziehung (2.12), Seite 53

$$M_{\beta} = \frac{n!}{\prod_{w=1}^{v-1} m_w} \cdot \binom{G_1}{n}, \quad (2.28)$$

m_w und v siehe Seite 53. Zur Abkürzung wird eingeführt:

$$M_{\beta,1} = \frac{n!}{\prod_{w=1}^{v-1} m_w} \quad (2.29a)$$

$$M_{\beta,2} = \binom{G_1}{n}. \quad (2.29b)$$

$$\text{Es gilt dann: } M_{\beta} = M_{\beta,1} \cdot M_{\beta,2}. \quad (2.30)$$

In Beziehung (2.30) bedeuten:

- $M_{\beta,1}$ gleich Anzahl (Mächtigkeit) der " Permutationen mit

Wiederholungen " der n von Null verschiedenen Elemente c_i von \vec{C} , mit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $c_i \in \{1, 2, \dots, 2^{K_1} - 1\}$.
 - $M_{\beta, 2}$ gleich Anzahl der Permutationen von n Elementen auf G_1 Stellen.

Für die von G_1 unabhängige Mächtigkeit $M_{\beta, 1}$ ist es jetzt zweckmäßig das gleiche Ordnungsschema einzuführen wie für die dazugehörenden ch. Vektoren \vec{C} .

Definition 2-M: Die $G_1 \cdot K_2$ dimensionale Matrix Ψ sei die Mächtigkeitematrix für die Mächtigkeiten $M_{\beta, 1}$, der ch. Vektoren \vec{C}_β

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & \dots & m & \dots & \dots & K_1 \\
 1 & \psi_{1,1} & & & & & & \\
 2 & \psi_{2,1} & \psi_{2,2} & & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \\
 f_1 & \psi_{f_1,1} & \psi_{f_1,2} & & & \psi_{f_1,f_1} & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & & \\
 n & & \psi_{n,m} & \dots & \dots & \dots & \psi_{n,n} & \\
 \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \\
 \vdots & & \psi_{f_m,m} & \dots & \dots & \dots & \vdots & \\
 f_m & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & & \\
 G_1 & & & & & & \psi_{G_1,f_1} & \dots & \dots & \psi_{G_1,K_2}
 \end{array}
 & = & \Psi & (2.31)
 \end{array}$$

Beispiel 27: Für die ch. Vektoren \vec{C}_β , entsprechend Beispiel 21, Seite 67 und Tabelle 2.74-1, Seite 67, bekommt man die folgenden Werte für $M_{\beta, 1}$ (groß geschriebene Zahlen).

		m → 1			2				
n ↓	1	② 1	③ 1	④ 1	Bereich I				
	2	⑥ 2			⑤ 1	⑦ 2	⑧ 1	⑨ 2	⑩ 1
	3	Bereich II			⑪ 3	⑫ 3	⑬ 6		

= Ψ

Die mit einem Kreis versehenen Zahlen sind die lfd.Nr β der dazugehörigen ch. Vektoren \vec{C}_β nach Tabelle 2.43-1, Seite 51.

Mit der obigen Matrix Ψ sind damit die Mächtigkeiten $M_{\beta,1}$ für die Linkssysteme mit $G_1 \in \{1,2,3\}$ und $K_2 = 1$ und $K_2 = 2$, bei $K_1 = 2$, bekannt (siehe Abschnitt 2.8.1.1, Seite 74). Die tatsächlichen Mächtigkeiten M_β erhält man, indem man die obigen Werte von $M_{\beta,1}$ mit $M_{\beta,2}$ nach Beziehung (2.29b), Seite 77 multipliziert. Im Beispiel 27, Seite 78 erhält man mit $G_1 = 3$ eine Matrix Ψ^* :

		m → 1			2					
n ↓	1	3	3	3						← $M_{\beta,1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
	2	6			3	6	3	6	3	← $M_{\beta,1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
	3				3	3	6			

↑
entsprechend der obigen Matrix

Die Summe der in Ψ^* angeführten Mächtigkeiten plus 1 (Nullzustand) ist gleich die Anzahl der erlaubten Zustandsmuster, siehe auch Beziehung (2.6), Seite 41.

2.8.1.4 Die Ordnung der ch. Zustände innerhalb der Teilmengen $\varphi_{n,m}$

Für die zu der Menge $\varphi_{n,m}$ gehörenden ch. Vektoren \vec{C} gelten die Eigenschaften nach Definition 2-K Seite 68. Innerhalb der Mengen $\varphi_{n,m}$ sind die ch. Vektoren \vec{C} bisher ungeordnet. Sie sollen ebenfalls geordnet werden.

Nach Definition 2-K, Seite 68 ist die Eigenschaft der allgemeinen Zustandsvektoren $\vec{TK} (\vec{T})$ vorgegeben. Danach hat in einer Spalte m der Matrix Φ mindestens ein Element $tK_j (t_j)$ den Wert m . Die Gesamtheit aller Vektoren $\vec{TK} (\vec{T})$ ist entsprechend der Beziehung (2.15), Seite 63 bekannt.

Da die Sequenzen der Elemente t_j von \vec{T} Permutationen der Elemente tK_j von \vec{TK} sind, sollen jetzt zunächst nur die Vektoren \vec{TK} betrachtet werden.

Welche der nach (2.15), Seite 63 vorgegebenen Vektoren \vec{TK} führen zu ch. Vektoren \vec{C} der Menge $\varphi_{n,m}$? Zunächst muß mindestens ein Element tK_j von \vec{TK} den Wert m haben und, außerdem gilt die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{K_1} tK_j \cong n, \quad (2.32)$$

denn nach Definition 2-K, Seite 68 sollen bei den ch. Vektoren \vec{C} n Elemente ungleich Null sein. Das bedeutet: bei diesem Zustandsmuster, welches zu einem allgemeinen Zustandsvektor \vec{TK}_ν gehört, müssen mindestens n Belegungen ($\sum_j tK_j$) vorhanden sein. Die Vektoren \vec{TK} werden wie folgt geordnet:

$$\begin{array}{rcl}
 j & \longrightarrow & 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ K_1 \\
 \vec{TK}_1 & = & \{ m, 0, 0, \dots, 0 \} \\
 \vec{TK}_2 & = & \{ m, 1, 0, \dots, 0 \} \\
 & \vdots & \\
 & \vdots & \\
 \vec{TK}_\nu & = & \{ m, m, 0, \dots, 0 \} \\
 & \vdots & \\
 & \vdots & \\
 \vec{TK}_{NTK_m} & = & \{ m, m, m, \dots, m \},
 \end{array} \quad (2.33)$$

mit $m \in \{1, 2, \dots, K_1\}$ und

NTK_m : Anzahl der "Kombinationen mit Wiederholungen" der Klasse m , siehe Anhang A1 Seite 307.

Damit kann man einen Vektor \overrightarrow{TK}_w angeben für den die Bedingung (2.32), Seite 80 erfüllt ist. Die Vektoren $\overrightarrow{TK}_{w+1}$ bis $\overrightarrow{TK}_{NTK_m}$ führen dann ebenfalls zu ch. Vektoren \overrightarrow{C} der Menge $\varphi_{n,m}$.

Aus jedem Vektor $\overrightarrow{TK}_\gamma$ entstehen durch Permutierung der Elemente $t_{K_{\gamma,j}}$ die allgemeinen Zustandsvektoren $\overrightarrow{T}_{\gamma,\varepsilon}$, mit $\varepsilon \in \{1, 2, \dots, NT_\gamma\}$. NT_γ ist die Anzahl der Vektoren \overrightarrow{T} , die aus $\overrightarrow{TK}_\gamma$ hervorgehen. NT_γ ist nach Beziehung (2.17), Seite 63 zu berechnen. Die Vektoren $\overrightarrow{T}_{\gamma,\varepsilon}$ werden nach der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{K_1} pv_j \cdot t_{\gamma,\varepsilon,j} < \sum_{j=1}^{K_1} pv_j \cdot t_{\gamma,\varepsilon+1,j} \quad (2.34)$$

geordnet. Darin ist $pv_j = 2^{j-1}$, entsprechend Definition 2-H, Seite 59.

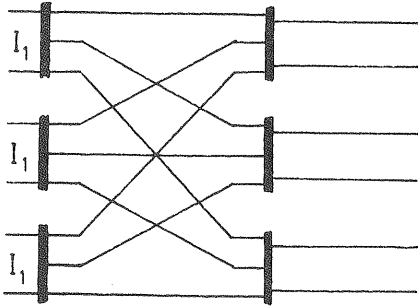
Aus den vorangegangenen Ausführungen erhält man die folgende Indizierung für die ch. Vektoren \overrightarrow{C} :

$$\overrightarrow{C}_{n,m,\gamma,\varepsilon,\eta} \quad (2.35)$$

- Mit: n : Länge der Partitionen, gleich Anzahl der Elemente von \overrightarrow{C} , die ungleich Null sind. Für n gilt: $n \in \{1, 2, \dots, G_1\}$.
- m : Klasse des allgemeinen Zustandsvektors \overrightarrow{T} , aus dem der ch. Vektor \overrightarrow{C} (Partition) entsteht, $m \in \{1, 2, \dots, K_2\}$.
- γ : Lfd.Nr. des Vektors \overrightarrow{TK} , aus dem der Vektor \overrightarrow{T} entsteht, siehe Beziehung (2.33), Seite 80, $\gamma \in \{1, 2, \dots, NTK_m\}$.
- ε : Lfd.Nr. des Vektors \overrightarrow{T} , der durch Permutierung aus $\overrightarrow{TK}_\gamma$ entsteht, mit der Bedingung (2.34) für die Elemente von \overrightarrow{T} und $\varepsilon \in \{1, 2, \dots, NT_\gamma\}$.
- η : Lfd.Nr. des Vektors \overrightarrow{C} (Partition), der zu $\overrightarrow{TK}_\gamma$ gehört, $\eta \in \{1, 2, \dots, NP_\gamma\}$.
- NTK_m : Anzahl der Vektoren \overrightarrow{TK} der Klasse m .
- NT_γ : Anzahl der "Permutationen mit Wiederholungen" der Klasse γ .
- NP_γ : Anzahl der Partitionen (ch. Vektoren \overrightarrow{C}), die zu $\overrightarrow{TK}_\gamma$ gehören und aus der Summe SP_γ nach Beziehung (2.18),

Seite 65 hervorgehen.

Beispiel 28:



Für dieses Linksystem werden die ch. Vektoren \vec{C} von $\varphi_{n,m}$ mit $n = 3$ und $m = 2$ angegeben. Die Summe SP wurde nach Beziehung (2.18), Seite 65 ermittelt.

γ	\overline{TK}_γ	η	$\epsilon \rightarrow$	1	2	3	4	5	6							
1	{2 1 0}	1	$\vec{T}_{Y,\epsilon}$	{2 1 0}	{1 2 0}	{2 0 1}	{0 2 1}	{1 0 2}	{0 1 2}							
			$SP_{Y,\epsilon}$	4	5	6	8	9	10							
			$\vec{C}_{Y,\epsilon,\eta}$	{2 1 1}	{2 2 1}	{4 1 1}	{4 2 2}	{4 4 1}	{4 4 2}							
2	{2 2 0}	1	$\vec{T}_{Y,\epsilon}$	{2 2 0}	{2 0 2}	{0 2 2}	wegen der Platzersparnis wurden die ch. Vektoren $\vec{C}_{Y,\epsilon,\eta}$ waagrecht dargestellt									
			$SP_{Y,\epsilon}$	6	10	12										
			$\vec{C}_{Y,\epsilon,\eta}$	{3 2 1}	{5 4 1}	{6 4 2}										
3	{2 1 1}	1	$\vec{T}_{Y,\epsilon}$	{2 1 1}	{1 2 1}	{1 1 2}				wegen der Platzersparnis wurden die ch. Vektoren $\vec{C}_{Y,\epsilon,\eta}$ waagrecht dargestellt						
			$SP_{Y,\epsilon}$	8	9	11										
			$\vec{C}_{Y,\epsilon,\eta}$	1	{6 1 1}	{6 2 1}							{6 4 1}			
				2	{5 2 1}	{5 2 2}							{5 4 2}			
				3	{4 3 1}	{4 3 2}							{4 4 3}			
4	{2 2 1}	1	$\vec{T}_{Y,\epsilon}$	{2 2 1}	{2 1 2}	{1 2 2}							wegen der Platzersparnis wurden die ch. Vektoren $\vec{C}_{Y,\epsilon,\eta}$ waagrecht dargestellt			
			$SP_{Y,\epsilon}$	10	12	13										
			$\vec{C}_{Y,\epsilon,\eta}$	1	{7 2 1}	{7 4 1}										{7 4 2}
				2	{6 3 1}	{6 5 1}										{6 6 1}
				3	{5 3 2}	{5 5 2}										{6 5 2}
4	{4 3 3}	{5 4 3}		{6 4 3}												
5	{2 2 2}	1	$\vec{T}_{Y,\epsilon}$	2 2 2	wegen der Platzersparnis wurden die ch. Vektoren $\vec{C}_{Y,\epsilon,\eta}$ waagrecht dargestellt											
			$SP_{Y,\epsilon}$	14												
			$\vec{C}_{Y,\epsilon,\eta}$	1				{7 6 1}								
				2				{7 5 2}								
				3				{7 4 3}								
4	{6 5 3}															

Tabelle 2.814 - 1

2.8.2 Linkssysteme mit $K_1 = 1$

Diese Linkssysteme haben keine praktische Bedeutung. Sie sind jedoch als Grenzfall mathematisch interessant, denn man kann für diesen Sonderfall die ch. Vektoren \vec{C} unmittelbar angeben. Die allgemeine Struktur dieser Linkssysteme ist:

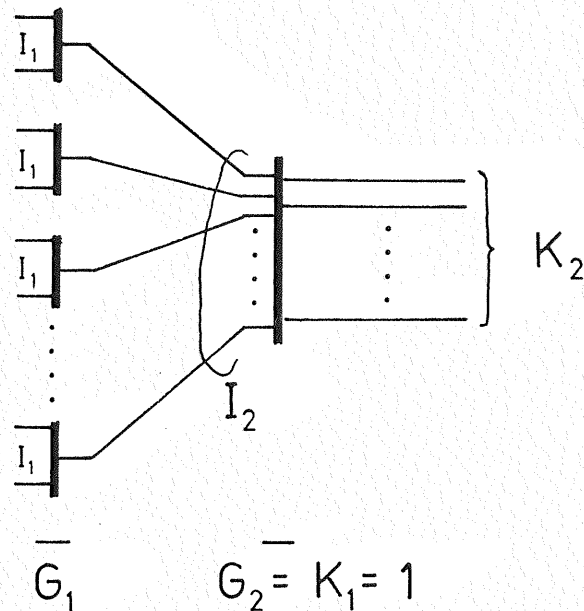


Bild 2.82-1

$$G_1 = I_2 \cong K_2$$

$$K_2, G_1 \in \{1, 2, \dots, IN\}$$

IN: Bereich der natürlichen Zahlen

Aus Beziehung (2.21), Seite 70 folgt: Es existieren nur für $n = m$ ch. Vektoren \vec{C} und aus Beziehung (2.27), Seite 76 folgt: Jede Menge $\varphi_{n,m}$ besteht aus nur einem ch. Vektor \vec{C} . Für $m \in \{1, 2, \dots, K_1\}$ gilt für die von Null verschiedenen Elemente c_i entsprechend Beziehung (2.10), Seite 48

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m \end{matrix} .$$

Damit erhält man die Matrix Φ , d.h. die ch. Vektoren \vec{C} , wie folgt:

$m \rightarrow$	1	2	3	K_2	
-----------------	---	---	---	-------	-------	--

n	\downarrow					
1	\downarrow	1	-	-	-	-
2	\downarrow	-	1 1	-	-	-
3	\downarrow	-	-	1 1 1	-	-
:	\downarrow	-	-	-	-	-
:	\downarrow	-	-	-	-	-
:	\downarrow	-	-	-	-	-
K_2	\downarrow	-	-	-	1 1 : 1	-
:	\downarrow	-	-	-	-	-
:	\downarrow	-	-	-	-	-
:	\downarrow	-	-	-	-	-
G_1	\downarrow	-	-	-	-	-

Bereich I

Bereich II

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

= \emptyset (2.36)

Hier sind nur die von Null verschiedenen Elemente c_i von \vec{C} angegeben.

Für die Mächtigkeitmatrix des Ranges \ominus und die Mächtigkeitenmatrix Ψ gilt:

$m \rightarrow$	1	2	3	K_2	
-----------------	---	---	---	-------	-------	--

n	\downarrow					
1	\downarrow	1	-	-	-	-
2	\downarrow	-	1	-	-	-
3	\downarrow	-	-	1	-	-
:	\downarrow	-	-	.	-	-
:	\downarrow	-	-	.	-	-
:	\downarrow	-	-	.	-	-
K_2	\downarrow	-	-	-	1	-
:	\downarrow	-	-	-	-	-
:	\downarrow	-	-	-	-	-
:	\downarrow	-	-	-	-	-
G_1	\downarrow	-	-	-	-	-

= $\ominus = \Psi$ (2.37)

Dieser Sonderfall ist trivial und bedarf keiner weiteren Erläuterungen.

2.8.3 Linkssysteme mit $K_1 = 2$

Die Struktur dieser Linkssysteme ist:

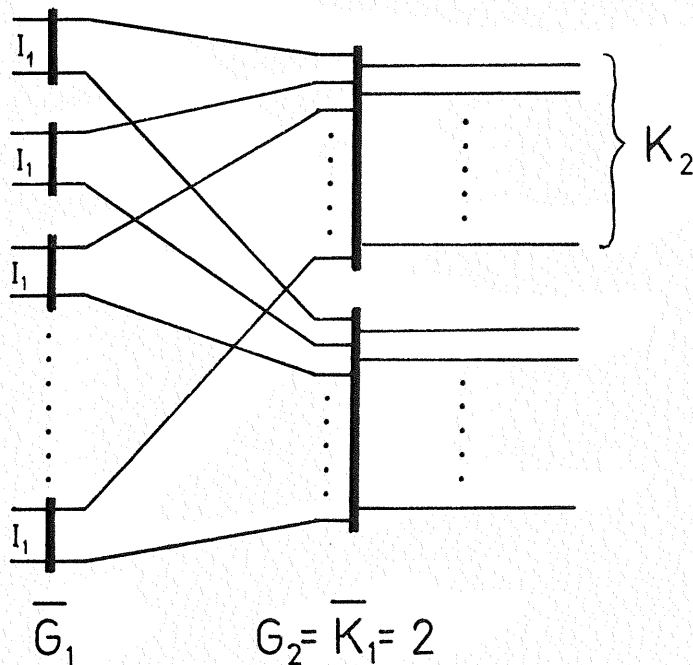


Bild 2.83-1

$$G_1 = I_2 \cong K_2$$

$$K_2, G_1 \in \{1, 2, \dots, IN\}$$

IN: Bereich der natürlichen Zahlen

Auch diese Linkssysteme stellen einen Sonderfall dar, denn, wie man leicht sieht, gibt es zu jedem allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} stets nur einen ch. Vektor \vec{C} (eine Partition).

Die ch. Vektoren \vec{C} und die Matrizen Θ und Ψ können hier ebenfalls unmittelbar angegeben werden.

Mit der Beziehung (2.10), Seite 48 erhält man die ch. Vektoren \vec{C} , siehe Matrix Φ auf der nächsten Seite. In der Matrix Φ sind nur die von Null verschiedenen Elemente c_i von \vec{C} angegeben. Das Bildungsgesetz für die Werte der Elemente c_i von \vec{C} ist unmittelbar aus der Matrix Φ zu erkennen, wenn man von den zu $\varphi_{n,m}$ gehörenden Vektoren \vec{C} ausgeht.

Unmittelbar aus Φ nach Beziehung (2.38), Seite 86 erhält man die Elemente $\mathfrak{J}_{n,m}$ von Θ durch Abzählung der ch. Vektoren \vec{C} der Mengen $\varphi_{n,m}$. In der Mächtigkeitmatrix des Ranges Θ nach Beziehung (2.39), Seite 87 sind die Elemente $\mathfrak{J}_{n,m}$ bis $G_1 = K_2 = 10$ dargestellt.

m →	1	2	3	4	...
n ↓					
1	{1} {2}	Partitionen der Länge n = 1, usw.			
1	{3}				
2	{2 1}	{1} {2}	Partitionen der Länge n = 2, usw.		
2	{3 1}	{3 2}			
3	{2 1} {2 1}		{1} {2}	{3} {3}	
3			{3} {3}		
4	{2 1} {2 1}		{3} {3}	{3} {3}	
4			{3 3}		
5	{2 1} {2 1}		{3} {3}	{3} {3}	
5			{3 3 1}		
6	{2 1} {2 1}		{3} {3}	{3} {3}	
6			{3 3 1}		
7	{2 1} {2 1}		{3} {3}	{3} {3}	
7			{3 3 1}		
8	{2 1} {2 1}		{3} {3}	{3} {3}	
8			{3 3 1}		
9	{2 1} {2 1}		{3} {3}	{3} {3}	
9			{3 3 1}		
10	{2 1} {2 1}		{3} {3}	{3} {3}	
10			{3 3 1}		

$$= \emptyset$$

(2.38)

n	m →											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1		3										
2		1	5									
3			3	7								
4			1	5	9							
5				3	7	11						
6				1	5	9	13					
7					3	7	11	15				
8					1	5	9	13	17			
9						3	7	11	15	19		
10							1	5	9	13	17	21

= Θ

(2.39)

Aus der obigen Matrix Θ erhält man für die Elemente $\mathfrak{J}_{n,m}$, bei $K_1 = 2$, das folgende Bildungsgesetz:

$$\mathfrak{J}_{n,m} = 2 \cdot (2m - n) + 1 \tag{2.40}$$

mit $m \in \{1, 2, \dots, K_2\}$ und
 $n \in \{m, m+1, m+2, \dots, \text{MIN}[G_1, 2 \cdot m]\}$.

Aus Beziehung (2.24), Seite 75 und mit der obigen Beziehung (2.40) erhält man für NC, der Anzahl der ch. Matrizen bzw. ch. Vektoren \vec{C} , für Linkssysteme mit

$$G_2 = K_1 = 2 \quad \text{und}$$

$$G_1, K_2 \in \mathbb{N}$$

die allgemeine Formel

$$NC = 1 + \sum_{m=1}^{K_2} \sum_{n=m}^{\text{MIN}[G_1, 2m]} (2 \cdot (2m - n) + 1). \tag{2.41}$$

Mit den ch. Vektoren \vec{C} entsprechend Φ nach Beziehung (2.38), Seite 86, und mit der Beziehung (2.29a), Seite 77 erhält man die Mächtigkeitenmatrix Ψ , siehe nächste Seite.

n	m →		1		2		3		4		5			
1	1	1	1	1										
2	2	1 1		2 2		1 1								
3			3 3		6		1 1		3 3		3 3			
4			6				4 4		4 4		1 1			
5							10 10		5 5		20 20		30 30	
6							20		15 15		60 60		180	
7									35 35		140			
8											70			

= Ψ

Die oben angegebenen Mächtigkeiten sind die Mächtigkeiten $M_{\beta,1}$, siehe Seite 77. An Hand der Indizes n und m können die $M_{\beta,1}$ den ch. Vektoren nach Seite 86 zugeordnet werden.

3. Die Ermittlung der Partitionen (ch. Vektoren \vec{C})

3.1 Aufgabenstellung

Zur Vereinfachung der Indizierung wird im folgenden in der Regel nur der Vektor \vec{TK} betrachtet. Dieses ist jedoch keine Einschränkung der Allgemeinheit, d.h. bei entsprechender Indizierung kann auch stets \vec{T} für \vec{TK} gesetzt werden. Außerdem werden jetzt nur noch die n von Null verschiedenen Elemente c_i von \vec{C} angegeben.

Die nachstehenden Ausführungen sind nicht für Linksysteme spezifisch, sondern allgemein kombinatorischer Art. Deshalb wird häufig der Begriff "Partition" anstelle "ch. Vektor" verwendet.

Sind die Strukturparameter G_1 , K_1 und K_2 eines zweistufigen Linksystems bekannt, dann sind die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK} nach Beziehung (2.33), Seite 80 ebenfalls bekannt.

Die Partitionen sollen die Länge n haben und zur Klasse m von \vec{TK} gehören. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} m &\in \{1, 2, \dots, K_2\} \text{ und} \\ n &\in \{m, m+1, m+2, \dots, \text{MIN} [G_1, K_1, m = f_m] \} \\ f_m &: \text{ siehe Beziehung (2.21), Seite 70.} \end{aligned}$$

Es sollen also die ch. Vektoren \vec{C} bestimmt werden, die zu der Menge $\Phi_{n,m}$ von Φ gehören. Für die Ordnungsmatrix Φ gilt die Beziehung (2.20), Seite 68. Welche der Vektoren \vec{TK} nach Beziehung (2.33), Seite 80 zu Partitionen der Länge n führen, ist durch die Beziehung (2.32), Seite 80 bekannt, d.h. es muß

$$\sum_{j=1}^{K_1} tK_j \cong n$$

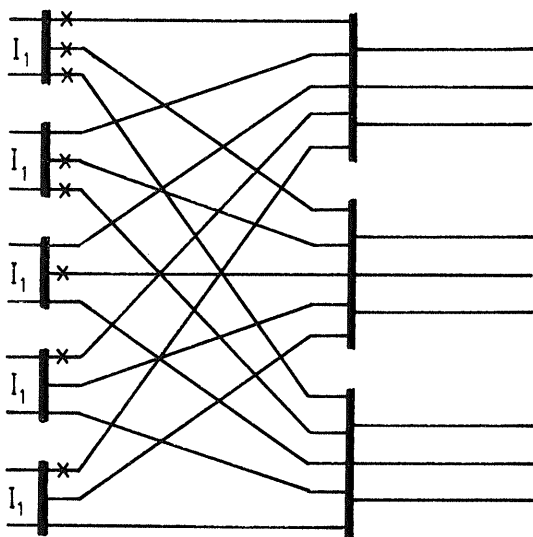
sein.

Für die Elemente c_i von \vec{C} gilt die Beziehung (2.10), Seite 48.

Bevor ein allgemeines Verfahren zur Ermittlung der Partitionen (ch. Vektoren), die aus \vec{TK} entstehen, hergeleitet wird, sollen in einem Beispiel die aus \vec{TK} hervorgehenden Partitionen manuell er-

mittelt werden.

Beispiel 29:



Bei dem betrachteten Linksystm sollen die mit x gekennzeichneten Zwischenleitungen belegt sein. Das Belegungsmuster wurde so gewählt, daß es bereits ein ch. Zustand ist. Für dieses Belegungsmuster gilt die Bedingung (2.10), Seite 48, siehe untenstehenden Zustandsvektor \vec{S} .

$$\overline{G}_1 = 5 \quad \overline{G}_2 = \overline{K}_1 = 3$$

Zustandsmatrix S	Zustandsmatrix S*	Zustandsvektor \vec{S}
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$
$\begin{matrix} - & - & - \\ \vec{T} = \{ 3 & 3 & 2 \} \end{matrix}$		$\begin{matrix} C \\ v \\ C \\ v \\ C \\ v \\ C \\ C \\ VII \\ C \end{matrix}$

Aus der Zustandsmatrix S erhält man sofort den allgemeinen Zustandsvektor $\vec{T} = \{ 3 \ 3 \ 2 \}$. Da für die Elemente von \vec{T}

$$t_1 = 3, t_2 = 3, t_3 = 2$$

die Bedingung gilt: $t_1 \cong t_2 \cong t_3$, folgt mit der Definition 2-J, Seite 60

$$\vec{T} = \vec{TK} = \{ 3 \ 3 \ 2 \}.$$

Mit der Beziehung (2.18) Seite 65 erhält man für die Summe SP in diesem Beispiel

$$SP = \sum_{i=1}^{G_1} c_i = 7 + 6 + 2 + 1 + 1 = 17.$$

Bei dem gegebenen Beispiel $K_1 = 3$ können nach Beziehung (2.10), Seite 48 die Elemente c_i die Werte

$$c_i \in \{1, 2, \dots, 7\}$$

annehmen. Alle Partitionen zur Summe $SP = 17$ mit der Randbedingung $\overrightarrow{TK} = \{3 \ 3 \ 2\}$ sind ch. Vektoren \overrightarrow{C} des betrachteten Linksystems. Für $SP = 17$ und $\overrightarrow{TK} = \{3 \ 3 \ 2\}$ erhält man manuell die ch. Vektoren entsprechend Tabelle 3.1-1, Seite 92.

Das Problem ist es, jetzt einen Algorithmus zur Berechnung jener Partitionen \overrightarrow{C} , die zu einem gegebenen Vektor \overrightarrow{TK} gehören, zu ermitteln. Dazu ist die Einführung neuer Definitionen notwendig.

3.2 Die Vektoren (Partitionen) \overrightarrow{V}_j der Spalte j

Es werden zunächst die Partitionen der Tabelle 3.1-1, Seite 92 betrachtet. Die dort angegebenen Partitionen werden jetzt umgeordnet. Sie werden in Klassen mit gleicher Zeichensequenz in der Spalte 2 von den dazugehörenden Zustandsmatrizen S^* eingeteilt. Wie aus der Tabelle 3.1-1, Seite 92 ersichtlich, gibt es drei verschiedene Sequenzen in der Spalte 2 von S^* , sie lauten:

2	2	0	4
2	0	0	4
2	2	2	0
0	2	2	0
0	0	2	0

In der Spalte $j = \underline{3}$, der letzten Spalte von S^* , gibt es wegen der Eigenschaft " die \overrightarrow{C} sind Partitionen mit der Bedingung (2.10), Seite 48 " nur eine Sequenz, siehe obenstehende Zahlenfolge 4 4 0 0 0.

Lfd. Nr. η	\vec{C}	S^*
1	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$
2	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$
3	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$
4	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$
5	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$
6	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$
7	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$
8	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$
9	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$

Tabelle 3.1-1

Lfd. Nr. η	\vec{C}	S^*
1	$\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Tabelle 3.2-1

In der Tabelle 3.2-1, Seite 93 sind also die Partitionen \vec{C} in

" Klassen mit gleicher Sequenz (gleicher Untermatrix, siehe Seite 96) in der Spalte $j = 2$ von S^* "

geordnet, siehe auch untenstehende Tabelle 3.2-2.

Klasse	lfd.Nr. der Partitionen \vec{C}	Sequenz in der Spalte $j = 2$	Untermatrix U^* (siehe Seite 96)
1	1,2	2 2 2 0 0	$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
2	3,4,5,6	2 0 2 2 0	$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$
3	7,8,9	0 0 2 2 2	$\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

Tabelle 3.2-2

Es sollen jetzt die folgenden zweckmäßigen Definitionen eingeführt werden.

Definition 3-A:

Die Sequenz der Elemente in der Spalte j der Zustandsmatrix S^* wird als Spaltenvektor \vec{D}_j bezeichnet und es gilt für die Elemente $d_{j,i}$ von \vec{D}_j :

$$d_{j,i} = s_{i,j}^* .$$

$$\vec{D}_j = \begin{Bmatrix} d_{j,1} \\ d_{j,2} \\ \vdots \\ d_{j,i} \\ \vdots \\ d_{j,n} \end{Bmatrix}$$

Definition 3-B: Die Spalten der Matrix S^* ab Spalte $j = 1$ werden als Untermatrix U_j^* bezeichnet.

$$U_{j=1}^* = \begin{pmatrix} u_{1,l}^* & u_{1,l+1}^* & \dots & u_{1,K_1}^* \\ u_{2,l}^* & u_{2,l+1}^* & \dots & u_{2,K_1}^* \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_{i,l}^* & u_{i,l+1}^* & \dots & u_{i,K_1}^* \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ u_{n,l}^* & u_{n,l+1}^* & & u_{n,K_1}^* \end{pmatrix}$$

Mit $n \in \{2, 3, \dots, G_1\}$
 $l \in \{1, 2, \dots, K_1\}$,
 es gilt $u_{i,l}^* = s_{i,l}^*$.

In der Tabelle 3.2-2, Seite 94 sind die Untermatrizen $U_{j=2}^*$ der ch. Vektoren \vec{C} bzw. der dazugehörenden Zustandsmatrizen S^* entsprechend Tabelle 3.2-1, Seite 93, angegeben.

Für die Zeilensummen der Matrix U_j^* wird eine zu Definition 2-C, Seite 35 analoge Definition eingeführt.

Definition 3-C: Die Zeilensumme der Zeile i der Matrix U_j^* wird mit v_i bezeichnet. Die Zahlenfolge der Zeilensummen v_1, v_2, \dots, v_n wird als Vektor

$$\vec{V}_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix}$$

bezeichnet, mit $j \in \{1, 2, \dots, K_1\}$
 $l \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Geht man jetzt von einem ch. Zustand, d.h. dem ch. Vektor \vec{C} (Partition zur Summe SP) aus, so folgt der Satz 3-a.

Satz 3-a: Für die Folge der Elemente v_i der Vektoren \vec{V}_j , der K_1 möglichen Untermatrizen U_j^* , die aus \vec{C} hervorgehen, gilt: Die Zahlenfolgen v_1, v_2, \dots, v_n bilden Partitionen zur Summe

$$SPV = \sum_{j=1}^{K_1} tK_j \cdot pv_j, \quad (3.1)$$

mit pv_j nach Definition 2-H, Seite 59.

Im folgenden wird daher häufig für \vec{V}_j an Stelle des Begriffs " Vektor \vec{V}_j " der Begriff " Partition \vec{V}_j " verwendet. Für die Elemente v_i eines aus \vec{C} hervorgehenden Vektors \vec{V}_j gilt deshalb die zu Beziehung (2.10), Seite 48 analoge Beziehung (3.2).

$$v_1 \cong v_2 \cong \dots \cong v_n \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } v &\in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1} - 1\}, \\ j &\in \{1, 2, \dots, K_1\} \text{ und} \\ i &\in \{1, 2, \dots, n, \dots, G_1\}. \end{aligned}$$

Der Beweis für den Satz 3-a kann unmittelbar durch die Betrachtung der Matrix S^* geführt werden, indem man sukzessiv die dazugehörigen Untermatrizen U_j^* ermittelt und daraus wiederum die Vektoren \vec{V}_j . Wesentlich dabei ist, daß für die Teilsumme einer Zeile von S^* gilt:

$$\sum_{j=1}^l s_{l,j}^* < pv_{l+1},$$

mit $pv_{l+1} = 2^l$, entsprechend Definition 2-H, Seite 59.

Zu erwähnen ist noch, daß für $j = 1 = 1$ gilt:

$$U_{j=1}^* = S^* \quad (3.3)$$

$$\text{und } \vec{V}_{j=1} = \vec{C}, \quad (3.4)$$

mit anderen Worten: Der Vektor $\vec{V}_{j=1}$ ist definitionsgemäß gleich dem ch. Vektor \vec{C} .

Für die Spalte $j = K_1$, d.h. die letzte Spalte, gilt:

$$u_{i,K_1} = v_i = s_{i,K_1} \quad (3.5)$$

Für die in der Tabelle 3.2-1, Seite 93 angegebenen ch. Zustände erhält man die in der Tabelle 3.2-3, Seite 98 angegebenen Untermatrizen U_j^* und Partitionen \vec{V}_j . Die Partitionen \vec{C} , die aus dem allgemeinen Zustandsvektor $\vec{TK} = \{3 \ 3 \ 2\}$ entstehen (siehe Beispiel 29, Seite 90), sind in der Tabelle 3.2-3, Seite 98 nach gleichen Untermatrizen ab Spalte $j = 2$ und ab Spalte $j = 3$ geordnet. Gleiche Untermatrizen sind gleichbedeutend mit: gleichen Partitionen \vec{V}_j .

Aus der Tabelle 3.2-3, Seite 98 kann man den folgenden Sachverhalt entnehmen: Läßt man bei den Matrizen S^* , analog bei \vec{TK} , die Spalte $j = 1$ weg, so erhält man aus den verbleibenden Elementen $tK_2 = 3$ und $tK_3 = 2$ die Partitionen $\vec{V}_{j=2}$:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

siehe Spalte 2 von Tabelle 3.2-3, Seite 98. Läßt man des weiteren auch die Spalte $j = 2$ bei S^* weg, so bleibt das Element $tK_3 = 2$ übrig und man bekommt nur eine Partition, im Beispiel die Partition $\vec{V}_{j=3}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

siehe Spalte 3 von Tabelle 3.2-3, Seite 98.

Geht man nun in umgekehrter Reihenfolge vor, dann kann man die Partitionen

$$\vec{C} = \vec{V}_{j=1},$$

d.h. die ch. Vektoren in K_1 Schritten erzeugen (entwickeln). Der Algorithmus, der nach diesem Prinzip arbeitet, wird im

		j → 1			2		3		
η	$\vec{C} = \vec{V}_1$	$S^* = U_1$			\vec{V}_2	U_2		\vec{V}_3	U_3
1	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$			
2	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$							
3	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$					
4	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$							
5	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$							
6	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$							
7	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{Bmatrix}$					
8	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$							
9	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$							

Tabelle 3.2-3

folgenden mit " Er z e u g e n d e r A l g o r i t h m u s " bezeichnet. Das Prinzip dieses Algorithmus wird an Hand des in diesem Abschnitt verwendeten allgemeinen Zustandsvektors \vec{TK} aufgezeigt.

Ausgangspunkt ist stets ein allgemeiner Zustandsvektor $\vec{TK} (\vec{T})$, der nach Beziehung (2.33), Seite 80 gegeben ist jetzt als Zahlenbeispiel der Vektor $\vec{TK} = \{3 \ 3 \ 2\}$.

1. Schritt: Zunächst wird die Partition

$$\vec{V}_{j=3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gesetzt, d.h. entsprechend

$tK_3 = 2$ sind zwei Elemente von $\vec{V}_{j=3}$ ungleich Null.

Allgemein gilt: $tK_{j=1}$ Elemente von $\vec{V}_{j=1}$ sind ungleich Null, siehe auch Beziehung (3.5), Seite 97.

2. Schritt: Es werden die zulässigen Sequenzen der Spalte $j = 2$ von S^* ermittelt, mit anderen Worten: die zulässigen Spaltenvektoren $\vec{D}_{j=2}$ (siehe Definition 3-A, Seite 94). In diesem Zahlenbeispiel mit $tK_2 = 3$ sind es die Sequenzen

$$\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} .$$

3. Schritt: Es werden die zulässigen Sequenzen der Spalte $j = 1$ von S^* ermittelt, d.h. die Spaltenvektoren $\vec{D}_{j=1}$, siehe Spalte $j = 1$ von S^* in der Tabelle 3.2-3, Seite 98. Entsprechend $tK_1 = 3$ sind drei Elemente von $\vec{D}_{j=1}$ ungleich Null.

Es sei jetzt NP_j : Anzahl der Partitionen \vec{V}_j ,
 ρ : lfd.Nr. der Partition \vec{V}_j und
 ξ : lfd.Nr. der Partition $\vec{V}_{j-1, \rho}$.

Die Partitionen \overline{V}_{j-1} kann man jetzt wie folgt berechnen:

$$\overline{V}_{j-1, \rho, \xi} = \overline{V}_{j, \rho} + \overline{D}_{j-1, \rho, \xi}, \quad (3.6)$$

mit $j \in \{K_1, K_1 - 1, \dots, 2\}$,
 $\rho \in \{1, 2, \dots, NP_j\}$ und
 $\xi \in \{1, 2, \dots, NP_{j-1, \rho}\}$.

Da die Partition \overline{V}_{K_1} nach Beziehung (3.5), Seite 97 bekannt ist, können die Partitionen $\overline{V}_{j-1, \rho, \xi}$ mit der obigen Beziehung (3.6) rekursiv berechnet werden. Für die Berechnung der Spaltenvektoren \overline{D}_{j-1} wurde ebenfalls ein Algorithmus entwickelt und auf einem Digitalrechner programmiert, siehe Anhang A4, Seite 314.

3.3 Anzahl der Partitionen für Linkssysteme mit $K_1 = 3$

Es wird in diesem Abschnitt das folgende Linkssystem betrachtet:

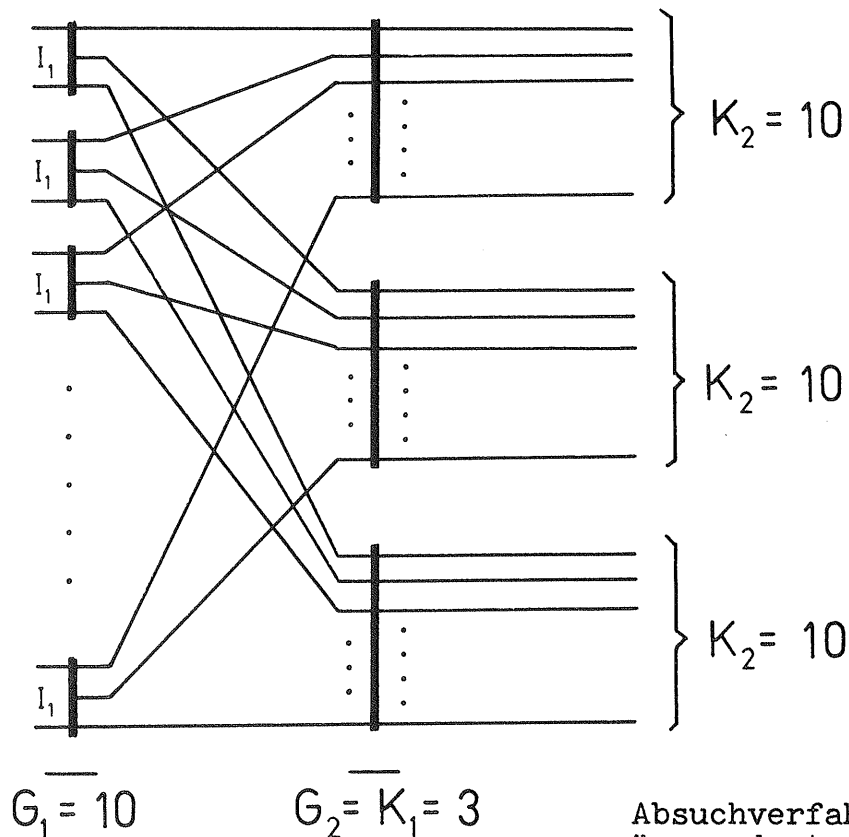
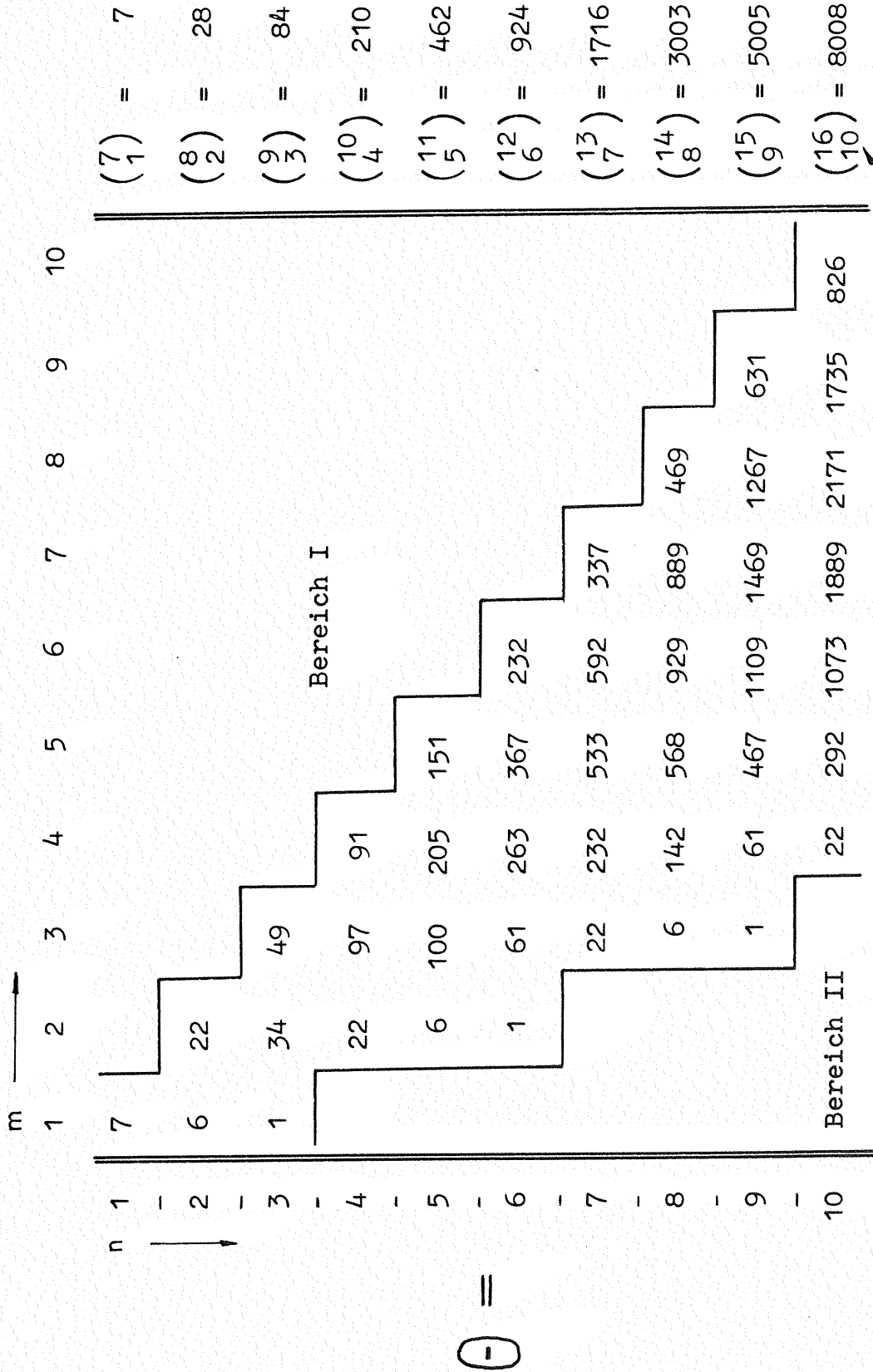


Bild 3.1

Absuchverfahren:
 " geordnetes Absuchen " der
 Ausgänge eines Koppelvielachs
 der Stufe 1

Für das auf Seite 100 abgebildete Linksystem erhält man die folgende Mächtigkeitmatrix des Ranges:



(siehe Beziehung (2.27), Seite 76)

(3.7)

Die Anzahl der Partitionen von $\mathfrak{J}_{n,m}$ wurde mit dem im Abschnitt 3.2, Seite 99 beschriebenen Algorithmus ermittelt. Für die Ordnungsmatrix Φ (Definition 2-K, Seite 68) und für die Mächtigkeitsmatrix Ψ (Definition 2-M, Seite 78) sind die Teilbereiche $m, n \in \{1, 2, 3\}$ im Anhang A5, Seite 322 angegeben.

Die Summe der $\mathfrak{J}_{n,m}$ je Zeile von Θ stimmen mit den nach Beziehung (2.27), Seite 76 ermittelten Werten überein, siehe Seite 101.

Die Summe aller $\mathfrak{J}_{n,m}$ ergibt die Zahl der Unbekannten (Rang) des zu lösenden Gleichungssystems,

$$1 + \sum_{n=1}^{10} \sum_{m=1}^n \mathfrak{J}_{n,m} = 19\,448.$$

Für das Linkssystem mit $G_1 = 10$, $K_2 = 10$ und $K_1 = 3$ erhält man also 19 448 Unbekannte.

Nach Satz 2-j, Seite 74 sind mit Θ nach Beziehung (3.7), Seite 101 für alle Linkssysteme mit $K_1 = 3$ und den Wertepaaren

$$\begin{aligned} G_1 &\in \{1, 2, \dots, 10\} \\ K_2 &\in \{1, 2, \dots, 10\} \end{aligned}$$

die Anzahl der Unbekannten ebenfalls bekannt. Zum Beispiel für das Linkssystem mit $G_1 = 3$ und $K_2 = 2$ erhält man

$$1 + \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^n \mathfrak{J}_{n,m} = 71,$$

d.h. 71 Unbekannte.

4. Die Kennzeichnung und die Ermittlung der charakteristischen Zustandsmuster von zweistufigen Linkssystemen bei zufälliger Auswahl eines freien Ausgangs eines Koppelvielfachs der ersten Stufe und mit der Betriebsart " Mischwahl ".

4.1 Vorbemerkungen

Die systematisch bedingte Gleichheit von Zustandswahrscheinlichkeiten, hervorgerufen durch den gleichmäßigen Aufbau der hier beschriebenen Linkssysteme, führte zu der Definition 2-F, Seite 43, der Definition der äquivalenten Matrizen. Die in Abschnitt 2.4.1, Seite 41 definierten äquivalenten Matrizen sind durch Zeilenvertauschung ineinander überführbar, siehe Satz 2-a, Seite 47.

Als Vertreter einer Äquivalenzklasse (ch. Matrix) wurde diejenige Zustandsmatrix gewählt, die die kleinste Zustandsnummer NRZ hat, siehe Definition 2-G, Seite 46. Die Bedingung, kleinste Zustandsnummer NRZ, ist gleichbedeutend mit der Bedingung (2.10), Seite 48 für die ch. Vektoren \vec{C} .

Die Zeilenvertauschung bei den Zustandsmatrizen S (gleich Elementvertauschung bei den Zustandsvektoren \vec{S} , siehe Seite 48) führt zu der im Abschnitt 2, Seite 30 beschriebenen Reduktion der Unbekannten.

Bei geordneter Absuche der Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe 1 ist die Reduktion der Unbekannten nur durch Zeilenvertauschung in der Zustandsmatrix S möglich. Die durch Zeilenvertauschung reduzierte Menge der Zustände, d.h. die allein mögliche Reduktion bei " geordneter Absuche ", wurde bereits auf Seite 68 mit $\Omega^{(g)}$ bezeichnet. Die ch. Vektoren der Menge $\Omega^{(g)}$ werden jetzt dementsprechend mit $\vec{C}^{(g)}$ bezeichnet und die dazugehörenden ch. Matrizen mit $SC^{(g)}$.

Die Zeilenvertauschung ist jedoch vom Absuchverfahren unabhängig, siehe Definition 2-F, Seite 43. Die in Definition 2-A, Seite 31 eingeführte Zustandsmatrix S ist ebenfalls unabhängig vom Absuchverfahren daraus folgt:

Die in Abschnitt 2, Seite 30 beschriebene Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Zeilenvertauschung ist auch bei dem Absuchverfahren

- zufällige Auswahl eines freien Ausgangs eines Koppelvielfachs von Stufe 1

möglich, und es gilt: man kann jetzt als Grundlage für die weiteren Betrachtungen von der Menge $\Omega^{(g)}$, der Menge der ch. Zustände bei " geordneter Absuche ", ausgehen. Die Menge $\Omega^{(g)}$ der Zustände $\vec{C}^{(g)}$ ist in Teilmengen $\varphi_{n,m}$ geordnet, siehe Definition 2-K, Seite 68.

Die Frage, die jetzt zu stellen ist, lautet: Gibt es bei dem Absuchverfahren

" zufällige Auswahl "

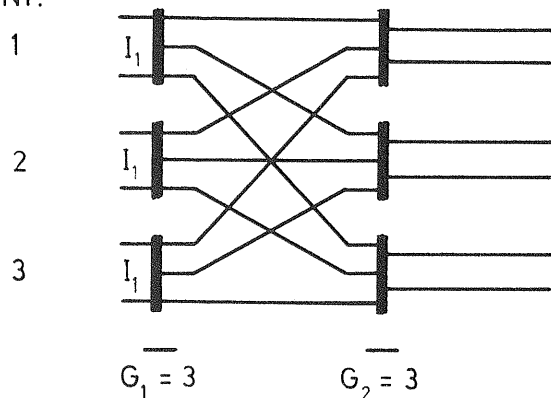
noch weitere Reduktionsmöglichkeiten, d.h.: Wenn $\Omega^{(z)}$ die Menge der ch. Zustände $\vec{C}^{(z)}$ (bzw. Zustandsmatrizen $SC^{(z)}$) bei " zufälliger Auswahl " ist, gilt dann die Behauptung:

$$\Omega^{(z)} \subset \Omega^{(g)}, \quad \Omega^{(g)} \neq \Omega^{(z)} ? \quad (4.1)$$

Die Behauptung (4.1) wird im folgenden Abschnitt an Hand eines Beispiels bewiesen.

4.2 Äquivalente Zustandsmuster durch Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix S

Koppel-
vielfach-
Nr.



Bei dem bereits bekannten zweistufigen Linksyst. siehe Beispiel 20, Seite 64, gibt es bei dem Absuchverfahren " geordnetes Absuchen " u.a. die in Tabelle 4.2-1, Seite 105 angegebenen ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$, siehe auch Anhang A5, Seite 322.

lfd.Nr.	$\vec{c}^{(g)}$	SC^*	S
1	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$
2	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$
3	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$
4	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$
5	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$
6	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$
7	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{B}$

Tabelle 4.2-1

Die in der obigen Tabelle 4.2-1 angegebenen ch. Vektoren sind die möglichen ch. Zustände der Menge $\varphi_{n,m}$ mit $n = 1$, d.h. einem belegten Koppelvielfach in der Stufe 1 und der Eigenschaft $m = 1$, siehe Definition 2-K, Seite 68. In den beiden anderen Koppelvielfachen der Stufe 1 sind keine Belegungen vorhanden.

Jedes der sieben Zustandsmuster existiert mit einer Zustandsmuster-Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
 & p (\text{Muster 1}) \\
 & p (\text{Muster 2}) \\
 & \quad \vdots \\
 & p (\text{Muster 7}).
 \end{aligned}$$

Bei " geordneter Absuche " haben die Zustandsmuster 1,2 und 4 (d.h. im betreffenden Koppelvielfach der Stufe 1 ist der erste, bzw.

zweite, bzw dritte Ausgang belegt) prinzipiell verschiedene Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeiten. Bei " zufälliger Auswahl " ist es jedoch unerheblich, welcher Ausgang des betrachteten Koppelvielfachs von Stufe 1 belegt ist, und man kommt zu der trivialen Schlußfolgerung

$$p(\text{Muster 1}) = p(\text{Muster 2}) = p(\text{Muster 4}).$$

In dem speziellen Fall " keine Belegungen in den Koppelvielfachen 2 und 3 von Stufe 1 " kommt es, bei " zufälliger Auswahl ", nur auf die Summe

$$\sum_{j=1}^{K_1} s_{1,j}$$

an, mit anderen Worten, auf die Zahl der Belegungen im ersten Koppelvielfach der Stufe 1. Im obigen Beispiel haben also auch die Muster 3,5 und 6 der Tabelle 4.2-1, Seite 105, unter sich die gleiche Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeit.

Man kann also im Fall " zufälliger Auswahl " die Menge $\Omega^{(g)}$, d.h. die Menge der ch. Muster bei " geordneter Absuche ", nochmals in Klassen gleicher Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeiten unterteilen.

Die in der Tabelle 4.2-1, Seite 105 angegebenen 7 verschiedenen Zustandsmuster kann man also einteilen in drei Klassen von Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeiten:

Klasse	lfd.Nr. der Muster in der Tabelle 4.2-1 Seite 105
1	1 , 2 , 4
2	3 , 5 , 6
3	7 .

Betrachtet man die Zustandsmatrizen der Klasse 1, d.h. die Matrizen 1,2 und 4

$$\begin{matrix} & 1 & & 2 & & 4 \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| & & \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| & & \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| , \end{matrix}$$

so folgt: Die Zustandsmatrizen 1,2 und 4 sind durch Spaltenvertauschung ineinander überführbar. Das gleiche gilt für die Zustandsmatrizen 3,5 und 6.

In diesem Abschnitt wurden bisher einfachheitshalber nur Zustandsmatrizen mit Belegungen in der ersten Zeile betrachtet, d.h. Belegungen im Koppelvielfach 1 von Stufe 1.

Der eben geschilderte Sachverhalt bei "zufälliger Auswahl":

"Zustandsmatrizen aus der Menge $\Omega^{(g)}$ mit gleicher Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeit sind durch Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix S ineinander überführbar",

gilt jedoch allgemein. Dies ist damit zu begründen, daß die angenommene gleiche Belastung (Angebot) je Koppelvielfach von Stufe 1 und das Absuchverfahren "zufällige Auswahl" die gleiche Belastung je Koppelvielfach von Stufe 2 zur Folge haben.

Damit ist auch die Behauptung (4.1), Seite 104 bewiesen, denn bei "zufälliger Auswahl" gibt es zwei Reduktionsmöglichkeiten:

1. Zeilenvertauschung bei den Zustandsmatrizen S und
2. Spaltenvertauschung bei den Zustandsmatrizen S.

Die Definition 2-F, Seite 43 muß jetzt dementsprechend erweitert werden.

Definition 4-A: Zustandsmatrizen S, die durch Zeilenvertauschung und/oder Spaltenvertauschung ineinander überführbar sind, werden als äquivalente Matrizen bezeichnet /9,10,11,22/. Äquivalente Matrizen gehören zu ein und derselben Klasse gleicher Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeit. Die Klassen gleicher Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeiten werden deshalb als Äquivalenzklassen bezeichnet.

Im vorangegangenen Beispiel (siehe Tabelle 4.2-1, Seite 105) sind die Zustandsmatrizen 1,2 und 4 äquivalente Zustandsmatrizen und gehören zu einer Äquivalenzklasse.

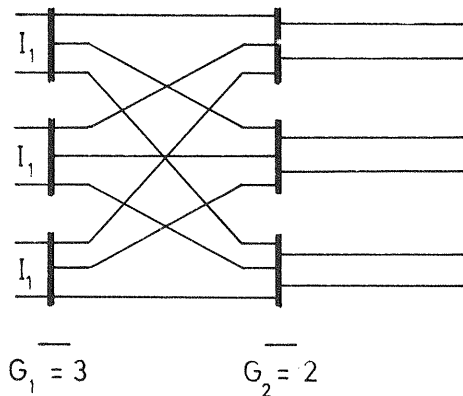
Der Satz 2-a, Seite 47 muß jetzt entsprechend der Definition 4-A ebenfalls erweitert werden. Ausgegangen wird von der Menge der er-

laubten Zustandsmuster, siehe Seite 36. Die Anzahl der ch. Zustände bei "zufälliger Auswahl" werde mit $NC^{(z)}$ bezeichnet.

Satz 4-a: Sei S eine ch. Matrix $SC_{\beta}^{(z)}$. Es sind dann alle Zustandsmatrizen S_{γ} , die durch Zeilenvertauschung und/oder Spaltenvertauschung aus $SC_{\beta}^{(z)}$ hervorgehen, in Bezug auf $SC_{\beta}^{(z)}$ äquivalente Matrizen. Dabei gilt: $\alpha \in \{1, 2, \dots, NE\}$. Für die Äquivalenzklassen β gilt: $\beta \in \{1, 2, \dots, NC^{(z)}\}$.

Zunächst ein weiteres Beispiel.

Beispiel 30:



Betrachtet wird das bereits bekannte Linksystem. Ausgegangen wird von der Teilmenge $\varphi_{n,m}$ der ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$. Entsprechend der Tabelle 2.814-1, Seite 82 sind die ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ gegeben. Von diesen ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ werden jetzt jene Vektoren betrachtet, die aus den allgemeinen Zustands-

vektoren

$$\vec{T} = \{ 2 \ 1 \ 1 \} = \vec{TK}, \quad \vec{T} = \{ 1 \ 2 \ 1 \} \quad \text{und} \quad \vec{T} = \{ 1 \ 1 \ 2 \}$$

hervorgehen. Alle Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ der Tabelle 2.814-1, Seite 82 haben $n = 3$ von Null verschiedene Elemente c_i , mit anderen Worten: die Partitionen haben die Länge $n = 3$ (Länge n : siehe Seite 65, Satz 2-g). Im Fall der "zufälligen Absuche" sind innerhalb dieser Menge jedoch noch weitere Matrizen die zueinander äquivalent sind, d.h. sie können durch Spaltenvertauschung ineinander überführt werden.

Für die nach Tabelle 2.814-1, Seite 82 gegebenen Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ sind in der Tabelle 4.2-2, Seite 109 die Zustandsmatrizen S^* und S angegeben.

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 3$
	$\bar{T}_{\varepsilon=1} = \{2 \ 1 \ 1\}$	$\bar{T}_{\varepsilon=2} = \{1 \ 2 \ 1\}$	$\bar{T}_{\varepsilon=3} = \{1 \ 1 \ 2\}$
	$\bar{C}_{\varepsilon,\eta}^{(g)} \quad S_{\varepsilon,\eta}^* \quad S_{\varepsilon,\eta}$	$\bar{C}_{\varepsilon,\eta}^{(g)} \quad S_{\varepsilon,\eta}^* \quad S_{\varepsilon,\eta}$	$\bar{C}_{\varepsilon,\eta}^{(g)} \quad S_{\varepsilon,\eta}^* \quad S_{\varepsilon,\eta}$
$\eta=1$	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$
$\eta=2$	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$
$\eta=3$	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix} \parallel \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$

Tabelle 4.2 - 2

NT_{γ} allgemeine Zustandsvektoren \vec{T} , siehe Beziehung (2.17) Seite 63. Aus dem am vorangegangenen Beispiel geschilderten Sachverhalt kann man den für die weiteren Betrachtungen wichtigen Satz ableiten.

Satz 4-b: Betrachtet werden Matrizen $SC^{(g)}$, die aus den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T}_{ϵ} und $\vec{T}_{\epsilon+w}$ hervorgehen. Darunter seien solche Matrizen, die durch Spaltenvertauschung ineinander überführt werden können und deshalb zueinander äquivalent sind. Dann gibt es in allen NT_{γ} allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} , die aus \vec{T}_{ϵ} hervorgehen, wie \vec{T}_{ϵ} und $\vec{T}_{\epsilon+w}$, äquivalente Matrizen, die durch Spaltenvertauschung ineinander überführt werden können.

Es gelten hier ebenfalls die Bemerkungen von Abschnitt 2.4.1, Seite 43, d.h. welches Muster einer Äquivalenzklasse als Vertreter dieser Klasse gewählt wird ist zunächst unerheblich. Für einen Algorithmus zur Ermittlung des Vertreters einer Klasse ist es jedoch zweckmäßig, sich auf ein ganz bestimmtes Muster mit entsprechenden Eigenschaften festzulegen. Das ist wichtig bei der Aufstellung der Zustandsgleichungen mit dem BL - Algorithmus und hier insbesondere bei der Ermittlung der Übergänge zwischen verschiedenen Zustandsmustern, siehe /11/ und Beispiel 9, Seite 44.

4.3 Die Zustandmatrix Z^* und der Zustandsvektor \vec{Z}

Die Grundlage für die einfache Ermittlung der ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$, entsprechend Abschnitt 2, Seite 30, war die Einführung der Matrix S^* , siehe Definition 2-B, Seite 32. Um die Zeilenvertauschung einfach zu realisieren und damit auch den Vertreter einer Äquivalenzklasse einfach zu ermitteln, wurde, ausgehend von der Matrix S^* , der Zustandsvektor \vec{S} eingeführt, siehe Abschnitt 2.2, Seite 35.

Zunächst liegt der Gedanke nahe, bei der Spaltenvertauschung analog zu verfahren. Das ist jedoch, wie das folgende Beispiel 31 zeigt, nicht möglich. Zunächst werden eine der Matrix S^* (siehe Definition 2-B, Seite 32) entsprechende Matrix Z^* und ein zu \vec{S} (siehe Defini-

tion 2-C, Seite 35) entsprechender Vektor \vec{Z} eingeführt.

Definition 4-B: Die nichtbinäre Zustandsmatrix Z^* von der Dimension $G_1 \cdot K_1$ kennzeichnet ebenfalls den Belegungszustand der $G_1 \cdot K_1$ Ausgänge der Stufe 1. Es ist

$z_{i,j}^x = 0$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 nicht belegt ist und
 $z_{i,j}^x = 2^{i-1}$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 belegt ist, mit

$i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$ und
 $j \in \{1, 2, \dots, K_1\}$.

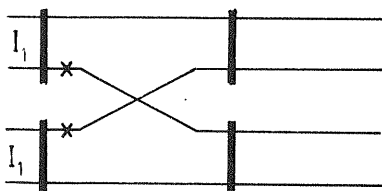
$$Z^* = \begin{pmatrix} z_{1,1}^* & z_{1,2}^* & \dots & z_{1,j}^* & \dots & z_{1,K_1}^* \\ z_{2,1}^* & z_{2,2}^* & \dots & z_{2,j}^* & \dots & z_{2,K_1}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{i,1}^* & z_{i,2}^* & \dots & z_{i,j}^* & \dots & z_{i,K_1}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ z_{G_1,1}^* & z_{G_1,2}^* & \dots & z_{G_1,j}^* & \dots & z_{G_1,K_1}^* \end{pmatrix}$$

Definition 4-C: Es sei z_j die Spaltensumme der Spalte j der Zustandsmatrix Z^* . Die Zahlenfolge der Spaltensummen $z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_{K_1}$ wird als Zustandsvektor

$$\vec{Z} = \{ z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_{K_1} \}$$

bezeichnet, mit $j \in \{1, 2, \dots, K_1\}$ und
 $z_j \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{G_1} - 1\}$.

Beispiel 31:



Es wird das eingetragene Belegungsmuster betrachtet.

Für das eingetragene Belegungsmuster folgt:

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \implies S^* = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \implies \vec{S} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} .$$

Der angegebene Zustand ist bei "geordneter Absuche" ein ch. Zustand, denn es gilt für den Vektor \vec{S} die Bedingung (2.10) Seite 48. Zur selben Äquivalenzklasse gehört auch der Zustand mit der Matrix

$$S_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Dieser Zustand S_1 entsteht durch Elementvertauschung beim Zustandsvektor \vec{S} , bzw. Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix S . Weitere Muster in der oben genannten Äquivalenzklasse gibt es nicht, siehe Elemente des Vektors \vec{S} .

Werden jetzt entsprechend der Definition 4-B, Seite 112 an Stelle der Spalten die Zeilen von S gewichtet, so erhält man aus der Matrix

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{die Matrix} \quad Z^* = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} 2^0 \\ 2^1 \end{matrix}$$

und aus Z^* den Zustandsvektor $\vec{Z} = \begin{Bmatrix} 2 & 1 \end{Bmatrix}$.

Aus der Elementvertauschung beim Zustandsvektor \vec{Z} (gleichbedeutend mit: Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix S) folgt der Vektor

$$\vec{Z}' = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \end{Bmatrix} .$$

Aus \vec{Z}' folgt die Matrix Z^* und daraus die Matrix S_2 .

$$Z^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \implies S_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Der Vergleich der Matrizen S_1 und S_2 zeigt: $S_1 \equiv S_2$. Aus diesem einfachen Beispiel kann man den folgenden Sachverhalt entnehmen:

Satz 4-c: Bei der Verwendung der Zustandsvektoren \vec{S} und \vec{Z} zur Reduktion der Zustände kann, unter Umständen, ein und der-

selbe Zustand durch Spaltenvertauschung, wie auch durch Zeilenvertauschung, eliminiert werden.

Für ein Zustandsmuster, für das dieser Satz 4-c gilt, ist die Mächtigkeit der Äquivalenzklasse des betrachteten Zustandsmusters nur durch die Anzahl der Permutationen der Elemente eines Zustandsvektors, nämlich \vec{S} oder \vec{Z} , bestimmt.

Es gibt aber auch andere Äquivalenzklassen, deren Mächtigkeit einer Klasse gleich dem Produkt aus "Anzahl der Permutationen durch Zeilenvertauschung und Anzahl der Permutationen durch Spaltenvertauschung" ist. Das ist z.B. dann der Fall, wenn alle K_i Elemente tK_i des allgemeinen Zustandsvektors \vec{TK} verschieden sind (die Null ausgeschlossen). Die aus diesem \vec{TK} hervorgehenden nicht äquivalenten Matrizen SC haben dann die eben angeführte Mächtigkeit.

Aus den obigen Ausführungen folgt: Führt man bei der Ermittlung der Vertreter einer Äquivalenzklasse nach Definition 4-A, Seite 107 zunächst die Zeilenvertauschung durch und anschließend die Spaltenvertauschung, dann kann allein aus der Sequenz der Elemente der Vektoren \vec{S} und \vec{Z} die Mächtigkeit der Äquivalenzklassen nicht immer eindeutig bestimmt werden. Die Bestimmung der Äquivalenzklassen durch Spaltenvertauschung kann also, bei Verwendung des Vektors \vec{Z} , nicht in ebenso einfacher Art und Weise durchgeführt werden, wie mit Hilfe der Zeilenvertauschung durch Verwendung des Vektors \vec{S} .

4.4 Die Teilmengen der ch. Vektoren von $\Omega^{(g)}$, die aus den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK} entstehen.

Bekannt ist, daß in der Menge $\Omega^{(g)}$, d.h. der Menge der ch. Matrizen bei "geordneter Absuche" noch äquivalente Zustände enthalten sind, welche durch Spaltenvertauschung auseinander hervorgehen, siehe Abschnitt 4.2, Seite 106.

Die Frage ist jetzt: Wie kann man diese zusätzliche Reduktion der Zustandsmuster, d.h. die Reduktion durch Spaltenvertauschung, durchführen? Dieses Problem soll jetzt behandelt werden.

Betrachtet man nun Teilmengen $\varphi_{n,m}$ von ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ der Menge $\Omega^{(g)}$, die aus den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK} hervorgehen, und betrachtet man desweiteren jene ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$, welche aus den durch Permutierung der Elemente von \vec{TK} , den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} , hervorgehen, so folgt:

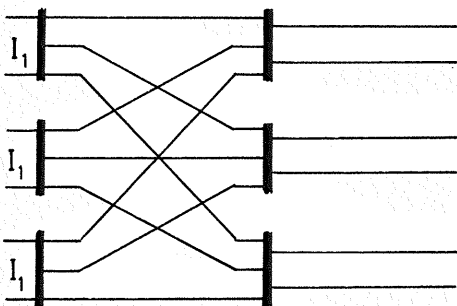
Für die durch Spaltenvertauschung zueinander äquivalenten Matrizen innerhalb der Menge $\varphi_{n,m}$ gilt der Satz 4-a, Seite 108.

Ausgehend vom Satz 4-a erhält man den Satz 4-d, der anschließend bewiesen wird, siehe Beispiel 32.

Satz 4-d: Zu jedem Zustandsvektor $\vec{C}^{(g)}$ der Teilmenge $\varphi_{n,m}$, der aus dem durch Permutierung der Elemente von $\vec{T}_1 = \vec{TK}$ entstehenden allgemeinen Zustandsvektor \vec{T}_ε hervorgeht, gibt es mindestens einen durch Spaltenvertauschung äquivalenten Zustandsvektor innerhalb der Teilmenge der ch. Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$. Die Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ sind die ch. Vektoren bei "geordneter Absuche", die aus dem allgemeinen Zustandsvektor $\vec{T}_1 = \vec{TK}$ hervorgehen. Darin ist η die lfd.Nr. der ch. Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$. Für η gilt: $\eta \in \{1, 2, \dots, NP\}$. NP ist die Anzahl der ch. Vektoren (Partitionen), die aus \vec{TK} hervorgehen. Sie besitzen n von Null verschiedene Elemente $c_{1,\eta,i}$, siehe Satz 2-g, Seite 66.

Der Satz 4-d soll an Hand des Beispiels 32 erläutert (für die speziellen Belegungsmuster bewiesen) werden.

Beispiel 32:



Es wird derselbe allgemeine Zustandsvektor \vec{TK} betrachtet wie im Beispiel 30, Seite 108,

$$\vec{TK} = \{ 2 \quad 1 \quad 1 \} .$$

Ausgehend von \overrightarrow{TK} erhält man die folgenden allgemeinen Zustandsvektoren \overrightarrow{T} :

$$\overrightarrow{TK} = \{ 2 \ 1 \ 1 \}, \quad \overrightarrow{T} = \{ 1 \ 2 \ 1 \}, \quad \overrightarrow{T} = \{ 1 \ 1 \ 2 \} .$$

Für diese allgemeinen Zustandsvektoren \overrightarrow{T} ist nach Tabelle 4.2-2, Seite 109 die Teilmenge $\varphi_{n,m}$ der ch. Vektoren $\overrightarrow{C}^{(g)}$ - mit $n = 3$ - bekannt. Wie auf Seite 111 erwähnt, ist es zunächst unerheblich, welche Zustandsmatrix (Zustandsvektor) einer Äquivalenzklasse als Vertreter (ch. Zustand) dieser Klasse gewählt wird. Durch Permutierung der Elemente von $\overrightarrow{C}^{(g)}$ in Spalte $\varepsilon = 2$ und $\varepsilon = 3$ der Tabelle 4.2-2, Seite 109 erhält man z.B. die folgenden Vektoren $\overrightarrow{S}_{\varepsilon,\eta}$ als Vertreter der Äquivalenzklassen bei "geordneter Absuche", siehe untenstehende Tabelle 4.4-1.

	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 3$
	$\overrightarrow{T}_1 = \{ 2 \ 1 \ 1 \}$	$\overrightarrow{T}_2 = \{ 1 \ 2 \ 1 \}$	$\overrightarrow{T}_3 = \{ 1 \ 1 \ 2 \}$
	$\overrightarrow{S}_{1,\eta} = \overrightarrow{C}_{1,\eta}^{(g)}$	$\overrightarrow{S}_{2,\eta}$	$\overrightarrow{S}_{3,\eta}$
$\eta = 1$	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{Bmatrix}$
$\eta = 2$	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$
$\eta = 3$	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{Bmatrix}$

Tabelle 4.4-1

Die zu den Vektoren $\overrightarrow{S}_{1,\eta}$, entsprechend der obigen Tabelle, gehörenden Zustandsmatrizen $S_{\varepsilon,\eta}^*$ und $S_{\varepsilon,\eta}$ sind in der Tabelle 4.4-2, Seite 117 angegeben. Aus der Tabelle 4.4-2 folgt:

Vertauscht man in den Matrizen $S_{3,\eta}$ die Spalten 2 und 3, dann erhält man die Matrizen $S_{2,\eta}$. Vertauscht man desweiteren in den Matrizen $S_{2,\eta}$ die Spalten 1 und 2, dann erhält man die Matrizen $S_{1,\eta}$. Man kann also die Matrizen für $\varepsilon = 2$ und $\varepsilon = 3$ (allgemein für

$\varepsilon \in \{2, 3, \dots, K_1\}$) durch Spaltenvertauschung auf die Matrizen mit $\varepsilon = 1$ zurückführen. Bei den Matrizen $S_{1,\eta}$ ($\varepsilon=1$) wurde jedoch nichts geändert, siehe Tabelle 4.2-2, Seite 109 und Tabelle 4.4-1, Seite 116.

Damit ist für die im Beispiel 32, Seite 115 betrachteten Zustände der Satz 4-d, Seite 115 bewiesen.

η	$\varepsilon = 1$		$\varepsilon = 2$		$\varepsilon = 3$	
	$\vec{T} = \{2 \ 1 \ 1\}$		$\vec{T} = \{1 \ 2 \ 1\}$		$\vec{T} = \{1 \ 1 \ 2\}$	
\downarrow	$S_{1,\eta}^*$	$S_{1,\eta}$	$S_{2,\eta}^*$	$S_{2,\eta}$	$S_{3,\eta}^*$	$S_{3,\eta}$
1	$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Tabelle 4.4-2

Aus dem Satz 4-d, Seite 115 kann der folgende Satz abgeleitet werden.

Satz 4-e: Bei "zufälliger Auswahl" benötigt man als Vertreter der in Definition 4-A, Seite 107 definierten Äquivalenzklassen höchstens jene ch. Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$, die aus den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK} hervorgehen.

Anmerkung: ε ist die lfd. Nr. der Vektoren \vec{T} , die aus dem betrachteten Vektor \vec{TK} durch die Permutierung der Elemente des Vektors \vec{TK} entstehen, siehe Seite 81 und Satz 4-d, Seite 115. Für $\varepsilon = 1$ gilt: $\vec{T}_1 = \vec{TK}$.

Frage: Gibt es in der Menge der ch. Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ noch weitere Vektoren, die zueinander äquivalent sind, d.h. gibt es bei den Matrizen $SC_{1,\eta}^{(g)}$, die zu den Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ gehören, noch weitere Matrizen, die durch Spaltenvertauschung ineinander überführt werden können?

Im folgenden wird diese Frage beantwortet.

Aus der Tabelle 4.4-2 Seite 117 werden die Matrizen $S_{1,2}$ und $S_{1,3}$, die aus $\vec{T}_1 = \vec{TK} = \{2 \ 1 \ 1\}$ hervorgehen, betrachtet.

$$S_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$S_{1,3} = \begin{matrix} \text{Zeile:} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \text{Spalte:} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} S'_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Matrix $S'_{1,3}$ erhält man dadurch, indem man Zeile 1 und Zeile 2 in der Matrix $S_{1,3}$ vertauscht. $S'_{1,3}$ gehört damit zur gleichen Äquivalenzklasse wie Matrix $S_{1,3}$ (wähle ein anderes Muster ein und derselben Äquivalenzklasse als Vertreter dieser Äquivalenzklasse). Vertauscht man in der Matrix $S'_{1,3}$ die Spalten 2 und 3, dann erhält man die Matrix $S_{1,2}$. Auch die Matrizen $S_{1,2}$ und $S_{1,3}$ gehören zu derselben Äquivalenzklasse! (siehe Definition 4-A, Seite 101).

Man kommt demnach zu der Feststellung: In den aus \vec{TK} hervorgehenden Matrizen $SC_{1,\eta}^{(g)}$ können noch weitere Matrizen enthalten sein, die durch Spaltenvertauschung ineinander überführt werden können. Um diese ebenfalls zueinander äquivalenten Zustandsmatrizen beschreiben zu können, müssen noch zwei weitere Zustandsvektoren eingeführt werden.

4.5 Die allgemeinen Zustandsvektoren $\vec{\tau}$ und $\vec{\tau K}$

Analog zu den Definitionen der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} und \vec{TK} (Elemente t_j von \vec{T} sind Spaltensummen von S) auf Seite 59 und Seite 60, werden jetzt für die Zeilensummen der Zustandsmatrix S die allgemeinen Zustandsvektoren $\vec{\tau}$ und $\vec{\tau K}$ eingeführt.

Definition 4-D: Der Vektor

$$\vec{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_i \\ \vdots \\ \tau_n \end{Bmatrix}$$

mit $n \in \{1, 2, \dots, G_1\}$

kennzeichnet einen allgemeinen Belegungszustand des Linksystems. Die Elemente τ_i sind gleich den Zeilensummen der Matrix S , d.h. es gilt

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{K_1} s_{i,j} \quad ,$$

mit $\tau_i \in \{1, 2, \dots, K_1\}$ und $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Die Elemente τ_i von $\vec{\tau}$ bilden "Permutationen mit Wiederholungen".

Definition 4-E: Der allgemeine Zustandsvektor

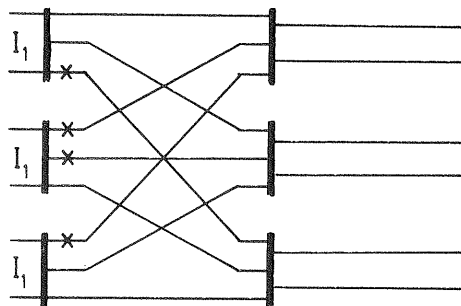
$$\vec{\tau K} = \begin{Bmatrix} \tau K_1 \\ \tau K_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tau K_i \\ \vdots \\ \tau K_n \end{Bmatrix}$$

ist gleich jenem Vektor $\vec{\tau}$, dessen Elemente τ_i "Kombinationen mit Wiederholungen" bilden. Es soll für die Elemente τK_i die Bedingung

$$\tau K_1 \geq \tau K_2 \geq \dots \geq \tau K_i \geq \dots \geq \tau K_n$$

gelten. Außerdem gilt: $\tau_{K_i} \in \{1, 2, \dots, K_1\}$ und $n \in \{1, 2, \dots, G_1\}$.

Beispiel 33:



Es wird das Belegungsmuster entsprechend dem nebenstehenden Bild angenommen. Der allgemeine Zustandsvektor $\vec{\tau}$ für dieses Belegungsmuster ist unten angegeben.

x: Leitung belegt

Zustandsmatrix S

Zeilensummen von S

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

4.6 Die äquivalenten Zustandsmatrizen $SC_{1,\eta}^{(g)}$

Zu den ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ gehören die ch. Matrizen $SC^{(g)}$, siehe Satz 2-b, Seite 47. Dementsprechend gehören zu den ch. Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ die ch. Matrizen $SC_{1,\eta}^{(g)}$.

Diese ch. Matrizen $SC_{1,\eta}^{(g)}$ werden im folgenden untersucht mit dem Ziel, im Fall "zufällige Auswahl" die Zahl der Unbekannten des zu lösenden Gleichungssystems weiter zu reduzieren.

Die Bedingungen für die Existenz von durch Spaltenvertauschung zueinander äquivalenten Matrizen $SC_{1,\eta}^{(g)}$, die aus dem allgemeinen Zustandsvektor $\vec{\tau K}$ hervorgehen, sind:

Satz 4-f:

I: Die Sequenzen der Elemente τ_i der allgemeinen Zustandsvektoren $\vec{\tau}$ von durch Spaltenvertauschung äquivalenten Zustandsmatrizen sind "Permutationen mit Wiederholungen" der Elemente von ein

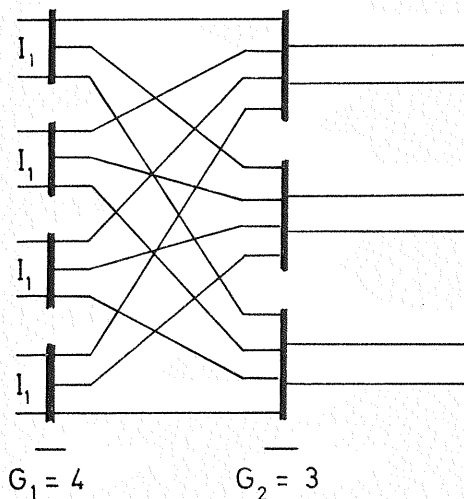
und demselben allgemeinen Zustandsvektor \vec{TK} .

II: In den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK} muß mindestens eine Wiederholung eines Elementes auftreten. Mit anderen Worten: mindestens 2 Elemente tK_j müssen gleich sein ($tK_j = tK_{j+1}$). Begründung: Nur dann ändert sich nichts an der geordneten Zahlenfolge der Elemente von \vec{TK}_γ im Fall einer Spaltenvertauschung in der dazugehörigen Matrix $SC_{1,\eta}^{(g)}$. Das ist gleichbedeutend mit der Bedingung (2.18), Seite 65 für die zu \vec{TK} gehörenden Vektoren \vec{C}

$$\sum_{i=1}^n c_i = \text{konstant.}$$

III: Die Anzahl NV_η der verschiedenen Elemente $c_{1,\eta,i}^{(g)}$, der ch. Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$, muß bei durch Spaltenvertauschung äquivalenten Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ übereinstimmen, siehe folgendes Beispiel.

Beispiel 34:



Für den allgemeinen Zustandsvektor $\vec{TK} = \{2 \ 2 \ 2\}$ erhält man die entsprechend Tabelle 4.6-1, Seite 122 angegebenen $NP = 7$ Zustandsvektoren (Partitionen) $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$.

In der Tabelle 4.6-1 (siehe nächste Seite) wurden die 7 Zustandsvektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ in Klassen mit gleiche Zustandsvektoren \vec{TK} (Bedingung I von Satz 4-f, Seite 120) geordnet. Aus dem im obigen Beispiel gegebenen $\vec{TK} = \{2 \ 2 \ 2\}$ sieht man unmittelbar, daß die Bedingung II von Satz 4-f erfüllt ist.

Die Anzahl NV_η , die Zahl der verschiedenen Elemente von $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$, ist ebenfalls in der Tabelle 4.6-1 angegeben. Desweiteren folgt aus der Tabelle 4.6-1: Nur bei der Klasse der Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ mit dem allge-

η	$\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$	NV_η	$SC_{1,\eta}^{*(g)}$	$SC_{1,\eta}^{(g)}$	$\vec{\tau}$	$\vec{\tau K}$
1	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	4	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$
2	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	2	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$
3	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	4	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	
4	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$	4	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	
5	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$	2	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	
6	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$	4	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	
7	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$	2	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$	

Tabelle 4.6-1

meinen Zustandsvektor

$$\vec{\tau K} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

können durch Spaltenvertauschung äquivalente Zustände auftreten, denn in der anderen Klasse, d.h.

$$\vec{\tau K} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

gibt es nur einen Vektor $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$.

Die Bedingung III von Satz 4-f, Seite 120 führt zu zwei Klassen von äquivalenten Zuständen:

$$\text{Klasse 1 mit } NV_{\eta} = 2: \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und Klasse 2 mit } NV_{\eta} = 4: \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Zu der oben genannten Klasse 1, der ch. Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ mit $NV_{\eta} = 2$ verschiedenen Elementen c_i , werden nochmals die dazugehörigen Zustandsmatrizen betrachtet.

lfd.Nr. w	$\vec{C}_w^{(g)}$	$SC_w^{*(g)}$	$SC_w^{(g)}$
1	$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tabelle 4.6-2

Vertauscht man in der Matrix $SC_{w=2}^{(g)}$ die Spalten 1 und 2, so erhält man unmittelbar die Matrix $SC_{w=1}^{(g)}$, d.h. $SC_{w=1}^{(g)}$ und $SC_{w=2}^{(g)}$ sind durch Spaltenvertauschung zueinander äquivalent.

Bei der Zustandsmatrix $SC_{w=3}^{(g)}$ muß man zunächst die Zeilen 1 und 2 mit den Zeilen 3 und 4 vertauschen (wähle ein anderes Muster ein und derselben Äquivalenzklasse als Vertreter dieser Äquivalenzklasse). Man erhält dann die Matrix

$$S_{w=3}^{(g)'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Vertauscht man jetzt in $S_{w=3}^{(g)'}$ die Spalten 1 und 3, so erhält man wie-

derum die Matrix $SC_{w=1}^{(g)}$. Die in der Tabelle 4.6-2, Seite 123 angegebenen drei Matrizen $SC_w^{(g)}$ sind also durch Spaltenvertauschung zueinander äquivalent.

Bei den auf Seite 123 angegebenen Vektoren der Klasse 2, mit $NV=4$ verschiedenen Elementen, geht man analog zur dargestellten Klasse 1 vor.

Für das betrachtete Beispiel 34 Seite 121 folgt damit die Richtigkeit des Satzes 4-f von Seite 120.

Im Beispiel 34 bekommt man also 3 Matrizen $SC_{1,\eta}^{(g)}$, nämlich

$$\begin{array}{ccc}
 \eta = 1 & \eta = 2 & \eta = 3 \\
 SC_{1,1}^{(g)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & SC_{1,2}^{(g)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & SC_{1,3}^{(g)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},
 \end{array}$$

die alle den gleichen allgemeinen Zustandsvektor $\vec{TK} = \{ 2 \ 2 \ 2 \}$ haben und weder durch Zeilenvertauschung, noch durch Spaltenvertauschung ineinander überführt werden können. Die dazugehörigen Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ sind:

$$\vec{C}_{1,1}^{(g)} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{C}_{1,2}^{(g)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{C}_{1,3}^{(g)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus Satz 4-f, Seite 120, Teil II folgt der Satz 4-g.

Satz 4-g: Gibt es im allgemeinen Zustandsvektor \vec{TK} keine Elemente tK_j , für die gilt

$$tK_j = tK_{j+1},$$

dann gibt es in den NP Zustandsvektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$, die aus \vec{TK} hervorgehen, auch keine Matrizen $SC_{1,\eta}^{(g)}$, die durch Spaltenvertauschung zueinander äquivalent sind. Für η gilt: $\eta \in \{1, 2, \dots, NP\}$, siehe Seite 81.

4.7 Die ch. Vektoren $\vec{C}^{(z)}$ der Zustandsmuster bei "zufälliger Auswahl"

Nach Satz 4-e Seite 117 benötigt man bei "zufälliger Auswahl" als Vertreter einer Äquivalenzklasse höchstens die ch. Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$, welche aus den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK} hervorgehen.

Das "höchstens" in Satz 4-e ist mit Satz 4-f, Seite 120 bewiesen, denn aus Satz 4-f folgt, daß innerhalb der Menge der Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$, bzw. der dazugehörenden Matrizen $SC_{1,\eta}^{(g)}$, ebenfalls noch durch Spaltenvertauschung äquivalente Zustände enthalten sein können, siehe auch Satz 4-g, Seite 123.

Führt man diese eventuell zusätzliche Reduktion der Zustände nach Satz 4-f ebenfalls durch, so erhält man die kleinste mögliche Menge der ch. Zustandsmuster, d.h. jeweils nur einen Vertreter der in Definition 4-A, Seite 107 definierten Äquivalenzklasse.

Die Definition der ch. Zustände (ch. Vektoren $\vec{C}^{(z)}$) könnte bei "zufälliger Auswahl" dann wie folgt aussehen:

- Bedingung a) Die ch. Vektoren $\vec{C}^{(z)}$ sind Vektoren aus der Menge der Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$.
- Bedingung b) Gibt es in der Menge der Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ noch durch Spaltenvertauschung äquivalente Zustandsmatrizen (siehe Satz 4-f, Seite 120), dann wird aus einer äquivalenten Untermenge von Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ derjenige Zustand mit der kleinsten Zustandsnummer NRZ als ch. Vektor $\vec{C}^{(z)}$ gewählt.

Wie in Abschnitt 2.4.1, Seite 43 bereits angeführt, treten bei der Aufstellung der Zustandsgleichungen mit dem BL - Algorithmus (siehe Seite 29) notwendigerweise beliebige und damit auch nichtcharakteristische Zustandsmatrizen auf. Diese nichtcharakteristischen Matrizen müssen dann durch deren äquivalente ch. Matrizen ersetzt (transformiert) werden. Bei der obigen Bedingung a) hat man ein einfaches Kriterium zur Transformation: Für die Zustandsmatrix S mit dem allgemeinen Zustandsvektor $\vec{T} \neq \vec{TK}$ muß der ch. Vektor (Partition) $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ ermittelt werden. $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ geht aus dem zu \vec{T} gehörenden allgemeinen Zu-

standsvektor $\overrightarrow{\text{TK}}$ hervor, siehe Satz 4-d Seite 115.

Die Berücksichtigung der Bedingung b) von Seite 125, d.h. eine Transformation entsprechend Satz 4-f, Seite 120 ist jedoch äußerst schwierig, denn für die Reduktion nach Satz 4-f gibt es kein "einfaches" kombinatorisches Bildungsgesetz. Bei jeder Transformation müßten nämlich alle Vektoren $\overrightarrow{\text{C}}_{1,\eta}^{(g)}$ ermittelt werden, die aus dem Vektor $\overrightarrow{\text{TK}}$ entstehen.

Es wird deshalb die folgende Definition 4-F für die ch. Zustandsvektoren $\overrightarrow{\text{C}}^{(z)}$ eingeführt (nur die Bedingung a) von Seite 125 keine Reduktion nach Satz 4-f Seite 120). Es folgt:

Definition 4-F: Bei "zufälliger Auswahl" werden die Vektoren $\overrightarrow{\text{C}}_{1,\eta}^{(g)}$ als ch. Vektoren bezeichnet, d.h. es gilt:

$$\overrightarrow{\text{C}}_{\eta}^{(z)} = \overrightarrow{\text{C}}_{1,\eta}^{(g)} .$$

Die Vektoren $\overrightarrow{\text{C}}_{1,\eta}^{(g)}$ entstehen aus den allgemeinen Zustandsvektoren $\overrightarrow{\text{TK}}$, siehe Satz 4-d, Seite 115.

Die Anzahl NT_{γ} der Permutationen $\overrightarrow{\text{T}}_{\gamma,\epsilon}$ (allgemeine Zustandsvektoren), die aus dem allgemeinen Zustandsvektor $\overrightarrow{\text{TK}}_{\gamma}$ entstehen, ist durch die Beziehung (2.17), Seite 63 bestimmt. Die Mächtigkeit $M_{\gamma,\eta}^{(z)}$ des Vektors $\overrightarrow{\text{C}}_{\gamma,\eta}^{(z)}$ ist gleich dem Produkt aus der Mächtigkeit $M_{\gamma,\eta}^{(g)}$ des Vektors $\overrightarrow{\text{C}}_{\gamma,1,\eta}^{(g)}$ und NT_{γ} . Für $M_{\gamma,\eta}^{(g)}$ gilt die Gleichung (2.12), Seite 53. Der Index g bzw. Index z wurde hier zur Unterscheidung "geordnet - zufällig" angefügt. Es ist also:

$$M_{\gamma,\eta}^{(z)} = M_{\gamma,\eta}^{(g)} \cdot \text{NT}_{\gamma} , \quad (4.2)$$

mit: $\gamma \in \{1, 2, \dots, \text{NTK}\}$ und NTK nach Beziehung (2.16), Seite 63,

$\eta \in \{1, 2, \dots, \text{NP}_{\gamma}\}$ und NP_{γ} nach Seite 66,
 NT_{γ} nach Beziehung (2.17), Seite 63 und
 $M_{\gamma,\eta}^{(g)}$ nach Beziehung (2.12), Seite 53,
 $\Omega^{(z)}$ Menge der Vektoren $\overrightarrow{\text{C}}_{\eta}^{(z)}$.

Nach Abschnitt 2.73, Seite 62 kann die Sequenz der Elemente der Vektoren $\overrightarrow{\text{C}}_{1,\eta}^{(g)}$ als "Partition" interpretiert werden. Mit Hilfe der De-

Definition 4-F der vorhergehenden Seite gilt das gleiche für die Elemente der Vektoren $\vec{C}_\eta^{(z)}$. Bei "zufälliger Auswahl" braucht man aber nur diejenigen Partitionen ($\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$) zu bestimmen, die aus den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK} hervorgehen. Bei "geordneter Absuche" mußte man auch noch die Partitionen bestimmen, die aus den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} hervorgehen.

Die Sequenzen der Elemente der Vektoren \vec{T} sind die "Permutationen mit Wiederholungen" der Elemente von \vec{TK} . Die Beschränkung auf \vec{TK} bedeutet einen wesentlich geringeren Aufwand zur Ermittlung der ch. Vektoren bei "zufälliger Auswahl" gegenüber "geordneter Absuche". Diese Tatsache und die in Abschnitt 2.8, Seite 72 eingeführte Ordnungshierarchie für die zweistufigen Linkssysteme sind die wesentlichen Gründe für die Einführung der "Partitionen" in Abschnitt 2.7.3, Seite 62.

4.8 Anzahl der Partitionen für zweistufige Linkssysteme mit $K_1 = 3$ bei "zufälliger Auswahl"

Das Linkssystem mit $G_1 = 10$, $K_1 = 3$ und $K_2 = 10$ ist in Bild 3.1, Seite 100 dargestellt. Das Absuchverfahren sei jetzt "zufällige Auswahl".

Sowohl die in Abschnitt 2.7.4, Seite 67 eingeführte Ordnungsmatrix Φ als auch die Mächtigkeitenmatrix Ψ sind jetzt einfacher, da die Ordnung der ch. Vektoren innerhalb der Mengen $\varphi_{n,m}$ (siehe Abschnitt 2.8.1.4, Seite 80) nach Beziehung (2.34), Seite 81 hier entfällt. Die Begründung ist: es werden jetzt nur noch die allgemeinen Vektoren \vec{TK} benötigt.

Für das in Bild 3.1, Seite 100 dargestellte Linkssystem erhält man die Mächtigkeitenmatrix des Ranges Θ (siehe Definition 2-L, Seite 74) entsprechend der Beziehung (4.3), Seite 128.

Die Ordnungsmatrix Φ (siehe Definition 2-K, Seite 68) und die Mächtigkeitenmatrix Ψ (siehe Definition 2-M, Seite 78) sind im Anhang A6 für die Teilbereiche $m, n \in \{1, 2, 3\}$ dargestellt. Die angegebene Ordnungsmatrix Φ kann unmittelbar aus der im Anhang A5 Seite 322 angegebenen Matrix Φ ermittelt werden, indem man nur die Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ entnimmt. Die Mächtigkeiten in der Matrix Ψ aus Anhang A5 wer-

m →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_{m=1}^n \vartheta_{n,m}$
n ↓	1	3									3
	2	4	7								11
	3	1	13	13							27
	4		12	29	22						63
	5		4	36	53	34					127
	6		1	28	77	87	50				243
	7			12	78	137	132	70			419
	8			4	58	161	220	190	95		728
	9			1	28	149	281	328	262	125	1174
	10	Bereich II		12	108	296	444	465	350	161	1836

$$\sum_{n=1}^{10} \sum_{m=1}^n \vartheta_{n,m} = 4633$$

(4.3)

den noch entsprechend Beziehung (4.2), Seite 126 mit dem Faktor NT_Y multipliziert und sind ebenfalls in Anhang A6 Seite 332 dargestellt.

Mit der Mächtigkeitmatrix des Ranges Θ nach obiger Beziehung (4.3) und Satz 2-j, Seite 74 ist damit die Anzahl der Unbekannten für die Linkssysteme mit $K_1 = 3$ und

$$\begin{aligned} G_1 &\in \{1, 2, \dots, 10\} \\ \text{und} \quad K_2 &\in \{1, 2, \dots, 10\} \end{aligned}$$

ebenfalls bekannt. Z.B. für das Linkssystem mit $G_1 = 3$ und $K_2 = 2$ erhält man

$$1 + \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^n \vartheta_{n,m} = 1 + 3 + 4 + 9 + 1 + 13 = 31,$$

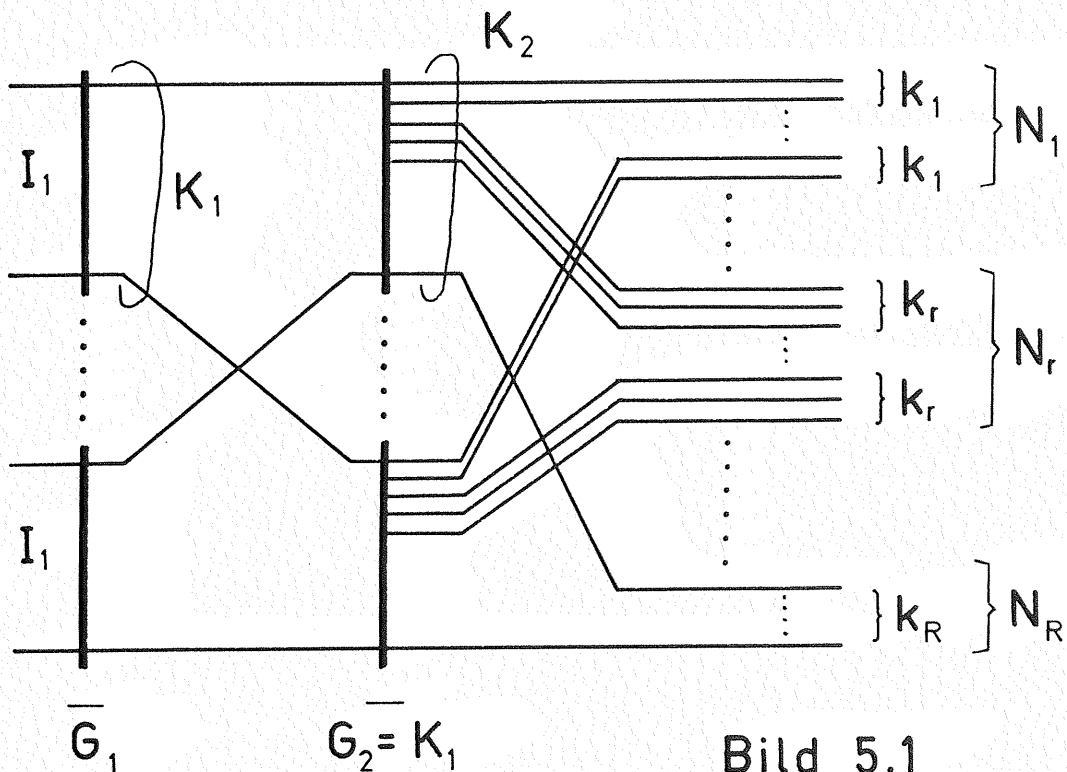
d.h. 31 Unbekannte. Für das gleiche Linkssystem erhält man bei "geordneter Absuche" 71 Unbekannte, siehe Seite 102.

Bei "zufälliger Auswahl" und mit der zusätzlichen Reduktion nach Satz 4-f, Seite 120 erhält man für das oben angegebene Linkssystem mit $G_1 = 3$ und $K_2 = 2$ dreiundzwanzig Unbekannte.

5. Die Kennzeichnung und die Ermittlung der charakteristischen Zustandsmuster von zweistufigen Linkssystemen mit der Betriebsart Richtungswahl

5.1 Die Struktur der Linksysteme

Nach Bild 1.2, Seite 26 ist die Struktur dieser Linksysteme bekannt. Sie soll hier für den speziellen Fall - S=2 Stufen - nochmals dargestellt werden.



Die Erreichbarkeit K_2 , d.h. die Anzahl der Ausgänge je Koppelvielfach der Stufe 2, sei einheitlich über alle G_2 Koppelvielfache der Stufe 2. Die Erreichbarkeit k_r , d.h. die Anzahl der Ausgänge je Koppelvielfach der Stufe 2 in die bestimmte Richtung r , sei ebenfalls einheitlich über alle G_2 Koppelvielfache der Stufe 2. Je Richtung r können die Erreichbarkeiten k_r jedoch unterschiedlich sein.

Für die Summe der Richtungserreichbarkeiten k_r gilt:

$$\sum_{r=1}^R k_r = K_2 \quad (5.1)$$

Außerdem sollen für die Richtungserreichbarkeit k_r die Werte

$$k_r \in \{1, 2, \dots, I_2\} \quad (5.2)$$

zugelassen sein. Daraus folgt mit der Beziehung (5.1), Seite 129, daß bei Systemen mit Richtungswahl gilt:

$$K_2 \stackrel{\cong}{=} I_2 \quad (5.3)$$

(in der Regel ist $K_2 \cong I_2$).

5.2 Der Belegungszustand der Zwischenleitungen

5.2.1 Die Zustandsmatrizen S und S^* , der Potenzvektor \overrightarrow{PV} und der Zustandsvektor \overrightarrow{S}

Vorbemerkungen: In den Ausführungen von Abschnitt 5 werden jetzt nur noch die Änderungen gegenüber der Betriebsart "Mischwahl", welche in den vorangegangenen Abschnitten behandelt wurde, angegeben. Die meisten bisher eingeführten Definitionen und Sätze können unmittelbar übernommen werden. Sind Änderungen oder Ergänzungen (Erweiterungen) bei einzelnen Definitionen oder Sätzen notwendig, dann wird im folgenden nicht mehr der ganze Wortlaut der Definitionen oder Sätze wiederholt. Es werden im Abschnitt 5 nur die Ergänzungen, bzw. die Änderungen gegenüber den vorherigen Abschnitten angegeben.

Bisher reichte es aus, den in der Zustandsmatrix S (siehe Definition 2-A, Seite 31) abgebildeten Belegungszustand der Zwischenleitungen eines Linksystems zu kennzeichnen mit:

$s_{i,j} = 0$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 nicht belegt ist und

$s_{i,j} = 1$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 belegt ist.

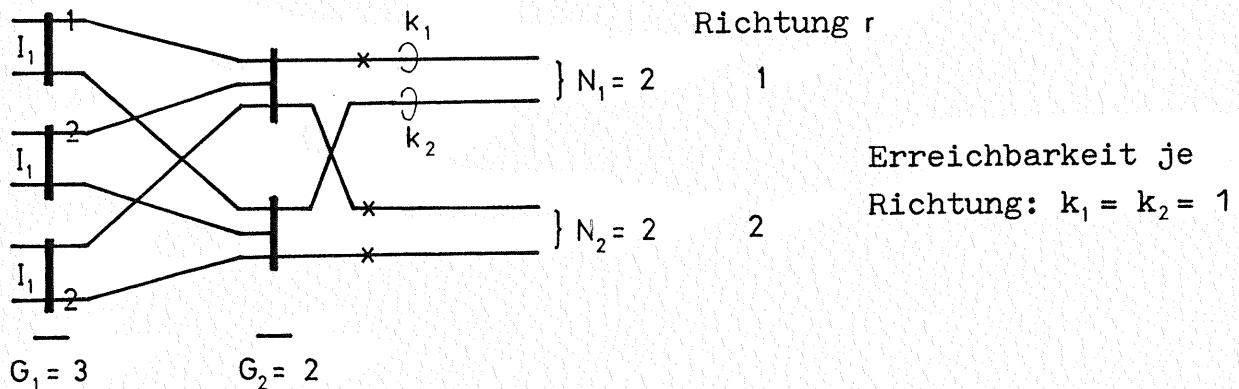
Bei Richtungswahl mit R Richtungen muß jetzt noch unterschieden werden, in welche Richtung die Zwischenleitung belegt ist.

Ergänzung E5-1: Ergänzung von Definition 2-A, Seite 31.

$s_{i,j} = 0$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 nicht belegt ist und

$s_{i,j} = r$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 in Richtung r belegt ist, mit $r \in \{1, 2, \dots, R\}$ und R: Anzahl der Richtungen.

Beispiel 35:



In dem oben dargestellten Linksystern und in den folgenden Linksystern werden innerhalb der bildlichen Darstellung zur Kennzeichnung des Zustandes "Zwischenleitung belegt" Zahlen verwendet. Bei den Abnehmerbündeln werden die belegten Abnehmerleitungen mit x gekennzeichnet.

Die Zustandsmatrix für das im obigen Bild angegebene Zustandsmuster ist:

$$S = \begin{array}{l} \left\| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 2 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \leftarrow \text{Koppelvielfach 1 der Stufe 1} \\ \leftarrow \text{Koppelvielfach 2 der Stufe 1} \\ \leftarrow \text{Koppelvielfach 3 der Stufe 1} \\ \leftarrow \text{Koppelvielfach 2 der Stufe 2} \\ \leftarrow \text{Koppelvielfach 1 der Stufe 2} \end{array} \end{array}$$

Änderungen gegenüber Mischwahl: Bei Mischwahl ist die Zustandsmatrix S eine binäre Matrix. Bei Richtungswahl ist die Zustandsmatrix S eine Matrix, deren Elemente $s_{i,j}$ die Werte $s_{i,j} \in \{0,1,2,\dots,R\}$ annehmen können.

Es sollen jetzt bei dem Linkssystem nach Beispiel 35, Seite 131 die erlaubten Zustandsmuster beim Koppelvielfach der Stufe 1 zunächst betrachtet werden unter der Bedingung, daß in den beiden anderen Koppelvielfachen keine Belegungen vorhanden sind. Diese Zustandsmuster sind in der Tabelle 5.21-1, Seite 133 dargestellt. Man bekommt 9 Muster.

Aus der Tabelle 5.21-1 folgt im betrachteten Beispiel mit $R = 2$ Richtungen: Die Elemente $s_{i,j}^*$ der Zustandsmatrix S^* nach Definition 2-B, Seite 32 müssen im Zustand "Zwischenleitung belegt" die Werte

$$s_{i,j}^* = 3^{j-1} \cdot s_{i,j} \quad (5.4)$$

annehmen. Aus dem Wert des Elementes $s_{i,j}^*$ kann dann wieder der Zustand

" Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 belegt "

berechnet werden, siehe auch Abschnitt 2.2, Seite 32. Mit der obigen Beziehung (5.4) erhält man für die Elemente s_i des Zustandsvektors \vec{S} (siehe Definition 2-C, Seite 35) die Beziehung

$$s_i = \sum_{j=1}^2 s_{i,j}^* = \sum_{j=1}^2 3^{j-1} \cdot s_{i,j} , \quad (5.5)$$

siehe Tabelle 5.2-1, Seite 133.

Wie aus der oben angegebenen Beziehung (5.4) ersichtlich, ist das Gewicht im betrachteten Beispiel 35 3^{j-1} . Die Definition der Zustandsmatrix S^* und die Definition des Zustandsvektors \vec{S} nach Abschnitt 2, Seite 30 müssen jetzt wie folgt geändert werden, siehe Seite 134.

Ergänzung E5-2: Ergänzung von Definition 2-B von Seite 32.

Für die Elemente $s_{i,j}^*$ der Zustandsmatrix S^* gilt bei Richtungswahl mit R Richtungen (R Abnehmerbündel):

$$s_{i,j}^* = 0, \text{ wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \text{ der Stufe } 1 \\ \text{nicht belegt ist (wie bisher) und} \\ s_{i,j}^* = (R+1)^{j-1} \cdot s_{i,j}, \text{ wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \\ \text{der Stufe } 1 \text{ belegt ist, mit } s_{i,j}^* \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{K_i-1} \cdot R\}.$$

Bei der Zustandsmatrix Z^* (siehe Definition 4-B, Seite 112) muß man entsprechend vorgehen wie bei der Matrix S^* , nur daß hier anstatt der Spalte j von der Matrix S die Zeile i der Matrix S mit $(R+1)^{i-1}$ gewichtet werden muß.

Ergänzung E5-3: Ergänzung von Definition 4-B, von Seite 112.

Für die Elemente $z_{i,j}^*$ der Zustandsmatrix Z^* gilt bei Richtungswahl mit R Richtungen (R Abnehmerbündel):

$$z_{i,j}^* = 0, \text{ wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \text{ der Stufe } 1 \\ \text{nicht belegt ist (wie bisher) und} \\ z_{i,j}^* = (R+1)^{i-1} \cdot z_{i,j}, \text{ wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \\ \text{der Stufe } 1 \text{ belegt ist, mit } z_{i,j}^* \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{G_i-1} \cdot R\}.$$

Für die Elemente s_i des Zustandsvektors \vec{S} und für die Elemente z_j des Zustandsvektors \vec{Z} gelten bei Richtungswahl mit R Richtungen die Beziehungen:

$$s_i = \sum_{j=1}^{K_i} s_{i,j}^* \quad , \text{ mit} \quad (5.6)$$

$$s_i \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{K_i} - 1\} \quad \text{und}$$

$$z_j = \sum_{i=1}^{G_j} z_{i,j}^* \quad , \text{ mit} \quad (5.7)$$

$$z_j \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{G_j} - 1\} .$$

Für die Elemente pv_j des Potenzvektors \vec{PV} (siehe Definition 2-H, Seite 59) gilt jetzt:

$$pv_j = (R+1)^{j-1} . \quad (5.8)$$

5.2.2 Die normierte Zustandsmatrix SN und die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} bzw. \vec{TK} und $\vec{\tau}$ bzw. $\vec{\tau K}$

Manchmal ist es nur von Interesse ob eine Zwischenleitung belegt ist oder nicht belegt ist, aber nicht, in welche Richtung die betreffende Belegung geschaltet ist. Dies gilt z.B. bei der Ermittlung der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} (\vec{TK}) und $\vec{\tau}$ ($\vec{\tau K}$) oder bei bestimmten Übergängen zur Aufstellung der Zustandsgleichungen mit dem BL - Algorithmus. Dafür wird eine neue binäre Zustandsmatrix SN eingeführt.

Definition 5-A: Für Richtungswahl gilt:

Die (binäre) normierte Zustandsmatrix SN kennzeichnet den Belegungszustand der Zwischenleitungen. Aus SN geht jedoch nicht hervor, in welche Richtung r die betreffende Zwischenleitung belegt ist. Die Dimension der Matrix SN ist $G_1 \cdot K_1$. Ihre Elemente sollen mit sn_{ij} bezeichnet werden.

$$SN = \begin{pmatrix} sn_{1,1} & sn_{1,2} & \dots & sn_{1,j} & \dots & sn_{1,K_1} \\ sn_{2,1} & sn_{2,2} & \dots & sn_{2,j} & \dots & sn_{2,K_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ sn_{i,1} & sn_{i,2} & \dots & sn_{i,j} & \dots & sn_{i,K_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ sn_{G_1,1} & sn_{G_1,2} & \dots & sn_{G_1,j} & \dots & sn_{G_1,K_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$$

$$j \in \{1, 2, \dots, K_1\}$$

Es sei $sn_{i,j} = 0$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 nicht belegt ist und

$sn_{i,j} = 1$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 belegt ist.

Zwischen den Elementen $sn_{i,j}$ von SN und den Zustandsmatrizen S und S^* gilt die Beziehung (5.9), Seite 136.

$$sn_{i,j} = \frac{s_{i,j}}{s_{i,j}} = \frac{s_{i,j}^*}{s_{i,j}^*} = 1 \quad (5.9)$$

Die Voraussetzung für die Gültigkeit von Beziehung (5.9) ist, daß $s_{i,j} \neq 0$ und damit auch $s_{i,j}^* \neq 0$ ist. Im Fall $s_{i,j} = 0$ und damit auch $s_{i,j}^* = 0$ ist $sn_{i,j} = 0$.

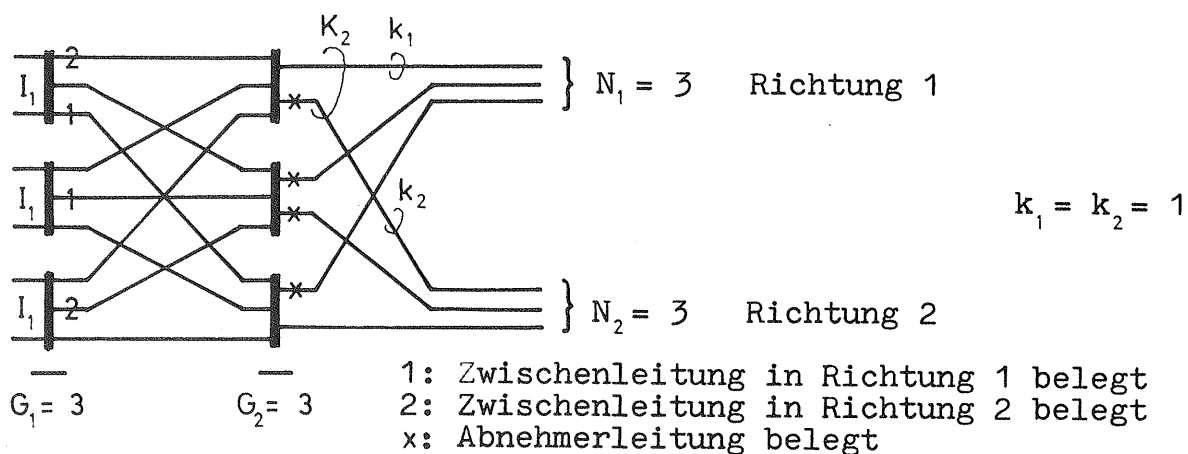
Die Elemente t_j (τ_i) der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} ($\vec{\tau}$) sind gleich der Anzahl der Belegungen je Koppelvielfach der Stufe 2 (Stufe 1), siehe Beziehung (2.5), Seite 39. Diese Bedeutung der Elemente t_j (τ_i) soll auch bei der hier betrachteten Betriebsart "Richtungswahl" beibehalten werden. Mit der Definition 5-A, Seite 135 folgt dann:

$$t_j = \sum_{i=1}^{G_1} sn_{i,j} \quad \text{und} \quad (5.10)$$

$$\tau_i = \sum_{j=1}^{K_1} sn_{i,j} \quad (5.11)$$

Setzt man jetzt in die Definition 2-H, Seite 59 und in die Definition 2-I für pv_j die Beziehung (5.8), Seite 134 ein, so kann man diese Definitionen für die Betriebsart "Richtungswahl" ebenfalls übernehmen.

Beispiel 36:



Es werden nun für das eingetragene Belegungsmuster die Zustandsmatrizen S, S^*, SN und Z^* und die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} ,

sowie die Zustandsvektoren \vec{S} und \vec{Z} angeben.

$$\begin{aligned}
 \vec{PV} &= \{ 3^0 \quad 3^1 \quad 3^2 \} \text{ (Spaltengewicht)} \\
 S &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow S^* = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 & \hspace{25em} \uparrow \\
 & \hspace{25em} \text{Elemente von } \vec{S}: \\
 & \hspace{25em} \text{Zeilensummen} \\
 & \hspace{25em} \text{von } S^* \\
 SN &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{\tau} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Elemente von } \vec{\tau}: \\
 & \hspace{25em} \text{Zeilensummen} \\
 & \hspace{25em} \text{von SN} \\
 \vec{T} &= \{ 1 \quad 2 \quad 1 \} \leftarrow \text{Elemente von } \vec{T}: \text{ Spaltensummen von SN}
 \end{aligned}$$

Desweiteren folgt, ebenfalls aus der Zustandsmatrix S, die Zustandsmatrix Z^* und der Zustandsvektor \vec{Z} . Zum besseren Verständnis wird die oben dargestellte Zustandsmatrix S nochmals abgebildet.

$$\begin{aligned}
 S &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3^0 \\ 3^1 \\ 3^2 \end{matrix} \Rightarrow Z^* = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 18 & 1 \end{vmatrix} \\
 & \hspace{10em} \uparrow \\
 & \hspace{10em} \text{Gewicht je Zeile} \\
 & \hspace{10em} \vec{Z} = \{ 2 \quad 21 \quad 3 \} \\
 & \hspace{10em} \uparrow \\
 & \hspace{10em} \text{Elemente von } \vec{Z}: \text{ Spaltensummen von } Z^*
 \end{aligned}$$

Aus der Zustandsmatrix S (gegebenes Belegungsmuster) erhält man mit dem Spaltengewicht (Potenzvektor \vec{PV}) die Zustandsmatrix S^* , siehe Ergänzung E5-2, Seite 134. Die Zeilensummen von S^* ergeben die Elemente des Zustandsvektors \vec{S} . Mit der Beziehung (5.9), Seite 136 erhält man aus der Zustandsmatrix S die normierte Zustandsmatrix SN. Die Zeilensummen von der Zustandsmatrix SN ergeben die Elemente

des allgemeinen Zustandsvektors \vec{t} , und die Spaltensummen von der Matrix SN ergeben die Elemente des allgemeinen Zustandsvektors \vec{T} . Des weiteren erhält man aus der Matrix S mit der Gewichtung der Zeilen von S entsprechend Ergänzung E5-3, Seite 134 die Matrix Z^* . Die Spaltensummen von Z^* ergeben die Elemente des Zustandsvektors \vec{Z} .

5.2.3 Die erlaubten Zustände

In der Definition 2-D, Seite 36 ist die Spaltensumme $s_{.j}$ für die Betriebsart "Mischwahl" definiert. Die Zahl $s_{.j}$ ist gleich der Anzahl der belegten Eingänge (Ausgänge) des Koppelvielfachs j der Stufe 2, siehe Beispiel 6, Seite 37. Vereinfachend wurde für die Spaltensumme $s_{.j}$ der Spalte j von S die Nomenklatur t_j eingeführt, siehe Beziehung (2.5), Seite 39.

Bei Mischwahl werden Linkssysteme mit $I_2 < K_2$ technisch nur selten verwendet. Bei Richtungswahl gilt die Beziehung

$$I_2 \cong k_r. \quad (5.12)$$

Linkssysteme mit $k_r > I_2$ sind ebenfalls technisch unsinnige Systeme, denn im Fall $k_r > I_2$ wären bei einem Koppelvielfach der Stufe 2 mehr Ausgänge in Richtung r vorhanden als Eingänge.

Ausgehend von der Beziehung (5.3), Seite 130 folgt für die Summe $s_{.j}$ die Bedingung

$$0 \cong s_{.j} = t_j \cong \text{MIN} [I_2, K_2] . \quad (5.13)$$

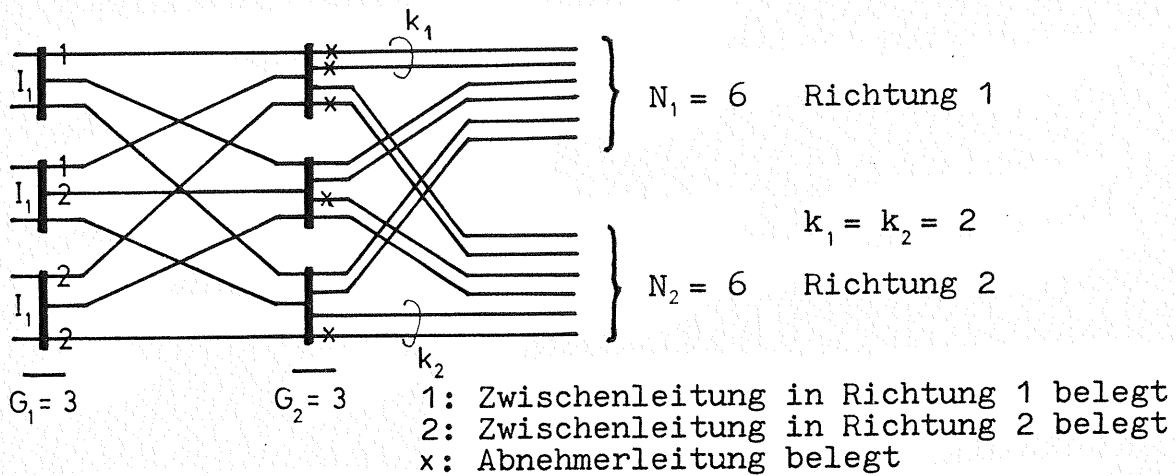
Nach Abschnitt 5.1, Seite 129 ist k_r die Anzahl der Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe 2 in Richtung r. Für die Spaltensumme $s_{.j}$ erhält man bei Richtungswahl eine weitere Bedingung. Ist $k_r < s_{.j}$, dann gilt der Satz 5-a.

Satz 5-a: Von den $s_{.j}$ (t_j) Belegungen, im Koppelvielfach j der Stufe 2, können höchstens k_r Belegungen in Richtung r vorhanden sein.

Analog zur Definition 2-E, Seite 38 folgt

Definition 5-B: Zustandsmuster, die der Bedingung (5.13), Seite 138 genügen und für die der Satz 5-a, Seite 138 gilt, sind "erlaubte Zustandsmuster". Erlaubte Zustandsmuster sind technisch sinnvolle Muster. Die Menge der erlaubten Zustände wird, analog wie bei Mischwahl (siehe Seite 41), mit Ω bezeichnet.

Beispiel 37:



Für das oben dargestellte Belegungsmuster erhält man:

Zustandsmatrix S	normierte Zustandsmatrix SN
$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	$\Rightarrow SN = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
	Spaltensumme $s_{.j}$ $\underline{3}$ $\underline{1}$ $\underline{1}$

Es ist also $s_{.1} = 3$, $s_{.2} = 1$ und $s_{.3} = 1$.

Eine bestimmte Spaltensumme $s_{.j}$ kann jetzt durch die folgenden Belegungsmuster im Koppelvielfach j der Stufe 2 zustande kommen. Als Beispiel wird das oben abgebildete Linksystm gewählt. Die folgenden Belegungsmuster haben alle die gleiche Spaltensumme, nämlich $s_{.1} = 2$, siehe Tabelle 5.23-1, Seite 140.

lfd. Nr.	1	2	3
S:	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
SN:	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
	$\bar{s} = 2$	$\bar{s} = 2$	$\bar{s} = 2$

Tabelle 5.23-1

Entsprechend den Zustandsmatrizen S der obigen Tabelle kann die Spaltensumme $s_j = 2$ zustandekommen durch:

	lfd. Nr. der Zustandsmatrix in der Tabelle 5.23-1
- 2 Belegungen in Richtung 1	1
- 2 Belegungen in Richtung 2	2
- 1 Belegung in Richtung 1 und 1 Belegung in Richtung 2.	3

Die Spaltensumme $s_{.j}$ ist definitionsgemäß gleich dem Element t_j des allgemeinen Zustandsvektors \vec{T} , siehe Beziehung (2.5), Seite 39 und Abschnitt 5.2.2, Seite 135. Aus dem oben angeführten Beispiel folgt: Bei Richtungswahl mit $R \cong 2$ Richtungen muß man, abweichend gegenüber Mischwahl, noch angeben, wie die Spaltensumme $s_{.j}$ bzw. t_j zustandekommt. Für diesen Sachverhalt wird im folgenden Abschnitt 5.2.4 die neue Definition "Richtungsmatrix" eingeführt.

5.2.4 Die Richtungsmatrizen TR und TR^* und der Richtungsvektor \overrightarrow{TR}

Definition 5-C: Die Richtungsmatrix

$$TR = \begin{pmatrix} tR_{1,1} & tR_{1,2} & \dots & tR_{1,j} & \dots & tR_{1,K_1} \\ tR_{2,1} & tR_{2,2} & \dots & tR_{2,j} & \dots & tR_{2,K_1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ tR_{r,1} & tR_{r,2} & \dots & tR_{r,j} & \dots & tR_{r,K_1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ tR_{R,1} & tR_{R,2} & \dots & tR_{R,j} & \dots & tR_{R,K_1} \end{pmatrix}$$

ist eine Matrix mit R Zeilen und K_1 Spalten, d.h. sie hat die Dimension $R \cdot K_1$. Ihre Elemente $tR_{r,j}$ geben die Anzahl der in Richtung r belegten Eingänge (und Ausgänge) eines Koppelvielfachs j der Stufe 2 an, mit anderen Worten: $tR_{r,j}$ ist die Anzahl der Elemente $s_{i,j}$ in der Spalte j der Zustandsmatrix S für die gilt: $s_{i,j} = r$. Die Matrix TR beschreibt also einen allgemeinen Zustand, und es gilt:

- $tR_{r,j} = 0$, wenn kein Eingang des Koppelvielfachs j der Stufe 2 in Richtung r belegt ist und
- $tR_{r,j} = a$, wenn a Eingänge des Koppelvielfachs j der Stufe 2 in Richtung r belegt sind.

Für a gilt: $a \in \{1, 2, \dots, k_r\}$,

R : Anzahl der Richtungen (siehe Bild 5.1, Seite 129).

Die R Zeilen der Richtungsmatrix TR sollen so angeordnet sein (gegebenenfalls Umnummerierung), daß die Bedingung gilt:

$$k_1 \cong k_2 \cong \dots \cong k_r \cong \dots \cong k_R.$$

Die Richtungsmatrix TR hat also genau so viele Spalten wie die Zustandsmatrix S und R Zeilen entsprechend den R Richtungen.

Für die Elemente $tR_{r,j}$ von TR gilt die Beziehung:

$$tR_{r,j} = \sum_{i=1}^{G_1} \delta_{i,j} \quad (5.14)$$

mit $\delta_{i,j} = 0$, wenn die Zwischenleitung i,j nicht in Richtung r belegt ist ($s_{i,j} \neq r$) und

$\delta_{i,j} = 1$, wenn die Zwischenleitung i,j in Richtung r belegt ist ($s_{i,j} = r$).

Beispiel 38: Betrachtet werden die in der Tabelle 5.23-1, Seite 140 angegebenen Zustandsmatrizen S. Die zu den Matrizen S gehörenden Richtungsmatrizen TR sind:

lfd. Nr.	1	2	3
S:	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
TR:	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Entsprechend der Definition der Richtungsmatrizen TR von Seite 141 erhält man für die Elemente t_j des allgemeinen Zustandsvektors \vec{T} (Spaltensumme $s_{.j}$) die Beziehung:

$$t_j = \sum_{r=1}^R tR_{r,j} \quad (5.15)$$

Die Elemente t_j des allgemeinen Zustandsvektors erhält man ebenfalls mit der Beziehung (5.10), Seite 136.

Bei der Betriebsart "Richtungswahl" ist als Sonderfall stets die Betriebsart "Mischwahl", d.h. $R = 1$, mit enthalten. Bei Mischwahl gilt:

$$SN = S, \quad (5.16)$$

d.h. die normierte Zustandsmatrix SN ist gleich der Zustandsma-

trix S. Außerdem gilt bei Mischwahl

$$TR = \vec{T}, \quad (5.17)$$

d.h. die Richtungsmatrix TR ist gleich dem allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} (bei Mischwahl ist die Matrix TR einzeilig).

Um gegebenenfalls eine Zeilenvertauschung bei der Richtungsmatrix TR wiederum einfach darstellen zu können, wird, analog zur Matrix S^* (Seite 32) und dem Vektor \vec{S} (siehe Seite 36), eine Matrix TR^* und ein Vektor \vec{TR} eingeführt.

Definition 5-D: Die Richtungsmatrix

$$TR^* = \begin{pmatrix} tR_{1,1}^* & tR_{1,2}^* \dots \dots & tR_{1,j}^* & \dots \dots & tR_{1,K_1}^* \\ tR_{2,1}^* & tR_{2,2}^* \dots \dots & tR_{2,j}^* & \dots \dots & tR_{2,K_1}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ tR_{r,1}^* & tR_{r,2}^* \dots \dots & tR_{r,j}^* & \dots \dots & tR_{r,K_1}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ tR_{R,1}^* & tR_{R,2}^* \dots \dots & tR_{R,j}^* & \dots \dots & tR_{R,K_1}^* \end{pmatrix}$$

ist eine transformierte Richtungsmatrix TR mit den folgenden Transformationsbedingungen:

$$tR_{r,j}^* = 0, \quad \text{wenn } tR_{r,j} = 0 \text{ ist und}$$

$$tR_{r,j}^* = (k_r + 1)^{j-1} \cdot tR_{r,j}, \quad \text{wenn im Koppelvielfach } j \text{ der Stufe 2}$$

$tR_{r,j}$ Belegungen in Richtung r vorhanden sind.

Da prinzipiell nicht alle Richtungserreichbarkeiten k_r gleich sein müssen, können dementsprechend in Spalte j der Richtungsmatrix TR^* verschiedene Gewichte auftreten, siehe obige Transformationsbeziehungen.

Definition 5-E: Es sei tR_r die Zeilensumme der Zeile r der Richtungsmatrix TR^* , d.h. es wird die Summe

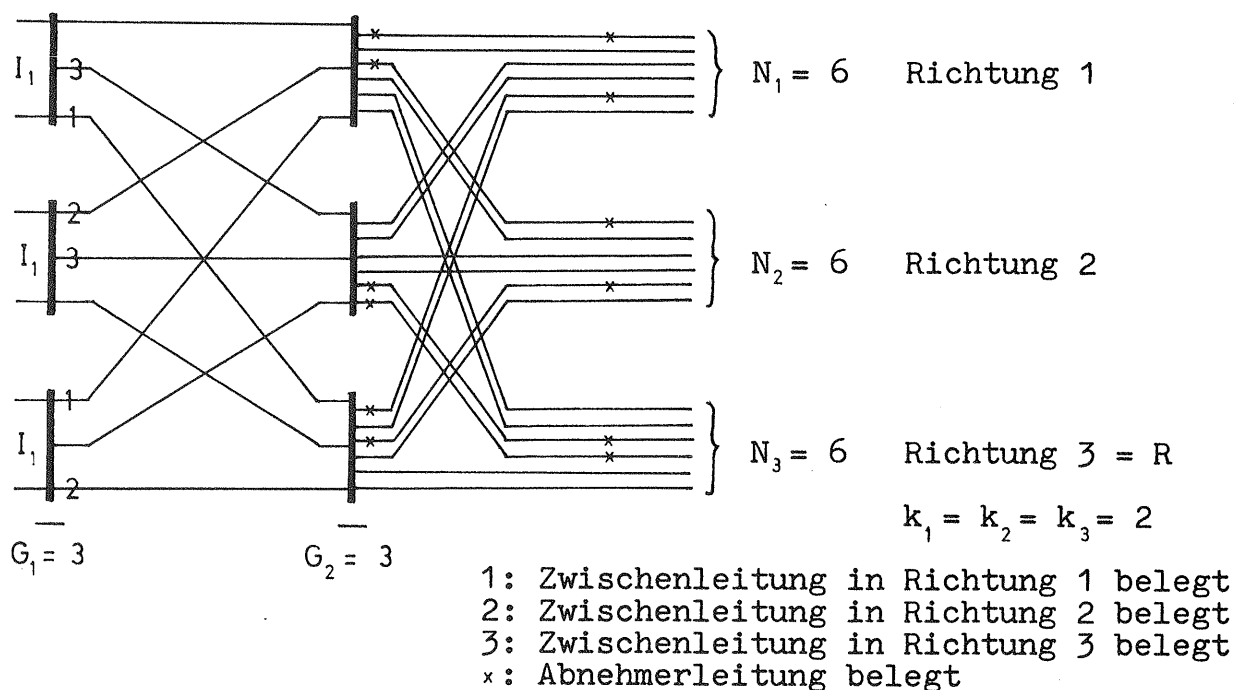
$$tR_r = \sum_{j=1}^{k_1} tR_{r,j}^*$$

gebildet. Die Zahlenfolge der Zeilensummen $tR_1, tR_2, \dots, tR_r, \dots, tR_R$ wird als Richtungsvektor

$$\vec{TR} = \begin{pmatrix} tR_1 \\ tR_2 \\ \vdots \\ tR_r \\ \vdots \\ tR_R \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Es gilt: $r \in \{1, 2, \dots, R\}$ und $tR_r \in \{0, 1, 2, \dots, (k_r + 1)^{k_1} - 1\}$.

Beispiel 39: Für das unten eingetragene Belegungsmuster werden ausgehend von der Zustandsmatrix S die Richtungsmatrizen TR und TR^* und der Richtungsvektor \vec{TR} angegeben.



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Zustandsmatrix}$$

Richtungsmatrix TR Richtungsmatrix TR* Richtungsvektor

$$TR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow TR^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{TR} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$3^0 \quad 3^1 \quad 3^2$ Zeilensummen
 \uparrow
 $3 = k_r + 1 = 2 + 1$

5.3 Die ch. Matrizen SC und die ch. Vektoren \vec{C} bei Richtungswahl

5.3.1 Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix S ("geordnete Absuche")

Aus den bisherigen Ausführungen des Abschnitts 5 kann man entnehmen, daß man zur Beschreibung der Zustände auf den Zwischenleitungen von zweistufigen Linksystemen bei der Betriebsart "Richtungswahl" analog zur Betriebsart "Mischwahl" vorgehen kann. Die entscheidende Änderung bei der Zustandsbeschreibung bei Richtungswahl gegenüber Mischwahl ist, daß die Elemente $s_{i,j}$ der Zustandsmatrix S bei Richtungswahl die Werte $s_{i,j} \in \{0,1,2,\dots,R\}$ annehmen können. Demzufolge beträgt das Gewicht der Spalte j (Potenzvektor \vec{P}_V , siehe Seite 134) bei Richtungswahl mit R Richtungen

$$(R + 1)^{j-1}.$$

Demgegenüber beträgt das Gewicht der Spalte j bei Mischwahl (R=1)

$$2^{j-1}.$$

Zur einfacheren Darstellung verschiedener Rechenvorgänge wurde bei Richtungswahl die normierte Zustandsmatrix SN eingeführt, siehe Definition 5-A, Seite 135. Außerdem wurden in Abschnitt 5.2.4 bzw.

Abschnitt 5.2.5 die Richtungsmatrizen TR und TR^* sowie der Richtungsvektor \vec{TR} eingeführt.

Setzt man jetzt in den Definitionen und Sätzen der Abschnitte 2.4 bis 2.6 (Seite 41 bis Seite 54) für das Spaltengewicht 2^{j-1} den Wert $(R+1)^{j-1}$ ein, so kann man die in diesen Abschnitten aufgestellten Definitionen und Sätze ebenfalls für Richtungswahl übernehmen. Für die Elemente $c_{\beta,i}$ der ch. Vektoren \vec{C}_β bekommt man damit wiederum die Bedingung (2.10) von Seite 48, nur der Wertebereich der Elemente $c_{\beta,i}$ ist jetzt

$$c_{\beta,i} \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{k_i} - 1\}. \quad (5.18)$$

Die Richtungsmatrix TR und damit auch die transformierte Richtungsmatrix TR^* sowie der Richtungsvektor \vec{TR} haben für die hier analog geltenden Ausführungen der Abschnitte 2.4 bis 2.6 (Mischwahl) zunächst keine Bedeutung.

Alle Zustandsvektoren \vec{S} , die der Bedingung (2.10), Seite 48 genügen sind ch. Vektoren $\vec{C}_\beta^{(g)}$ (siehe Seite 104) mit den Elementen nach der obigen Beziehung (5.18). Diese Vektoren $\vec{C}_\beta^{(g)}$ sind wiederum die (zweckmäßig gewählten) Vertreter (analog zu Abschnitt 2.4.2, Seite 45) ihrer Äquivalenzklasse und können nicht mehr durch Zeilenvertauschung ineinander überführt werden. Damit ist die Menge $\Omega^{(g)}$ der ch. Vektoren $\vec{C}_\beta^{(g)}$ für zweistufige Linkssysteme bei der Betriebsart "Richtungswahl" mit R Richtungen und dem Absuchverfahren "geordnete Absuche" bestimmt.

5.3.2 Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix S ("zufällige Auswahl")

In Abschnitt 4, Seite 103 wurde die Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix S beschrieben. Die in Abschnitt 4 gemachten Ausführungen gelten bisher für zweistufige Linkssysteme mit Mischwahl.

Dadurch, daß entsprechend Abschnitt 5.1, Seite 129 für alle G_2 Koppelvielfache der Stufe 2 die Richtungserreichbarkeit k_r gleich sein soll, kann man bei Richtungswahl jetzt ebenfalls völlig ana-

log vorgehen. In Abschnitt 4, Seite 103 muß man jetzt nur statt dem Spaltengewicht

$$2^{j-1} \text{ in Spalte } j \text{ der Matrix } S$$

das Spaltengewicht

$$(R+1)^{j-1} \text{ in Spalte } j \text{ der Matrix } S$$

einsetzen.

Als ch. Vektoren $\vec{C}_\eta^{(z)}$ werden wieder die Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ entsprechend Definition 4-F, Seite 126 gewählt. In dieser Menge $\Omega^{(z)}$ der ch. Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ sind dann ebenfalls noch Zustandsmatrizen enthalten, die durch Spaltenvertauschung ineinander überführbar wären (siehe Satz 4-f, Seite 120), aber zweckmäßigerweise nicht entfernt werden.

Auch hier haben die Richtungsmatrizen TR und TR* zunächst keine Bedeutung, siehe Abschnitt 5.3.1, Seite 146.

5.4 Die ch. Vektoren (Matrizen) für zweistufige Linkssysteme mit gleicher Bündelgröße N_r und gleicher Bündelbelastung Y_r für alle Richtungen $r \in \{1, 2, \dots, R\}$

5.4.1 Richtungsvertauschung

Bisher wurden in Abschnitt 5 für die Richtungserreichbarkeit k_r die folgenden Bedingungen gestellt:

- a) technisch sinnlose Linkssysteme sollen nicht behandelt werden, d.h. es soll die Bedingung (5.12), Seite 138
- $I_2 \cong k_r$ - gelten und
- b) die Richtungserreichbarkeit k_r sei für alle G_2 Koppelvielfache der Stufe 2 gleich, siehe Abschnitt 5.1, Seite 129.

Es wird jetzt noch eine weitere Bedingung für k_r vorgeschrieben. Wie den nachstehenden Ausführungen zu entnehmen ist, führt diese Vorschrift zu einer weiteren Vereinfachung der Rechenabläufe.

- c) Alle R Richtungen sollen die gleiche Richtungserreichbarkeit k_r haben, d.h. es sei

$$k_1 = k_2 = \dots = k_r = \dots = k_R . \quad (5.19)$$

Die obigen Bedingungen b) und c) führen zu der Beziehung

$$N_1 = N_2 = \dots = N_r = \dots = N_R , \quad (5.20)$$

d.h. man bekommt in diesem Fall gleich große Abnehmerbündel.

In Abschnitt 1.2.5, Seite 28 wurde für die in dieser Arbeit betrachteten Linkssysteme vorausgesetzt: gleichmäßige Belastung der Koppelvielfache der Stufe 1.

Jetzt wird für die folgenden Betrachtungen desweiteren die Bedingung gestellt, daß die Belastungen aller R Abnehmerbündel ebenfalls gleich groß sein sollen, d.h. es soll die Beziehung

$$Y_1 = Y_2 = \dots = Y_r = \dots = Y_R \quad (5.21)$$

gelten.

Durch die vorausgesetzte Symmetrie in der Beschaltung der Ausgänge (Beziehung (5.20)) und mit der obigen Beziehung (5.21) kommt man zu der trivialen Schlußfolgerung:

Satz 5-b: Es gibt in den Mengen $\Omega^{(g)}$ nach Abschnitt 5.3.1, Seite 145 bzw. $\Omega^{(z)}$ nach Abschnitt 5.3.2, Seite 146 noch Zustandsmuster mit gleicher Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeit, mit anderen Worten: Es gibt in den Mengen $\Omega^{(g)}$ bzw. $\Omega^{(z)}$ noch zueinander äquivalente Zustandsmatrizen. Diese Zustandsmatrizen sind dadurch gekennzeichnet, daß sie durch Richtungsvertauschung ineinander überführbar sind (alle Richtungen haben den gleichen Verkehr und die gleiche Bündelgröße).

Im folgenden Beispiel 40 werden zwei Zustandsmatrizen dargestellt, die durch Richtungsvertauschung ineinander überführbar sind.

Beispiel 40: Ausgegangen wird von einem Linkssystem mit drei Richtungen, siehe Beispiel 39, Seite 144.

Es werden jetzt die beiden folgenden Zustandsmatrizen betrachtet.

$$\begin{array}{ccc}
 j \longrightarrow & 1 & 2 & 3 \\
 S_I = & \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right\| & & j \longrightarrow & 1 & 2 & 3 \\
 & & & & S_{II} = & \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right\|
 \end{array}$$

Bei dem betrachteten Linkssystem gibt es $R = 3$ Abnehmerbündel mit $N_1 = N_2 = N_3 = 6$ Leitungen. Mit $R = 3$ und der Beziehung (5.8) Seite 134 folgt:

$$\vec{PV} = \{4^0 \quad 4^1 \quad 4^2\}.$$

Aus den Zustandsmatrizen S_I und S_{II} erhält man mit dem obigen Potenzvektor \vec{PV} die Zustandsmatrizen S_I^* und S_{II}^* , entsprechend Ergänzung E5-2, Seite 134.

$$S_I^* = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 32 \\ 2 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad S_{II}^* = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 8 & 16 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Bildet man die Zeilensummen in den Zustandsmatrizen S_I^* und S_{II}^* , dann erhält man die Zustandsvektoren \vec{S}_I und \vec{S}_{II} .

$$\vec{S}_I = \begin{Bmatrix} 37 \\ 10 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad \vec{S}_{II} = \begin{Bmatrix} 26 \\ 5 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Da für die Elemente der beiden Zustandsvektoren die Bedingung (2.10), Seite 48 erfüllt ist, d.h. es gilt für die Elemente von \vec{S}_I bzw. \vec{S}_{II}

$$s_1 > s_2 > s_3,$$

sind die Vektoren \vec{S}_I und \vec{S}_{II} ch. Vektoren der Menge $\Omega^{(g)}$.

Die normierten Zustandsmatrizen SN entsprechend Definition 5-A Seite 135, lauten:

$$SN_I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad SN_{II} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aus den normierten Zustandsmatrizen SN erhält man mit der Beziehung (5.10), Seite 136 die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} .

$$\vec{T}_I = \left\{ \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \right\} \qquad \vec{T}_{II} = \left\{ \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \end{array} \right\}$$

Für die normierten Zustandsmatrizen SN_I und SN_{II} folgt:

$$SN_I = SN_{II}$$

und demzufolge erhält man ebenfalls

$$\vec{T}_I = \vec{T}_{II},$$

siehe die oben dargestellten Vektoren \vec{T}_I und \vec{T}_{II} . Für die Elemente der Vektoren \vec{T}_I und \vec{T}_{II} gilt die Beziehung

$$t_1 > t_2 > t_3.$$

Damit ist der Vektor \vec{T} ein \vec{TK} -Vektor, siehe Definition 2-J, Seite 60. Daraus folgt: Die beiden Zustandsmatrizen S_I und S_{II} gehören zu der Menge der ch. Matrizen $SC_{1,\eta}^{(g)}$ (ch. Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$), siehe Seite 115 bzw. Seite 120.

Der Übersicht wegen werden die Zustandsmatrizen S_I und S_{II} nochmals dargestellt.

$$S_I = \begin{array}{c} j \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \qquad S_{II} = \begin{array}{c} j \\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Zeile } i \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

Die Anzahl der Elemente mit dem Wert $s_{i,1} = \underline{1}$, in der Spalte $j = 1$

von S_I ist $tR_{1,1} = 1$. Analog dazu folgt: $tR_{2,1} = 1$ und $tR_{3,1} = 1$, d.h. in Richtung $r = 2$ und Richtung $r = 3$ ist in der Spalte $j = 1$ ebenfalls jeweils eine Belegung vorhanden. Insgesamt erhält man die folgenden Richtungsmatrizen TR (TR siehe Definition 5-C, Seite 141):

$$\begin{array}{c}
 j \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad r \downarrow \\
 \text{TR}_I = \left\| \begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 2 \\
 1 & 0 & 0 & 3
 \end{array} \right\|
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 j \longrightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad r \downarrow \\
 \text{TR}_{II} = \left\| \begin{array}{ccc|c}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 2 \\
 1 & 0 & 0 & 3
 \end{array} \right\| .
 \end{array}$$

Vertauscht man jetzt in der Matrix S_I die Richtungen $r = 1$ und $r = 2$, d.h. die Elemente $s_{i,j} = 1$ von S_I erhalten den Wert 2 und die Elemente $s_{i,j} = 2$ von S_I erhalten den Wert 1, so erhält man die Matrix

$$S'_I = \left\| \begin{array}{ccc|c}
 2 & 2 & 1 \\
 1 & 1 & 0 \\
 3 & 0 & 0
 \end{array} \right\| .$$

Vergleicht man die Matrizen S'_I und die Matrix S_{II} (siehe vorhergehende Seite), so folgt:

$$S'_I = S_{II},$$

d.h. die beiden Matrizen S'_I und S_{II} sind gleich. Die Zustandsmatrizen S_I und S_{II} sind damit zueinander äquivalent, denn sie können durch Richtungsvertauschung ineinander überführt werden (äquivalent: siehe Satz 5-b, Seite 148).

Aus zu den einander äquivalenten Matrizen S_I und S_{II} gehörenden Richtungsmatrizen erkennt man die Gültigkeit des folgenden Satzes 5-c.

Satz 5-c: Die Zeilenvertauschung bei der Richtungsmatrix TR (gleich Elementvertauschung beim Richtungsvektor \vec{TR}) ist identisch mit der Richtungsvertauschung bei der Zustandsmatrix S.

Beispiel 41: Elementvertauschung bei dem Richtungsvektor \vec{TR} .

Im vorangegangenen Beispiel 40, Seite 148 ist die Richtungserreichbarkeit $k_r = 2$ (siehe auch Beispiel 39, Seite 144). Entsprechend der Definition 5-D Seite 143 folgt: die Spalten j der Richtungsmatrix TR müssen mit dem Gewicht

$$(k_r + 1)^{j-1} = 3^{j-1}$$

gewichtet werden. Aus den Richtungsmatrizen TR_I und TR_{II} von Seite 151

$$TR_I = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad TR_{II} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

folgen dann mit den Gewichten

$$3^0 \quad 3^1 \quad 3^2 \qquad \qquad \qquad 3^0 \quad 3^1 \quad 3^2$$

die Richtungsmatrizen

$$TR_I^* = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad TR_{II}^* = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

Summiert man in den Matrizen TR_I^* bzw. TR_{II}^* die Zeilen, so erhält man die Elemente der Richtungsvektoren \vec{TR}_I bzw. \vec{TR}_{II} (\vec{TR} siehe Definition 5-E Seite 144).

$$\vec{TR}_I = \begin{Bmatrix} 4 \\ 13 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{TR}_{II} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Aus den Elementen der beiden obigen Richtungsvektoren \vec{TR}_I und \vec{TR}_{II} erkennt man: Die beiden Vektoren sind durch Elementvertauschung ineinander überführbar.

Aus dem Satz 5-b, Seite 148 und dem Satz 5-c, Seite 151 folgt jetzt analog zu Abschnitt 2, Seite 30 der Satz 5-d.

Satz 5-d:

Alle Zustandsmatrizen $SC_{\beta}^{(g)}$, die durch Elementvertauschung bei den zu $SC_{\beta}^{(g)}$ gehörenden Richtungsvektoren \vec{TR}_{β}

ineinander überführbar sind, gehören zu ein und derselben Äquivalenzklasse, d.h. sie haben die gleiche Zustandsmuster - Wahrscheinlichkeit.

Aus dem Beispiel 40 Seite 148 kann man desweiteren die folgenden Eigenschaften entnehmen:

Satz 5-e: Die durch Richtungsvertauschung zueinander äquivalenten Zustandsmatrizen $SC^{(g)}$ haben die gleiche normierte Zustandsmatrix SN.

Aus dem obigen Satz 5-e folgt mit der Beziehung (5.10) Seite 136:

Satz 5-f: Die durch Richtungsvertauschung zueinander äquivalenten Zustandsmatrizen $SC^{(g)}$ haben alle den gleichen allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} .

Man geht jetzt bei der Bestimmung der Vertreter einer Äquivalenzklasse (entsprechend dem obigen Satz 5-d) völlig analog vor wie bei der Elementvertauschung beim Zustandsvektor \vec{S} , siehe Bedingung (2.10), Seite 48.

Als Vertreter einer Äquivalenzklasse werden nun jene Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ gewählt, für die die Bedingung

$$tR_1 \cong tR_2 \cong \dots \cong tR_r \cong \dots \cong tR_R \quad (5.22)$$

erfüllt ist. Darin sind die tR_r die Elemente des zu $\vec{C}^{(g)}$ gehörenden Richtungsvektors \vec{TR} .

5.4.2 Der Richtungsvektor $\overrightarrow{\text{TRK}}$

Die Sequenzen der Elemente tR_r der Vektoren $\overrightarrow{\text{TR}}$, für die die Bedingung (5.22), Seite 153 erfüllt ist, können wiederum als "Kombinationen mit Wiederholungen" interpretiert werden. Es wird deshalb die folgende Definition eingeführt (analog zu $\overrightarrow{\text{TK}}$, siehe Definition 2-J, Seite 60):

Definition 5-F: Der Richtungsvektor

$$\overrightarrow{\text{TRK}} = \left\{ \begin{array}{c} tR_{K_1} \\ tR_{K_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ tR_{K_r} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ tR_{K_R} \end{array} \right\}$$

ist gleich jenem Vektor $\overrightarrow{\text{TR}}$, dessen Elemente tR_r "Kombinationen mit Wiederholungen" bilden, d.h. der Bedingung (5.22), Seite 153 genügen. Für die Elemente tR_{K_r} gilt:

$$tR_{K_r} \in \{0, 1, 2, \dots, (k+1) - 1\},$$

mit $r \in \{1, 2, \dots, R\}$ und es gilt die

Beziehung $tR_{K_1} \cong tR_{K_2} \cong \dots \cong tR_{K_r} \cong \dots \cong tR_{K_R} .$

Von den im Beispiel 40, Seite 151 angegebenen Zustandsmatrizen ist der zu der Matrix S_{II} gehörende Richtungsvektor $\overrightarrow{\text{TR}}_{II}$ ein $\overrightarrow{\text{TRK}}$ Vektor, siehe $\overrightarrow{\text{TR}}_{II}$ auf Seite 151.

Die Zahl N_{TRK} sei die Anzahl der Richtungsvektoren $\overrightarrow{\text{TRK}}_{\nu}$, d.h. es gilt:

$$\nu \in \{1, 2, \dots, N_{\text{TRK}}\}. \tag{5.23}$$

Geht man jetzt von der Menge der Richtungsvektoren $\overrightarrow{\text{TRK}}_{\nu}$ aus, so gilt entsprechend der Definition 5-F (siehe oben auf dieser Seite)

der Satz 5-g.

Satz 5-g: Die Sequenzen der Elemente tR_r der Richtungsvektoren \overrightarrow{TR} sind gleich den "Permutationen mit Wiederholungen" der Elemente $tRK_{\chi,r}$ der Richtungsvektoren $\overrightarrow{TRK}_{\chi}$.

Mit diesem Satz ist damit die Mächtigkeit $MTRK_{\chi}$ der Vektoren $\overrightarrow{TRK}_{\chi}$ bestimmt, mit anderen Worten:

Die Anzahl

der aus einem gegebenen Vektor $\overrightarrow{TRK}_{\chi}$ hervorgehenden Vektoren \overrightarrow{TR} bzw.

die Anzahl

der durch Elementvertauschung bei $\overrightarrow{TRK}_{\chi}$ zueinander äquivalenten Zustandsmatrizen $SC^{(g)}$

ist damit ebenfalls bestimmt.

Setzt man in Abschnitt 2.5, Seite 52 für den Vektor $\overrightarrow{C}_{\beta}$ den Vektor $\overrightarrow{TRK}_{\chi}$ ein, und setzt man ferner für G_1 die Anzahl der Richtungen (die Zahl R) ein, so erhält man aus Beziehung (2.11), Seite 53 die Formel

$$MTRK_{\chi} = \frac{R!}{\prod_{w=1}^v m_w} \quad (5.24)$$

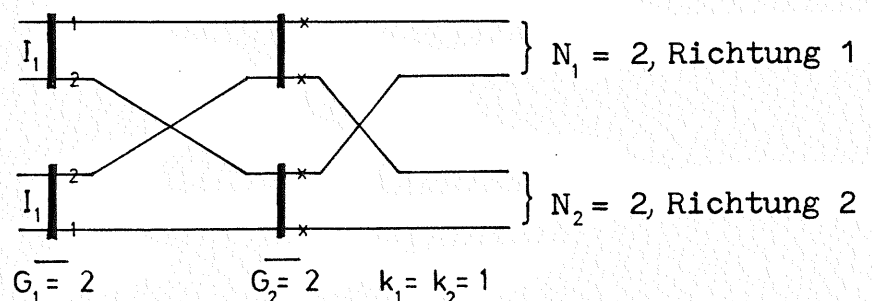
mit m_w und v entsprechend Seite 53.

Diese Formel kann jetzt analog zu Beziehung (2.11) Seite 53 umgeformt werden.

5.4.3 Gleiche Elemente $tRK_{\chi,r}$ in dem Richtungsvektor $\overrightarrow{TRK}_{\chi}$

Es gibt Zustandsmatrizen $SC^{(g)}$, bei denen die Zeilenvertauschung identisch ist mit der Richtungsvertauschung. Hierzu ein Beispiel.

Beispiel 42:



Die Zustandsmatrix für das im Linkssystem eingetragene Belegungsmuster lautet:

$$S_I = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} .$$

Durch Zeilervertauschung bei der Matrix S_I erhält man die zu S_I äquivalente Zustandsmatrix S_{II} .

$$S_{II} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Die Matrix S_{II} erhält man aber auch, wenn die Richtungen $r = 1$ und $r = 2$ in der Matrix S_I vertauscht werden.

Das bedeutet, daß sowohl durch Richtungsvertauschung als auch durch Zeilervertauschung - bei einer Zustandsmatrix S_I - ein und dieselbe Matrix S_{II} entstehen kann. Es darf also bei der Ermittlung der Mächtigkeit dieser Äquivalenzklasse nur eine Reduktionsart angewendet werden: Richtungsvertauschung oder Zeilervertauschung.

Dieser Sachverhalt wurde bei der Definition der Richtungsvektoren \overrightarrow{TRK} berücksichtigt (siehe Definition 5-F, Seite 154), denn gleiche Elemente tRK_r in \overrightarrow{TRK} bedeuten, daß keine Richtungsvertauschung ausgeführt wird. Gleiche Elemente tRK_r und tRK_{r+1} treten jedoch immer dann auf, wenn die beiden zu vertauschenden Richtungen r und $r+1$ und die Zeilervertauschung bei der Zustandsmatrix S_I zu ein und derselben Zustandsmatrix S_{II} führen.

Es gibt aber auch Zustandsmatrizen S_I mit gleichen Elementen tRK_r , bei denen Richtungsvertauschung und Zeilervertauschung bei S_I nicht zur gleichen Zustandsmatrix S_{II} führen. Die Richtungsvertauschung mit Hilfe der Vektoren \overrightarrow{TRK} ist demzufolge unvollständig. Dieser Rest von äquivalenten Zustandsmatrizen S ist nicht in ebenso einfacher Weise zu eliminieren wie jene Zustandsmatrizen S , die aus den Permutierungen der Elemente der Richtungsvektoren \overrightarrow{TRK} hervorgehen.

5.4.4 Die ch. Vektoren $\vec{C}^{(g,R)}$ bei "geordneter Absuche" und Richtungsvertauschung

Entsprechend den vorangegangenen Ausführungen in Abschnitt 5 werden jetzt die ch. Vektoren wie folgt definiert:

Definition 5-G: Als ch. Vektoren bei zweistufigen Linkssystemen für Richtungswahl mit

- R Abnehmerbündeln (R Richtungen),
- "geordneter Absuche",
- gleicher Bündelgröße N_r für alle R Abnehmerbündel (siehe Beziehung (5.19) und (5.20), Seite 148),
- gleicher Belastung je Koppelvielfach der Stufe 1 und
- gleicher Belastung aller R Abnehmerbündel (siehe Beziehung (5.21), Seite 148)

werden diejenigen Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ gewählt, bei denen für die dazugehörigen Richtungsvektoren \vec{TR} die Bedingung (5.22), Seite 153 erfüllt ist, d.h. $\vec{TR} = \vec{TRK}$ gilt. Diese ch. Vektoren werden mit $\vec{C}^{(g,R)}$ gekennzeichnet.

$$\vec{C}^{(g,R)} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_i \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{G_1} \end{Bmatrix},$$

Bei den Elementen ist einfachheitshalber der Index (g,R) weggelassen worden.

mit $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, (R + 1)^{K_1} - 1\}$.

Die Mächtigkeit MGR der Vektoren $\vec{C}^{(g,R)}$ ist durch die folgende Formel bestimmt:

$$MGR = M \cdot MTRK, \tag{5.25}$$

mit - M nach Beziehung (2.11), Seite 53 und

- MTRK nach Beziehung (5.24), Seite 155.

Für die Anzahl der ch. Zustände entsprechend Definition 5-G, Seite 157 wird die Abkürzung $NC^{(g,R)}$ eingeführt. Die Menge der Vektoren $\vec{C}^{(g,R)}$ (gleichbedeutend mit Matrizen $SC^{(g,R)}$) wird mit $\Omega^{(g,R)}$ bezeichnet.

5.4.5 Die ch. Vektoren $\vec{C}^{(z,R)}$ bei "zufälliger Auswahl" und Richtungsvertauschung

Analog zu Abschnitt 5.3.2, Seite 146 und Abschnitt 5.4.4, Seite 157 werden die ch. Vektoren wie folgt definiert:

Definition 5-H: Als ch. Vektoren bei zweistufigen Linkssystemen für Richtungswahl mit

- R Abnehmerbündeln (R Richtungen),
- "zufälliger Auswahl",
- gleicher Bündelgröße N_r für alle R Abnehmerbündel (siehe Beziehung (5.19) und (5.20), Seite 148),
- gleicher Belastung je Koppelvielfach der Stufe 1 und
- gleicher Belastung aller R Abnehmerbündel (siehe Beziehung (5.21), Seite 148)

werden diejenigen Vektoren $\vec{C}_{1,\eta}^{(g)}$ gewählt, bei denen für die dazugehörigen Richtungsvektoren \vec{TR} die Bedingung (5.22), Seite 153 erfüllt ist, d.h. $\vec{TR} = \vec{TRK}$ gilt. Diese ch. Vektoren werden mit $\vec{C}^{(z,R)}$ gekennzeichnet.

$$\vec{C}^{(z,R)} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{G_1} \end{Bmatrix},$$

Bei den Elementen ist einfachheitshalber der Index (z,R) weggelassen worden.

mit $c_i \in \{0, 1, 2, \dots, (R + 1)^{K_1} - 1\}$.

Die Mächtigkeit MZR, der Vektoren $\vec{C}^{(z,R)}$ ist durch die folgende Formel bestimmt:

$$MZR = M \cdot MTK \cdot MTRK, \quad (5.26)$$

- mit - M nach Beziehung (2.11), Seite 53,
- MTK nach Beziehung (2.16), Seite 63 und
- MTRK nach Beziehung (5.24), Seite 155.

Für die Anzahl der ch. Zustände entsprechend Definition 5-H, Seite 158 wird die Abkürzung $NC^{(z,R)}$ eingeführt. Die Menge der Vektoren $\vec{C}^{(z,R)}$ (gleichbedeutend mit Matrizen $SC^{(z,R)}$) wird mit $\Omega^{(z,R)}$ bezeichnet.

5.5 Die ch. Vektoren (Matrizen) für zweistufige Linkssysteme mit gleicher Bündelgröße N_r und gleicher Bündelbelastung Y_r für einen Teil der R Abnehmerbündel

An Stelle von Beziehung (5.19), Seite 148 gelte jetzt die Beziehung

$$\begin{aligned} k_{r+1} &= k_{r+2} = \dots = k_{r+a}, \\ k_{r+a+1} &= k_{r+a+2} = \dots = k_{r+a+b}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.27)$$

d.h. es haben a Richtungserreichbarkeiten den Wert k_{r+1} , bzw. b Richtungserreichbarkeiten den Wert k_{r+a+1} usw. . Mit der Bedingung b) von Seite 147 folgt dann:

$$\begin{aligned} N_{r+1} &= N_{r+2} = \dots = N_{r+a}, \\ N_{r+a+1} &= N_{r+a+2} = \dots = N_{r+a+b}, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.28)$$

Außerdem gelte analog zu der Beziehung (5.21), Seite 148 die Beziehung

$$\begin{aligned} Y_{r+1} &= Y_{r+2} = \dots = Y_{r+a}, \\ Y_{r+a+1} &= Y_{r+a+2} = \dots = Y_{r+a+b}, \text{ usw. ,} \end{aligned} \quad (5.29)$$

d.h. die Belastungen der a bzw. der b Abnehmerbündel sei ebenfalls gleich.

Bei zweistufigen Linksystemen mit Richtungswahl (für die die Beziehungen (5.27) bis (5.29) von Seite 159 erfüllt sind) können jetzt bei den Zustandsmatrizen S untereinander vertauscht werden:

- die Richtungen $r + 1$ bis $r + a$,
- die Richtungen $r + a + 1$ bis $r + a + b$,
- usw. .

Bei der Elimination von durch Richtungsvertauschung zueinander äquivalenten Zustandsmatrizen S kann man für die Teilbereiche der Richtungsmatrix TR mit gleicher Richtungserreichbarkeit k_r völlig analog zu Abschnitt 5.4, Seite 147 vorgehen.

5.6 Die Ermittlung der ch. Vektoren \vec{C} der Zustandsmatrizen S_α für Strukturen von zweistufigen Linksystemen mit $k_r = I_2 = G_1$
(nur Zeilenvertauschung bei S_α)

Für zweistufige Linksysteme mit Richtungswahl gilt zwischen der Erreichbarkeit K_2 (der Anzahl der Ausgänge eines Koppelvielfachs von Stufe 2) und der Richtungserreichbarkeit k_r die Beziehung (5.1), Seite 129, d.h. es ist

$$K_2 = \sum_{r=1}^R k_r .$$

Mit der Bedingung $k_r = I_2 = G_1$ (5.30)

folgt für diesen Sonderfall von Linksystemstrukturen die

Beziehung $K_2 = R \cdot I_2$. (5.31)

Für die Spaltensumme $s_{.j}$ der Zustandsmatrix S gilt die Beziehung (5.13), Seite 138. Aus (5.13) folgt mit der obigen Beziehung (5.31) für die Spaltensumme der Wertebereich

$$t_j = s_{.j} \in \{ 0, 1, 2, \dots, I_2 \} . \quad (5.32)$$

Nach der obenstehenden Beziehung (5.32) können für diesen Sonder-

fall von Linkssystemstrukturen alle I_2 Eingänge eines Koppelvielfachs j der Stufe 2 gleichzeitig belegt sein. Außerdem gilt wegen $I_2 = k_r$ sogar: alle I_2 Eingänge können in eine bestimmte Richtung r belegt sein. Man kommt damit zu dem folgenden Satz.

Satz 5-h: Auf den linkseitigen Eingängen eines Koppelvielfachs j der Stufe 2 sind alle kombinatorisch möglichen Belegungsmuster - erlaubt -, d.h. technisch sinnvolle Muster, siehe auch Definition 5-B, Seite 139.

Ausgehend von den Bemerkungen in Abschnitt 5.3.1, Seite 145 folgt mit

- den Elementen $c_{\beta,i}$ des ch. Vektore \vec{C}_β nach Beziehung (5.18), Seite 146,
- dem obigen Satz 5-h und
- dem Satz 2-d, Seite 50

der Satz 5-i.

Satz 5-i: Für den in diesem Abschnitt behandelten Sonderfall von zweistufigen Linkssystemstrukturen mit Richtungswahl gilt: Die Sequenzen der Elemente $c_{\beta,i}$ der ch. Vektoren \vec{C}_β können interpretiert werden als "Kombinationen mit Wiederholungen" von G_1 Elementen $c_{\beta,i}$ aus der Zeichenmenge $c_{\beta,i} \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{k_1} - 1\}$. Für i gilt: $i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$. Die Anzahl NC der ch. Vektoren \vec{C}_β ist für Linkssysteme mit $k_r = I_2 = G_1$ gleich der Anzahl aller "Kombinationen mit Wiederholungen" von den G_1 Elementen $c_{\beta,i}$ von \vec{C}_β .

Setzt man in Beziehung (2.13), Seite 55 für a den Wert

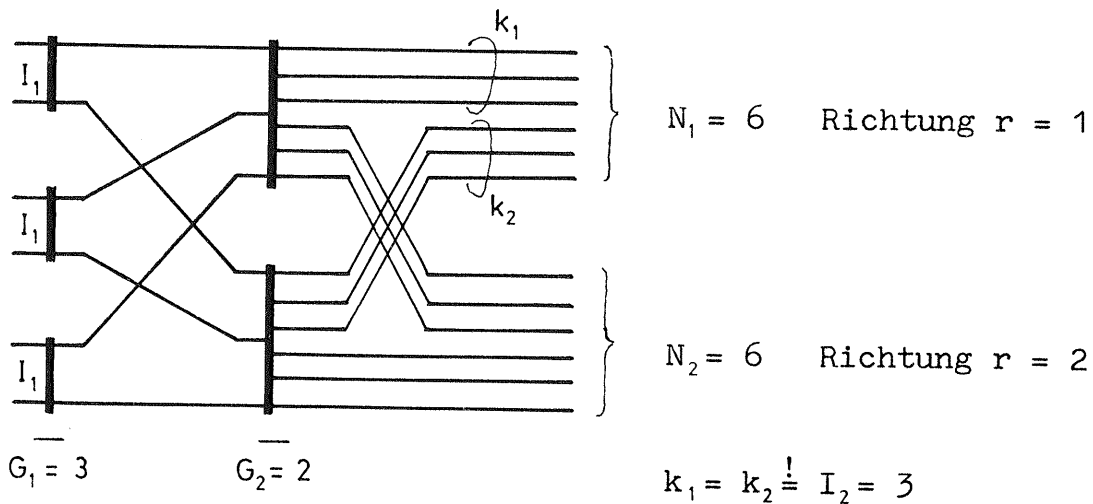
$$a = R^{k_1} - 1 \quad (5.33)$$

ein, so ist damit die Anzahl NC der ch. Vektoren für den in diesem Abschnitt betrachteten Sonderfall von Linkssystemstrukturen ebenfalls bekannt.

Anmerkung: Analog zu Abschnitt 2, Seite 30 wurde hier ebenfalls der Index g , stehend für "geordnete Absuche", wegge-

lassen, da innerhalb dieses Abschnitts keine weitere Unterscheidung der ch. Zustandsmuster notwendig ist.

Beispiel 43: Beispiel für den in diesem Abschnitt behandelten Sonderfall von Linksystemstrukturen. Das analoge Beispiel für Mischwahl ist das Beispiel 17, Seite 55.



Für das oben dargestellte Linksystem erhält man nach Beziehung (2.13), Seite 55 mit a nach Beziehung (5.33), Seite 161 die folgende Anzahl NC von ch. Vektoren \vec{C}_β .

$$NC = 1 + \sum_{n=1}^{G_1} \binom{a + n - 1}{n} ;$$

mit $a = (R + 1)^{k_1} - 1 = (2 + 1)^3 - 1 = 8$

folgt $NC = 1 + 8 + 36 + 120 = 165.$

Anmerkung zu NC: Im betrachteten Zahlenbeispiel gibt es die folgenden Klassen von Zustandsmustern:

Klasse	Anzahl der ch. Zustandsmuster in der jeweiligen Klasse
1	1 Muster mit: alle Elemente $c_{\beta,i}$ von \vec{C}_β gleich Null
2	8 Muster mit: ein Element $c_{\beta,i}$ von \vec{C}_β ungleich Null
3	36 Muster mit: zwei Elemente $c_{\beta,i}$ von \vec{C}_β ungleich Null
4	120 Muster mit: drei Elemente $c_{\beta,i}$ von \vec{C}_β ungleich Null

Klasse	lfd.Nr. β	\vec{c}_β	SC_β^*	SC_β	NRZ_β	M_β
1	1	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	0 0	1 1
2	2	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	1	3
	3	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	2	3
	4	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	3	3
	⋮	⋮			⋮	
	9	$\begin{Bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	8	3
3	10	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	10	3
	11	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	11	6
	12	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	20	3
	⋮	⋮			⋮	
	45	$\begin{Bmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	80	3
4	46	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	91	1
	47	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	92	3
	48	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$	101	3

Die Summe der Mächtigkeiten M_β über alle β ist gleich der Anzahl NE der erlaubten Zustandsmuster. Für den Sonderfall von zweistufigen Linkssystemen mit $k_r = I_2 = G_1$ gilt für die Anzahl NE die Formel:

$$NE = EV = (R + 1)^{G_1 \cdot K_1} \quad (5.35)$$

(EV = Elementarvorrat). Für das in Beispiel 43, Seite 162 beschriebene Linkssystem erhält man

$$NE = 3^{3 \cdot 2} = 729,$$

d.h. es gibt bei diesem Linkssystem 729 erlaubte Zustandsmuster, von denen NC = 165 Zustandsmuster ch. Zustandsmuster (Matrizen bzw. Vektoren) sind.

5.7 Die Ermittlung der ch. Vektoren \vec{C} der Zustandsmatrizen S_α für Strukturen von Linkssystemen mit $k_r < I_2 = G_1$

5.7.1 Der "EU - Algorithmus"

Vorbemerkung: In den Unterabschnitten 5.7.1 bis 5.7.5 wird zunächst nur das Absuchverfahren "geordnetes Absuchen" behandelt. Einfachheitshalber wird jedoch der Index g in diesen Unterabschnitten bei den ch. Zuständen weggelassen.

Für Linkssysteme mit $k_r < I_2 = G_1$ ist die Spaltensumme $s_{.j}$ der Zustandsmatrix S begrenzt, siehe Beziehung (5.13), Seite 138 und Satz 5-a, Seite 138.

Der Satz 5-h, Seite 161 gilt nur bedingt für die ch. Vektoren der hier beschriebenen Linkssysteme, denn

nicht alle kombinatorisch möglichen Belegungsmuster eines Koppelvielfachs j der Stufe 2 sind erlaubte, d.h. technisch sinnvolle Muster, siehe auch Definition 5-B, Seite 139.

Der Satz 5-i, Seite 161 muß jetzt entsprechend geändert werden,

siehe auch analog dazu Satz 2-d, Seite 50.

Ergänzung E5-4: Ergänzung zu Satz 5-i, Seite 161.

Die Anzahl NC der ch. Vektoren \vec{C}_β für Linkssysteme mit

$$k_r < I_2 = G_1$$

ist gleich der Anzahl der "erlaubten Kombinationen mit Wiederholungen" von den G_1 Elementen $c_{\beta,i}$ von \vec{C}_β .

Zur Ermittlung der ch. Vektoren \vec{C} für Linkssysteme mit $k_r < I_2$ kann man jetzt analog wie in Abschnitt 2.7.1, Seite 57 vorgehen. Dort wurden zweistufige Linkssysteme für Mischwahl mit $K_2 < I_2$ beschrieben.

Für die vorgegebenen Zahlenwerte von G_1 , K_1 und k_r ermittelt man zunächst die ch. Vektoren \vec{C} für ein gedachtes Linkssystem mit der Richtungserreichbarkeit

$$\underline{k_1^* = k_2^* = \dots = k_R^* = I_2 = G_1},$$

d.h. man gibt alle kombinatorisch möglichen Zustandsvektoren \vec{C} vor und entfernt jene Zustandsvektoren, die nicht der Bedingung (5.13), Seite 138 und dem Satz 5-a, Seite 138 genügen.

Der Algorithmus, der nach diesem Prinzip arbeitet, wurde schon auf Seite 58 als "EU - Algorithmus" bezeichnet.

5.7.2 Die Ermittlung der Richtungsmatrizen TR

5.7.2.1 Die erlaubten Richtungsmatrizen TR

Ohne den EU - Algorithmus auszukommen heißt wieder:

Die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} müssen vorgegeben werden, denn die Sequenzen der Elemente t_j von \vec{T} sind ja die zulässigen Sequenzen der Spaltensummen $s.j$.

Aus den Vektoren \vec{T} können dann wieder die ch. Vektoren \vec{C} bzw. die ch. Matrizen SC erzeugt werden. Die Begründung für diese Vorgehensweise ist die gleiche wie in Abschnitt 4.7, Seite 125.

Es seien jetzt die Strukturparameter eines zweistufigen Linksystems für Richtungswahl gegeben, d.h. die Parameter

$$G_1, K_1, R \text{ und } k_1, k_2, \dots, k_r, \dots, k_R.$$

Entsprechend den hier betrachteten Linksystemstrukturen sind damit auch die Strukturparameter $I_2 = G_1$ und $G_2 = K_1$ ebenfalls bekannt, siehe Bild 5.1, Seite 129.

Der maximale Wert der Spaltensumme $s_{.j}$ (gleichbedeutend mit t_j) ist bestimmt durch die Beziehung (5.13), Seite 138. Dieser Wert wird jetzt mit IK bezeichnet, d.h. es gilt:

$$IK = \text{MIN} [I_2, K_2]. \quad (5.36)$$

Damit liegen jetzt alle Vektoren \vec{T} und \vec{TK} fest. Explizit erhält man für den allgemeinen Zustandsvektor \vec{TK} , welcher einen momentanen Belegungszustand beschreibt, den folgenden Ausdruck:

	Spalte $j \rightarrow$	1	2	3	K_1	
lfd. Nr.	0	{	0	0	0	}
γ	1	{	1	0	0	}
	2	{	2	0	0	}
	⋮						
	⋮						
	IK	{	IK	0	0	}
	$IK + 1$	{	1	1	0	0	}
	$IK + 2$	{	2	1	0	0	}
	⋮						
	⋮						
	$2 \cdot IK$	{	IK	1	0	0	}
	⋮						
	⋮						
	$(IK+1) \cdot IK$	{	IK	IK	0	0	}
	⋮						
	⋮						
	NTK	{	IK	IK	IK	IK	}

(5.37)

$$\text{mit} \quad \text{NTK} = \sum_{j=1}^{K_1} \binom{IK + j - 1}{j} \quad . \quad (5.38)$$

NTK + 1 ist gleich die Anzahl von "Kombinationen mit Wiederholungen" von K_1 Elementen $tK_j \in \{0, 1, 2, \dots, IK\}$.

Die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} erhält man durch Permutierung der Elemente tK_j von \vec{TK} . Für die Anzahl der Permutationen der Elemente $tK_{\gamma,j}$ des Vektors \vec{TK}_{γ} gilt die Formel (2.12), Seite 53.

Bei Richtungswahl reicht jetzt die Anzahl tK_j , die Anzahl der Belegungen in Spalte j , zur Ermittlung der ch. Vektoren \vec{C} nicht aus, sondern es müssen auch die Richtungsmatrizen TR (TR: siehe Definition 5-C Seite 141) bekannt sein.

Die Richtungsmatrizen TR beschreiben ebenfalls einen allgemeinen Zustand. Aus dem Element $tR_{r,j}$ von TR geht hervor, wieviele Elemente $s_{i,j}$ in der Spalte j der Zustandsmatrix S den Wert $s_{i,j} = r$ haben, mit anderen Worten: Wieviel Ausgänge (Eingänge) des Koppelvielfachs j von Stufe 2 in Richtung r belegt sind.

Zwischen den Elementen t_j der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} und den Elementen $tR_{r,j}$ der Richtungsmatrizen TR besteht die Beziehung (5.15), Seite 142, d.h. es gilt

$$t_j = \sum_{r=1}^R tR_{r,j} \quad .$$

Entsprechend der Definition 5-C, Seite 141 haben die Elemente $tR_{r,j}$ von TR den Wertebereich

$$tR_{r,j} \in \{0, 1, 2, \dots, k_r\} \quad .$$

Das Element t_j (Spaltensumme der Spalte j von der Zustandsmatrix S) ist also ebenfalls gleich der Spaltensumme der Spalte j von der Richtungsmatrix TR.

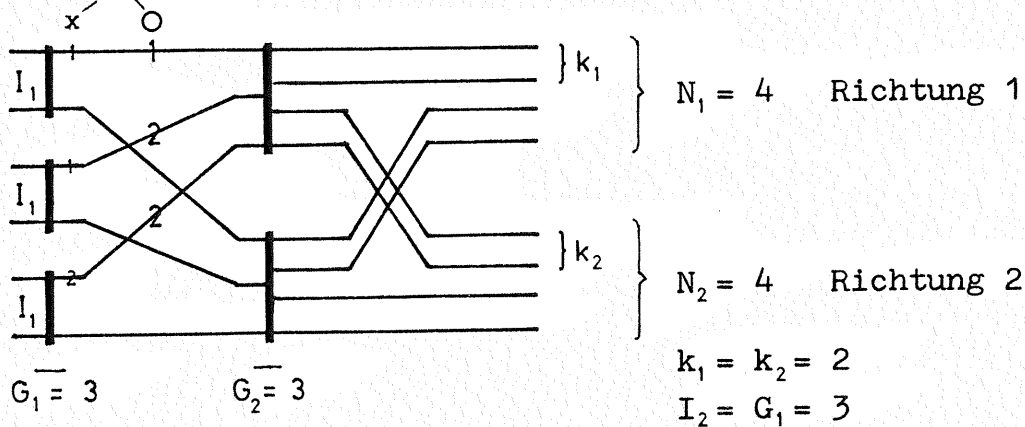
Es können jetzt verschiedene Zahlenfolgen der Elemente $tR_{r,j}$ der Spalte j von TR zu ein und demselben Wert t_j führen. Da der Wert von t_j entsprechend Beziehung (5.36), Seite 167 begrenzt ist, folgt:

Die zulässigen Zahlenfolgen der Spalte j von TR sind ebenfalls durch Beziehung (5.36) begrenzt. Es wird deshalb die folgende Definition 5-I, Seite 169 eingeführt.

Definition 5-I: Alle Richtungsmatrizen TR, deren K_1 Spalten der Beziehung (5.36), Seite 167 genügen, sind erlaubte Richtungsmatrizen. Erlaubte Richtungsmatrizen sind alle technisch sinnvolle Richtungsmatrizen.

Beispiel 44: Beispiel für technisch sinnvolle und technisch sinnlose Richtungsmatrizen TR.

2 Belegungsmuster eingezeichnet



Entsprechend Beziehung (5.36), Seite 167 folgt: $IK = I_2 = \underline{3}$. Von den $K_2 = k_1 + k_2 = 4$ Ausgängen eines Koppelvielfachs j der Stufe 2 können also maximal drei Ausgänge belegt sein.

Im obigen Linksystem sind jetzt zwei verschiedene Belegungsmuster eingetragen, die beide die gleiche Spaltensumme $t_{j=1} = 3$ in Spalte $j = 1$ (Koppelvielfach 1 von Stufe 2) haben.

Zustandsmatrix des mit x gekennzeichneten Belegungsmusters

$$S_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Zustandsmatrix des mit o gekennzeichneten Belegungsmusters

$$S_o = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Die Richtungsmatrizen TR werden jetzt entsprechend Beziehung (5.14), Seite 142 berechnet.

$$TR_x = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$TR_o = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Bildet man die Spaltensummen in den Richtungsmatrizen TR_x und TR_o ,

dann erhält man die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} . Sie lauten:

$$\vec{T}_x = \{3 \quad 0\} \quad \text{und} \quad \vec{T}_o = \{3 \quad 0\}.$$

Die beiden Richtungsmatrizen führen also zu dem gleichen allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} . Da die Richtungsmatrizen TR_x und TR_o der Beziehung (5.36), Seite 167 genügen, sind sie entsprechend Definition 5-I, Seite 169 "erlaubte Richtungsmatrizen".

Für die Richtungsmatrix

j	1	2	
TR	=	$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$	— r = 1 unerlaubte — r = 2 Richtungsmatrix

folgt:

$$\sum_{r=1}^2 tR_{r,j} = 4.$$

Bei dem betrachteten Linksystems (siehe Seite 169) sind jedoch maximal $IK = 3$ Belegungen in der Spalte j technisch sinnvoll. Mehr als drei Belegungen in einem Koppelvielfach j der Stufe 2 würden zu Doppelbelegungen von Zwischenleitungen führen. Doppelbelegungen sind jedoch technisch nicht sinnvoll. Die oben dargestellte Richtungsmatrix ist damit eine unerlaubte Matrix.

Entsprechend der Beziehung (5.36), Seite 167 gibt es für die maximale Anzahl von Belegungen in Spalte j der Zustandsmatrix S bzw. der Richtungsmatrix TR zwei Möglichkeiten:

$$IK = I_2 \quad \text{oder} \quad IK = K_2.$$

Linkssysteme mit $IK = K_2$:

In diesem Fall sind entsprechend

- den vorgegebenen Richtungerreichbarkeiten k_r und
- dem maximalen Wert eines Elementes $tR_{r,j}$ der Richtungsmatrix TR (siehe Definition 5-C, Seite 141)

alle kombinatorisch möglichen Zahlenfolgen der Elemente $tR_{r,j}$ in der Spalte j der Richtungsmatrix TR erlaubt.

Anzumerken ist noch, daß die Richtungserreichbarkeiten k_r für alle $G_2 = K_1$ Koppelvielfache der Stufe 2 voraussetzungsgemäß einheitlich sein sollen, siehe Abschnitt 5.1, Seite 129. Damit folgt für den Wertebereich der K_1 Elemente $t_{R_r, j}$ der Zeile r von TR:

$$t_{R_r, j} \in \{0, 1, 2, \dots, k_r\},$$

$$\text{mit } j \in \{1, 2, 3, \dots, K_1\}.$$

Entsprechend der Definition 5-C, Seite 141 der Richtungsmatrix TR gilt für die Ordnung der Richtungserreichbarkeiten k_r die Beziehung

$$k_1 \cong k_2 \cong \dots \cong k_r \cong \dots \cong k_R. \quad (5.39)$$

5.7.2.2 Die Richtungsmatrizen TR für Linkssysteme mit $IK = K_2$ und gleichen Richtungserreichbarkeiten $k_r = k$ in alle Richtungen $r \in \{1, 2, \dots, R\}$

Gleiche Richtungserreichbarkeiten $k_r = k$ in alle R Richtungen führen zugleich großen Abnehmerbündeln N_r in alle Richtungen R , siehe Beziehung (5.20) Seite 148.

Für die Elemente $t_{R_r, j}$ der Richtungsmatrizen TR der Linkssysteme mit $k_r = k$ erhält man den Wertebereich

$$t_{R_r, j} \in \{0, 1, 2, \dots, k\} \quad (5.40)$$

$$\text{mit } r \in \{1, 2, 3, \dots, R\} \text{ und}$$

$$j \in \{1, 2, 3, \dots, K_1\}.$$

Die Anzahl NTR der Richtungsmatrizen TR ist gleich der Zahl der "Permutationen mit Wiederholungen" der $R \cdot K_1$ Elemente $t_{R_r, j}$ mit " $k + 1$ " Zeichen (siehe obige Beziehung (5.40)), d.h. es gilt:

$$NTR = EV = (k + 1)^{R \cdot K_1}. \quad (5.41)$$

Zur einfacheren Darstellung werden jetzt die R Zeilen der Richtungsmatrizen TR nebeneinander geschrieben. Explizit erhält man damit den folgenden Ausdruck (5.42), Seite 172 für die Matrizen TR.

lfd. Nr. μ	Zeile		Zeile		Zeile	
	$r = 1$	$r = 2$	$r = 2$	$r = 2$	$r = R$	$r = R$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
⋮						
⋮						
⋮						
k	0	0	0	0	0	0
k + 1	1	0	0	0	0	0
⋮						
⋮						
⋮						
2 · k	k	0	0	0	0	0
⋮						
⋮						
⋮						
(k+1) · k	k	0	0	0	0	0
⋮						
⋮						
⋮						
NTR-1	k	0	0	0	0	0

1, 1 1, 2 ... 1, K_1 | 2, 1 2, 2 ... 2, K_1 | ... | R, 1 R, 2 ... R, K_1

Index r, j der Elemente tr \longrightarrow

(5.42)

Richtungs-
matrizen
 TR_μ
Die R Zeilen
von TR sind
nebeneinander
dargestellt.

Richtungsvertauschung:

Ist bei den in diesem Abschnitt beschriebenen Linksystemen Richtungsvertauschung möglich (siehe Abschnitt 5.4.1, Seite 147), dann benötigt man nur jene Richtungsmatrizen TR, deren Richtungsvektoren \overrightarrow{TR} gleich \overrightarrow{TRK} Vektoren sind (siehe Abschnitt 5.4.2, Seite 154). Für die Richtungsvektoren \overrightarrow{TRK} erhält man mit der Abkürzung

$$E = (k + 1)^{k_1} - 1 \quad (5.43)$$

explizit:

	0	1	2	...	lfd. Nr. E	E+1	...	2·E	2·E+1NTRK
tRK ₁	0	1	2		E	E		E	E	E
tRK ₂	0	0	0		0	1		1	2	E
tRK ₃	0	0	0		0	0		0	0	E
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
tRK _r	0	0	0		0	0		0	0	E
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	⋮	⋮
tRK _R	0	0	0		0	0		0	0	E

(5.44)

In dem obigen Ausdruck (5.44) sind alle "Kombinationen mit Wiederholungen" der R Elemente tRK_r enthalten und es gilt:

$$tRK_r \in \{0, 1, 2, \dots, E\} .$$

Für die Anzahl NTRK der Richtungsvektoren \overrightarrow{TRK} erhält man damit entsprechend Anhang A1, Seite 307 bzw. analog zu Formel (2.13) Seite 55 die Beziehung:

$$NTRK = 1 + \sum_{r=1}^R \binom{E + r - 1}{r} . \quad (5.45)$$

Aus den Richtungsvektoren nach der obigen Beziehung (5.44) erhält man mit Hilfe der dazugehörigen Richtungsmatrizen TR*

die Richtungsmatrizen TR , siehe Abschnitt 5.2.4 Seite 141 und Beispiel 39, Seite 144.

"Zufällige Auswahl":

Wird das Absuchverfahren "zufällige Auswahl" betrachtet, dann werden

bei den in diesem Abschnitt behandelten Linksystemen

nur jene Richtungsmatrizen TR - aus der Menge der Matrizen TR nach Beziehung (5.42), Seite 172 - benötigt, für die die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} gleich \vec{TK} Vektoren sind, siehe auch Abschnitt 5.3.2, Seite 146.

5.7.3 Die Partitionen bei zweistufigen Linksystemen
für Richtungswahl

Der Begriff "Partitionen" ist im Anhang A3, Seite 312 erläutert. Bei zweistufigen Linksystemen mit Mischwahl wurde gezeigt, daß die Sequenzen der Elemente der ch. Vektoren \vec{C}_β ,

die ein und denselben allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} haben, Partitionen derselben Summe SP sind. Für die Summe SP gilt bei Mischwahl die Beziehung (2.18), Seite 65 und für die aus SP hervorgehenden Partitionen gilt der Satz 2-g, Seite 65.

In Abschnitt 5.3, Seite 145 wurde gezeigt, daß für die ch. Vektoren \vec{C}_β von zweistufigen Linksystemen mit Richtungswahl ebenfalls die Bedingung (2.10), Seite 48 gilt.

Für den Wertebereich der Elemente $c_{\beta,i}$ der ch. Vektoren gilt jetzt jedoch die Beziehung (5.18), Seite 146, d.h. es gilt:

$$c_{\beta,i} \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{K_1} - 1\} .$$

Bildet man nun die Summe

$$SP_\mu = \sum_{j=1}^{K_1} \sum_{r=1}^R tr_{\mu,r,j} \cdot pv_j \cdot r = \sum_{j=1}^{K_1} \sum_{r=1}^R tr_{\mu,r,j} \cdot (R+1)^{j-1} \cdot r , \quad (5.46)$$

so folgt damit analog zu Satz 2-g Seite 65 der Satz 5-j.

Satz 5-j:

Die Elemente $c_{\mu,\beta,i}$

der aus den Richtungsmatrizen TR_{μ} hervorgehenden ch. Vektoren $\vec{C}_{\mu,\beta}$

bilden "Partitionen der Länge n ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" zur Summe SP_{μ} . Für SP_{μ} gilt die Beziehung (5.46), Seite 174. NP_{μ} sei die Anzahl der Partitionen, die aus SP_{μ} hervorgehen. NTR ist die Anzahl der erlaubten Richtungsmatrizen TR (siehe z.B. Seite 171), die durch die Strukturparameter G_1, K_1, R und k_r bestimmt ist. Für die Indizes gilt dann:

$$\begin{aligned}\mu &\in \{1, 2, \dots, NTR\} \\ \beta &\in \{1, 2, \dots, NP_{\mu}\} \\ n &\in \{MAX [t_{\mu,j}], \dots, G_1\}. \\ MAX [t_{\mu,j}] &: \text{siehe Seite 65.}\end{aligned}$$

Der Satz 2-h Seite 66 gilt ebenfalls bei Richtungswahl.

5.7.4 Die Ordnungsmatrix Φ bei Richtungswahl

5.7.4.1 Zweistufige Linkssysteme mit gleicher Bündelgröße N_r für alle Richtungen $r \in \{1, 2, \dots, R\}$

Die Eigenschaften der ch. Vektoren \vec{C} wurden bereits in dem Abschnitt 5.4, Seite 147 beschrieben. Auch bei Richtungswahl ist es wiederum zweckmäßig für die ch. Vektoren \vec{C} ein Ordnungsschema anzugeben.

Man kann bei Richtungswahl das gleiche Schema, die Ordnungsmatrix Φ (siehe Definition, 2-K Seite 68), verwenden wie bei Mischwahl, wenn man folgendes berücksichtigt:

- statt K_2 bei Mischwahl jetzt k_r verwenden und
- statt dem allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} bei Mischwahl jetzt

die Richtungsmatrix TR verwenden.

Für die Ordnungsmatrix Φ entsprechend der Beziehung (2.20), Seite 68 wird jetzt die folgende Definition eingeführt.

Definition 5-J: Die $G_1 \cdot k_r$ dimensionale Matrix Φ sei die Ordnungsmatrix für die ch. Vektoren \vec{C} (Partitionen) des zweistufigen Linksystems für Richtungswahl mit den Strukturparametern:

$$G_1, K_1 = G_2 \text{ und die Richtungserreichbarkeit } k_r = k \text{ für alle Richtungen } r \in \{1, 2, \dots, R\} .$$

Die Elemente von Φ werden mit $\varphi_{n,m}$ bezeichnet, sie sind Teilmengen von $\Omega^{(g)}$ ($\Omega^{(g)}$: siehe Seite 146). Die ch. Vektoren \vec{C} , die zu $\varphi_{n,m}$ gehören, haben die folgenden Eigenschaften:

- 1) Die Partitionen haben genau die Länge n, d.h. genau n Elemente c_i der ch. Vektoren sind ungleich Null, mit anderen Worten: Genau in n Koppelvielfachen der Stufe 1 sind Belegungen vorhanden.
- 2) Mindestens für ein Element $tr_{r,j}$ der Richtungsmatrix TR gilt: $tr_{r,j} = m$, mit anderen Worten: Mindestens zu einem Koppelvielfach der Stufe 2 sind in Richtung r -m Belegungen durchgeschaltet.

Es sind damit mindesten m Elemente des ch. Vektors \vec{C} ungleich Null.

Für die anderen " $K_1 \cdot R - 1$ " Elemente von TR gilt: $tr_{r,j} \leq m$. Im folgenden wird von der "Klasse m" der Richtungsmatrizen TR gesprochen, siehe Seite 177.

Für die Bereiche I und II der Ordnungsmatrix Φ (siehe Beziehung (2.20), Seite 68) sind die Bemerkungen von Seite 70 ebenfalls gültig.

In diesem Abschnitt soll die Richtungserreichbarkeit k_r einheitlich sein für alle R Abnehmerbündel (also einheitliche Bündelgröße N_r). Mit der Anzahl m, der Zahl von Belegungen im Koppelvielfach j der Stufe 2 in Richtung r, folgt: Die maximale Zahl von Belegungen in der Klasse m (m: obige Anzahl) erhält man dann, wenn in allen G_2 Koppelvielfachen der Stufe 2 und in allen Rich-

tungen R jeweils m Belegungen vorhanden sind. Diese maximale Anzahl wird mit f_m bezeichnet (siehe auch Seite 70), und es gilt damit:

$$f_m = G_2 \cdot m \cdot R, \quad (5.47)$$

$$\text{mit } m \in \{1, 2, \dots, k_r\} \text{ und} \\ r \in \{1, 2, \dots, R\}.$$

Diese f_m Belegungen können jetzt maximal von f_m Koppelvielfachen der Stufe 1 kommen. Für Linkssysteme mit $G_1 > f_m$ erhält man damit keine weiteren ch. Zustände (siehe Bereich II von Φ auf Seite 68).

Es sei nun NTRM die Anzahl der Richtungsmatrizen der Klasse m. Die Richtungsmatrizen der Klasse m sind:

Spalte j: →	1	2	...	K ₁	Zeile r, gleich Richtung r
$TR_1 =$	m	0	...	0	1
	0	0	...	0	2

	0	0	...	0	R
$TR_2 =$	m	1	...	0	1
	0	0	...	0	2

	0	0	...	0	R

$TR_{NTRM} =$	m	m	...	m	1
	m	m	...	m	2

	m	m	...	m	R

5.7.4.2 Zweistufige Linkssysteme mit beliebiger Richtungserreichbarkeit k_r

Nach der Definition 5-C der Richtungsmatrizen TR, Seite 141 gilt stets:

$$k_1 \cong k_2 \cong \dots \cong k_r \cong \dots \cong k_R . \quad (5.48)$$

Die Richtungserreichbarkeit k_1 (Erreichbarkeit in Richtung 1) hat damit stets den größten Wert aller R Richtungserreichbarkeiten k_r .

Im folgenden geht man zunächst von dem einfacheren Fall der Linkssystemstruktur aus, für die gilt:

$$k_1^* = k_2^* = \dots = k_r^* = \dots = k_R^* = k_1 ,$$

d.h. man ermittelt die Ordnungsmatrix Φ^* für ein gedachtes Linkssystem, welches in alle R Richtungen eine einheitliche Richtungserreichbarkeit $k_r^* = k_1$ hat, entsprechend Abschnitt 5.7.4.1, Seite 175.

Ausgehend von diesem Ordnungsschema Φ^* werden jetzt jene Zustandsmuster entfernt, die - bei dem realen Linkssystem mit den vorgegebenen Richtungserreichbarkeiten k_r - nicht erlaubt sind. Im realen System sind jene Zustandsmuster nicht erlaubt, für die gilt:

$$k_r < k_r^* , \quad (5.49)$$

d.h. alle Muster, bei denen die reale Richtungserreichbarkeit k_r kleiner ist als die Richtungserreichbarkeit k_r^* des gedachten Linksystems. Das bedeutet also, daß in den Untermengen $\varphi_{n,m}^*$ der Matrix Φ^* alle Muster entfernt werden müssen, für die die Anzahl m - die Zahl der Belegungen je Koppelvielfach j der Stufe 2 in Richtung r - größer ist als das reale k_r , d.h. für die gilt:

$$m > k_r , \quad (5.50)$$

$$\text{mit: } r \in \{1, 2, \dots, R\} .$$

Der Teil der Ordnungsmatrix Φ^* , für deren Zustandsmuster die Bedingung " $m \cong k_r$ " gilt, ist die gesuchte Ordnungsmatrix Φ des realen Linksystems.

5.7.5 Ordnungshierarchie für zweistufige Linkssysteme mit Richtungswahl

Es sollen hier nur zweistufige Linkssysteme für Richtungswahl mit $k_r = k = \text{konstant}$, d.h. k_r ist einheitlich in alle Richtungen, behandelt werden. Es werden jetzt also Linkssysteme mit gleicher Bündelgröße N_r in alle R Richtungen betrachtet. Außerdem soll auch die Belastung Y_r in alle R Richtungen gleich groß sein, siehe Abschnitt 5.4, Seite 147.

Bei Linkssystemen mit ungleichen Richtungserreichbarkeiten k_r kann dann entsprechend Abschnitt 5.7.4.2 Seite 178 vorgegangen werden.

Für zweistufige Linkssysteme mit Mischwahl wurde in Abschnitt 2.8, Seite 72 gezeigt:

Man ordnet zweckmäßigerweise Linkssystemstrukturen so, daß je untersuchte Gruppe von Linkssystemstrukturen die Erreichbarkeit K_1 ein und denselben Wert hat:

z.B. Linkssysteme mit $K_1 = 2$ und $G_1 = 1, 2, \dots$, $G_2 = K_1$ und $K_2 = 1, 2, \dots$.

Bei Richtungswahl kommt noch ein Ordnungsparameter hinzu:

Die Anzahl der Richtungen R .

Berücksichtigt man, daß jetzt für die Ordnungsmatrix Φ die Definition 5-J, Seite 176 gilt, dann erhält man - bei fest vorgegebener Anzahl R von Richtungen (Abnehmerbündel), z.B. $R = 2$ - die gleichen Aussagen wie in Abschnitt 2.8.1 Seite 72.

Des weiteren können bei zweistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl (ausgehend von der Definition 5-J, Seite 176) die Definition 2-L für die Mächtigkeitmatrix des Ranges Θ (siehe Seite 74) und die Definition 2-M für die Mächtigkeitenmatrix Ψ (siehe Seite 78) analog übernommen werden.

Setzt man in die Beziehung (2.27), Seite 76 für a den Wert

$$a = (R + 1)^{K_1} - 1 \quad (5.51)$$

ein, so gilt die Beziehung (2.27) ebenfalls für Richtungswahl.

5.7.6 Die Ermittlung der Partitionen bei Richtungswahl

Setzt man jetzt in Abschnitt 3, Seite 89

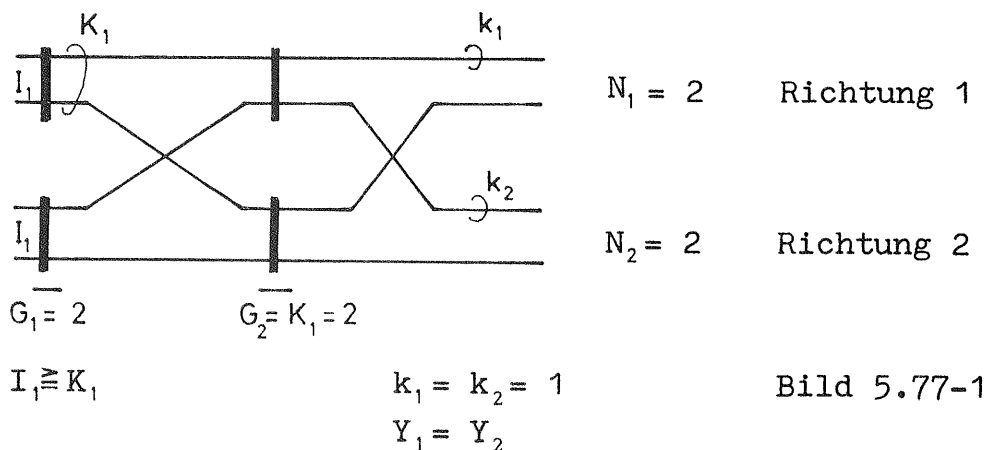
- für die Erreichbarkeit K_2 die Richtungserreichbarkeit k_r und
- für den allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} die Richtungsmatrix TR

ein, so verläuft die Ermittlung der Partitionen bei Richtungswahl analog zu der Ermittlung der Partitionen bei Mischwahl.

5.7.7 Darstellung der Reduktionsarten an Hand eines Beispiels

Zur Darstellung der Reduktionsarten wird das folgende zweistufige Linkssystem für Richtungswahl gewählt.

Beispiel 45:



Dieses gegebene kleine Linkssystem reicht bereits zur Darstellung der Reduktionsarten aus.

Bei dem oben dargestellten Linkssystem gibt es $NE = 49$ erlaubte Zustandsmuster, d.h. 49 verschiedene Zustandsmatrizen S . Diese 49 Matrizen S sind in der nachstehenden Tabelle 5.77-1, Seite 181-183 aufgelistet. In der Tabelle 5.77-1 sind außerdem die

- Zustandsmatrix S^* (siehe Abschnitt 5.2.1, Seite 130),
- der Zustandsvektor \vec{S} (siehe Abschnitt 5.2.1, Seite 130),
- die Richtungsmatrizen TR und TR_r , sowie der Richtungsvektor \vec{TR} (siehe Abschnitt 5.2.4, Seite 141) und der
- allgemeine Zustandsvektor \vec{T} (siehe Seite 136)

für jede Zustandsmatrix S angegeben.

Spalte	I							II	III	IV	
	lfd.Nr.α	S_{α}	S_{α}^*	\vec{S}_{α}	TR	TR*	\overline{TR}	\vec{T}	$\vec{S}=\vec{C}^{(g)}$	$\vec{T}=\vec{TK}$	$\overline{TR}=\overline{TRK}$
1		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{0\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{0\}$	$\{0 \ 0\}$	x	x	x
2		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{1\}$	$\{1 \ 0\}$	x	x	x
3		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\{1\}$						x	x
4		$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{2\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\{0\}$	$\{1 \ 0\}$	x	x	
5		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\{2\}$						x	
6		$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{3\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{2\}$	$\{0 \ 1\}$	x		x
7		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\{3\}$							x
8		$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{6\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\{2\}$	$\{0 \ 1\}$	x		
9		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\{6\}$							
10		$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{4\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{3\}$	$\{1 \ 1\}$	x	x	x
11		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\{4\}$						x	x
12		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\{1\}$						x	x
13		$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\{3\}$					x	x	x
14		$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{8\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\{3\}$	$\{1 \ 1\}$	x	x	
15		$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\{8\}$						x	
16		$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\{2\}$						x	
17		$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\{6\}$					x	x	
18		$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\{7\}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\{1\}$	$\{1 \ 1\}$	x	x	

Spalte	I							II	III	IV
	lfd.Nr.α	S_α	S_α^*	\bar{S}_α	TR	TR*	\overline{TR}	\bar{T}	$\bar{S}=\bar{C}^{(g)}$	$\bar{T}=\overline{TK}$
19	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$	{0}	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	{1}	{1 1}		x	
20	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$	{1}						x	
21	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	{6}					x	x	
22	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	{5}	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	{2}	{1 1}	x	x	x
23	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$	{0}						x	x
24	$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$	{2}						x	x
25	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$	{3}					x	x	x
26	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$	{1}	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	{1}	{2 0}		x	x
27	$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	{2}					x	x	x
28	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$	{3}	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	{2}	{0 2}			x
29	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$	{6}					x	x	x
30	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	{5}	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	{3}	{2 1}	x	x	x
31	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$	{1}						x	x
32	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$	{4}					x	x	x
33	$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$	{2}						x	x
34	$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	{8}	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	{1}	{2 1}	x	x	
35	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$	{1}						x	
36	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$	{5}						x	

Spalte	I							II	III	IV
lfd,Nr.α	S_α	S_α^*	\vec{S}_α	TR	TR*	\vec{TR}	\vec{T}	$\vec{S}=\vec{C}^{(s)}$	$\vec{T}=\vec{TK}$	$\vec{TR}=\vec{TRK}$
37	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$	{6}	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$	{2 1}	x	x	
38	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$	{4}	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$	{1 2}			x
39	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$	{6}					x		x
40	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$	{7}					x		x
41	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$	{3}							x
42	$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$	{8}	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$	{1 2}	x		
43	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$	{3}							
44	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$	{5}							
45	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$	{6}					x		
46	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$	{4}	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$	{2 2}		x	x
47	$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$	{8}					x	x	x
48	$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$	{5}						x	x
49	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$	{7}					x	x	x

Seite 181 bis 183: **Tabelle 5.77-1**

Anmerkungen zu der obenstehenden Tabelle: Spaltengewicht bei der Zustandsmatrix S^* gleich 3^{j-1} ; Spaltengewicht bei der Richtungsmatrix TR^* gleich 2^{j-1} .

Die Zustandsmatrizen sind in der obigen Tabelle nach gleichen Richtungsmatrizen TR geordnet. Es reicht damit aus, die Richtungsmatrizen TR und die daraus abgeleiteten Matrizen TR^* und Vektoren

\vec{TR} nur für jeweils eine Zustandsmatrix S anzugeben. Dadurch wird die Tabelle 5.77-1 etwas übersichtlicher.

Des weiteren gilt jetzt für die Spalten I bis IV von Tabelle 5.77-1, Seite 181 - 183:

Spalte I: Gesamtheit, d.h. die Menge Ω der erlaubten Zustandsmatrizen S (siehe Definition, 5-B Seite 139) des auf Seite 180 dargestellten Linksystems. Außerdem sind in Spalte I die aus S abgeleiteten Zustandsbeschreibungen S^* , \vec{S} , TR , TR^* , \vec{TR} und \vec{T} angegeben.

Spalte II: Für die mit x gekennzeichneten Zustandsmatrizen S der Spalte I - gleiche Zeile - gilt:

$$\vec{S} = \vec{C}^{(g)}, \text{ d.h. es ist } s_1 \geq s_2 ;$$

diese Zustandsmatrizen sind damit aus der Menge $\Omega^{(g)}$, siehe Abschnitt 5.3.1, Seite 145.

Spalte III: Für die mit x gekennzeichneten Zustandsmatrizen S der Spalte I - gleiche Zeile - gilt:

$$\vec{T} = \vec{TK}, \text{ d.h. es ist } t_1 \geq t_2, \text{ siehe Seite 60.}$$

Spalte IV: Für die mit x gekennzeichneten Zustandsmatrizen S der Spalte I - gleiche Zeile - gilt:

$$\vec{TR} = \vec{TRK}, \text{ d.h. es ist } tr_1 \geq tr_2, \text{ siehe Seite 154.}$$

Insgesamt kann man damit der Tabelle 5.77-1, Seite 181-183 den folgenden Sachverhalt entnehmen:

- Wie bereits oben erwähnt, ist in der Spalte I die Menge Ω der erlaubten Zustandsmuster (Zustandsmatrizen S) aufgelistet.
- Die in der Spalte II mit einem x gekennzeichneten Zustandsmatrizen sind die ch. Zustandsmuster bei "geordneter Absuche", denn nur für diese Zustandsmatrizen S gilt für die Elemente der dazugehörenden Zustandsvektoren \vec{S}

$$s_1 \geq s_2, \text{ d.h. es gilt : } \vec{S} = \vec{C}^{(g)}.$$

Die Menge dieser Zustandsmuster wird mit $\Omega^{(g)}$ bezeichnet, siehe Abschnitt 5.3.1, Seite 145.

- Zustandsmatrizen S, die in den Spalten II und III mit x gekennzeichnet sind, sind die ch. Zustandsmuster bei "zufälliger Auswahl", denn nur für diese Zustandsmatrizen sind die folgenden Bedingungen erfüllt:
 - Für die Elemente der Zustandsvektoren \vec{S} gilt: $s_1 \cong s_2$ und
 - für die Elemente der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} gilt: $t_1 \cong t_2$, daraus folgt also $\vec{T} = \vec{TK}$ (siehe Seite 60).

Für die zu diesen Zustandsmatrizen S gehörenden Zustandsvektoren folgt damit:

$$\vec{S} = \vec{C}_{1,\eta}^{(g)} = \vec{C}^{(z)}.$$

Die Menge der oben genannten Zustandsmuster wird mit $\Omega^{(z)}$ bezeichnet, siehe Abschnitt 5.3.2, Seite 146.

- Zustandsmatrizen S, die in den Spalten II, III und IV mit x gekennzeichnet sind, sind die ch. Zustandsmuster bei "zufälliger Auswahl" und (der hier zulässigen) Richtungsvertauschung, denn nur für diese Zustandsmatrizen sind die folgenden Bedingungen erfüllt:
 - Für die Elemente der Zustandsvektoren \vec{S} gilt: $s_1 \cong s_2$ und
 - für die Elemente der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} gilt gilt: $t_1 \cong t_2$ und
 - für die Elemente der Richtungsvektoren \vec{TR} gilt: $tR_1 \cong tR_2$, daraus folgt also $\vec{TR} = \vec{TRK}$ (siehe Seite 154).

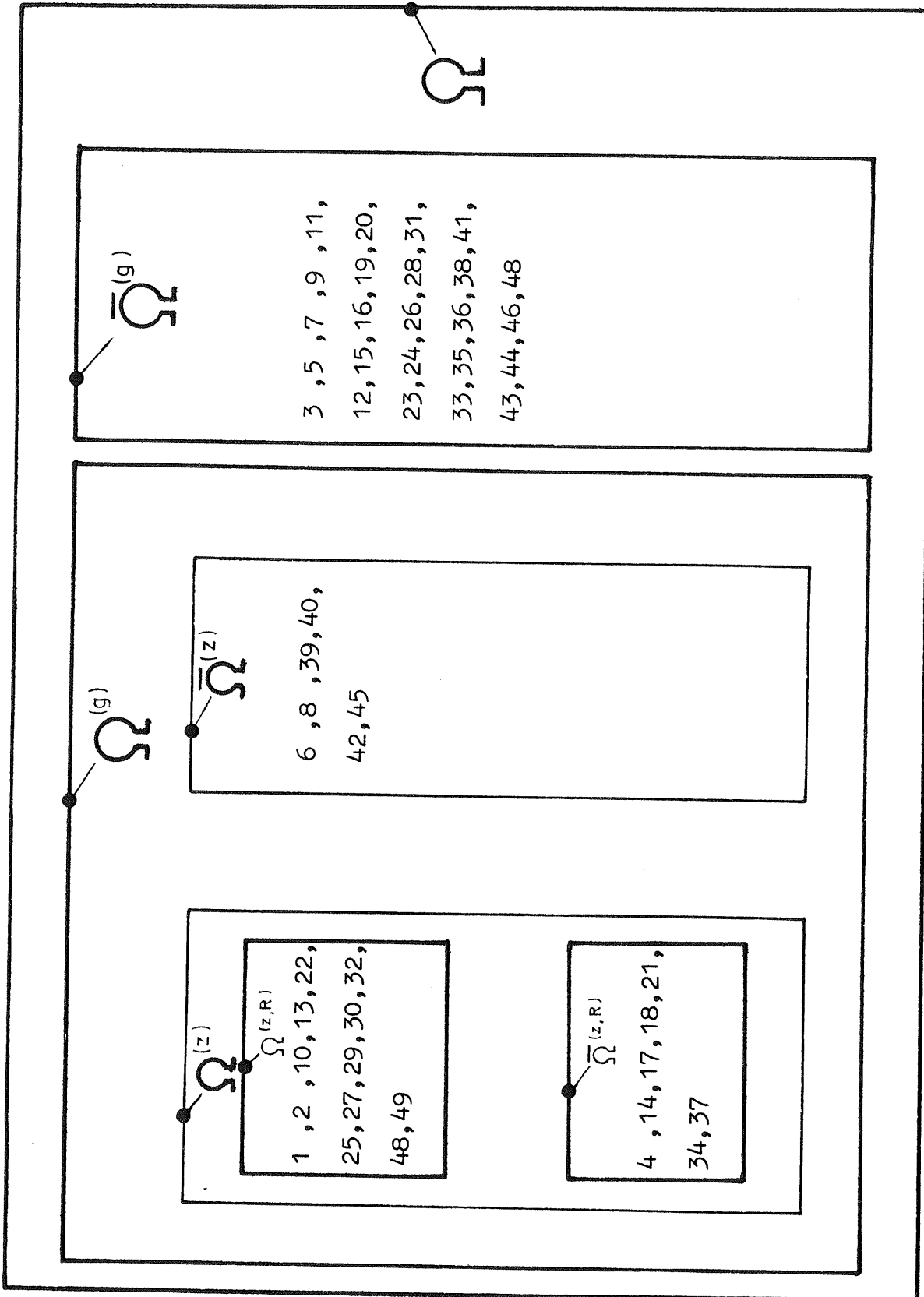
Für die zu diesen Zustandsmatrizen S gehörenden Zustandsvektoren folgt damit:

$$\vec{S} = \vec{C}^{(z,R)}.$$

Die Menge der oben genannten Zustandsmuster wird mit $\Omega^{(z,R)}$ bezeichnet, siehe Abschnitt 5.4.5, Seite 158.

Im Bild 5.77-2, Seite 186 sind jetzt diese Ω - Mengen dargestellt, d.h. es sind die lfd.Nr. der Zustandsmatrizen von Tabelle 5.77-1, Seite 181 - 183 angegeben, die zu den jeweiligen Mengen gehören. Bei der Darstellung der Mengen geht man jetzt zweckmäßigerweise in

umgekehrter Reihenfolge vor als auf den Seiten 184/185 erläutert.



Beschreibung zu Bild 5.77-2, Seite 186:

- Die Menge der Zustandsmatrizen S, die in der Tabelle 5.77-1, Seite 181 - 183 gekennzeichnet sind mit x in

Spalte II und Spalte III und Spalte IV

ist die Menge $\Omega^{(z,R)}$. Die Menge $\Omega^{(z,R)}$ ist definitionsgemäß (siehe Seite 158) die Menge der ch. Zustandsmuster bei "zufälliger Auswahl" und (der hier zulässigen) Richtungsvertauschung. Der Rang des linearen Zustandsgleichungssystems ist in diesem Fall am niedrigsten.

- Die Menge der Zustandsmatrizen S, die in der Tabelle 5.77-1, Seite 181 - 183 gekennzeichnet sind mit x in

Spalte II und Spalte III

ist die Menge $\Omega^{(z)}$. Es gilt: $\Omega^{(z)}$ ist die Vereinigung der Menge $\Omega^{(z,R)}$ und jenem Anteil der Zustandsmatrizen S, die nur in Spalte II und II mit x gekennzeichnet sind (Zustandsmatrizen mit der lfd. Nr. 4,14,17,...). Die Menge $\Omega^{(z)}$ ist die Menge der ch. Zustandsmuster bei "zufälliger Auswahl".

- Die Menge der Zustandsmatrizen S, die in der Tabelle 5.77-1, Seite 181 - 183 gekennzeichnet sind mit x in

Spalte II,

ist die Menge $\Omega^{(g)}$. Es gilt: $\Omega^{(g)}$ ist die Vereinigung der Menge $\Omega^{(z)}$ und jenem Anteil der Zustandsmatrizen S, die nur in Spalte II mit x gekennzeichnet sind (Zustandsmatrizen mit der lfd. Nr. 6,8,39,...). Die Menge $\Omega^{(g)}$ ist die Menge der ch. Zustandsmuster bei "geordneter Absuche".

- Die Menge Ω aller erlaubten Zustandsmatrizen ist die Gesamtheit der in der Tabelle 5.77-1, Seite 181 -183, Spalte I dargestellten Matrizen S. Die Menge Ω ist die Vereinigung der Menge $\Omega^{(g)}$ und jenem Anteil der Zustandsmatrizen, die in keiner der Spalten II - IV mit einem x gekennzeichnet sind (Zustandsmatrizen mit der lfd. Nr. 3,5,7,...).

Ausgehend von den Bemerkungen auf Seite 187 bekommt man damit die folgende Mengenrelation:

$$\Omega^{(z,R)} \subset \Omega^{(z)} \subset \Omega^{(g)} \subset \Omega ; \quad (5.52)$$

die unmittelbar aus dem Bild 5.77-2 Seite 186 hervorgeht.

Weitere Erläuterungen zu Bild 5.77-2 :

Die Teilmenge jener Zustände, die zu $\Omega^{(z)}$ gehören, aber nicht zu der Menge $\Omega^{(z,R)}$, wird mit $\bar{\Omega}^{(z,R)}$ bezeichnet. Entsprechend dazu wird die Menge $\bar{\Omega}^{(z)}$ und die Menge $\bar{\Omega}^{(g)}$ definiert, siehe Bild 5.77-2.

Damit gelten des weiteren die folgenden Mengenrelationen:

$$\left. \begin{aligned} \Omega^{(z)} &= \Omega^{(z,R)} + \bar{\Omega}^{(z,R)} \\ \Omega^{(g)} &= \Omega^{(z)} + \bar{\Omega}^{(z)} \\ \Omega &= \Omega^{(g)} + \bar{\Omega}^{(g)} \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Für die Zustandsmatrizen der oben genannten Ω - Mengen gilt:

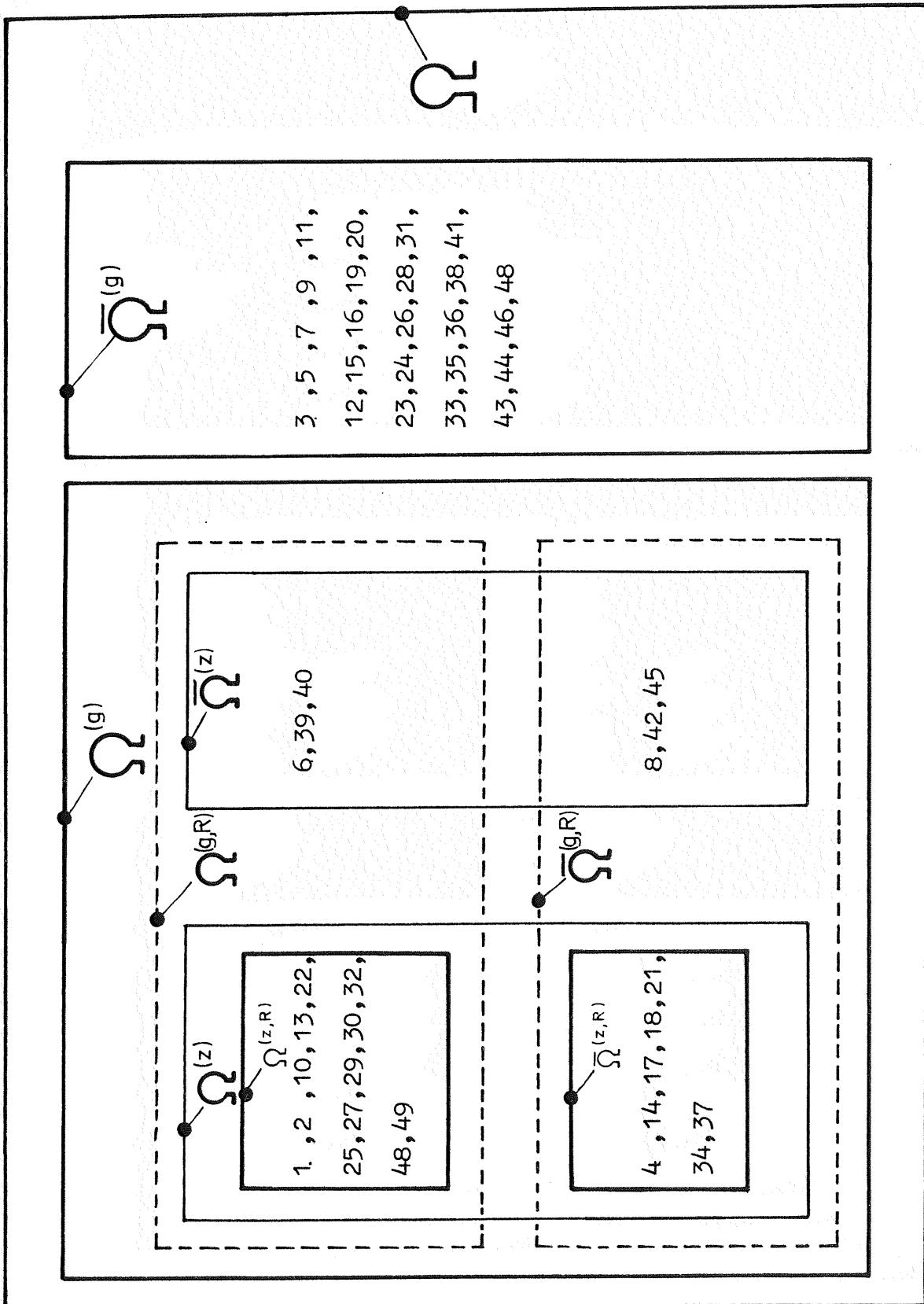
- Die Zustandsmatrizen S aus der Menge $\bar{\Omega}^{(g)}$ sind durch Zeilenvertauschung in Zustandsmatrizen $SC^{(g)}$ der Menge $\Omega^{(g)}$ überführbar.
- Die Zustandsmatrizen S aus der Menge $\bar{\Omega}^{(z)}$ sind durch Spaltenvertauschung in Zustandsmatrizen $SC^{(z)}$ der Menge $\Omega^{(z)}$ überführbar.
- Die Zustandsmatrizen S aus der Menge $\bar{\Omega}^{(z,R)}$ sind durch Richtungsvertauschung in Zustandsmatrizen $SC^{(z,R)}$ der Menge $\Omega^{(z,R)}$ überführbar.

Es gibt jetzt noch den folgenden Fall (nicht im Bild 5.77-7, Seite 186 enthalten): "geordnete Absuche" und Richtungsvertauschung.

Bei diesem Fall sind alle Zustandsmatrizen S, die in der Tabelle 5.77-1, Seite 181 - 183 Spalte II und IV mit x gekennzeichnet sind, ch. Zustandsmatrizen $SC^{(g,R)}$. Die Menge dieser Zustandsmuster wird mit $\Omega^{(g,R)}$ bezeichnet. Ist $\bar{\Omega}^{(g,R)}$ die Menge der Zustandsmuster, die nicht zu der Menge $\Omega^{(g,R)}$ gehört, dann bekommt man noch die folgende Mengenrelation:

$$\Omega^{(g)} = \Omega^{(g,R)} + \bar{\Omega}^{(g,R)} \quad (5.54)$$

Entsprechend des eben geschilderten Sachverhalts muß jetzt das Mengenschaubild Seite 186 erweitert werden, siehe das untenstehende Bild.



5.8 Tabellarische Zusammenstellung der Zustandsbeschreibungen von zweistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl oder Mischwahl

Tabelle 5.8-1

Blatt 1



Zustandsmatrix	Beziehungen bei		Wertebereich der Elemente bei
	Richtungswahl	Mischwahl	
$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,K_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{G_1,1} & \dots & s_{G_1,K_1} \end{pmatrix}$	$s_{i,j} = 0$, wenn Zwtg. i,j nicht belegt ist $s_{i,j} = r$, wenn Zwtg. i,j in Richtung r belegt ist Seite 131	$s_{i,j} = 0$, wenn Zwtg. i,j nicht belegt ist $s_{i,j} = 1$, wenn Zwtg. i,j belegt ist Seite 31	$s_{i,j} \in \{0, 1, 2, \dots, R\}$ $s_{i,j} \in \{0, 1\}$
$SN = \begin{pmatrix} sn_{1,1} & \dots & sn_{1,K_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ sn_{G_1,1} & \dots & sn_{G_1,K_1} \end{pmatrix}$	$sn_{i,j} = 0$, wenn Zwtg. i,j nicht belegt ist $sn_{i,j} = 1$, wenn Zwtg. i,j belegt ist Seite 135	$sn_{i,j} = 0$, wenn Zwtg. i,j nicht belegt ist $sn_{i,j} = 2$ wenn Zwtg. i,j belegt ist Seite 32	$sn_{i,j} \in \{0, 1\}$ $s_{i,j}^* \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{K_1-1} \cdot R\}$
$S^* = \begin{pmatrix} s_{1,1}^* & \dots & s_{1,K_1}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{G_1,1}^* & \dots & s_{G_1,K_1}^* \end{pmatrix}$	$s_{i,j}^* = (R+1)^{j-1} \cdot s_{i,j}$ wenn Zwtg. i,j belegt ist Seite 134	$S_i^* = \sum_{j=1}^{K_1} s_{i,j}^* = \sum_{j=1}^{K_1} (R+1)^{j-1} \cdot s_{i,j}$ Seite 35	$s_{i,j}^* \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1-1}\}$ $s_{i,j} \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1-1}\}$
$\vec{S} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_i \\ \vdots \\ s_{G_1} \end{pmatrix}$	$S_i = \sum_{j=1}^{K_1} s_{i,j} = \sum_{j=1}^{K_1} (R+1)^{j-1} \cdot s_{i,j}$ Seite 134	$S_i = \sum_{j=1}^{K_1} s_{i,j} = \sum_{j=1}^{K_1} 2^{j-1} \cdot s_{i,j}$ Seite 35	$s_{i,j} \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{K_1-1} \cdot R\}$ $s_{i,j} \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1-1}\}$

Tabelle 5.8 - 1
Blatt 2

		Beziehungen bei Mischwahl		Wertebereich der Elemente bei Mischwahl	
		Richtungswahl	Mischwahl	Richtungswahl	Mischwahl
allgemeiner Zustandsvektor	$\vec{T} = \{t_1 \dots t_j \dots t_{K_r}\}$	$t_j = \sum_{i=1}^{G_1} s_{i,j} \cdot tR_{r,j}$ Seite 135	$t_j = \sum_{i=1}^{G_1} s_{i,j}$ Seite 59	$t_j \in \{0, 1, 2, \dots, \text{MIN}[I_2, K_2]\}$	$t_j \in \{0, 1, 2, \dots, K_2\}$
allgemeiner Zustandsvektor	$\vec{TK} = \{tK_1 \dots tK_j \dots tK_{K_1}\}$	$\vec{TK} = \vec{T}$, wenn gilt: $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_j \geq \dots \geq t_{K_1}$ Seite 60		$tK_j \in \{0, 1, 2, \dots, \text{MIN}[I_2, K_2]\}$	$tK_j \in \{0, 1, 2, \dots, K_2\}$
allgemeiner Zustandsvektor	$\vec{T} = \left\{ \begin{matrix} t_1 \\ \vdots \\ t_i \\ \vdots \\ t_{G_1} \end{matrix} \right\}$	$t_i = \sum_{j=1}^{K_1} s_{i,j}$ Seite 136	$t_i = \sum_{j=1}^{K_1} s_{i,j}$ Seite 119	$t_i \in \{0, 1, 2, \dots, K_1\}$	$t_i \in \{0, 1, 2, \dots, K_1\}$
allgemeiner Zustandsvektor	$\vec{TK} = \left\{ \begin{matrix} tK_1 \\ \vdots \\ tK_i \\ \vdots \\ tK_{G_1} \end{matrix} \right\}$	$\vec{TK} = \vec{T}$, wenn gilt: $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_i \geq \dots \geq t_{G_1}$ Seite 119		$tK_i \in \{0, 1, 2, \dots, K_1\}$	$tK_i \in \{0, 1, 2, \dots, K_1\}$
Richtungsmatrix	$TR = \begin{matrix} tR_{1,1} & \dots & tR_{1,K_r} \\ \vdots & & \vdots \\ tR_{r,j} & & tR_{r,K_r} \\ \vdots & & \vdots \\ tR_{R,1} & \dots & tR_{R,K_r} \end{matrix}$	$tR_{r,j} = \sum_{i=1}^{G_1} \delta_{i,j}$ mit $\delta_{i,j} = 0$, wenn $s_{i,j} \neq r$ $\delta_{i,j} = 1$, wenn $s_{i,j} = r$ Seite 141	$tR_{r,j} \in \{0, 1, 2, \dots, K_r\}$	$tR_{r,j} \in \{0, 1, 2, \dots, K_r\}$	$tR_{r,j} \in \{0, 1, 2, \dots, K_r\}$
Richtungsmatrix	$TR^* = \begin{matrix} tR_{1,1}^* & \dots & tR_{1,K_r}^* \\ \vdots & & \vdots \\ tR_{r,j}^* & & tR_{r,K_r}^* \\ \vdots & & \vdots \\ tR_{R,1}^* & \dots & tR_{R,K_r}^* \end{matrix}$	$tR_{r,j}^* = (K_r + 1)^{j-1} \cdot tR_{r,j}$ Seite 143		$tR_{r,j}^* \in \{0, 1, 2, \dots, (K_r + 1)^{K_1 - 1}\}$	$tR_{r,j}^* \in \{0, 1, 2, \dots, K_1\}$

Tabelle 5.8 - 1

Blatt 3

		Beziehungen bei		Wertebereich der Elemente bei	
		Richtungswahl	Mischwahl	Richtungswahl	Mischwahl
Richtungs- vektor	$\overline{\text{TR}} = \begin{Bmatrix} \text{tr}_1 \\ \vdots \\ \text{tr}_r \\ \vdots \\ \text{tr}_R \end{Bmatrix}$	$\text{tr}_r = \sum_{j=1}^{K_1} \text{tr}_{r,j}^* \\ = \sum_{j=1}^{K_1} (k+1)^{j-1} \cdot \text{tr}_{r,j}$ <p>Seite 144</p>	$\overline{\text{TR}} = \overline{\text{T}}$	$\text{tr}_r \in \{0, 1, 2, \dots, (k_r+1)^{K_1-1}\}$	
Richtungs- vektor	$\overline{\text{TRK}} = \begin{Bmatrix} \text{trK}_1 \\ \vdots \\ \text{trK}_r \\ \vdots \\ \text{trK}_R \end{Bmatrix}$	$\overline{\text{TRK}} = \overline{\text{TR}}, \text{ wenn gilt:}$ $\text{tr}_1 \geq \text{tr}_2 \geq \dots \geq \text{tr}_r \geq \dots \geq \text{tr}_R$ <p>Seite 154</p>		$\text{trK}_r \in \{0, 1, 2, \dots, (k_r+1)^{K_1-1}\}$	
charakteri- stischer Zustands- vektor bei "geordneter Absuche"	$\overline{\text{C}}^{(g)} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_{G_1} \end{Bmatrix}$	$\overline{\text{C}}^{(g)} = \overline{\text{S}}, \text{ wenn gilt:}$ $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_1 \geq \dots \geq s_{G_1}$ <p>Seite 48</p>		$c_i \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{K_1-1}\}$ <p>Seite 146</p>	$c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1-1}\}$ <p>Seite 48</p>
charakteri- stischer Zustands- vektor bei "zufälliger Auswahl"	$\overline{\text{C}}^{(z)} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \\ c_{G_1} \end{Bmatrix}$	$\overline{\text{C}}^{(z)} = \overline{\text{S}}, \text{ wenn gilt:}$ $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_1 \geq \dots \geq s_{G_1} \text{ und}$ $t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_j \geq \dots \geq t_{K_1} \geq \dots \geq t_{K_1}, \text{ d.h.}$ $\overline{\text{T}} = \overline{\text{TK}} \text{ gilt}$ <p>Seite 125</p>		$c_i \in \{0, 1, 2, \dots, (R+1)^{K_1-1}\}$	$c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{K_1-1}\}$

6. Die erlaubten ch. Zustandsmuster von mehrstufigen Linksystemen mit EXPANSION in der Stufe 1

Bisher wurden nur Linksysteme mit

$$I_1 \cong K_1 \quad (6.1)$$

betrachtet. Linksysteme mit

$$I_1 < K_1, \quad (6.2)$$

d.h. Linksysteme mit EXPANSION in der Stufe 1, wurden noch nicht behandelt. Bei Linksystemen mit Expansion in der Stufe 1 ist, gegenüber den in den vorangegangenen Abschnitten 1 bis 5 geschilderten Reduktionsarten, noch eine weitere Reduktion der Unbekannten möglich. Sie soll in diesem Abschnitt beschrieben werden.

Bei Linksystemen ohne Expansion in der Stufe 1 gibt es für die Zeilensumme τ_i (siehe Seite 119) der Zeile i der Zustandsmatrix S (mit anderen Worten: für die Anzahl der Belegungen des Koppelvielfachs i der Stufe 1) keine Einschränkung, d.h. alle Belegungsmuster mit

$$\tau_i \cong K_1 \quad (6.3)$$

sind erlaubte Muster. Für die Elemente τ_i gilt die Beziehung (5.11), Seite 136.

Bei Linksystemen mit Expansion in der Stufe 1 können in einem Koppelvielfach von Stufe 1 nur maximal I_1 Belegungen vorhanden sein, d.h. für die Zeilensumme τ_i der Zustandsmatrix S gilt bei $I_1 < K_1$ die Bedingung

$$\tau_i \cong I_1. \quad (6.4)$$

Bei der Definition der erlaubten Zustände im Fall $I_1 < K_1$ muß jetzt die obige Bedingung (6.4) mit berücksichtigt werden, d.h. die Definition 5-B, Seite 142 muß jetzt entsprechend ergänzt werden.

Die "erlaubten Zustandsmuster" bei Linksystemen mit EXPANSION in Stufe 1 sind also jene Muster, die der Definition 5-B, Seite 142 und der oben angegebenen Beziehung (6.4) genügen.

Bei Linksystemen mit mehr als zwei Stufen (siehe die Abschnitte 7. und 8., Seite 195) gilt die gleiche Vorgehensweise wie eben geschildert.

Die Ermittlung der ch. Zustandsmuster im Fall $I_1 < K_1$ wird jetzt zweckmäßigerweise wie folgt durchgeführt:

Es seien die Strukturparameter I_1, K_1, G_1 und k_r entsprechend Bild 5.1, Seite 129 gegeben. Ausgehend von diesen gegebenen Strukturparametern ermittelt man zunächst die ch. Zustandsmuster für das gedachte Linksystem mit

$$I_1^* = K_1, \quad (6.5)$$

d.h. für ein Linksystem mit gleichen Werten für G_1, K_1, k_r wie das zu betrachtende Linksystem, aber mit

$$I_1^* = K_1 > I_1$$

in Stufe 1.

In einem zweiten Schritt werden dann jene Zustandsmuster verworfen, für die die Bedingung (6.4), Seite 193 nicht erfüllt ist.

Bei mehrstufigen Linksystemen ist die Vorgehensweise die gleiche wie eben geschildert.

7. Die Kennzeichnung und die Ermittlung der ch. Zustandsmuster von dreistufigen Linksystemen für Richtungswahl

7.1 Einleitung

7.1.1 Die Struktur der Linksysteme

In Bild 1.2, Seite 26 ist die allgemeine Struktur von Linksystemen mit $s \geq 2$ dargestellt. Im folgenden werden dreistufige Linksysteme des im untenstehenden Bild 7.1 dargestellten Typs untersucht.

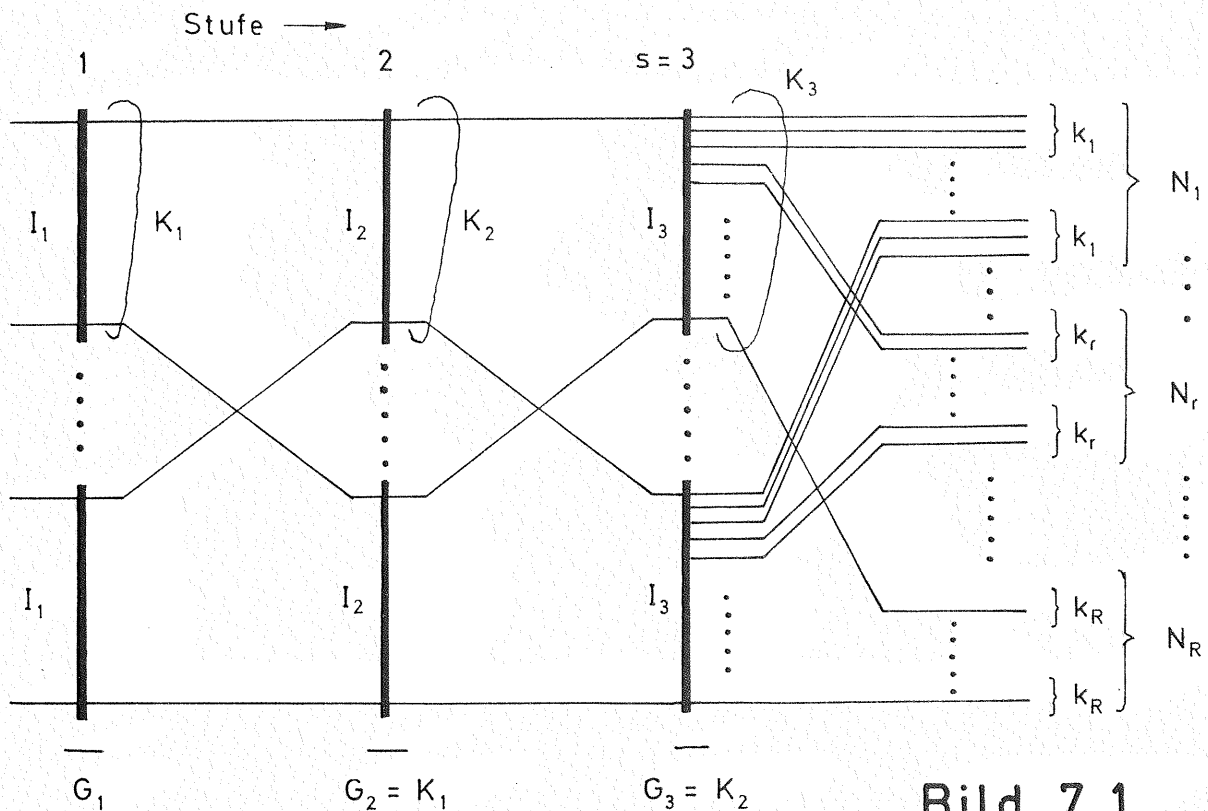


Bild 7.1

Die Erreichbarkeit K_3 , d.h. die Anzahl der Ausgänge je Koppelvielfach der Stufe 3, sei einheitlich über alle G_3 Koppelvielfache der Stufe 3. Die Erreichbarkeit k_r , d.h. die Anzahl der Ausgänge je Koppelvielfach der Stufe 3 in Richtung r , sei ebenfalls einheitlich über alle G_3 Koppelvielfache der Stufe 3. Je Richtung r können die Erreichbarkeiten k_r jedoch unterschiedlich sein.

Für die Summe der Richtungserreichbarkeiten k_r gilt:

$$\sum_{r=1}^R k_r = K_3 . \quad (7.1)$$

Außerdem sollen für k_r die Werte

$$k_r \in \{1, 2, \dots, I_3\} \quad (7.2)$$

zugelassen sein. Daraus folgt mit der obigen Beziehung (7.1), daß bei Systemen mit Richtungswahl gilt:

$$K_3 \stackrel{\equiv}{=} I_3 . \quad (7.3)$$

Des weiteren soll jetzt die Beziehung (5.3), Seite 130 ebenfalls gelten, d.h. es sei

$$K_2 \stackrel{\equiv}{=} I_2 . \quad (7.4)$$

7.1.2 Vorbemerkungen

Aus dem Abschnitt 5, Seite 129 folgt: die Betriebsart "Mischwahl" ist ein Sonderfall der Betriebsart "Richtungswahl". Nur zum besseren Verständnis wurde in den Abschnitten 2, 3 und 4 zunächst die Betriebsart "Mischwahl" behandelt.

Bei den dreistufigen Linksystemen wird jetzt gleich der allgemeinere Fall "Richtungswahl" betrachtet.

Die meisten bisher eingeführten Definitionen und Sätze können auch bei den hier betrachteten Linksystemen übernommen werden. Es werden deshalb analog zu Abschnitt 5 (siehe Vorbemerkungen zu Abschnitt 5, auf Seite 130), nur die Ergänzungen zu den bisherigen Ausführungen angegeben.

7.2 Beschreibung des Belegungszustandes von dreistufigen Linksystemen

7.2.1 Beschreibung des Belegungszustandes von dreistufigen Linksystemen mit zwei Zustandsmatrizen S_1 und S_2

Die Zustandsmatrix S_1 sei die Zustandsmatrix, die den Belegungszustand der Zwischenleitungen zwischen Stufe 1 und Stufe 2 beschreibt. Die Zustandsmatrix S_2 sei die Zustandsmatrix, die den Belegungszustand der Zwischenleitungen zwischen Stufe 2 und Stufe 3 beschreibt.

Die Elemente der Zustandsmatrix S_1 werden mit $s_{1,i,j}$ bezeichnet, und die Elemente der Zustandsmatrix S_2 werden mit $s_{2,j,l}$ bezeichnet. Analog zu Abschnitt 5.2.1, Seite 130 gelten jetzt für die Indexbereiche der Zustandsmatrizen S_1 und S_2 :

$$\left. \begin{array}{l} S_1 \text{ mit } s_{1,i,j} : i \in \{1,2,\dots,G_1\}, \\ \phantom{S_1 \text{ mit } s_{1,i,j}} \phantom{S_1 \text{ mit } s_{1,i,j}} \phantom{S_1 \text{ mit } s_{1,i,j}} j \in \{1,2,\dots,K_1 = G_2\} \text{ und} \\ \\ S_2 \text{ mit } s_{2,j,l} : j \text{ wie oben angegeben,} \\ \phantom{S_2 \text{ mit } s_{2,j,l}} \phantom{S_2 \text{ mit } s_{2,j,l}} \phantom{S_2 \text{ mit } s_{2,j,l}} l \in \{1,2,\dots,K_2 = G_3\}. \end{array} \right\} \quad (7.5)$$

Für die Werte der Elemente $s_{1,i,j}$ und $s_{2,j,l}$ gilt die Ergänzung E5-1, Seite 131, d.h. es ist

$s_{1,i,j} = 0$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 nicht belegt ist,

$s_{1,i,j} = r$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 in Richtung r belegt ist,

$s_{2,j,l} = 0$, wenn der Ausgang l des Koppelvielfachs j der Stufe 2 nicht belegt ist und

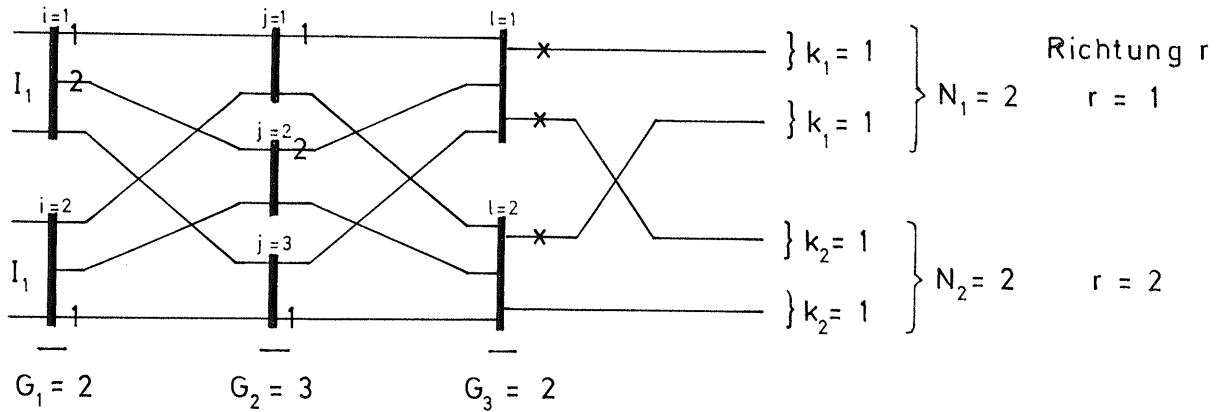
$s_{2,j,l} = r$, wenn der Ausgang l des Koppelvielfachs j der Stufe 2 in Richtung r belegt ist,

mit $r \in \{1,2,\dots,R\}$.

Beide Zustandsmatrizen zusammen beschreiben den Gesamtbelegungszustand des dreistufigen Linksystems.

Beispiel 46: Beispiel für den Gesamtbelegungszustand. Es werden zwei Belegungsmuster betrachtet.

Belegungsmuster 1:



Kennzeichnung des Belegungszustandes im obigen Bild und den folgenden Bildern des Hauptabschnitts 7:

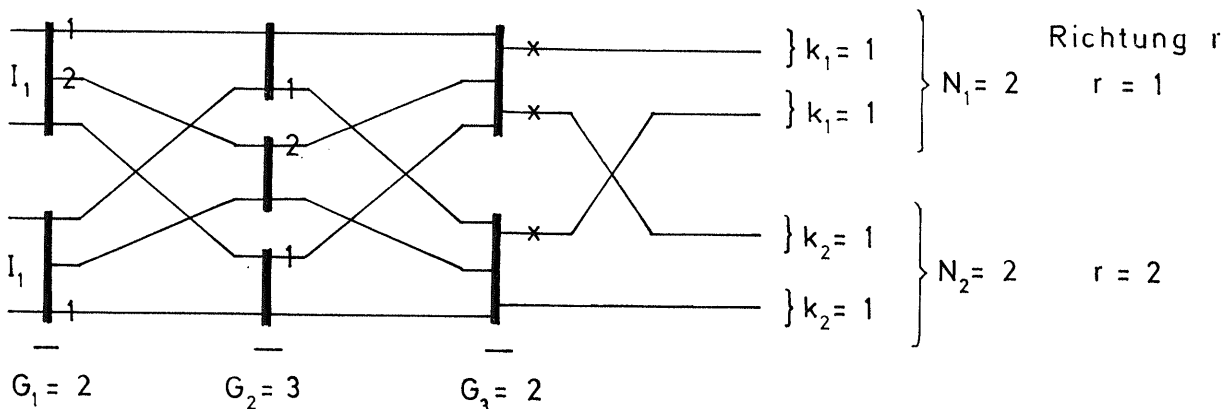
- 1: Zwischenleitung in Richtung 1 belegt,
- 2: Zwischenleitung in Richtung 2 belegt und
- x: Abnehmerleitung belegt.

Die beiden Zustandsmatrizen für das oben dargestellte Belegungsmuster lauten:

$$S_1 = \begin{matrix} j \rightarrow & 1 & 2 & 3 & i \downarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & 1 \\ & 2 \end{matrix}, \quad S_2 = \begin{matrix} l \rightarrow & 1 & 2 & j \downarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & 1 \\ & 2 \\ & 3 \end{matrix}.$$

Zu ein und derselben Zustandsmatrix S_1 können jetzt mehrere Zustandsmatrizen S_2 gehören (Umkehrung gilt auch). Ein Beispiel zeigt das Belegungsmuster 2.

Belegungsmuster 2:



Die beiden Zustandsmatrizen für das auf der vorhergehenden Seite dargestellte Belegungsmuster 2 lauten:

$$S'_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S'_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Über einen Algorithmus könnte man jetzt zwar alle Zustandsmatrizen S_2 ermitteln, die zu ein und derselben Zustandsmatrix S_1 passen. Die in den Abschnitten 2 bis 6 (Seite 30 bis 193) entwickelten Algorithmen zur Ermittlung der ch. Zustandsmuster sind jedoch - bei der Darstellung des Gesamtbelegungszustandes durch die zwei Zustandsmatrizen S_1 und S_2 - nicht ohne weiteres übertragbar.

Es wird deshalb für den Gesamtbelegungszustand eine andere Darstellung gewählt, siehe Abschnitt 7.2.2 .

7.2.2 Beschreibung des Belegungszustandes (Gesamtbelegungszustand) von dreistufigen Linksystemen durch einen Zustandsraum

Bei der Ermittlung der ch. Zustandsmuster für dreistufige Linksysteme kann man analog vorgehen wie bei der Ermittlung der ch. Zustandsmuster von zweistufigen Linksystemen, wenn man jetzt an Stelle der Zustandsmatrix S (bei zweistufigen Linksystemen) einen Zustandsraum S verwendet.

Es wird jetzt die folgende Definition 7-A eingeführt.

Definition 7-A:

Der Zustandsraum S (siehe Abbildung auf der nächsten Seite) kennzeichnet eindeutig den Belegungszustand der Zwischenleitungen des dreistufigen Linksystems. Die Dimension des Zustandsraumes S ist $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$. Seine Elemente sollen mit $s_{i,j,l}$ bezeichnet werden. Für die Indizes gilt:

$$\begin{aligned} i &\in \{1, 2, \dots, G_1\}, \\ j &\in \{1, 2, \dots, G_2 = K_1\} \text{ und} \\ l &\in \{1, 2, \dots, G_3 = K_2\} . \end{aligned}$$

Im auf Seite 201 dargestellten Linksystem bedeuten:

- : Die gestrichelten Linien kennzeichnen den Verbindungsverlauf der durchgeschalteten Verbindungen .
- ①,② : Die eingekreisten Zahlen geben die Richtung an, in der die entsprechende Verbindung durchgeschaltet ist .
- x : Die mit einem Kreuz gekennzeichneten Abnehmerleitungen sind belegt.

Man kann jetzt bei der Abbildung des im Linksystem eingetragenen Belegungsmusters, d.h. bei der Ermittlung der Werte der Elemente $s_{i,j,l}$ des Zustandsraumes S, ganz formal vorgehen.

Benötigt werden die lfd. Nr. i, j und l der Koppelvielfache der drei Stufen, über die die jeweilige Verbindung führt.

Aus dem auf Seite 201 dargestellten Belegungsmuster erhält man die folgenden Elemente $s_{i,j,l} \neq 0$:

- Vom Koppelvielfach $\underline{i = 1}$ der Stufe 1 führt eine Verbindung in Richtung 1 über das Koppelvielfach $\underline{j = 1}$ der Stufe 2 zum Koppelvielfach $\underline{l = 1}$ der Stufe 3, d.h. es ist

$$s_{1,1,1} = 1 .$$

- Vom Koppelvielfach $\underline{i = 1}$ der Stufe 1 führt eine Verbindung in Richtung 2 über das Koppelvielfach $\underline{j = 2}$ der Stufe 2 zum Koppelvielfach $\underline{l = 1}$ der Stufe 3, d.h. es ist

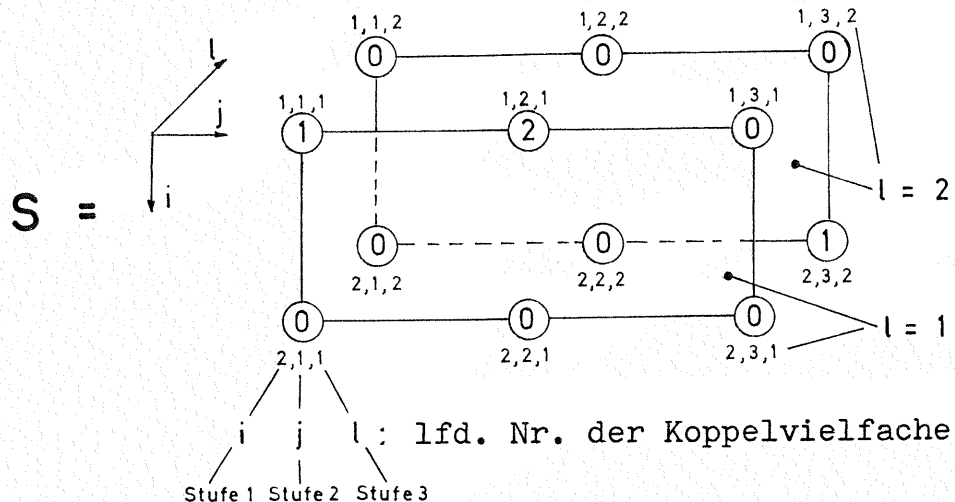
$$s_{1,2,1} = 2 .$$

- Vom Koppelvielfach $\underline{i = 2}$ der Stufe 1 führt eine Verbindung in Richtung 1 über das Koppelvielfach $\underline{j = 3}$ der Stufe 2 zum Koppelvielfach $\underline{l = 2}$ der Stufe 3, d.h. es ist

$$s_{2,3,2} = 1 .$$

- Alle anderen Elemente des Zustandsraumes sind gleich Null.

Man erhält damit den nach Definition 7-A, Seite 199 definierten Zustandsraum S, siehe nächste Seite.



An Hand des oben dargestellten Zustandsraumes S , der zu dem auf Seite 201 abgebildeten Linksystem gehört, werden jetzt die Ebenen des Zustandsraumes S näher beschrieben.

In den hier behandelten dreistufigen Linksystemen gibt es insgesamt

$$G_1 + G_2 + G_3 \text{ Koppelvielfache,}$$

siehe Bild 7.1, Seite 195. Für das im Beispiel 47 Seite 201 abgebildete Linksystem ist $G_1 + G_2 + G_3 = 2 + 3 + 2 = 7$.

Jedem dieser $G_1 + G_2 + G_3$ Koppelvielfache ist eine Ebene des Zustandsraumes zugeordnet, entsprechend den Ordnungsnummern i, j und l , und es gilt:

- i ist die Ordnungsnummer für die Koppelvielfache der Stufe 1. Die Ebenen $i = \text{konstant}$ des Zustandsraumes S (siehe Bild 7.2 auf Seite 204) sind dementsprechend den Koppelvielfachen von Stufe 1 zugeordnet.
- j ist die Ordnungsnummer für die Koppelvielfache der Stufe 2. Die Ebenen $j = \text{konstant}$ des Zustandsraumes S (siehe Bild 7.3 auf Seite 204) sind dementsprechend den Koppelvielfachen von Stufe 2 zugeordnet.
- l ist die Ordnungsnummer für die Koppelvielfache der Stufe 3. Die Ebenen $l = \text{konstant}$ des Zustandsraumes S (siehe Bild 7.4 auf Seite 204) sind dementsprechend den Koppelvielfachen von Stufe 3 zugeordnet.

Weitere Ausführungen zu den Ordnungsnummern (lfd. Nr.) i, j und l wurden bereits auf Seite 201 gemacht.

Die "Ebenen $i = \text{konstant}$ " des Zustandsraumes S
mit der Dimension $G_2 \cdot G_3$

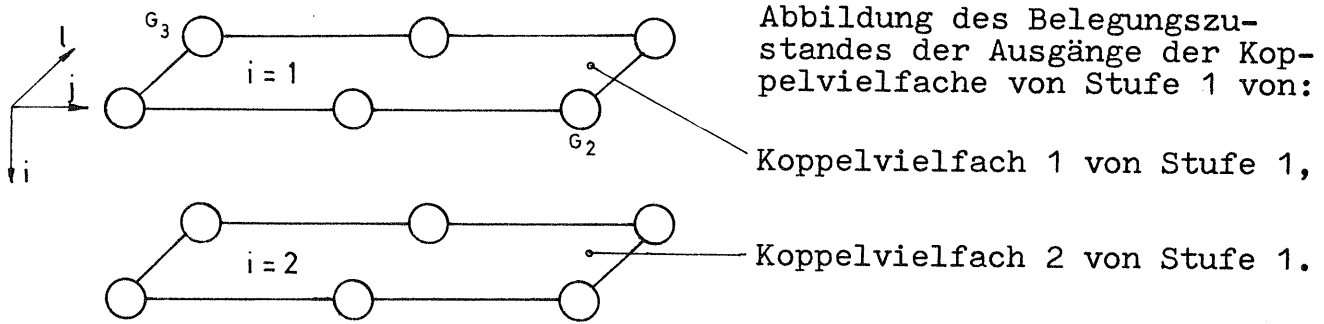


Bild 7.2

Die "Ebenen $j = \text{konstant}$ " des Zustandsraumes S
mit der Dimension $G_1 \cdot G_3$

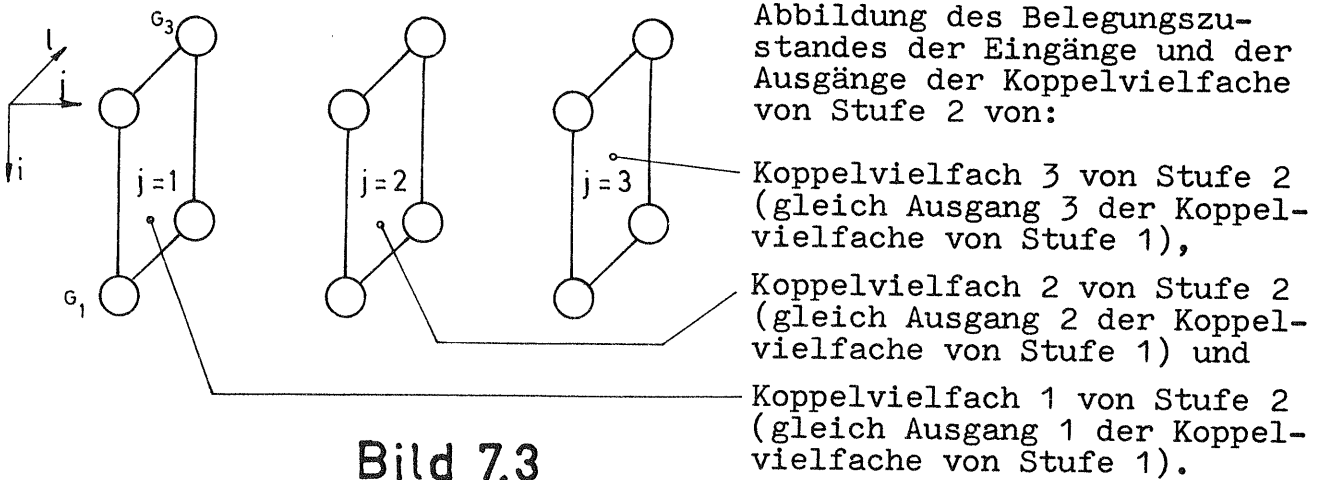


Bild 7.3

Die "Ebenen $l = \text{konstant}$ " des Zustandsraumes S
mit der Dimension $G_1 \cdot G_2$

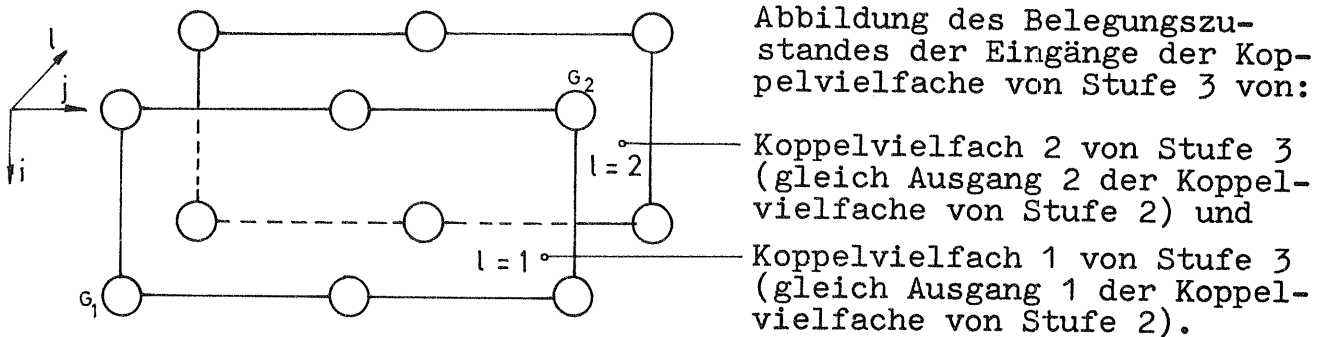


Bild 7.4

Für die Ebenen des Zustandsraumes S gelten die folgenden Bedingungen:

- a) Von den G_3 Elementen $s_{i,j,l}$ mit gleichen Wertepaaren i,j kann nur ein Element $s_{i,j,l}$ ungleich Null sein (Doppelbelegungen der Zwischenleitungen zwischen Stufe 1 und Stufe 2 technisch nicht sinnvoll), siehe untenstehendes Bild a).
- b) Von den G_1 Elementen $s_{i,j,l}$ mit gleichen Wertepaaren j,l kann nur ein Element $s_{i,j,l}$ ungleich Null sein (Doppelbelegungen der Zwischenleitungen zwischen Stufe 2 und Stufe 3 ebenfalls technisch nicht sinnvoll), siehe untenstehendes Bild b).

Bild a)

verbotene Belegungen -
gleiche Wertepaare i,j

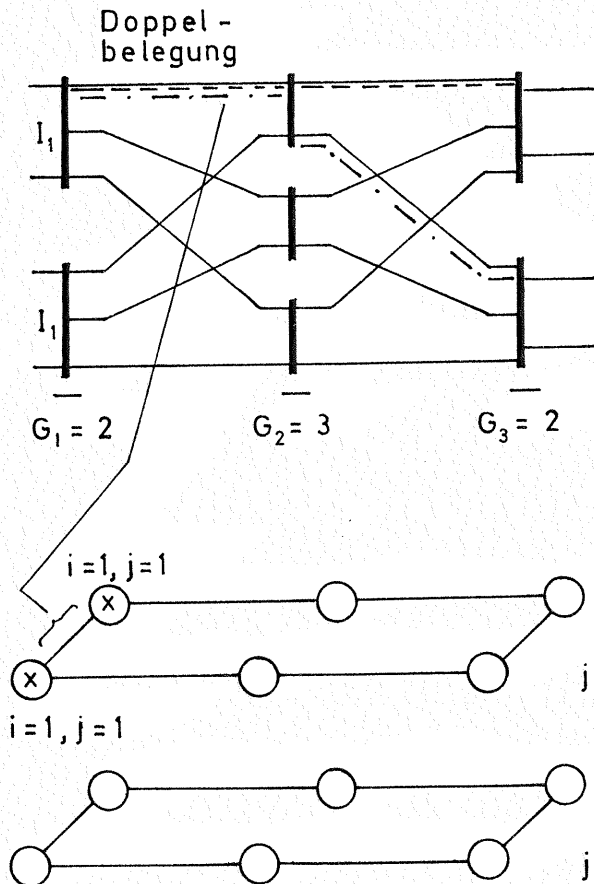
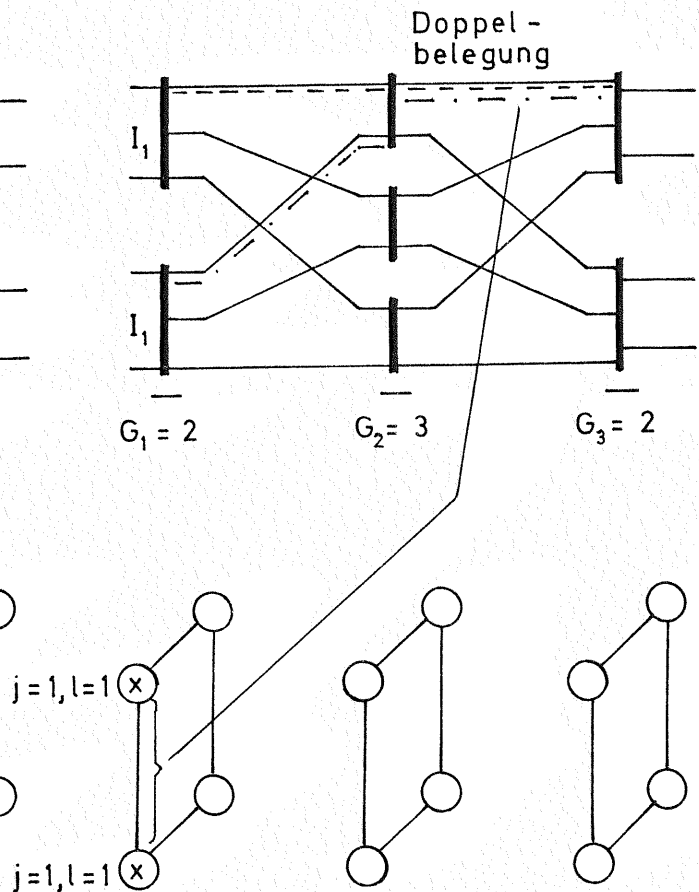


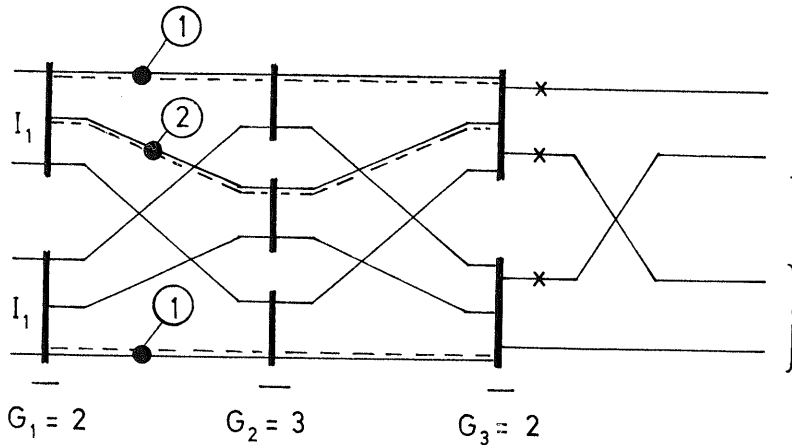
Bild b)

verbotene Belegungen -
gleiche Wertepaare j,l

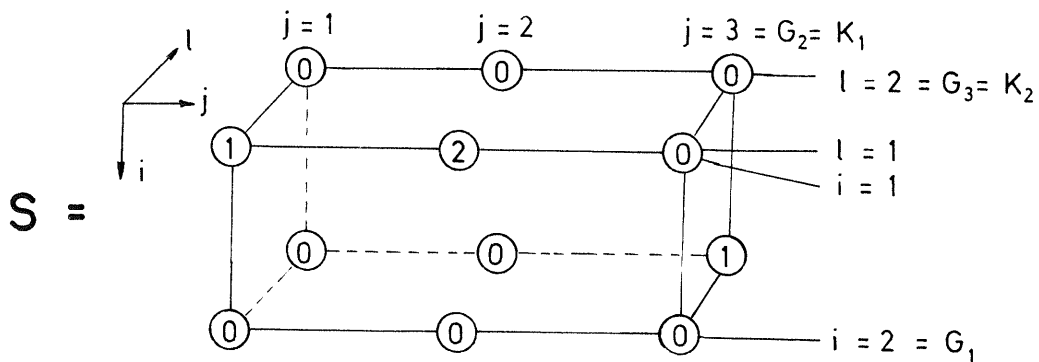


7.2.3 Gegenüberstellung der beiden Zustandsbeschreibungen:
Zustandsraum S - Zustandsmatrizen S₁ und S₂

Es werden zunächst für das unten dargestellte Belegungsmuster (siehe auch Beispiel 47, Seite 201) der Zustandsraum S und die beiden Zustandsmatrizen S₁ und S₂ angegeben.



Der Zustandsraum für dieses Belegungsmuster ist (siehe Seite 203):



S₁ =

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1$	1	2	0
$i=2$	0	0	1

S₂ =

$l=2$	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$l=1$	0	0	1
$l=1$	1	2	0

Die Zustandsmatrix S_2 wurde zum besseren Verständnis des Zusammenhangs zwischen dem Zustandsraum S und den beiden Zustandsmatrizen S_1 und S_2 um 90 Grad verdreht dargestellt.

Aus den beiden Darstellungsarten für den Belegungszustand des Linksystems erkennt man:

- Die Indizierung der Elemente des Zustandsraumes S in der "i-j Ebene" ist identisch mit der Indizierung der Zustandsmatrix S_1 , und
- die Indizierung der Elemente des Zustandsraumes S in der "j-1 Ebene" ist identisch mit der Indizierung der Zustandsmatrix S_2 .

Daraus folgt:

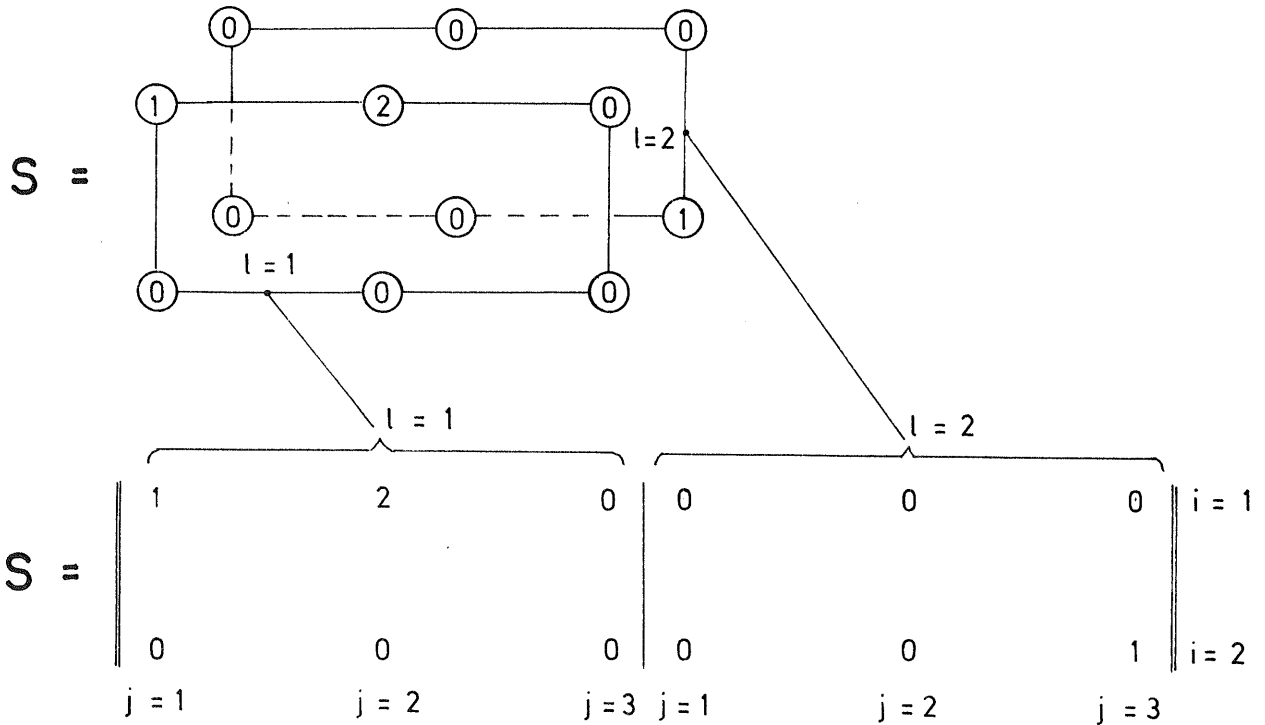
- Die Zustandsmatrix S_1 erhält man aus dem Zustandsraum S , indem man alle Belegungen in eine der - insgesamt G_3 - "i-j Ebenen" projiziert.
- Die Zustandsmatrix S_2 erhält man aus dem Zustandsraum S , indem man alle Belegungen in eine der - insgesamt G_1 - "j-1 Ebenen" projiziert.

Umgekehrt erhält man - durch eine Indexrechnung - aus den Zustandsmatrizen S_1 und S_2 den dreidimensionalen Zustandsraum S .

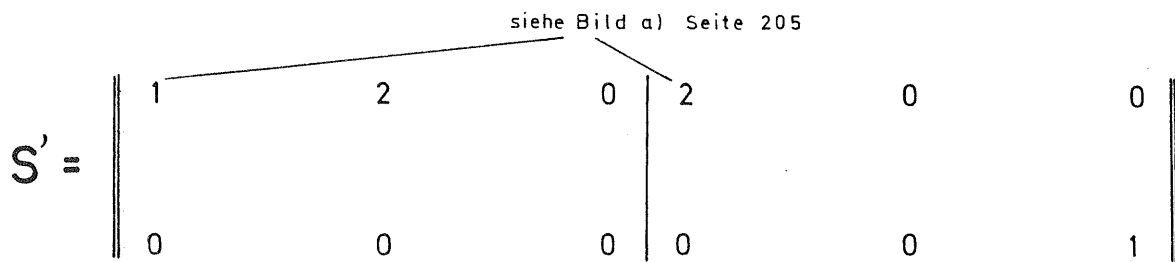
Beide Darstellungsarten kennzeichnen eindeutig den Belegungszustand des dreistufigen Linksystems. Der Vorteil des Zustandsraums S ist jedoch, daß man bei ihm die in den Abschnitten 2 bis 6 (Seite 30 bis 193) hergeleiteten Methoden zur Reduktion der Anzahl der Unbekannten völlig analog anwenden kann.

Zur einfacheren Darstellung wird der Zustandsraum S umgezeichnet. Im folgenden werden jetzt die G_3 Ebenen $l = \text{konstant}$ (eine je Koppelvielfach der Stufe 3) nebeneinander dargestellt und durch einen Strich voneinander getrennt.

Z.B. erhält man für den Zustandsraum S, entsprechend Seite 206, die folgende Darstellung:



Aus der Bedingung a) Seite 205 (keine Doppelbelegungen von Zwischenleitungen) folgt, daß das folgende Belegungsmuster nicht erlaubt ist:



denn es kann nur das Element $s_{1,1,1}$ ungleich Null (eine Belegung) sein oder das Element $s_{1,1,2}$ kann ungleich Null sein. Beide Elemente können nicht gleichzeitig Null sein, denn sie sind die Abbildung ein und derselben Zwischenleitung (zwischen Stufe 1 und Stufe 2) des Linksystems. Das bedeutet, daß die Menge der Zu-

Aus Bild 7.5 Seite 209 folgt: Einschließlich des Zustandes

"Zwischenleitung vom Koppelvielfach i der Stufe 1 zum Koppelvielfach j der Stufe 2 nicht belegt"

gibt es bei dem betrachteten Linksystem

" $4 + 1$ verschiedene Belegungszustände"

für eine Zwischenleitung eines Koppelvielfachs der Stufe 1, unter der Berücksichtigung, über welche der K_2 abgehenden Zwischenleitungen eines Koppelvielfachs j der Stufe 2 durchgeschaltet wird.

Die Anzahl der Belegungszustände "Zwischenleitung belegt" ist in dem betrachteten Beispiel gleich 4. Wie man sofort sieht, ist vier gleich dem Produkt aus der Anzahl der Richtungen $R = 2$ und der Erreichbarkeit $K_2 = 2$ eines Koppelvielfachs der Stufe 2, siehe Bild 7.5, Seite 209.

Für ein Linksystem mit den allgemein gegebenen Strukturparametern entsprechend Bild 7.1, Seite 195 gibt es also

$$PR = R \cdot K_2 \quad (7.6)$$

verschiedene Belegungszustände "Zwischenleitung belegt" für eine Zwischenleitung eines Koppelvielfachs der Stufe 1, unter der Berücksichtigung, welcher Ausgang jenes Koppelvielfachs der Stufe 2 belegt ist zu dem die betrachtete Zwischenleitung des Koppelvielfachs i der Stufe 1 führt.

Die gleiche Anzahl PR von Belegungszuständen "Zwischenleitung belegt" erhält man jetzt bei einem zweistufigen Linksystem mit "PR Richtungen", denn bei zweistufigen Linksystemen mit PR Richtungen gilt für die Elemente der Zustandsmatrix:

$$s_{i,j} \in \{1, 2, \dots, PR\},$$

siehe Tabelle 5.8-1, Seite 190. Daraus erhält man die folgende Schlußfolgerung.

Satz 7-a: Man kann die Belegungszustände eines dreistufigen Linksystems (entsprechend Bild 7.1 Seite 195) mit R Rich-

tungen auf ein zweistufiges Linksystem mit $PR = R \cdot K_2$ Richtungen, dem Ersatzsystem für das reale dreistufige Linksystem, abbilden. Da es sich bei dem zweistufigen Linksystem nicht um tatsächliche Richtungen handelt, werden die PR Richtungen als

P s e u d o r i c h t u n g e n

bezeichnet. Für die Ordnungsnummer der Pseudorichtungen wird die Bezeichnung p eingeführt, und es gilt damit: $p \in \{1, 2, \dots, PR\}$.

Das Ersatzsystem des dreistufigen Linksystems ist äquivalent bezüglich aller erlaubten Belegungsmuster. Es hat - wie gewünscht - wesentlich weniger unerlaubte Zustandsmuster wie der Zustandsraum S (siehe Seite 211). Eine Äquivalenz der Verkehrseigenschaften ist für die hier angestellten Betrachtungen nicht erforderlich.

Das Ersatzsystem, d.h. das zweistufige Linksystem mit Pseudorichtungen, für das bereits nach Beispiel 47 Seite 201 bekannte dreistufige Linksystem ist auf der nächsten Seite angegeben.

Zwischen den Strukturparametern des dreistufigen Linksystems und den Strukturparametern des Ersatzsystems - den mit einem Stern gekennzeichneten Größen - bestehen die folgenden Beziehungen:

$$\left. \begin{array}{l} I_1^* = I_1 \\ K_1^* = K_1 \\ G_1^* = G_1 \\ I_2^* = I_2 \\ G_2^* = G_2 \end{array} \right\} \quad (7.7)$$

$$k_p^* = k_r \quad (7.8)$$

mit der Ordnungsnummer p für die Pseudorichtungen;

$$p = r + R \cdot (l - 1) \quad (7.9)$$

und der Ordnungsnummer l für die Koppelvielfache in der realen Stufe 3 entsprechend Definition 7-A Seite 199.

Betrachtetes dreistufiges Linksystem:

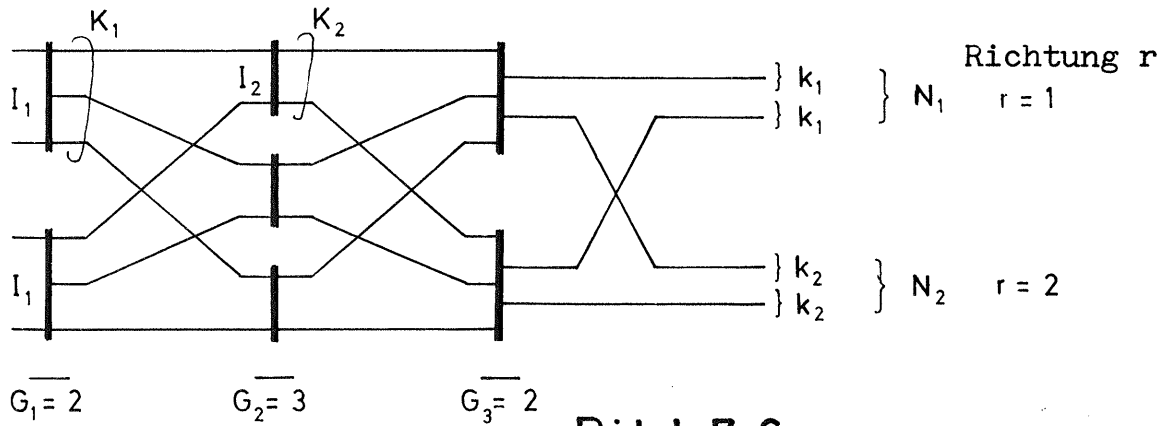


Bild 7.6

Das zu dem obigen dreistufigen Linksystem gehörende Ersatzsystem, d.h. das zweistufige Linksystem mit Pseudorichtungen ist:

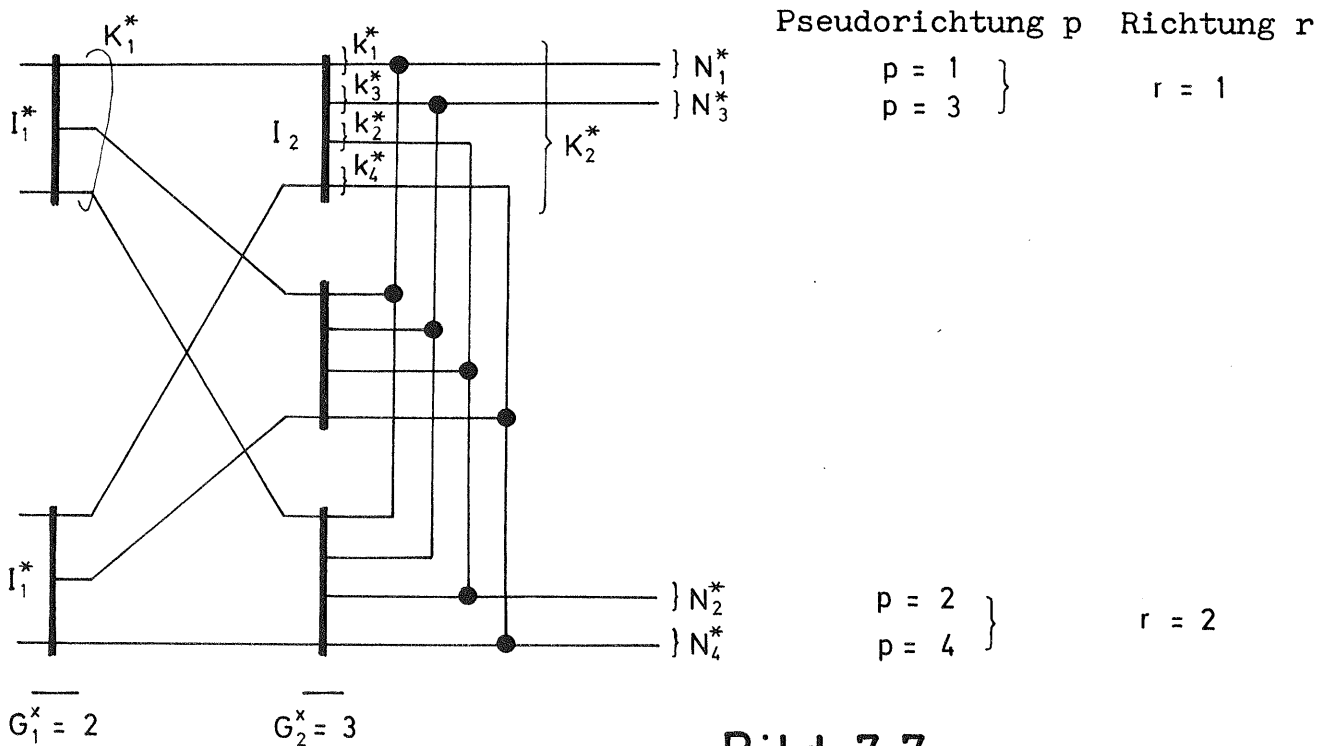


Bild 7.7

Für die Wertebereiche von l und r gilt:

$$l \in \{1, 2, \dots, K_2 = G_3\} \text{ und}$$

$$r \in \{1, 2, \dots, R\}.$$

Ferner gilt:

$$PR = K_2 \cdot R,$$

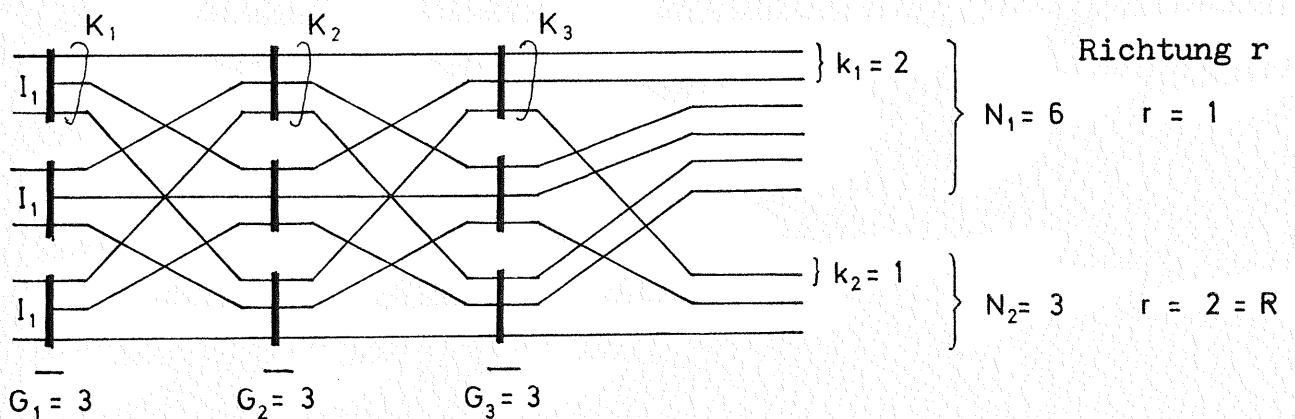
$$K_2^* = \sum_{r=1}^R k_r \cdot K_2 \quad \text{und} \quad (7.10)$$

$$N_p^* = k_r. \quad (7.11)$$

Die Beziehungen (7.7) bis (7.9) Seite 211 und die obigen Beziehungen sind die "Transformationsbeziehungen" zwischen dem realen dreistufigen Linksystem und dem Ersatzsystem, dem zweistufigen Linksystem mit Pseudorichtungen.

Die Struktur des allgemeinen zweistufigen Linksystems mit Pseudorichtungen ist damit, entsprechend den Beziehungen (7.7) bis (7.11), bekannt. Da die allgemeine Darstellung der Struktur eines Ersatzsystems unübersichtlich ist, wird zum besseren Verständnis noch ein weiteres Beispiel betrachtet.

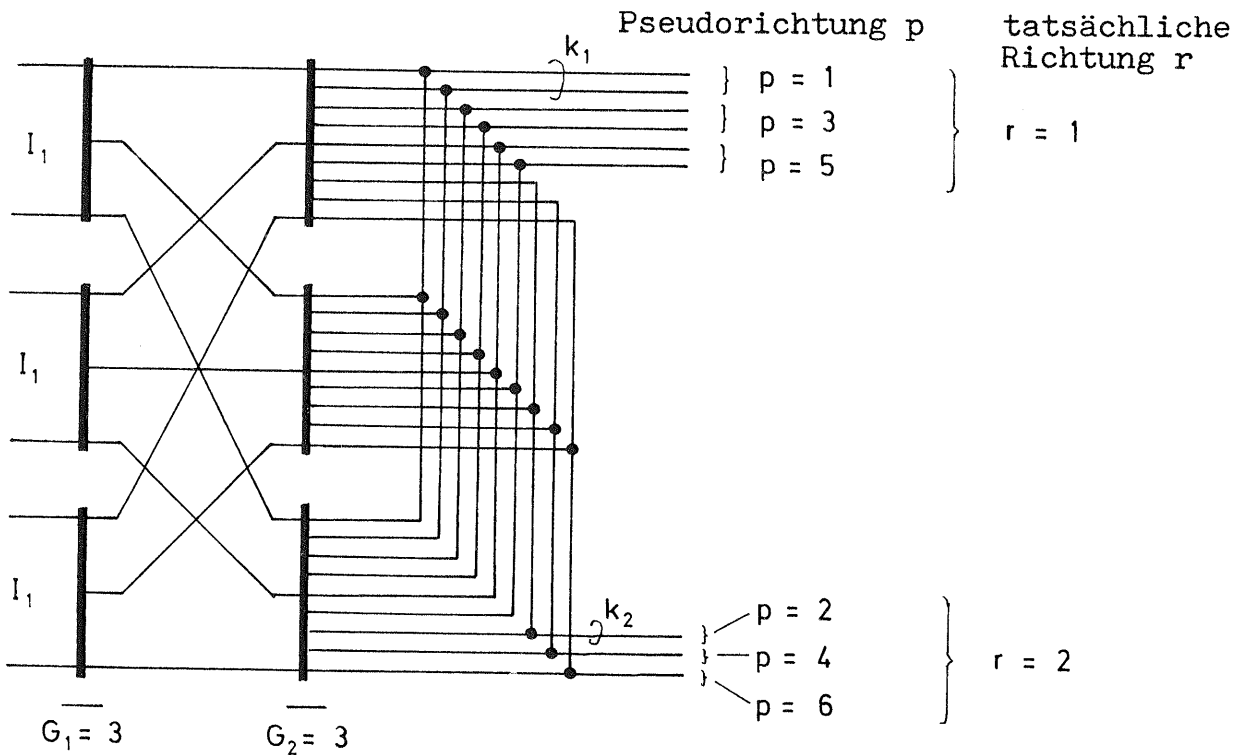
Beispiel 48: Ersatzsystem eines dreistufigen Linksystems.



Das dazugehörige zweistufige Ersatzsystem, entsprechend den Beziehungen (7.7) bis (7.11), ist auf der Seite 214 dargestellt.

An jedes Koppelvielfach der Stufe 2 des Ersatzsystems sind alle Abnehmerleitungen des realen, dreistufigen Linksystems aufgelegt.

Ersatzsystem des auf der vorherigen Seite abgebildeten dreistufigen Linksystems:



Die Bedingung: maximal können nur

$$\sum_{r=1}^R N_r \text{ gleich Anzahl der Abnehmerleitungen}$$

belegt sein, wird im Ersatzsystem durch eine Vielfachschaltung der Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 2 erreicht. Außerdem gilt, daß auf den k_r Ausgängen eines Koppelvielfachs j der Stufe 2 des Ersatzsystems - in Pseudorichtung $p = r + R(1-1)$ - stets nur maximal eine Belegung vorhanden sein kann, in die betreffende Pseudorichtung p (Grund: bei den hier betrachteten Linksystemenstrukturen gibt es nur eine Zwischenleitung von einem Koppelvielfach der Stufe 2 zu einem Koppelvielfach der Stufe 3).

Zur Beschreibung des Belegungszustandes des Ersatzsystems, und damit auch zur Beschreibung des Belegungszustandes des realen dreistufigen Linksystems, wird die folgende Definition 7-B eingeführt.

Definition 7-B: Die Zustandsmatrix E des zweistufigen Ersatz-Linksystems mit $PR = R \cdot K_2$ Pseudorichtungen kennzeichnet ebenfalls eindeutig den Belegungszustand des realen

dreistufigen Linksystems mit R Richtungen.

Die Dimension der Zustandsmatrix E ist $G_1 \cdot K_1$, gleich Anzahl der Zwischenleitungen zwischen Stufe 1 und Stufe 2 des realen dreistufigen Linksystems. Ihre Elemente sollen mit $e_{i,j}$ bezeichnet werden.

$$E = \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \dots & e_{1,j} & \dots & e_{1,K_1} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \dots & e_{2,j} & \dots & e_{2,K_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{i,1} & e_{i,2} & \dots & e_{i,j} & \dots & e_{i,K_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ e_{G_1,1} & e_{G_1,2} & \dots & e_{G_1,j} & \dots & e_{G_1,K_1} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$$

$$j \in \{1, 2, \dots, K_1\}$$

Die Anzahl der Zeilen von E ist gleich der Anzahl der Koppelvielfache in der Stufe 1, d.h. gleich G_1 . Die Anzahl der Spalten von E ist gleich der Anzahl der Koppelvielfache in der Stufe 2, d.h. gleich $G_2 = K_1$. Das Element $e_{i,j}$ kennzeichnet den Belegungszustand des Ausgangs j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 (im Ersatzsystem). Es sei:

$e_{i,j} = 0$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 (im Ersatzsystem) nicht belegt ist und

$e_{i,j} = p$, wenn der Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 (im Ersatzsystem) in Pseudorichtung p belegt ist.

Entsprechend Beziehung (7.9), Seite 211, ist dies gleichbedeutend mit: Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 (im realen dreistufigen Linksystem) ist in Richtung r belegt, und die Verbindung führt über den Ausgang l des Koppelvielfachs j der Stufe 2 zum Koppelvielfach l der Stufe 3, siehe Definition 7-A, Seite 199.

Zwischen den Elementen des Zustandsraumes S (der Abbildung des realen Linksystems) und den Elementen der Zustandsmatrix E (der Abbildung des Ersatzsystems) besteht die Beziehung:

$$e_{i,j} = \sum_{l=1}^{K_2} (s_{i,j,l} + R \cdot (l-1) \cdot \delta_{i,j,l}) \quad (7.12)$$

mit $\delta_{i,j,l} = 1$, wenn $s_{i,j,l} \neq 0$
 und $\delta_{i,j,l} = 0$, wenn $s_{i,j,l} = 0$.

Sind die Zustandsmatrizen E gegeben, dann können - aus den Elementen $e_{i,j}$ mittels der Beziehung (7.9) Seite 211 - die Elemente $s_{i,j,l}$ des Zustandsraumes S berechnet werden. Aus den Elementen $e_{i,j}$ müssen zwei Werte ermittelt werden, der Index l von $s_{i,j,l}$ und der Wert (0,1,2,...,R) des Elementes $s_{i,j,l}$ selbst. Es gibt jetzt zwei Möglichkeiten:

$e_{i,j} = 0$: Dann sind alle Elemente $s_{i,j,l} = 0$ für die gleichen Wertepaare $-i,j-$ (wie $e_{i,j}$) und alle Werte von l, d.h. für $l \in \{1,2,\dots,K_2\}$.

$e_{i,j} = p$, mit $p \in \{1,2,\dots,PR=R \cdot K_2\}$: Dann erhält man für die Elemente $s_{i,j,l}$ zunächst

$$L = \left[\frac{p - R + \text{Modulo } R(p)}{R} \right] + 1 \quad (7.13)$$

Mit $l = L$ erhält man dann

$$s_{i,j,L} = e_{i,j} - R \cdot (L - 1), \quad (7.14)$$

mit L nach obiger Beziehung (7.13) und dem Wertepaar $-i,j-$ wie das Element $e_{i,j}$.

- Für alle weiteren Elemente $s_{i,j,l}$ mit gleichen Wertepaaren $-i,j-$ (wie $e_{i,j}$) und

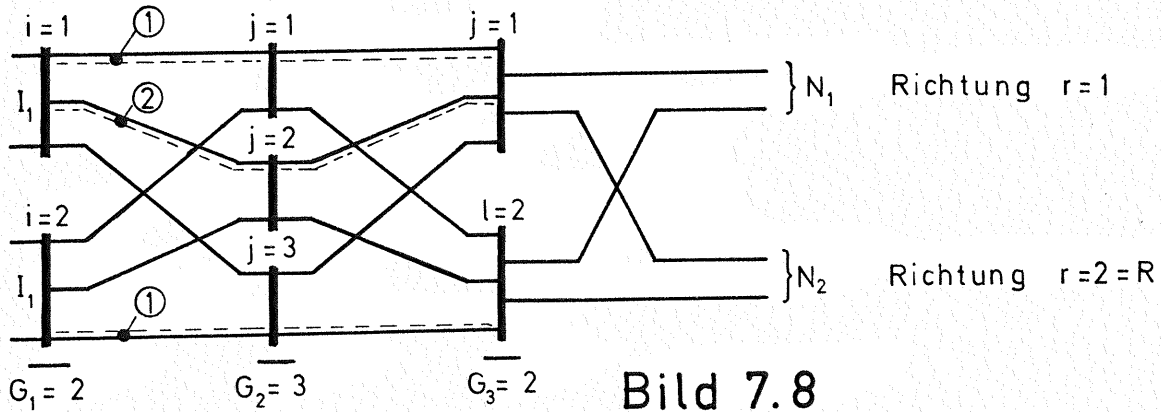
$$l \in \{1,2,\dots,\underline{L-1,L+1},\dots,K_2\}$$

gilt: $s_{i,j,l} = 0$. (2.15)

Im folgenden Beispiel 49, Seite 217 werden jetzt die obigen Beziehungen (7.12) bis (7.15) für das dort gegebene Belegungsmuster an-

gewendet und näher erläutert.

Beispiel 49: Es wird jetzt das gleiche Belegungsmuster verwendet wie im Beispiel 47, Seite 201.

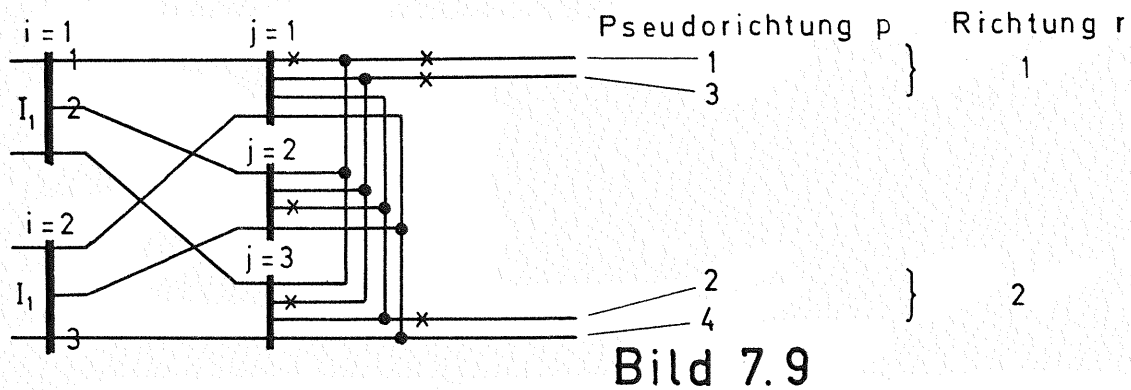


Der Zustandsraum S des obigen Belegungsmusters ist:

$$S = \begin{array}{c} j \rightarrow \\ \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \quad .$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{1 = 1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{1 = 2}$

Mit den Beziehungen (7.7) bis (7.11), Seite 211 - 213 erhält man das zu dem dreistufigen Linkssystem gehörende Ersatzsystem:



Die Zustandsmatrix E des Belegungsmusters vom Ersatzsystem ist:

$$E = \begin{array}{c} j \rightarrow \\ \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right\| \begin{array}{c} i \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array} \quad .$$

Die Zustandsmatrix E kann aber auch mittels der Beziehung (7.12), Seite 216 aus dem Zustandsraum S unmittelbar errechnet werden.

Bei der Ermittlung der ch. Vektoren verwendet man zweckmäßigerweise die Zustandsmatrizen E, siehe untenstehende Bemerkungen. Wird der zu der Zustandsmatrix E gehörende Zustandsraum S benötigt, dann können aus den Elementen $e_{i,j}$ von E die dazugehörigen Elemente $s_{i,j,1}$ von S - mittels der Beziehungen (7.13) bis (7.15), Seite 216 - berechnet werden.

Z.B. folgt aus dem Element $e_{1,1} = 1$ (siehe E Seite 217)

$$\begin{aligned} - \text{ aus (2.13)} \quad 1 &= \left[\frac{p - R + \text{Modulo } R (p)}{R} \right] + 1 \\ &= \left[\frac{1 - 2 + \text{Modulo } 2 (1)}{2} \right] + 1 = 1 = L . \end{aligned}$$

$$- \text{ Aus (2.14)} \quad s_{1,1,L} = e_{1,1} - R (L - 1)$$

$$\text{folgt:} \quad s_{1,1,1} = 1 - 2 (1 - 1) = 1.$$

- Aus (2.15) folgt:

$$s_{1,1,2} = 0.$$

Bei den anderen Elementen $e_{i,j}$ geht man jetzt völlig analog dazu vor.

Der Vorteil der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems gegenüber dem Zustandsraum S des realen Linksystems.

Betrachtet man die Anzahl der darstellbaren kombinatorischen Muster für eine Zeile von E bzw. -was gleichbedeutend ist- für eine Ebene i =konstant des Zustandsraumes S, so folgt:

- Für eine Zeile von E :

$$\text{Elementarvorat} = EV_E = (PR + 1)^{K_1} .$$

- Für eine Ebene i =konstant von S :

$$\text{Elementarvorat} = EV_S = (R + 1)^{K_1 \cdot K_2} .$$

Für die Gesamtheit der kombinatorisch darstellbaren Muster erhält man:

- Bei der Verwendung der Zustandsmatrix E:

$$\text{Gesamt-Elementarvorat} = EV_{\text{ges,E}} = EV_E = (PR + 1)^{K_1 \cdot G_1}.$$

- Bei der Verwendung des Zustandsraumes S:

$$\text{Gesamt-Elementarvorat} = EV_{\text{ges,S}} = EV_S = (R + 1)^{K_1 \cdot K_2 \cdot G_1}.$$

Für das auf Seite 217 dargestellte LinksysteM erhält man z.B.:

$$\begin{aligned} EV_{\text{ges,E}} &= 5^{3 \cdot 2} = 15\,625 \text{ Muster} \\ \text{und } EV_{\text{ges,S}} &= 3^{3 \cdot 2 \cdot 2} = 531\,441 \text{ Muster, d.h.} \end{aligned}$$

der Elementarvorat $EV_{\text{ges,S}}$ ist etwa dreißigmal so groß wie der Elementarvorat $EV_{\text{ges,E}}$.

7.2.5 Der Zustandsraum S^* , die Zustandsmatrix E und die Zustandsvektoren \vec{S} und \vec{E}

Bei der Ermittlung der ch. Zustandsmuster kann man jetzt völlig analog wie bei den zweistufigen LinksysteMen vorgehen. Es gibt bei den dreistufigen LinksysteMen - gegenüber den zweistufigen LinksysteMen - noch weitere Reduktionsmöglichkeiten. Diese werden jedoch erst im Abschnitt 7.3, Seite 234 betrachtet.

Analog zu der Einführung der Zustandsmatrix S^* bei Mischwahl (siehe Seite 32) und Richtungswahl (siehe Seite 132) bei zweistufigen LinksysteMen werden jetzt für die dreistufigen LinksysteMe der Zustandsraum S^* und die Zustandsmatrix E^* des zweistufigen Ersatzsystems definiert.

Definition 7-C: Der Zustandsraum S^* kennzeichnet ebenfalls eindeutig den Belegungsstatus der Zwischenleitungen des dreistufigen LinksysteMs. Die Dimension des Zustandsraumes S^* ist gleich der Dimension des Zustandsraumes S (siehe Definition 7-A, Seite 199), d.h. $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$. Seine Elemente werden mit $s_{i,j,l}^*$ bezeichnet.

Es gilt:

$$e_{i,j}^* = 0, \quad \text{wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \text{ (des zweistufigen Ersatzsystems) nicht belegt ist und}$$

$$e_{i,j}^* = (PR+1)^{i-1} \cdot e_{i,j}, \quad \text{wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \text{ der Stufe 1 (des zweistufigen Ersatzsystems) belegt ist.}$$

Für die Elemente der Zustandsvektoren \vec{S} und \vec{E} gilt, entsprechend zu der Definition 2-C Seite 35, bzw. Beziehung (5.6), Seite 134:

$$s_i = \sum_{l=1}^{G_3=K_2} \sum_{j=1}^{G_2=K_1} s_{i,j,l}^*, \quad (7.16)$$

$$\text{mit: } s_i \in \{0, 1, 1, \dots, (R+1)^{K_1 \cdot K_2} - 1\}$$

$$\text{und } e_i = \sum_{j=1}^{G_2} e_{i,j}^*, \quad (7.17)$$

$$\text{mit: } e_i \in \{0, 1, 2, \dots, (PR+1) - 1\} \text{ und } PR = R \cdot K_2.$$

7.2.6 Der normierte Zustandsraum SN, die normierte Zustandsmatrix EN und die allgemeinen Zustandsvektoren $\vec{\tau}$, \vec{T}_2 und \vec{T}_3

Für die dreistufigen Linkssysteme ist es ebenfalls zweckmäßig, die allgemeinen Zustandsvektoren $\vec{\tau}$ und \vec{T} einzuführen.

Bei den zweistufigen Linkssystemen wird der Belegungszustand der Zwischenleitungen mittels der Zustandsmatrix S beschrieben. Zur Beschreibung der allgemeinen Belegungszustände der Koppelvielfache der Stufe 1 bzw. der Stufe 2 wurden die allgemeinen Zustandsvektoren $\vec{\tau}$ und \vec{T} eingeführt (siehe Seite 59 und Seite 119).

Die Elemente τ_i der allgemeinen Zustandsvektoren $\vec{\tau}$ sind die Zeilensummen der Zeilen $i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$ der normierten Zustandsmatrix SN (siehe Abschnitt 6, Seite 193), mit anderen Worten: das Element τ_i ist gleich der Anzahl der Belegungen im Koppelvielfach i der Stufe 1.

Die Elemente t_j der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} sind die Spaltensummen der Spalten $j \in \{1, 2, \dots, K_1=G_2\}$ der normierten Zu-

standsmatrix SN, mit anderen Worten: das Element t_j ist gleich der Anzahl der Belegungen im Koppelvielfach j der Stufe 2. Entsprechend den gegebenen Strukturparametern von zweistufigen Linkssystemen gelten für die Elemente der allgemeinen Zustandsvektoren dieser Systeme die folgenden Bedingungen:

$$\tau_i \cong \text{MIN} [I_1, K_1] \text{ (siehe Seite 193)}$$

und

$$t_j \cong \text{MIN} [I_2, K_2] \text{ (siehe Seite 138)}.$$

Alle Zustandsmuster zweistufiger Linkssysteme, die den obigen Bedingungen genügen, sind sogenannte "erlaubte Zustände" (siehe Abschnitt 2.3, Seite 36, Abschnitt 5.2.3, Seite 138 und Abschnitt 6 Seite 193).

Bei dreistufigen Linkssystemen kann man zu den obigen Ausführungen für zweistufige Linkssysteme völlig analog vorgehen. Anstelle von Zeilen und Spalten bei zweistufigen Linkssystemen treten jetzt jedoch die Ebenen des Zustandsraumes S.

Definition 7-E: Der normierte Zustandsraum SN kennzeichnet den Belegungszustand der Zwischenleitungen des dreistufigen Linksystems. Aus SN geht jedoch nicht hervor, in welche Richtungen r die Zwischenleitungen belegt sind. Die Dimension des normierten Zustandsraumes SN ist gleich der Dimension des Zustandsraumes S (siehe Seite 199), d.h. gleich $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3$. Seine Elemente sollen mit $sn_{i,j,l}$ bezeichnet werden.

$$SN = \left\| \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{ccc} sn_{1,1,1} & \dots & sn_{1,G_2,1} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & sn_{i,j,1} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ sn_{G_1,1,1} & \dots & sn_{G_1,G_2,1} \end{array} & \begin{array}{ccc} sn_{1,1,2} & \dots & sn_{1,G_2,2} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & sn_{i,j,2} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ sn_{G_1,1,2} & \dots & sn_{G_1,G_2,2} \end{array} & \dots & \begin{array}{ccc} sn_{1,1,G_3} & \dots & sn_{1,G_2,G_3} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & sn_{i,j,G_3} & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ sn_{G_1,1,G_3} & \dots & sn_{G_1,G_2,G_3} \end{array} \\ \hline \underbrace{\hspace{10em}}_{l=1} & \underbrace{\hspace{10em}}_{l=2} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{l=G_3} \end{array} \right\|$$

mit $i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$,
 $j \in \{1, 2, \dots, G_2=K_1\}$ und
 $l \in \{1, 2, \dots, G_3=K_2\}$.

Es gilt:

$sn_{i,j,l} = 0$, wenn keine Verbindung vom Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 über das Koppelvielfach j der Stufe 2 zum Koppelvielfach l der Stufe 3 durchgeschaltet ist und

$sn_{i,j,l} = 1$, wenn eine Verbindung von Ausgang j des Koppelvielfachs i der Stufe 1 über das Koppelvielfach j der Stufe 2 zum Koppelvielfach l der Stufe 3 durchgeschaltet ist.

Es ist also im Fall $s_{i,j,l}$ ungleich Null $sn_{i,j,l} = 1$, und im Fall $s_{i,j,l} = 0$ ist $sn_{i,j,l}$ ebenfalls gleich Null.

Die normierte Zustandsmatrix EN des zweistufigen Ersatzsystems ist völlig analog definiert wie die normierte Zustandsmatrix SN bei zweistufigen Linksystemen, siehe SN Seite 135.

In den Bildern 7.2, 7.3 und 7.4, Seite 204 sind die drei Ebenen des Zustandsraumes dargestellt. Danach gilt:

- Die "Ebene i =konstant" beschreibt den Belegungszustand der Ausgänge des Koppelvielfachs i der Stufe 1, mit $i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$.
- Die "Ebene j =konstant" beschreibt den Belegungszustand der Eingänge und der Ausgänge des Koppelvielfachs j der Stufe 2, mit $j \in \{1, 2, \dots, G_2=K_1\}$.
- Die "Ebene l =konstant" beschreibt den Belegungszustand der Eingänge des Koppelvielfachs l der Stufe 3, mit $l \in \{1, 2, \dots, G_3\}$.

Bei dreistufigen Linksystemen ist es ebenfalls zweckmäßig, die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} und \vec{T} (bzw. \vec{T}_2 und \vec{T}_3) einzuführen. Bei den zweistufigen Linksystemen sind die Elemente t_j (τ_i) der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} ($\vec{\tau}$) gleich der Anzahl der Belegungen je Koppelvielfach der Stufe 2 (Stufe 1). Bei den dreistufigen Linksystemen soll diese Bedeutung beibehalten werden.

Die Anzahl der Belegungen je Koppelvielfach j der Stufe 2 wird jetzt mit $t_{2,j}$ bezeichnet. Die Anzahl der Belegungen je Koppelvielfach l der Stufe 3 wird mit $t_{3,l}$ bezeichnet. Die G_2 stelligen Zahlenfolgen der Elemente $t_{2,j}$ werden als Zustandsvektoren \vec{T}_2 be-

zeichnet, und die G_3 stelligen Zahlenfolgen der Elemente $t_{3,1}$ werden als Zustandsvektoren \vec{T}_3 bezeichnet.

Mit den auf Seite 223 beschriebenen Ebenen des Zustandsraumes S (die Ausführungen gelten ebenfalls für die Ebenen des normierten Zustandsraumes SN) folgt dann:

$$\tau_i = \sum_{l=1}^{G_3} \sum_{j=1}^{G_2} sn_{i,j,l}, \quad (7.18)$$

$$t_{2,j} = \sum_{l=1}^{G_3} \sum_{i=1}^{G_1} sn_{i,j,l} \quad \text{und} \quad (7.19)$$

$$t_{3,1} = \sum_{j=1}^{G_2} \sum_{i=1}^{G_1} sn_{i,j,l}. \quad (7.20)$$

Für die maximalen Werte der Elemente τ_i , $t_{2,j}$ und $t_{3,1}$ gelten die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \tau_i &= \text{MIN} [I_1, K_1], \\ t_{2,j} &= \text{MIN} [I_2, K_2] \quad \text{und} \\ t_{3,1} &= \text{MIN} [I_3; K_3]. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Die Bedeutung der Elemente τ_i , $t_{2,j}$ und $t_{3,1}$ soll nochmals zusammenfassend beschrieben werden.

τ_i : Anzahl der Belegungen in der "Ebene i =konstant" des Zustandsraumes S (siehe Beispiel 50, Seite 225), gleichbedeutend mit: Anzahl der Belegungen im Koppelvielfach i der Stufe 1, mit $i \in \{1, 2, \dots, G_1\}$.

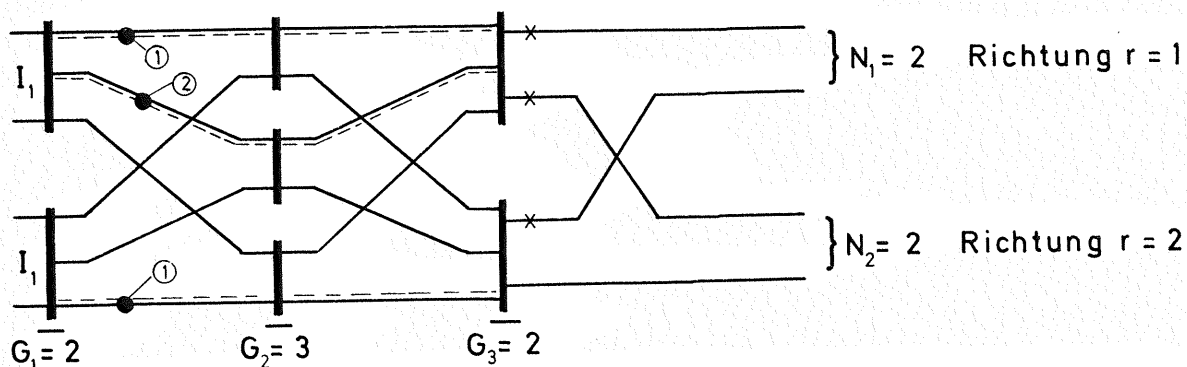
$t_{2,j}$: Anzahl der Belegungen in der "Ebene j =konstant" des Zustandsraumes S (siehe Beispiel 50, Seite 225), gleichbedeutend mit: Anzahl der Belegungen im Koppelvielfach j der Stufe 2, mit $j \in \{1, 2, \dots, G_2=K_1\}$.

$t_{3,1}$: Anzahl der Belegungen in der "Ebene l =konstant" des Zustandsraumes S (siehe Beispiel 50, Seite 225), gleichbedeutend mit: Anzahl der Belegungen im Koppelvielfach l der Stufe 3, mit $l \in \{1, 2, \dots, G_3=K_2\}$.

Aus der obigen Beziehung (7.21) erhält man die folgenden Wertebereiche für die zulässigen Belegungen je Ebene des Zustandsraumes S:

$$\begin{aligned}
 \text{Ebene } i=\text{konstant:} & \quad 0 \equiv \tau_i \equiv \text{MIN} [I_1, K_1=G_2] ; \\
 \text{Ebene } j=\text{konstant:} & \quad 0 \equiv t_{2,j} \equiv \text{MIN} [I_2, K_2=G_3] \quad \text{und} \quad (7.22) \\
 \text{Ebene } l=\text{konstant:} & \quad 0 \equiv t_{3,1} \equiv \text{MIN} [I_3, K_3] .
 \end{aligned}$$

Beispiel 50: Betrachtet wird dasselbe Belegungsmuster wie in Beispiel 47, Seite 201. Der Zustandsraum S des unten abgebildeten Belegungsmusters ist auf Seite 226 dargestellt.



Aus dem auf Seite 226 dargestellten Zustandsraum S folgt mit der Beziehung (7.12), Seite 216 die Zustandsmatrix E des Ersatzsystems:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} ,$$

siehe auch Beispiel 49, Seite 217. Aus E folgt die normierte Zustandsmatrix EN:

$$EN = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} \tau_1 = 2 \\ \tau_2 = 1 \end{array}$$

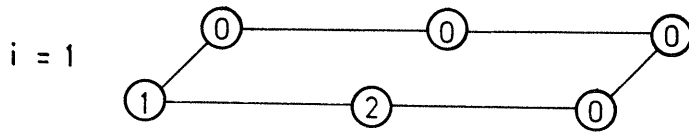
$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \parallel & \parallel & \parallel \\ t_{2,1} & t_{2,2} & t_{2,3} \end{array} .$$

Wie im obigen Beispiel gezeigt, können die Elemente τ_i und $t_{2,j}$ unmittelbar aus der normierten Zustandsmatrix EN berechnet werden. Die Elemente $t_{3,1}$ haben bei der Zustandsmatrix E die folgende Bedeutung ($t_{3,1}$: Elemente des allgemeinen Zustandsvektors \vec{T}_3): Die Anzahl $t_{3,1}$ ist gleich der Anzahl von Belegungen in die folgenden Pseudorichtungen p:

$$p \in \{1 \cdot 1, 2 \cdot 1, \dots, r \cdot 1, \dots, R \cdot 1\} . \quad (7.23)$$

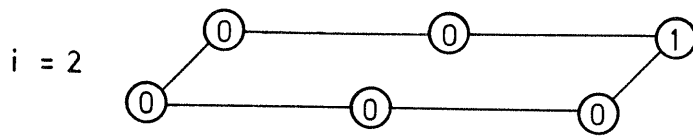
Die Anzahl der Belegungen in den verschiedenen Ebenen des Zustandsraumes sind:

Ebenen i = konstant:



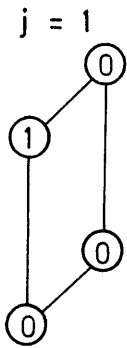
$\tau_1 = 2$

$\vec{\tau} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

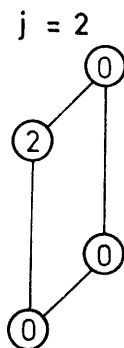


$\tau_2 = 1$

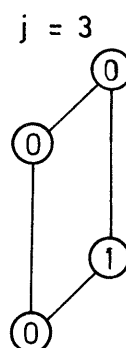
Ebenen j = konstant:



$t_{2,1} = 1$



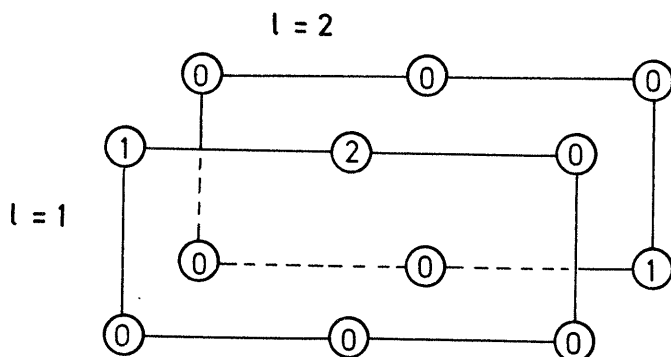
$t_{2,2} = 1$



$t_{2,3} = 1$

$\vec{T}_2 = \{ 1 \ 1 \ 1 \}$

Ebenen l = konstant:



$l = 1$

$\left. \begin{matrix} t_{3,2} = 1 \\ t_{3,1} = 2 \end{matrix} \right\}$

$\vec{T}_3 = \{ 2 \ 1 \}$

Aus der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems können die Elemente $t_{3,1}$ von $\overline{T_3}$ wie folgt berechnet werden:

- Mit der Beziehung (7.13), Seite 216 muß zunächst aus dem Element $e_{i,j}$ der Wert von l berechnet werden.
- Sei der berechnete Wert von l gleich L , mit $L \in \{1, 2, \dots, G_3\}$, dann ist die Anzahl der Elemente $e_{i,j}$ ungleich Null, für die $l=L$ ist, gleich dem Wert von $t_{3,1=L}$.

7.2.7 Die erlaubten Zustände

Die erlaubten Zustände von zweistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl wurden im Abschnitt 5.2.3, Seite 138 beschrieben. Die in Abschnitt 5.2.3 eingeführten Definitionen und Sätze müssen jetzt für die dreistufigen Linkssysteme mit Richtungswahl entsprechend erweitert werden.

Für die Strukturparameter gelten bei dreistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl die in Abschnitt 7.1.1, Seite 195 aufgestellten Bedingungen.

Analog zu Satz 5-a Seite 138 erhält man für die $t_{3,1}$ Belegungen im Koppelvielfach l der Stufe 3 (Koppelvielfach l der Stufe 3 gleichbedeutend mit: Ebene l =konstant des Zustandsraumes S) die folgende Bedingung:

Satz 7-b: Ist $t_{3,1} \geq k_r$, dann gilt: von den $t_{3,1}$ Belegungen im Koppelvielfach l der Stufe 3 können höchstens k_r Belegungen in eine bestimmte Richtung r führen.

Des weiteren folgt bei der entsprechend Bild 7.1, Seite 195 angegebenen Struktur der hier betrachteten Linkssysteme für die $t_{2,j}$ Belegungen im Koppelvielfach j der Stufe 2 (Koppelvielfach j der Stufe 2 gleichbedeutend mit: Ebene j =konstant des Zustandsraumes S) die Bedingung:

Satz 7-c: Von den $t_{2,j}$ Belegungen im Koppelvielfach j der Stufe 2 kann über das Koppelvielfach l der Stufe 3 höchstens

nur eine Belegung in Richtung r vorhanden sein. Es können jedoch alle $t_{2,j}$ Belegungen in eine bestimmte Richtung r gehen.

Für die τ_i Belegungen eines Koppelvielfachs i der Stufe 1 gilt die folgende Bedingung:

Satz 7-d: Ist $\tau_i \cong k_r$, dann gilt: Von den τ_i Belegungen des Koppelvielfachs i der Stufe 1 können höchstens k_r Belegungen in eine bestimmte Richtung r zum Koppelvielfach l der Stufe 3 gehen.

Entsprechend zur Definition 5-B, Seite 139 erhält man damit die folgende Definition.

Definition 7-F: Zustandsmuster, die der Bedingung (7.22), Seite 225 genügen und für die des weiteren die Bedingungen entsprechend den obigen Sätzen 7-b bis 7-d erfüllt sind, werden als "erlaubte Zustandsmuster" bezeichnet. Erlaubte Zustandsmuster sind alle technisch sinnvollen Muster. Die Menge der erlaubten Muster wird mit Ω bezeichnet (siehe auch Seite 41).

Wie in Abschnitt 7.2.6 Seite 225 angeführt, können aus den zu den Zustandsräumen S gehörenden Zustandsmatrizen E des Ersatzsystems die Elemente τ_i , $t_{2,j}$ und $t_{3,1}$ ebenfalls, unmittelbar bestimmt werden. Für die Zustandsmatrix E des Ersatzsystems gelten die folgenden Bedingungen:

Analog zu Satz 7-b, Seite 227 gilt der Satz 7-e.

Satz 7-e: Ist $t_{3,1} \cong k_r$, dann gilt: Von den $t_{3,1}$ Belegungen in die Pseudorichtungen
$$p \in \{1 \cdot 1, 2 \cdot 1, \dots, r \cdot 1, \dots, R \cdot 1\}$$

können höchstens k_r Belegungen in eine bestimmte Pseudorichtung p führen.

Analog zu Satz 7-c, Seite 227 gilt der Satz 7-f.

Satz 7-f: Von den $t_{2,j}$ Belegungen im Koppelvielfach j der Stufe 2 (gleichbedeutend mit: $t_{2,j}$ Belegungen in der Spalte j)

der Zustandsmatrix E) des Ersatzsystems kann höchstens eine Belegung in eine bestimmte Pseudorichtung p gehen.

Analog zu Satz 7-d, Seite 228 gilt der Satz 7-g.

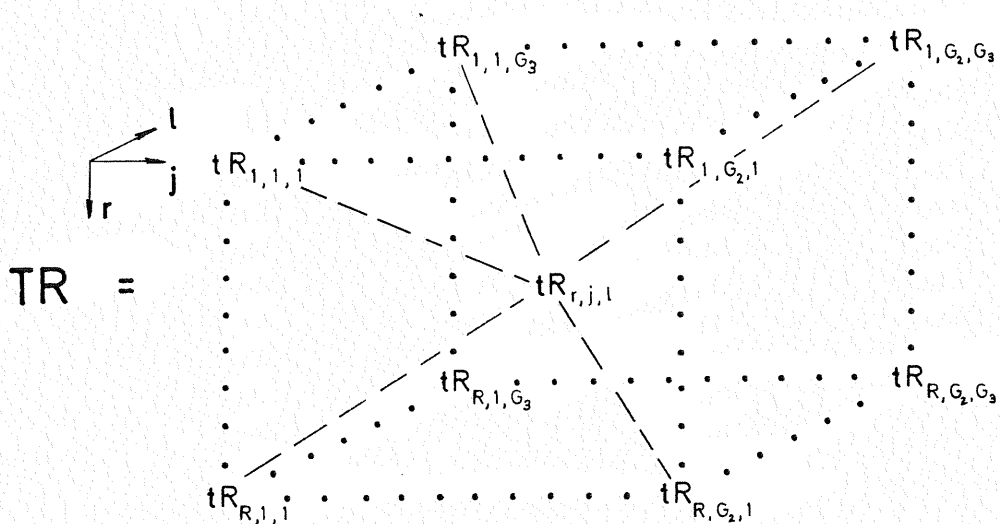
Satz 7-g: Ist $\tau_i \geq k_r$, dann gilt: Von den τ_i Belegungen des Koppelvielfachs i der Stufe 1 des Ersatzsystems können höchstens k_r Belegungen in eine bestimmte Pseudorichtung p gehen.

Zur Begründung des im folgenden Abschnitt 7.2.8 eingeführten Richtungsraum TR gelten analog die Bemerkungen von Seite 140. Dort wurde die Einführung der Richtungsmatrizen TR von zweistufigen Linksystemen mit Richtungswahl begründet.

7.2.8 Die Richtungsräume TR und TR* und der Richtungsvektor \vec{TR}

Bei zweistufigen Linksystemen mit Richtungswahl wurden, zur Ermittlung der Partitionen Richtungsmatrizen benötigt (siehe Abschnitt 5.7.2.1, Seite 166). Bei dreistufigen Linksystemen mit Richtungswahl werden jetzt ebenfalls -zur Ermittlung der Partitionen (ch. Vektoren \vec{C})- Richtungsräume benötigt. Sie werden wie folgt definiert.

Definition 7-G: Der Richtungsraum



$$\begin{aligned} \text{mit } r &\in \{1, 2, \dots, R\}, \\ &j \in \{1, 2, \dots, G_2 = K_1\} \\ \text{und } l &\in \{1, 2, \dots, G_3 = K_2\} \end{aligned}$$

ist ein Raum mit der Dimension $R \cdot G_2 \cdot G_3$. Seine Elemente werden mit $tR_{r,j,l}$ gekennzeichnet. Der Richtungsraum TR beschreibt einen allgemeinen Zustand des Linksystems, und es gilt:

$tR_{r,j,l} = 0$, wenn der Eingang j des Koppelvielfachs l der Stufe 3 (gleichbedeutend mit: Ausgang l eines Koppelvielfachs j der Stufe 2) nicht in Richtung r belegt ist und

$tR_{r,j,l} = 1$, wenn der Eingang j des Koppelvielfachs l der Stufe 3 in Richtung r belegt ist.

Es gelten die Beziehungen:

$$t_{2,j} = \sum_{r=1}^R \sum_{l=1}^{G_3} tR_{r,j,l} \quad (7.24)$$

$$\text{und } t_{3,l} = \sum_{r=1}^R \sum_{j=1}^{G_2} tR_{r,j,l} \quad (7.25)$$

Die Elemente $t_{2,j}$ und $t_{3,l}$ können auch mit den Beziehungen (7.19) und (7.20), Seite 224 berechnet werden.

Für die Ebenen des Richtungsraumes TR gelten die folgenden Beziehungen:

Satz 7-h: In der Zeile r der "Ebene $l=\text{konstant}$ " (gleichbedeutend mit: Koppelvielfach l der Stufe 3) des Richtungsraumes TR gibt es maximal k_r Belegungen in eine bestimmte Richtung r .

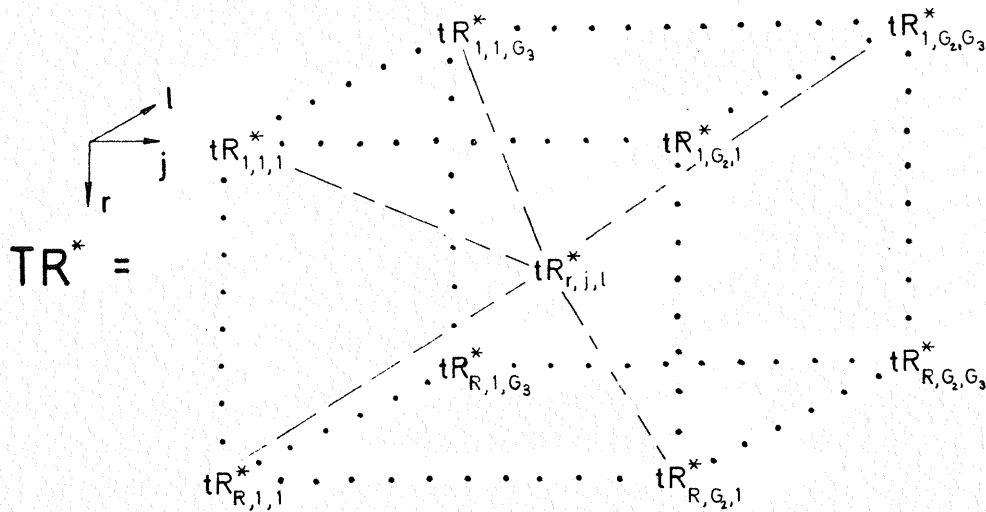
Satz 7-i: In der Zeile r der "Ebene $j=\text{konstant}$ " (gleichbedeutend mit: Koppelvielfach j der Stufe 2) des Richtungsraumes TR gibt es bei der hier angenommenen Struktur der Linksysteme (siehe Seite 195) nur die Belegungszustände:

- keine Belegung in eine bestimmte Richtung r und
- eine Belegung in eine bestimmte Richtung r .

Satz 7-j: In der Zeile j der "Ebene l =konstant" (gleichbedeutend mit: Eingang j des Koppelvielfachs l von Stufe 3) des Richtungsraumes TR gibt es nur die Belegungszustände:

- keine Belegung und
- eine Belegung.

Definition 7-H: Der Richtungsraum



$$\begin{aligned} \text{mit } r &\in \{1, 2, \dots, R\}, \\ j &\in \{1, 2, \dots, G_2 = K_1\} \quad \text{und} \\ l &\in \{1, 2, \dots, G_3 = K_2\} \end{aligned}$$

ist ein transformierter Richtungsraum TR mit den folgenden Transformationsbeziehungen:

$$\begin{aligned} tR_{r,j,l}^* &= 0, \quad \text{wenn } tR_{r,j,l} = 0 \text{ ist und} \\ tR_{r,j,l}^* &= 2^{[j-1 + K_1(l-1)]}, \quad \text{wenn } tR_{r,j,l} = 1 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Es sei

$$tR_r = \sum_{l=1}^{G_3} \sum_{j=1}^{G_2} tR_{r,j,l}^*, \quad (7.26)$$

d.h. tR_r sei die Summe der Elemente $tR_{r,j,l}^*$ der "Ebene r =konstant" des Richtungsraumes TR^* .

Damit erhält man analog zur Definition 5-E, Seite 144 die folgende Definition 7-I.

Definition 7-I: Die Zahlenfolge der Summen tR_r nach Beziehung (7.26), Seite 231 wird als Richtungsvektor

$$\vec{TR} = \begin{Bmatrix} tR_1 \\ tR_2 \\ \vdots \\ tR_r \\ \vdots \\ tR_R \end{Bmatrix}$$

bezeichnet. Es gilt: $r \in \{1, 2, \dots, R\}$ und

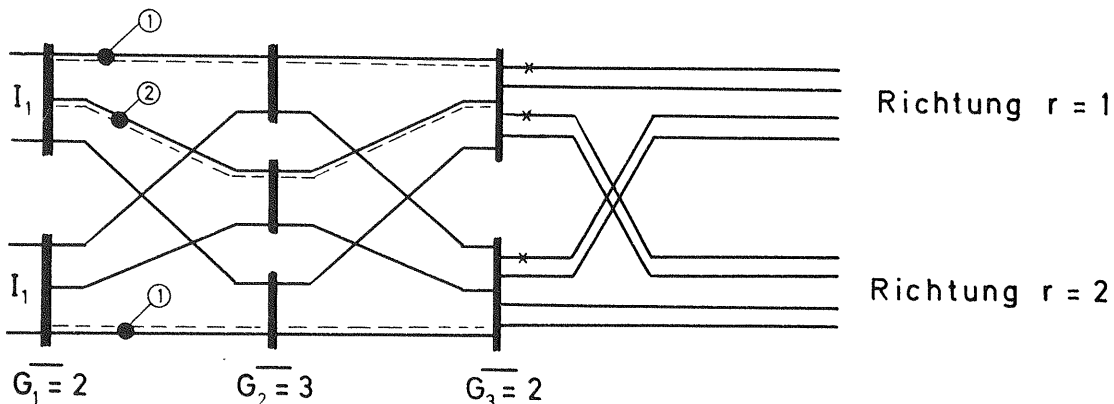
$tR_r \in \{0, 1, 2, \dots, tR_r^{(max)}\}$, mit

$$tR_r^{(max)} = \sum_{l=1}^{G_3} \sum_{j=K_1-k_r+1}^{G_2} 2^{j-1+K_1(R-1)}.$$

Anmerkung zum Laufindex $j = K_1 - k_r + 1$ in der obigen Summe:

Den höchstmöglichen Beitrag der Elemente $tR_{r,j,l}^*$ zur Summe tR_r erhält man immer dann, wenn der Index j die größten Werte aus der Menge $j \in \{1, 2, \dots, K_1\}$ annimmt, d.h. der Anfangswert von j gleich $K_1 - k_r + 1$ ist.

Beispiel 51: Es wird dasselbe Belegungsmuster betrachtet wie im Beispiel 50, Seite 225. Die Richtungserreichbarkeit k_r sei jetzt jedoch $k_r = 2$, aber ebenfalls einheitlich je Richtung r .



Der Zustandsraum für dieses Belegungsmuster ist:

$$S = \begin{array}{c} j \rightarrow \\ \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \begin{array}{l} i \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

l=1 l=2

Aus dem obigen Zustandsraum erhält man, indem man die Anzahl der Belegungen in die Richtung r=1 "je Spalte j von S" und die Anzahl der Belegungen in die Richtung r=2 "je Spalte j von S" ermittelt, den folgenden Richtungsraum TR.

$$TR = \begin{array}{c} r \\ \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Gewicht je Spalte j 2 2 2 2 2 2 2

Gewichtet man die Spalten von TR, so folgt:

$$TR^* = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array} \quad \overrightarrow{TR} = \begin{Bmatrix} 33 \\ 2 \end{Bmatrix} .$$

Zeilensummen von TR* bilden

7.3 Die ch. Zustandsräume SC und die ch. Vektoren \vec{C}
bei dreistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl

7.3.1 Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Vertauschung der Ebenen i =konstant im Zustandsraum S, bzw. Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems

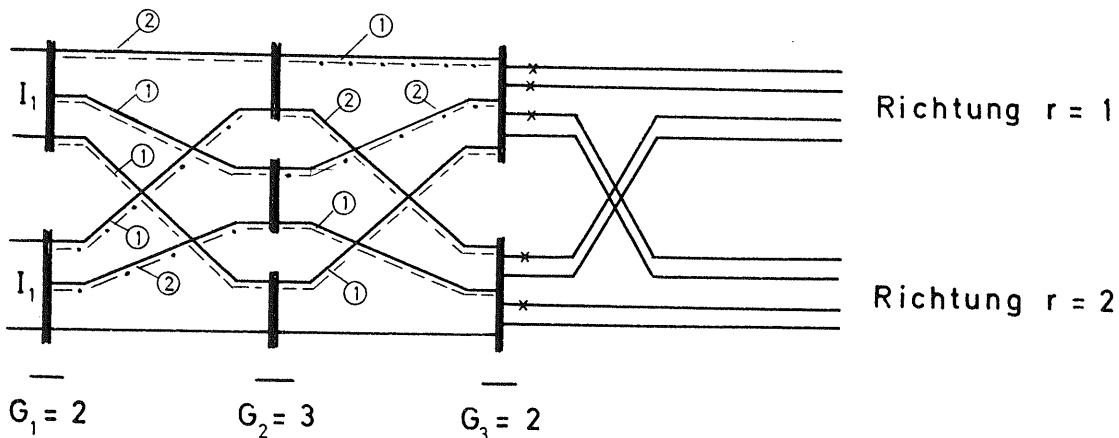
Es soll jetzt wieder die Bedingung

" alle Koppelvielfache der Stufe 1 sind gleichbelastet "

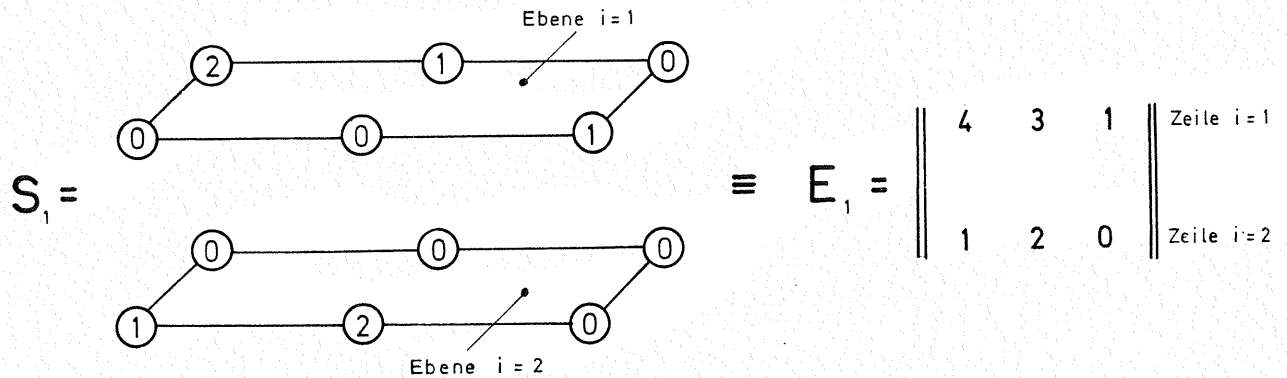
erfüllt sein. Die Koppelvielfache der Stufe 1 können in diesem Fall wiederum "umgeordnet" werden (siehe Seite 42 unten: Umordnung der Koppelvielfache der Stufe 1 bei zweistufigen Linksystemen). Diese "Umordnung der Koppelvielfache" ist gleichbedeutend mit der Vertauschung der Ebenen i =konstant des Zustandsraumes S, bzw. gleichbedeutend mit der Vertauschung der Zeilen i in der Zustandsmatrix E des zweistufigen Ersatzsystems.

Muster, die durch die oben angeführten Vertauschungen ineinander überführbar sind, werden wiederum als äquivalente Zustandsmuster bezeichnet (äquivalente Zustandsmuster bei zweistufigen Linksystemen: siehe Abschnitt 2.4.1, Seite 41).

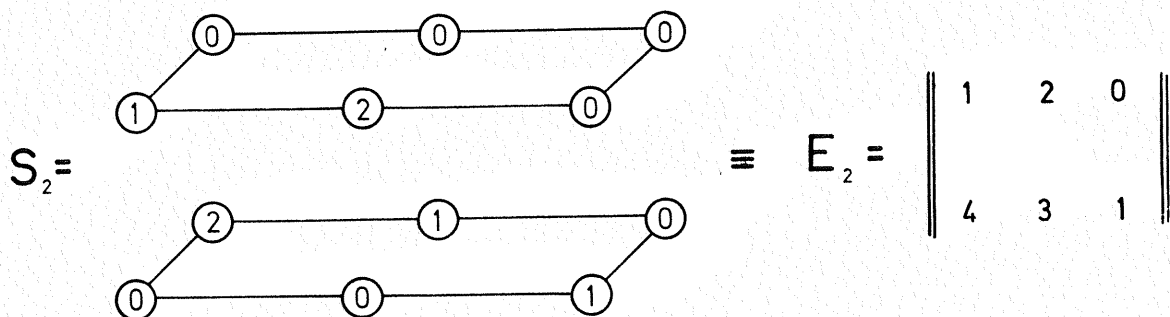
Beispiel 52: Als Beispiel wird das Linksystem des Beispiels 51, Seite 232 verwendet. Es wird jedoch ein anderes Belegungsmuster betrachtet.



Der Zustandsraum S , bzw. die Zustandsmatrix E des Ersatzsystems des auf Seite 234 dargestellten Belegungsmusters sind:



Durch Vertauschung der Ebenen $i=\text{konstant}$, d.h. durch Vertauschung der Ebene $i=1$ mit der Ebene $i=2$, erhält man das folgende Zustandsmuster S_2 bzw. E_2 .



Die Zustandsmatrizen E können aus dem Zustandsraum S mit Hilfe der Beziehung (7.12), Seite 216 ermittelt werden.

Bei der Verwendung der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems zur Beschreibung des Belegungszustandes des realen, dreistufigen Linksystems kann man jetzt

zur Ermittlung der ch. Zustandsmuster

wiederum völlig analog vorgehen wie bei den zweistufigen Linksystemen (siehe Seite 41).

Als ch. Zustandsräume SC werden jetzt jene Zustandsräume S gewählt, bei denen für die zu S gehörenden Zustandsvektoren \vec{E}

(analog zu der Beziehung (2.10), Seite 48) die Beziehung (7.27) gilt:

$$e_1 > e_2 > \dots > e_i > \dots > e_n > e_{n+1} = e_{n+2} = \dots = e_{G_1} = 0, (7.27)$$

mit $e_i \in \{1, 2, \dots, (PR+1)^{K_1} - 1\}$ für

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

n : Anzahl der von Null verschiedenen Elemente e_i ,

$PR = R \cdot K_2$ gleich Anzahl der Pseudorichtungen im Ersatzsystem und

$e_i = 0$ für $i \in \{n, n+1, \dots, G_1\}$.

Das Gleichheitszeichen ist für die Elemente $e_i \neq 0$ nicht möglich, siehe Satz 7-c, Seite 227 bzw. Satz 7-f, Seite 228.

Vektoren \vec{E} , die der obigen Bedingung (7.27) genügen, werden wiederum als ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ bezeichnet (Indizierung mit g : siehe Seite 103) und die dazugehörigen Zustandsräume mit $SC^{(g)}$. Diese Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ sind wieder die Vertreter ihrer Äquivalenzklasse und können nicht mehr durch Vertauschung der Ebenen i =konstant ineinander überführt werden.

Damit ist die Menge $\Omega^{(g)}$ der ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ für dreistufige Linksysteme mit R Abnehmerbündeln (R Richtungen) und dem Absuchverfahren "geordnete Absuche" bestimmt.

7.3.2 Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Vertauschung der Ebenen j =konstant im Zustandsraum S mittels der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T}

Ebenen j =konstant siehe Bild 7.3, Seite 204.

Bei zweistufigen Linksystemen mit dem Absuchverfahren "zufällige Auswahl" sind alle Zustandsmuster, die durch Spaltenvertauschung (Spalten: Index j bei der Zustandsmatrix S) ineinander überführbar sind, zueinander äquivalent (siehe Abschnitt 4, Seite 103 und Abschnitt 5.3.2, Seite 146).

Setzt man bei den dreistufigen Linksystemen ebenfalls das Absuchverfahren "zufällige Auswahl" voraus, dann gilt analog zur Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix S von zweistufigen Linksystemen der Satz 7-k.

Satz 7-k: Bei zufälliger Auswahl eines freien Ausgangs eines Koppelvielfachs der Stufe 1 sind alle Zustandsräume S , die durch Vertauschung der Ebenen j =konstant ineinander überführbar sind, zueinander äquivalent.

Anmerkung: Vertauschung der Ebenen j =konstant ist gleichbedeutend mit: Umordnung der Koppelvielfache in der Stufe 2.

Die Anzahl der Belegungen in den Ebenen j =konstant des Zustandsraumes S sind gleich den Elementen $t_{2,j}$ der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T}_2 .

Jene allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T}_2 , für die gilt:

$$t_{2,1} \cong t_{2,2} \cong \dots \cong t_{2,j} \cong \dots \cong t_{2,G_2}, \quad (7.28)$$

werden als \vec{TK}_2 Vektoren bezeichnet.

Als ch. Vektoren bei

zufälliger Auswahl eines freien Ausgangs eines Koppelvielfachs der Stufe 1

werden jetzt (analog zu Abschnitt 4.7, Seite 125) jene Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ gewählt, die aus den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{TK}_2 hervorgehen, d.h. die Vektoren $\vec{C}_{1,w}^{(g)}$ ($\vec{C}_{1,w}^{(g)}$: bei zweistufigen Linksystemen: Siehe Abschnitt 4.6, Seite 120).

Entsprechend zu der Definition 4-F, Seite 126 für zweistufige Linksysteme gilt bei den dreistufigen Linksystemen:

$$\vec{C}_w^{(zT)} = \vec{C}_{1,w}^{(g)}. \quad (7.29)$$

Damit ist die Menge $\Omega^{(zT)}$ der ch. Vektoren $\vec{C}^{(zT)}$ für dreistufige Linksysteme mit Richtungswahl und dem Absuchverfahren "zufällige Auswahl" in Stufe 1 bestimmt. Der zu $\vec{C}^{(zT)}$ gehörende Zustandsraum

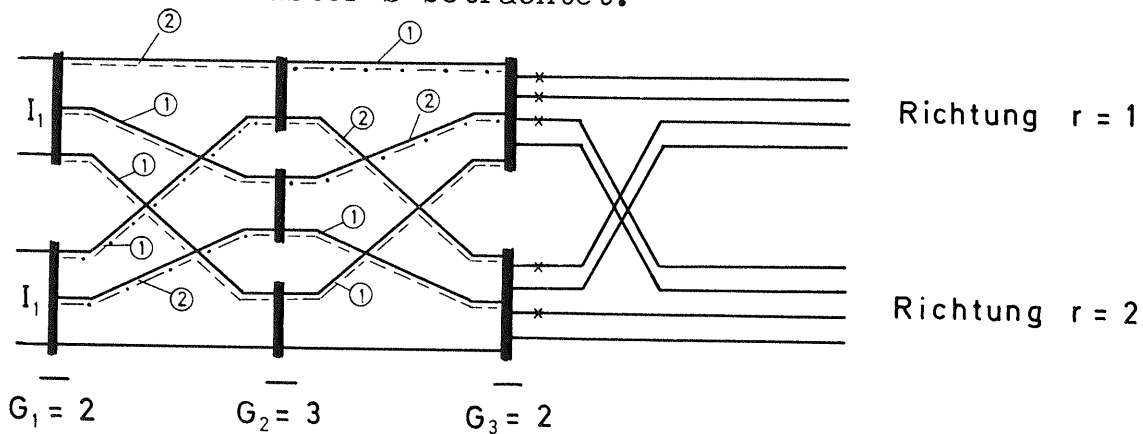
wird mit $SC^{(zT)}$ gekennzeichnet.

Anmerkung zum Index " zT ":

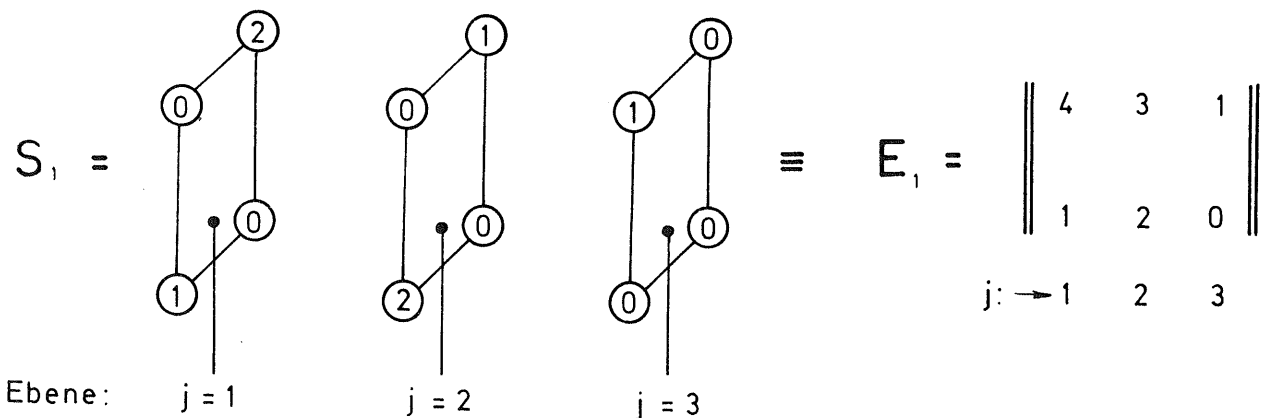
" z " steht für "zufällige Auswahl" und der Index " T " steht für: Die Reduktion - entsprechend Satz 7-k, Seite 237 - wurde durch die Elementvertauschung bei den allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} durchgeführt. In der Menge $\Omega^{(zT)}$ gibt es jedoch noch Zustandsmuster, die ebenfalls noch - entsprechend der Eigenschaft nach Satz 7-k, Seite 237 - zueinander äquivalent sind, siehe Abschnitt 7.3.4, Seite 244.

Es wird jetzt ein Beispiel für die in diesem Abschnitt behandelte Reduktionsmethode betrachtet.

Beispiel 53: In diesem Beispiel werden die - zu dem Zustandsmuster S_1 von Beispiel 52, Seite 234 durch Elementvertauschung beim Vektor \vec{T}_2 - äquivalenten Zustandsmuster S betrachtet.



In dem obigen Bild ist das ch. Zustandsmuster $SC^{(zT)} = S_1$ eingetragen.



Die Anzahl der Belegungen in den Ebenen j =konstant sind:

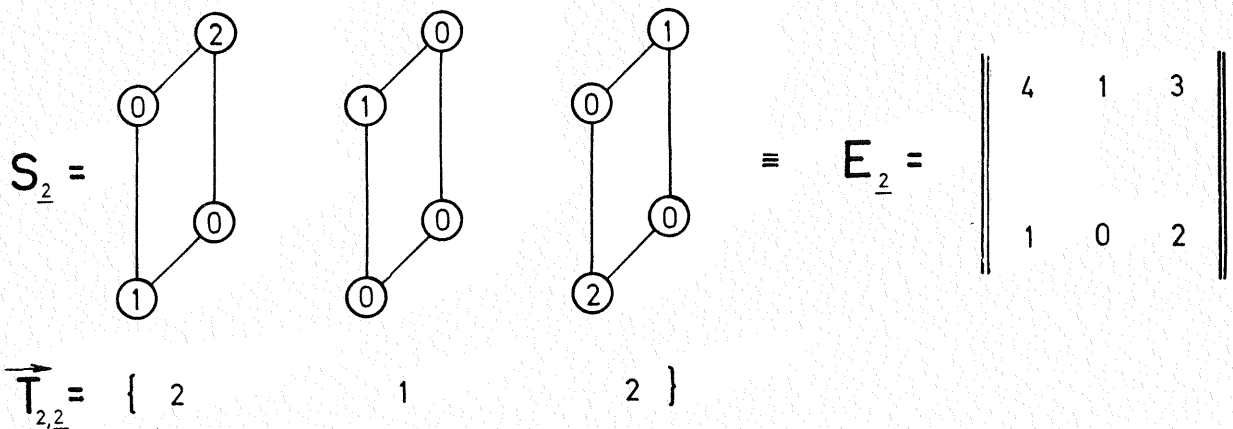
$$t_{2,1} = 2 \quad , \quad t_{2,2} = 2 \quad \text{und} \quad t_{2,3} = 1,$$

d.h. der allgemeine Zustandsvektor \vec{T}_2 des Zustandsmusters S_1 ist

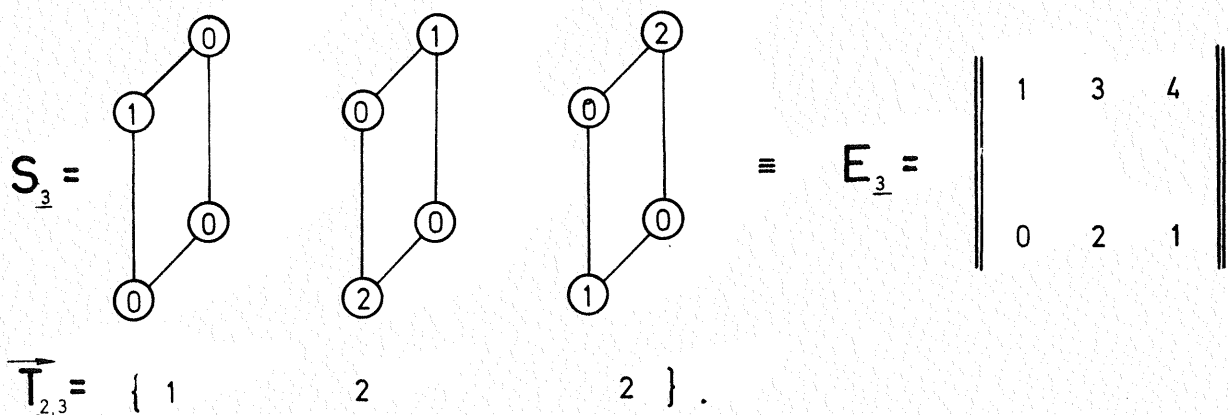
$$\vec{T}_{2,1} = \{ 2 \quad 2 \quad 1 \} .$$

Für die Elemente des obigen \vec{T}_2 Vektors ist die Bedingung (7.28), Seite 237 erfüllt; damit ist \vec{T}_2 ein \vec{TK}_2 Vektor. Das zu diesem Vektor $\vec{T}_2 = \vec{TK}_2$ gehörende Muster S_1 (siehe vorhergehende Seite) wird als ch. Zustandsmuster der entsprechenden Äquivalenzklasse gewählt. Die folgenden Zustandsmuster S_2 und S_3 sind zu dem Muster S_1 äquivalent, d.h. sie können durch Vertauschung der Ebenen j =konstant im Zustandsraum S - bzw. Vertauschung der Elemente $t_{2,j}$ von \vec{T}_2 - ineinander überführt werden.

Durch Vertauschung der Ebenen $j=2$ und $j=3$ bei S_1 entsteht das folgende Zustandsmuster:



Vertauscht man des weiteren bei S_1 die Ebenen $j=1$ und $j=3$, so entsteht das folgende Zustandsmuster:



Aus den zu den Zustandsräumen S_1, S_2 und S_3 gehörenden Zustandsmatrizen E_1, E_2 und E_3 des Ersatzsystems erkennt man, daß die Vertauschung der Ebenen $j=\text{konstant}$ identisch ist mit der Spaltenvertauschung bei der zu S gehörenden Zustandsmatrix E .

Des weiteren erkennt man aus den Matrizen E_1, E_2 und E_3 , daß noch weitere Matrizen E - und damit auch Zustandsräume S - zueinander äquivalent sind, d.h. durch Spaltenvertauschung ineinander überführt werden können, siehe untenstehende Matrizen E'_1, E'_2 und E'_3 .

Vertauscht man bei der Matrix E_1 (E_1 : siehe Seite 238) die Spalten $j=1$ und $j=2$, so entsteht das Muster

$$E'_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Vertauscht man bei der Matrix E_2 (E_2 : siehe Seite 239) die Spalten $j=1$ und $j=3$, so entsteht das Muster

$$E'_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Vertauscht man bei der Matrix E_3 (E_3 : siehe Seite 239) die Spalten $j=2$ und $j=3$, so entsteht das Muster

$$E'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} .$$

Die obigen Zustandsmuster E_1, E_2 und E_3 sind ebenfalls erlaubte Zustandsmuster. Von diesen drei Zustandsmustern kann durch Vertauschung der Elemente $t_{2,j}$ von \vec{T}_2 das Muster E_1 nicht eliminiert werden, denn - wie man sieht - ist der allgemeine Zustandsvektor $\vec{T}_{2,1}$ von E'_1 ein \vec{TK}_2 Vektor.

Für die ebenfalls noch durch Spaltenvertauschung ineinander überführbaren Zustandsmuster vom Typ E_1 wird eine andere Reduktionsmethode angegeben, siehe Abschnitt 7.3.4, Seite 244.

7.3.3 Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Vertauschung der Ebenen l=konstant im Zustandsraum S

Die Vertauschung der Ebenen l=konstant ist gleichbedeutend mit der Umordnung der Koppelvielfache l in der Stufe 3.

Die Voraussetzung für die Anwendung der Reduktionsart nach Abschnitt 7.3.2 Seite 236 ist, daß in der Stufe 1 des dreistufigen Linksystems "zufällig abgesucht" wird, siehe Satz 7-k, Seite 237.

Setzt man bei den dreistufigen Linksystemen des weiteren "zufällige Auswahl" bei den Koppelvielfachen der Stufe 2 voraus, dann gilt - analog zu Satz 7-k, Seite 237 - der Satz 7-1.

Satz 7-1: Bei zufälliger Auswahl eines freien Ausgangs eines Koppelvielfachs der Stufe 2 sind alle Zustandsräume S, die durch Vertauschung der Ebenen l=konstant ineinander überführbar sind, zueinander äquivalent.

Die Anzahl der Belegungen in der Ebene l=konstant des Zustandsraumes S ist (siehe Beziehung (7.20), Seite 224) gleich $t_{3,1}$, dem Element l des allgemeinen Zustandsvektors \vec{T}_3 . Jene allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T}_3 , für die gilt

$$t_{3,1} \cong t_{3,2} \cong \dots \cong t_{3,1} \cong \dots \cong t_{3,G_1}, \quad (7.30)$$

werden als \overline{TK}_3 Vektoren bezeichnet.

Von der Menge $\Omega^{(zT)}$ der Vektoren $\vec{C}^{(zT)}$ nach Beziehung (7.29), Seite 237 benötigt man - nach obigem Satz 7-1 - nur jene Vektoren $\vec{C}^{(zT)}$, die aus den allgemeinen Zustandsvektoren \overline{TK}_3 hervorgehen. Diese Vektoren werden mit $\vec{C}_{1,w}^{(zT)}$ bezeichnet (analog zu $\vec{C}_{1,w}^{(g)}$, Seite 237). Darin ist w die lfd. Nr. der Vektoren $\vec{C}^{(zT)}$, die aus \overline{TK}_3 hervorgehen. Diese Vektoren $\vec{C}_{1,w}^{(zT)}$ werden jetzt als ch. Vektoren

- bei "zufälliger Auswahl" in Stufe 1 mit T Reduktion und
- "zufälliger Auswahl" in Stufe 2

(Index zT,z) definiert, d.h. es sei

$$\vec{C}_w^{(zT, z)} = \vec{C}_{1, w}^{(zT)} \quad (7.31)$$

Die Menge der ch. Vektoren $\vec{C}^{(zT, z)}$ wird mit $\Omega^{(zT, z)}$ bezeichnet und die zu $\vec{C}^{(zT, z)}$ gehörigen Zustandsräume mit $SC^{(zT, z)}$.

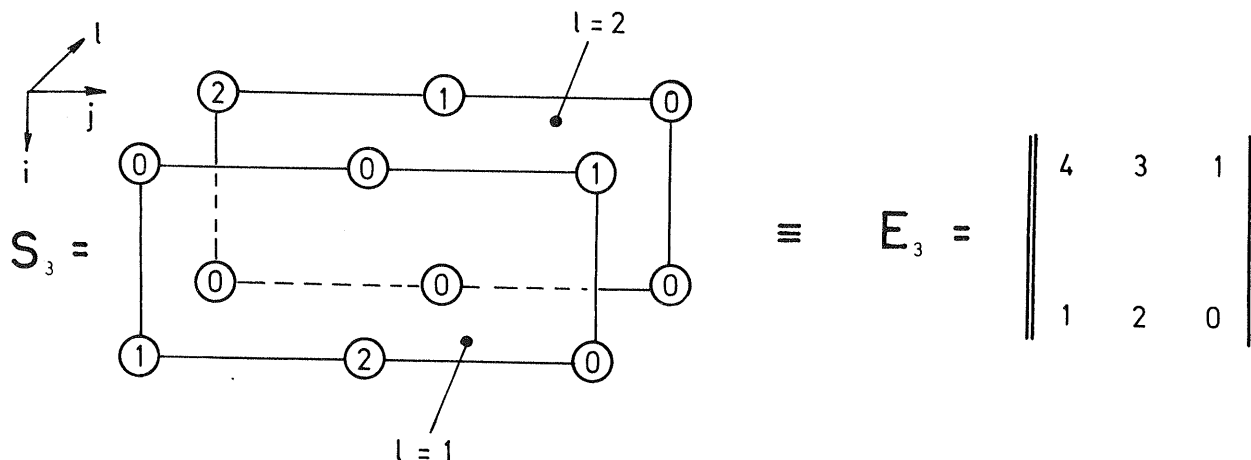
Anmerkung zu dem zweiten Index z (siehe oben $\vec{C}^{(zT, z)}$):

Im Fall "zufällige Auswahl" in der Stufe 1 können für die nach Satz 7-k, Seite 237 mögliche Reduktion der Zustandsmuster zwei einfache Reduktionsmethoden angegeben werden, siehe Abschnitt 7.3.2, Seite 236 und Abschnitt 7.3.3, Seite 241.

Für den Fall "zufällige Auswahl" in Stufe 1 und Stufe 2 kann hier für die nach Satz 7-1, Seite 241 zusätzlich mögliche Reduktion der Zustandsmuster nur das in diesem Abschnitt beschriebene Reduktionsverfahren angegeben werden. Es wird hier deshalb nur mit dem Index "z" indiziert, logisch wäre hier ebenfalls die Indizierung mit "zT".

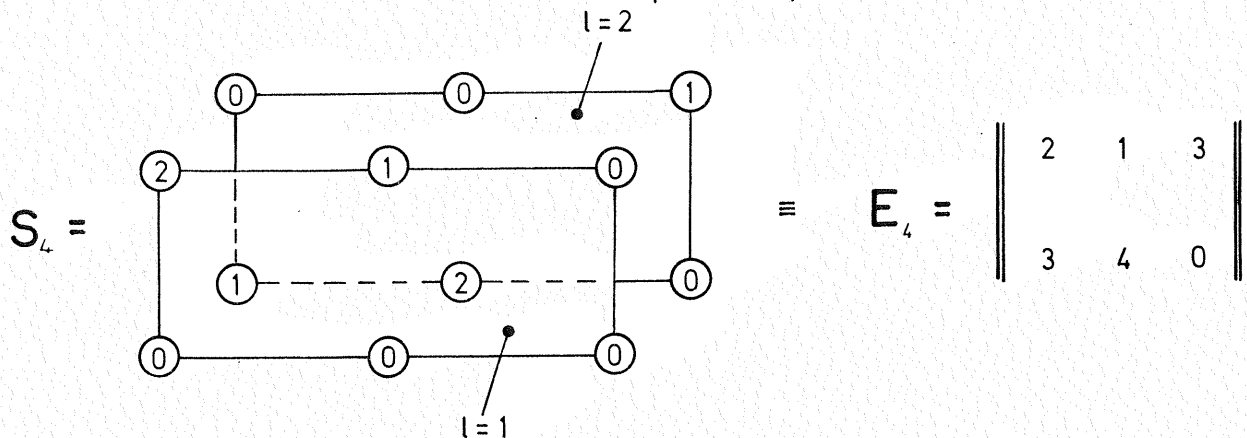
Es wird jetzt ein Beispiel für die in diesem Abschnitt 7.3.3 angegebene Reduktionsmethode betrachtet.

Beispiel 54: Es wird das gleiche Linksystem gewählt wie im Beispiel 53, Seite 238. Zu dem dort eingetragenen Belegungsmuster werden nun die durch Vertauschung der Ebenen $l = \text{konstant}$ im Zustandsraum S zueinander äquivalenten Zustandsmuster angegeben. Der Zustandsraum S_1 und die Zustandsmatrix E_1 für das auf Seite 238 dargestellte Belegungsmuster lauten:



In der Ebene $l=1$ von S_1 sind $t_{3,1} = 3$ Belegungen, und in der Ebene $l=2$ von S_1 sind $t_{3,2} = 2$ Belegungen und es gilt: $t_{3,1} > t_{3,2}$, d.h. der allgemeine Zustandsvektor \vec{T}_3 ist ein \overline{TK}_3 Vektor (siehe Beziehung (7.30), Seite 241). Außerdem sind für das Zustandsmuster S_1 die Bedingungen (7.27) Seite 236 (siehe Beispiel 52, Seite 234) und (7.28), Seite 237 (siehe Beispiel 53, Seite 238) erfüllt und das Zustandsmuster S_1 ist damit ein Muster aus der Menge $\Omega^{(zT)}$ ($\Omega^{(zT)}$ siehe Seite 242).

Das folgende Muster S_4 ist durch Vertauschung der Ebene $l=1$ mit der Ebene $l=2$ in das Muster S_1 überführbar. Nach Satz 7-1, Seite 241 sind damit die beiden Muster S_1 und S_4 zueinander äquivalent.



In der Ebene $l=1$ von S_4 sind $t_{3,1} = 2$ Belegungen vorhanden, und in der Ebene $l=2$ von S_4 sind $t_{3,2} = 3$ Belegungen vorhanden, d.h. der allgemeine Zustandsvektor \vec{T}_3 ist hier

$$\vec{T}_3 = \{ 2 \quad 3 \} \quad (\text{kein } \overline{TK} \text{ Vektor}).$$

Aus den zu den Zustandsräumen S_3 und S_4 gehörenden Zustandsmatrizen E_3 und E_4 erkennt man die Gültigkeit des Satzes 7-m.

Satz 7-m: Die Vertauschung der Ebenen $l=L_1$ und $l=L_2$ im Zustandsraum S ist identisch mit der Vertauschung der Pseudorichtungen

$$p = r + R \cdot (L_1 - 1) \quad \text{mit} \quad p = r + R \cdot (L_2 - 1)$$

in der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems. Es gilt:

$$r \in \{ 1, 2, \dots, R \},$$

$$L_1, L_2 \in \{ 1, 2, \dots, G_3 \}.$$

Aus dem Zahlenbsp. von Seite 242/243 (Zustandsmatrizen E_3 und E_4) folgt:

Vertauscht man in der Matrix E_4 die Pseudorichtungen $p = 1$ mit $p = 3$ und $p = 2$ mit $p = 4$, dann erhält man die Matrix E_3 , Seite 242.

7.3.4 Reduktion der Anzahl der Unbekannten durch Vertauschung der Ebenen j =konstant im Zustandsraum S mittels der Zustandsvektoren \vec{S}_2

Diese Reduktion ist ebenfalls durch die Eigenschaft der Zustandsmuster - entsprechend Satz 7-k, Seite 237 - möglich, und es schien deshalb logisch, zunächst die Reduktion dieses Abschnitts - vor der Reduktion nach Abschnitt 7.3.3, Seite 241 - zu behandeln.

Bei der hier noch unbestimmten Mächtigkeit der Belegungsmuster geht man jedoch zweckmäßigerweise entsprechend der Abschnittsnummerierung vor (siehe MS2 Seite 265).

In Abschnitt 7.2.1, Seite 197 wurde die Matrix S_2 definiert. S_2 ist die Zustandsmatrix, die nur den Belegungszustand der Zwischenleitungen zwischen Stufe 2 und Stufe 3 beschreibt, siehe Beispiel 46, Seite 198.

Analog zur Ergänzung E5-2, Seite 134 muß jetzt eine Zustandsmatrix S_2^* definiert werden. Die Zeilensummen von S_2^* ergeben dann wieder die Elemente der Zustandsvektoren \vec{S}_2 . Für die Elemente $s_{2,j}$ von \vec{S}_2 gilt also:

$$s_{2,j} = \sum_{l=1}^{K_2} (R + 1)^{l-1} \cdot s_{2,j,l} , \quad (7.32)$$

mit $j \in \{1, 2, \dots, G_2=K_1\}$.

Die Voraussetzung für äquivalente Zustandsmuster nach Satz 7-k, Seite 237 ist das Absuchverfahren "zufällige Auswahl" in Stufe 1. Dieses Absuchverfahren hat eine gleichmäßige Belastung der Koppelvielfache von Stufe 2 zur Folge.

Unabhängig von dem Absuchverfahren der Koppelvielfache von Stufe 2 (genau wie im Abschnitt, 7.3.2 Seite 236) können damit bei den Zu-

standsmatrizen S_2 die "Zeilen j " vertauscht werden, unter Berücksichtigung des Gesamtbelegungszustandes entsprechend dem Zustandsraum S bzw. der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems (deshalb "Zeilen j "). Die "Zeilenvertauschung" bei der Zustandsmatrix S_2 ist identisch mit der Vertauschung der Ebenen j =konstant im Zustandsraum S (Umordnung der Koppelvielfache in der Stufe 2) nach Satz 7-k, Seite 237.

Es gibt also zwei Reduktionsalgorithmen zur Ausführung der Ebenenvertauschung nach Satz 7-k :

- Elementvertauschung beim allgemeinen Zustandsvektor \overline{T}_2 , siehe Abschnitt 7.3.2, Seite 236 und
- "Zeilenvertauschung" bei der Zustandsmatrix S_2 .

Für die Eindeutigkeit des gesamten Reduktionsalgorithmuses ist jetzt der folgende Satz 7-n wichtig:

Satz 7-n: Die Vertauschung von "Zeilen j " bei der Zustandsmatrix S_2 darf nur bei jenen Zustandsmatrizen S_2 ausgeführt werden, bei denen gleiche Zeilensummen $t_{2,j}$ (bzw. $tK_{2,j}$) auftreten (mit anderen Worten: gleiche Anzahl von Belegungen in verschiedenen Ebenen j =konstant im Zustandsraum S).

Belegungsmuster mit der Eigenschaft nach obigem Satz 7-n sind jedoch genau jene Muster, die mit der Reduktionsart der Unbekannten entsprechend Abschnitt 7.3.2, Seite 236 nicht eliminiert werden (siehe Zustandsmatrix E_1 , Seite 240 und die anschließenden Bemerkungen).

Als ch. Zustandsräume $SC^{(z)}$ werden jetzt jene Zustandsräume $SC^{(zT)}$ ($SC^{(zT)}$ siehe Seite 237) gewählt, für die die folgende Bedingung gilt:

$$s_{2,1} \cong s_{2,2} \cong \dots \cong s_{2,j} \cong \dots \cong s_{2,G_2} \quad (7.33)$$

Für die Durchführung der Reduktion der Unbekannten und insbesondere für den BL - Algorithmus (siehe Seite 29) ist jetzt die folgende Eigenschaft der Zustandsvektoren \overline{S}_2 von Bedeutung:

- Haben zwei nebeneinanderstehende Elemente $t_{2,j}$ und $t_{2,j+1}$ von \vec{T}_2 nicht ein und denselben Wert, dann gilt - für die Elemente der zu dem Zustandsraum $SC^{(zT)}$ gehörigen Zustandsvektoren S_2 - stets die Beziehung

$$s_{2,j} > s_{2,j+1} \quad (7.34)$$

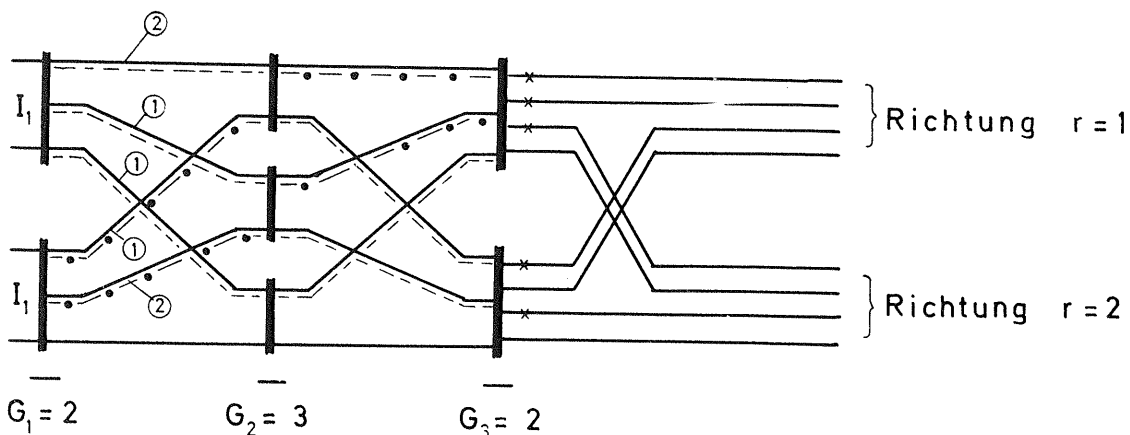
Die Menge der ch. Zustandsräume $SC^{(z)}$ wird mit $\Omega^{(z)}$ bezeichnet und die zu $SC^{(z)}$ gehörenden Vektoren mit $\vec{C}^{(z)}$.

Anmerkung zur Indizierung:

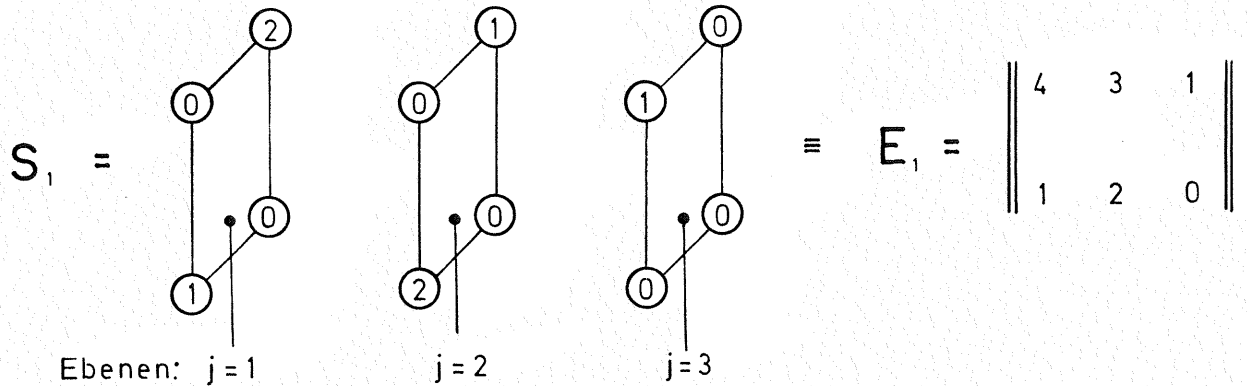
Da die mögliche Reduktion der Unbekannten durch das Absuchverfahren "zufällige Auswahl" in Stufe 1 (siehe Satz 7-k, Seite 237), bei der Durchführung der Reduktion nach Abschnitt 7.3.2, Seite 236 und Abschnitt 7.3.4, Seite 244 jetzt vollständig ist, werden diese Zustände nur mit " z " indiziert.

Wird jetzt in der Stufe 2 ebenfalls das Absuchverfahren "zufällige Auswahl" angewendet, dann benötigt man von der Menge $\Omega^{(zT,z)}$ (siehe Abschnitt 7.3.3, Seite 241) nur jene Zustände $SC^{(zT,z)}$, die der Bedingung (7.33) Seite 245 genügen. Diese Zustände werden mit $SC^{(z,z)}$ bzw. $\vec{C}^{(z,z)}$ bezeichnet und die Menge dieser Zustände mit $\Omega^{(z,z)}$. Der Index " z, z " bedeutet also: "zufällige Auswahl" in Stufe 1 und Stufe 2.

Beispiel 55: Es wird das gleiche Linksystm betrachtet wie im vorangegangenen Beispiel 54, Seite 242.



In dem auf Seite 246 dargestellten Linksyst. ist das ch. Muster $SC^{(z^T, z)} = S_1$ eingetragen (siehe auch Beispiel 53 Seite 238).



Zunächst soll nochmals zusammenhängend dargestellt werden, daß der obige Zustandsraum S_1 ein Zustandsraum $SC^{(z^T, z)}$ ist, d.h. zu der Menge $\Omega^{(z^T, z)}$ gehört.

Aus der Zustandsmatrix E_1 folgt:

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} 5^0 & 5^1 & 5^2 & \text{(Gewichtung: siehe Seite 220)} \end{matrix} \\
 E_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \implies E_1^* = \begin{vmatrix} 4 & 15 & 25 \\ 1 & 10 & 0 \end{vmatrix} \implies E_1 = \begin{Bmatrix} 44 \\ 11 \end{Bmatrix} \\
 \Downarrow \\
 EN_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Aus der Spaltensumme von EN_1 , d.h. dem Zustandsmuster mit der lfd. Nr. 1, folgt:

$$T_{2,1} = \{ 2 \ 2 \ 1 \} .$$

Aus dem Muster S_1 unmittelbar (siehe Beispiel 54 Seite 242) oder aus E_1 mit Hilfe der Beziehung (7.23) Seite 225 folgt:

$$T_{3,1} = \{ 3 \ 2 \} .$$

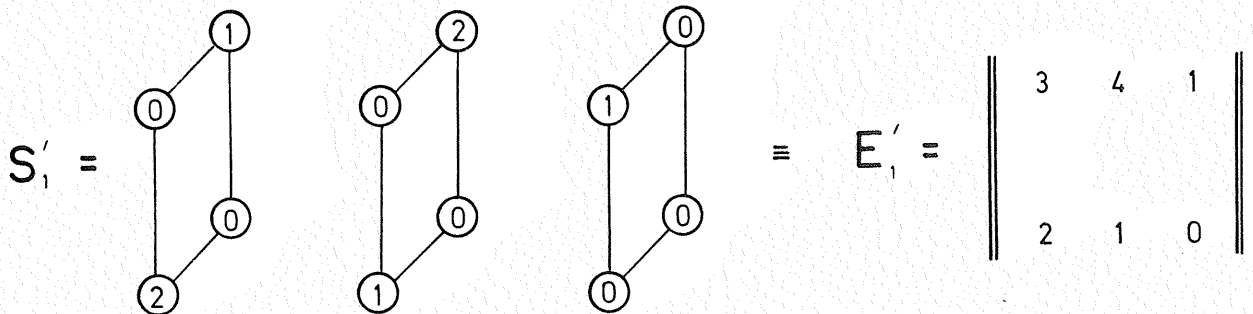
d) Aus dem Vektor $\vec{S}_{2,1}$ folgt:

$s_{2,1,1} = 7 > s_{2,1,2} = 5 > s_{2,1,3} = 1$, d.h. die Bedingung (7.33), Seite 245 ist erfüllt; mit a), b) und c) folgt damit: Das Muster S_1 ist ein Zustandsraum aus der Menge $\Omega^{(z,z)}$ ($\Omega^{(z,z)}$: siehe Seite 246).

Vertauscht man jetzt in der Zustandsmatrix $S_{2,1}$ von Seite 248 die "Zeilen $j=1$ und $j=2$ " (gleichbedeutend mit der Elementvertauschung bei dem Zustandsvektor $\vec{S}_{2,1}$), so erhält man die Matrix

$$S_{2,1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \vec{S}_{2,1} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{Bmatrix} .$$

Diese "Zeilenvertauschung" bei $S_{2,1}$ ist gleichbedeutend mit der Vertauschung der Ebenen $j=1$ mit $j=2$ im Zustandsraum S (siehe Seite 245). Führt man diese Vertauschung bei dem Zustandsraum S_1 von Seite 247 durch, so erhält man den folgenden Zustandsraum S_1 :



Diese Zustandsmatrix E_1' , die zu S_1' gehört, ist jetzt identisch mit der Zustandsmatrix E_1 von Seite 240. Die Matrix E_1' ist - nach Satz 7-k, Seite 237 - ebenfalls zu E_1 von Seite 238 äquivalent, sie kann jedoch mit dem in Abschnitt 7.3.2 Seite 236 hergeleiteten Reduktionsverfahren nicht eliminiert werden. Erst mit dem in diesem Abschnitt geschilderten Verfahren kann dieses Muster - die Matrix E_1' - eliminiert werden, denn für die Elemente des obigen Zustandsvektors $\vec{S}_{2,1}$ gilt: $s_{2,1,1} = 5 < s_{2,1,2} = 7$; damit ist die Bedingung (7.33), Seite 245 für die ch. Zustände der Menge $\Omega^{(z,z)}$ nicht erfüllt.

7.3.5 Zusammenhängende Darstellung der in Abschnitt 7.3 beschriebenen Reduktionsarten an Hand eines Beispiels

Es wird dasselbe Linksytstem verwendet wie in den vorangegangenen Unterabschnitten 7.3.1 bis 7.3.4. Zu den in diesen Abschnitten behandelten Zustandsmustern werden jetzt alle zueinander äquivalenten Zustandsmuster angegeben und in einem Mengenschaubild (siehe Seite 258) dargestellt.

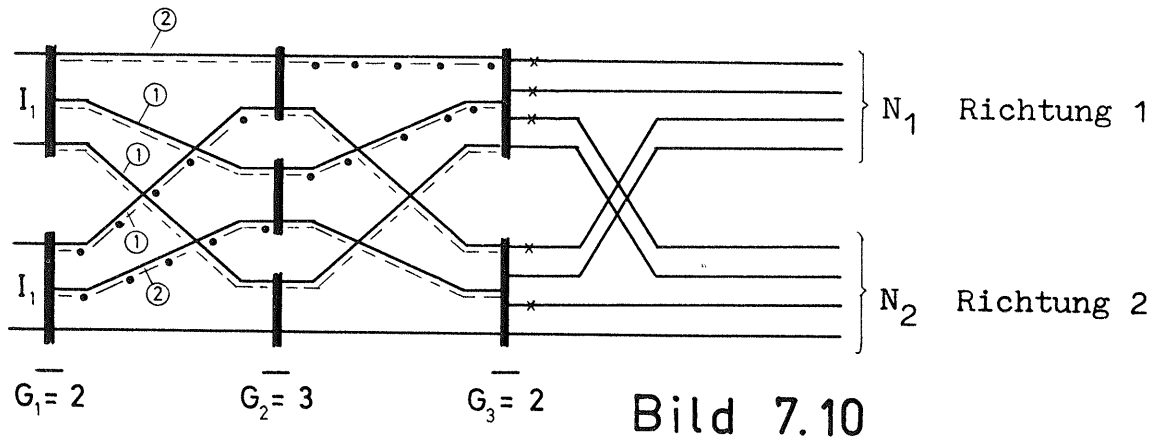


Bild 7.10

- Zustandsraum S des im obigen Bild eingetragenen Belegungsmusters (S: siehe Definition 7-A, Seite 199):

$$S = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|.$$

- Zustandsmatrizen E und E* des Ersatzsystems für das obige Belegungsmuster (E: siehe Definition 7-B, Seite 214; E*: siehe Definition 7-D, Seite 220) und Zustandsvektor E (siehe Seite 221):

$$E = \begin{array}{c} 5^0 \quad 5^1 \quad 5^2 \\ \left\| \begin{array}{ccc} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right\| \Rightarrow E^* = \left\| \begin{array}{ccc} 4 & 15 & 25 \\ 1 & 10 & 0 \end{array} \right\| \Rightarrow \vec{E} = \left\{ \begin{array}{l} 44 \\ 11 \end{array} \right\}.$$

- Allgemeine Zustandsvektoren \vec{T}_2 und \vec{T}_3 (siehe Seite 223):

$$\vec{T}_2 = \{ 2 \quad 2 \quad 1 \} \quad \text{und} \\ \vec{T}_3 = \{ 3 \quad 2 \}.$$

- Zustandsmatrizen S_2 und S_2^* des auf Seite 250 dargestellten Belegungsmusters (S_2 : siehe Seite 197; S_2^* : siehe Seite 244) und der Zustandsvektor \vec{S}_2 (S_2 : siehe Seite 244):

$$S_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3^0 & 3^1 \\ \left\| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array} \Longrightarrow S_2^* = \begin{array}{c} \left\| \begin{array}{cc} 1 & 6 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array} \Longrightarrow \vec{S}_2 = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} 7 \\ 5 \\ 1 \end{array} \right] \end{array} .$$

Das in dem Bild 7.35 - 1, Seite 250 dargestellte Belegungsmuster ist dasselbe Muster wie in Beispiel 55, Seite 246. Aus den Punkten a) bis d) (Seite 248 und Seite 249) folgt damit: Das im Bild 7.53 - 1 dargestellte Belegungsmuster ist ein ch. Muster aus der Menge $\Omega^{(z,z)}$.

In der folgenden Tabelle 7.35-1, Seite 252 sind jetzt für den Fall

"zufällige Auswahl" in Stufe 1 und Stufe 2

alle Zustandsmuster angegeben, die zu dem im Bild 7.10, Seite 250 dargestellten Belegungsmuster äquivalent sind. Das im Bild 7.10 eingetragene Belegungsmuster hat die lfd. Nr. ① .

Bemerkungen zu den in der Tabelle 7.35-1, Seite 252 dargestellten äquivalenten Zustandsmustern:

Das Zustandsmuster ① ist definitionsgemäß das ch. Zustandsmuster $SC^{(z,z)}$ der in der Tabelle 7.35-1 aufgelisteten Muster. Ausgehend von diesem Zustandsmuster kann der Tabelle 7.35-1 entnommen werden, wie die zueinander äquivalenten Muster ② bis ②④ aus dem Muster ① ermittelt werden können. Es gilt:

- 1) Aus Muster ① entsteht durch Vertauschung der Pseudorichtung p (gleichbedeutend mit: Vertauschung der Elemente beim allgemeinen Zustandsvektor \vec{T}_3)

$$p = 1 \text{ mit } p = 3 \quad \text{und} \quad p = 2 \text{ mit } p = 4$$

das Muster ⑬ .

- 2) Aus Muster ① entstehen ferner - durch die in der Tabelle mit Pfeilen gekennzeichneten Operationen - die Muster ② bis ⑫ . Analog dazu entstehen aus dem Muster ⑬ die

die Muster (14) bis (24) .

- 3) Im folgenden wird jetzt nur noch die Entstehung der Muster (2) bis (12) beschrieben. Die Ermittlung der Muster (14) bis (24) kann analog dazu erfolgen.
- 4) Aus Muster (1) entsteht durch Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix E das Muster (7) .
- 5) Für die Entstehung der Muster (2) bis (6) aus Muster (1) und für die Entstehung der Muster (8) bis (12) aus Muster (7) gilt eine analoge Vorgehensweise. Es werden deshalb im folgenden nur noch die Entstehung der Muster (2) bis (6) aus Muster (1) betrachtet.
- 6) Aus Muster (1) entsteht durch Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix E (gleichbedeutend mit der Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix S_2 , siehe Satz 7-n, Seite 245) das Muster (4) .
- 7) Des weiteren entsteht aus Muster (1) durch Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix E (gleichbedeutend mit der Elementvertauschung bei dem allgemeinen Zustandsvektor \vec{T}_2 , siehe Abschnitt 7.3.2 Seite, 236 und Beispiel 53 Seite 238) das Muster (2) und aus Muster (2) durch eine weitere Spaltenvertauschung das Muster (3) .
- 8) Analog zur Vorgehensweise nach Punkt 7) entsteht durch Spaltenvertauschung aus Muster (4) das Muster (5), und aus (5) entsteht durch eine weitere Spaltenvertauschung das Muster (6) .

In der Tabelle 7.35-2, SPALTE I sind " für jede der in der Tabelle 7.35-1, Seite 252 angegebenen 24 äquivalenten Zustandsmatrizen E des Ersatzsystems " aufgelistet (siehe nächste Seite):

- die Zustandsmatrix E^* ,
- der Zustandsvektor \vec{E} ,
- der allgemeine Zustandsvektor \vec{T}_2 ,
- der allgemeine Zustandsvektor \vec{T}_3 ,
- die Zustandsmatrix S_2 ,
- die Zustandsmatrix S_2^* und
- der Zustandsvektor \vec{S}_2 .

Für die Spalten I bis IV der Tabelle 7.35-2, Seite 254 gilt:

Spalte I:

Gesamtheit aller Zustandsmatrizen einer Äquivalenzklasse, die ineinander überführbar sind durch:

- Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix E oder/und
- Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix E mittels Elementvertauschung bei dem allgemeinen Zustandsvektor \vec{T}_2 oder/und
- Vertauschung der Pseudorichtungen p (identisch mit der Vertauschung der Elemente des allgemeinen Zustandsvektors \vec{T}_3) oder/und
- Spaltenvertauschung bei der Zustandsmatrix E mittels der Elementvertauschung beim Zustandsvektor \vec{S}_2

(vergleiche die Entwicklung von Tabelle 7.35-1, Seite 251).

Spalte II:

Für die mit " x " gekennzeichneten Zustandsmuster E der Spalte I - gleiche Zeile - gilt:

$$\vec{E} = \vec{C}^{(g)}, \text{ d.h. die Elemente } e_i \text{ sind geordnet nach}$$

der Beziehung $e_1 > e_2$ (siehe Beziehung (7.27), Seite 236).

Spalte III:

Für die mit " x " gekennzeichneten Zustandsmuster E der Spalte I - gleiche Zeile - gilt:

$$\vec{T}_2 = \vec{TK}_2, \text{ d.h. die Elemente } t_{2,j} \text{ sind geordnet nach}$$

der Beziehung $t_{2,1} \cong t_{2,2} \cong t_{2,3}$ (siehe Beziehung (7.28), Seite 237).

Spalte IV:

Für die mit " x " gekennzeichneten Zustandsmuster E der Spalte I - gleiche Zeile - gilt:

$$\vec{T}_3 = \vec{TK}_3, \text{ d.h. die Elemente } t_{3,1} \text{ sind geordnet nach}$$

der Beziehung $t_{3,1} \cong t_{3,2}$ (siehe Beziehung (7.30), Seite 241).

Spalte V:

Für die mit " x " gekennzeichneten Zustandsmuster E der Spalte I - gleiche Zeile - gilt:

$s_{2,1} \cong s_{2,2} \cong s_{2,3}$, d.h. die Elemente $s_{2,j}$ der zu E gehörenden Zustandsvektoren \vec{S}_2 sind entsprechend der Beziehung (7.33), Seite 245 geordnet.

Aus der Tabelle 7.35-2, Seite 254 kann man jetzt die folgenden Sachverhalte entnehmen:

Wie bereits auf den vorhergehenden Seiten beschrieben, ist in der Spalte I die Menge der erlaubten Zustandsmuster (Zustandsmatrizen E) dargestellt. Diese Zustandsmuster sind dadurch gekennzeichnet, daß sie bei "zufälliger Auswahl" in Stufe 1 und Stufe 2 und gleichmäßiger Belastung der Koppelvielfache der Stufe 1 zu ein und derselben Äquivalenzklasse gehören. Insbesondere gilt:

- Zustandsmatrizen E, die in der Spalte II mit "x" gekennzeichnet sind, sind die ch. Zustandsmuster bei "geordneter Absuche" in Stufe 1. Das Absuchverfahren in Stufe 2 ist dagegen nicht festgelegt, d.h. es kann die "geordnete Absuche" als auch die "zufällige Auswahl" gewählt werden. Für die zu den Zustandsmatrizen E gehörenden Zustandsvektoren \vec{E} gilt:

$$e_1 > e_2, \text{ d.h. Es ist } \vec{E} = \vec{C}^{(g)}.$$

Die Gesamtheit aller Zustandsmuster des Linksystems gemäß Spalte II mit der obigen Eigenschaft wurde auf Seite 237 mit $\Omega^{(g)}$ bezeichnet.

- Zustandsmatrizen E, die in der Spalte II und Spalte III mit "x" gekennzeichnet sind, sind die ch. Zustandsmuster bei "zufälliger Auswahl" in Stufe 1. Die Reduktion wurde dabei nach Abschnitt 7.3.2, Seite 236 durchgeführt. Das Absuchverfahren in Stufe 2 ist hier ebenfalls noch nicht festgelegt. Für die Zustandsmatrizen E dieser Zustandsmuster sind die Bedingungen

$$e_1 > e_2 \quad \underline{\text{und}} \quad t_{2,1} \cong t_{2,2} \cong t_{2,3}$$

erfüllt, d.h. es gilt $\vec{E} = \vec{C}^{(g)}$ und $\vec{T}_2 = \vec{TK}_2$.

Die Gesamtheit aller Zustandsmuster des Linksystems mit den obigen Eigenschaften wurde auf Seite 237 mit $\Omega^{(zT)}$ bezeichnet.

- Zustandsmatrizen E, die in den Spalten II, III und IV mit "x" gekennzeichnet sind, sind die ch. Zustandsmuster bei "zufälliger Auswahl" in Stufe 1 (mit Reduktion nach Abschnitt 7.3.2, Seite 236) und "zufälliger Auswahl" in Stufe 2. Für die Zustandsmatrizen E dieser Zustandsmuster sind die Bedingungen

$$e_1 > e_2 \text{ und } t_{2,1} \cong t_{2,2} \cong t_{2,3} \text{ und } t_{3,1} \cong t_{3,2}$$

erfüllt, d.h. es gilt $\vec{E} = \vec{C}^{(g)}$ und $\vec{T}_2 = \vec{TK}_2$ und $\vec{T}_3 = \vec{TK}_3$.

Die Gesamtheit aller Zustandsmuster des Linksystems mit den obigen Eigenschaften wurde auf Seite 242 mit $\Omega^{(zT,z)}$ bezeichnet.

- Zustandsmatrizen E, die in den Spalten II, III, IV und V mit "x" gekennzeichnet sind, sind die ch. Zustandsmuster bei "zufälliger Auswahl" in Stufe 1 und Stufe 2. Für die Zustandsmatrizen E dieser Zustandsmuster sind die Bedingungen

$$e_1 > e_2 \text{ und } t_{2,1} \cong t_{2,2} \cong t_{2,3} \text{ und } t_{3,1} \cong t_{3,2} \text{ und } s_{2,1} \cong s_{2,2} \cong s_{2,3}$$

erfüllt, d.h. es gilt $\vec{E} = \vec{C}^{(g)}$ und $\vec{T}_2 = \vec{TK}_2$ und $\vec{T}_2 = \vec{TK}_2$ und $s_{2,1} \cong s_{2,2} \cong s_{2,3}$ (für \vec{S}_2 mit $s_{2,1} \cong s_{2,2} \cong s_{2,3}$ wurde keine neue Bezeichnung eingeführt). Die Gesamtheit aller Zustandsmuster des Linksystems, mit den obigen Eigenschaften, wurde auf Seite 246 mit $\Omega^{(z,z)}$ bezeichnet.

Stellvertretend für die Gesamtheit der Zustandsmuster der Menge $\Omega^{(z,z)}$ wurde ein Muster mit der Eigenschaft $\vec{E} = \vec{C}^{(z,z)}$ betrachtet.

Im folgenden Mengenschaubild, Seite 258 sind die Zustandsmuster entsprechend Tabelle 7.35-2, Seite 254 dargestellt, indem die lfd. Nr. dieser Muster angegeben wurden. Bei der Darstellung dieser Mengen geht man zweckmäßigerweise in umgekehrter Reihenfolge vor als eben geschildert (siehe Vorgehensweise in Abschnitt 5 Seite 187). Aus dem Mengenschaubild erhält man die folgende Mengenrelationen:

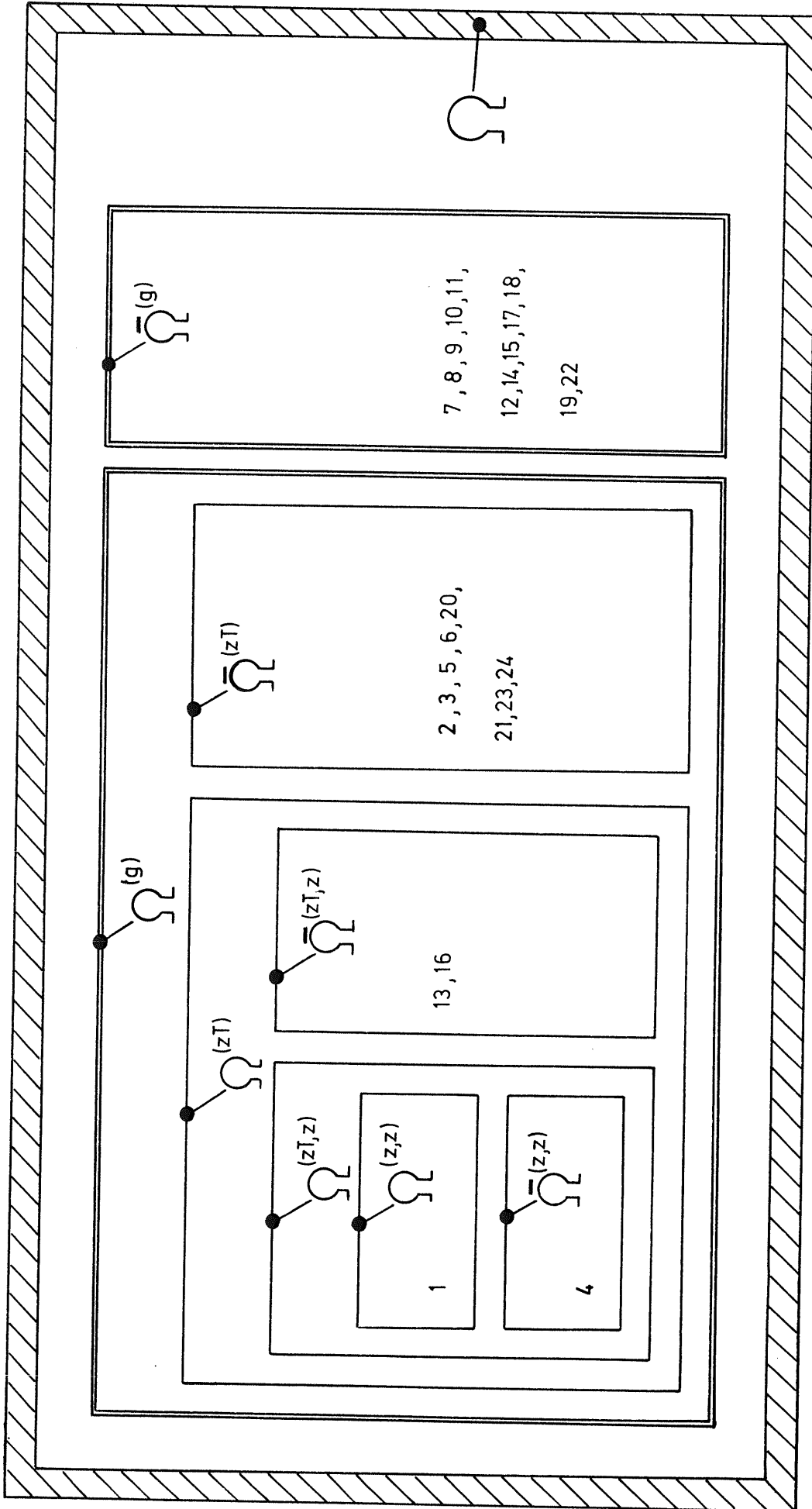


Bild 7.11 Mengenschaubild

$$\Omega^{(z,z)} \subset \Omega^{(z^T,z)} \subset \Omega^{(z^T)} \subset \Omega^{(g)} \subset \Omega \quad (7.35)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \Omega^{(z^T,z)} &= \Omega^{(z,z)} + \bar{\Omega}^{(z,z)} \\ \Omega^{(z^T)} &= \Omega^{(z^T,z)} + \bar{\Omega}^{(z^T,z)} \\ \Omega^{(g)} &= \Omega^{(z^T)} + \bar{\Omega}^{(z^T)} \\ \Omega &= \Omega^{(g)} + \bar{\Omega}^{(g)} \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

7.4 Die ch. Vektoren (Matrizen) von dreistufigen Linksy -
stemem mit gleicher Bündelgröße N_r und gleicher Bündel-
belastung Y_r für alle Richtungen $r \in \{1,2,\dots,R\}$

7.4.1 Richtungsvertauschung

Die einheitliche Bündelgröße N_r und die einheitliche Bündelbe-
lastung Y_r führen dazu, daß innerhalb der Menge $\Omega^{(z,z)}$ bzw. $\Omega^{(g)}$
noch weitere Zustandsmuster die gleiche Zustandsmuster - Wahr-
scheinlichkeit haben. Zustandsmuster mit gleicher Zustandsmuster -
Wahrscheinlichkeit sind äquivalente Zustände (siehe analog dazu
die Vorgehensweise in Abschnitt 5.4, Seite 147, dort für zweistu-
fige Linkssysteme).

Ausgehend von den Bedingungen (5.19) bis (5.21), Seite 148, die
jetzt bei den dreistufigen Linkssystemen ebenfalls gelten sollen,
verläuft die Richtungsvertauschung bei den dreistufigen Linksy -
stemem völlig analog zur Richtungsvertauschung bei den zweistufi-
gen Linkssystemen, siehe Abschnitt 5.4.1 Seite 147.

An die Stelle der Richtungsmatrix TR (bei zweistufigen Linksy -
stemem) ist jetzt der Richtungsraum TR (siehe Definition 7-G Seite
229) zu setzen. Außerdem muß jetzt in Satz 5-b, Seite 148 an die
Stelle der Menge $\Omega^{(z)}$ die Menge $\Omega^{(z,z)}$ gesetzt werden ($\Omega^{(z,z)}$: siehe
Abschnitt 7.3.4, Seite 246).

Als Beispiel wird das Linkssystem des vorangegangenen Abschnitts
7.3, Seite 234 verwendet und es wird aus der Tabelle 7.35-1, Seite

lenten Zustandsraum S_{II} und die zu S_{II} gehörenden Richtungsräume TR_{II} und TR_{II}^* und den Richtungsvektor \overrightarrow{TR}_{II} .

$$S_{II} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} j \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & i \\ \hline & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right\| \Rightarrow E_{II} = \left\| \begin{array}{ccc} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{l=1} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{l=2}$

$$TR_{II} = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \text{Richtung } r = 1 \\ \text{Richtung } r = 2 \\ \text{Gewicht je Spalte} \end{array}$$

$$TR_{II}^* = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} & 0 & 2 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 4 & 0 & 16 & 0 \end{array} \right\| \Rightarrow \overrightarrow{TR} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 21 \end{Bmatrix}$$

Wie man aus den Richtungsvektoren \overrightarrow{TR}_I und \overrightarrow{TR}_{II} erkennt, ist die Richtungsvertauschung bei dem Zustandsraum S identisch mit der Elementvertauschung beim Richtungsvektor \overrightarrow{TR} , d.h. die Vorgehensweise ist hier die gleiche wie bei den zweistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl (siehe Beispiel 41, Seite 152).

Die Richtungsvertauschung bei dreistufigen Linkssystemen kann auch unmittelbar bei der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems durchgeführt werden. Dabei ist zu berücksichtigen, daß zwischen der Richtung r und der Pseudorichtung p die Beziehung (7.9), Seite 211 besteht. Werden in dem Zustandsraum S die beiden Richtungen $r = r_1$ und $r = r_2$ miteinander vertauscht, dann folgt aus der Beziehung (7.9): Bei der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems sind die Pseudorichtungen

$$p_1 = r_1 + R(1 - 1) \text{ und } p_2 = r_2 + R(1 - 1) \quad (7.37)$$

$$\text{mit } r_1, r_2 \in \{1, 2, \dots, R\} \text{ und} \\ l \in \{1, 2, \dots, K_2 = G_3\}$$

miteinander zu vertauschen.

Im vorangegangenen Beispiel 56, Seite 260 folgt aus der obigen Beziehung (7.37) mit $r_1 = 1$ und $r_2 = 2$: In der Zustandsmatrix E

(siehe Seite 260) sind die Pseudorichtungen

$$\begin{array}{l} p = 1 \text{ mit } p = 2 \quad (l=1) \\ \text{und } p = 3 \text{ mit } p = 4 \quad (l=2) \end{array}$$

miteinander zu vertauschen, siehe untenstehende Matrizen E_I und E_{II} .

$$E_I = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} \swarrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \swarrow \\ \searrow \end{array} \quad E_{II} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Vertauschen der
Pseudorichtungen p

Als Vertreter einer Äquivalenzklasse werden jetzt wieder jene Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ oder $\vec{C}^{(z,z)}$ (entsprechend dem gegebenen Absuchverfahren) gewählt, bei denen die zugehörigen Richtungsvektoren \overrightarrow{TR} der Beziehung (5.22), Seite 153 genügen (siehe Abschnitt 5.4.1 Seite 153).

7.4.2 Der Richtungsvektor \overrightarrow{TRK}

Für den Richtungsvektor \overrightarrow{TRK} gilt bei dreistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl die gleiche Definition 5-F, Seite 154 wie bei den zweistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl. Für die Elemente t_{RK} der Richtungsvektoren \overrightarrow{TRK} gilt jetzt jedoch der Wertebereich entsprechend Definition 7-I, Seite 232, d.h.

$$\begin{array}{l} t_{RK_r} \in \{ 0, 1, 2, \dots, t_{r}^{(max)} \} , \\ t_{r}^{(max)} \text{ siehe Seite 232.} \end{array}$$

7.4.3 Gleiche Elemente t_{RK_r} im Richtungsvektor \overrightarrow{TRK}

Gleiche Elemente t_{RK_r} im Richtungsvektor \overrightarrow{TRK} können bei zweistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl zu einer unvollständigen Reduktion führen, d.h.: Es gibt Äquivalenzklassen, bei denen nicht alle - durch Richtungsvertauschung zueinander äquivalenten Zustandsmuster - eliminiert werden, siehe Abschnitt, 5.4.3 Seite

155.

Bei dreistufigen Linkssystemen für Richtungswahl mit stets einer Zwischenleitung zwischen zwei Koppelvielfachen von aufeinanderfolgenden Stufen folgt:

Es gibt bei dem Richtungsvektor $\overrightarrow{\text{TRK}}_{\chi}$
keine gleichen Elemente $\text{trK}_{\chi, r}$.

Das bedeutet, daß die Richtungsvertauschung bei diesen dreistufigen Linkssystemen mittels der Richtungsvektoren $\overrightarrow{\text{TR}}$ in allen Äquivalenzklassen vollständig ausgeführt wird.

Bei zweistufigen Linkssystemen mit Richtungswahl kann dagegen - bei bestimmten Belegungsmustern - der Fall auftreten:

Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix S gleich
Richtungsvertauschung bei der Zustandsmatrix S,
siehe Abschnitt 5.4.3, Seite 155.

Die Frage, die jetzt auftritt, ist: Gibt es auch bei den dreistufigen Linkssystemen Belegungsmuster, bei denen die oben genannte Eigenschaft zutrifft?

Diese Frage kann sofort verneint werden, d.h. es gibt bei den hier betrachteten dreistufigen Linkssystemen für Richtungswahl keine Belegungsmuster, bei denen

der Richtungsvertauschung im Zustandsraum S gleich
der Ebenenvertauschung i -konstant im Zustandsraum S

entspricht.

Begründung:

Bei Belegungsmustern in zweistufigen Linkssystemen ist die Voraussetzung für die Eigenschaft:

Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix S gleich
Richtungsvertauschung bei der Zustandsmatrix S,

daß die Anzahl der Belegungen in den zu vertauschenden Zeilen i der Zustandsmatrix S gleich sind. Außerdem muß das Belegungsmuster entsprechende Symmetrieeigenschaften haben, siehe Beispiel 42 Seite 155.

Diese Symmetrieeigenschaften von Belegungsmustern treten jedoch

bei den hier betrachteten dreistufigen Linksystemen nicht auf, weil

jedes Koppelvielfach der Stufe 2 mit jedem Koppelvielfach der Stufe 3 nur mit einer Zwischenleitung verbunden ist (siehe auch Bedingung a) für den Zustandsraum S, Seite 205).

7.4.4 Die ch. Vektoren $\vec{C}^{(g,R)}$ bei "geordneter Absuche" und Richtungsvertauschung

Ausgehend von der Menge $\Omega^{(g)}$ der ch. Vektoren $\vec{C}^{(g)}$ nach Abschnitt 7.3.1, Seite 234 folgt: Für die ch. Vektoren $\vec{C}^{(g,R)}$ bei "geordneter Absuche" und Richtungsvertauschung gelten jetzt analog die Ausführungen von Abschnitt 5.4.4 Seite 157 (dort für zweistufige Linksysteme mit Richtungswahl).

7.4.5 Die ch. Vektoren $\vec{C}^{(z,z,R)}$ bei "zufälliger Auswahl" in Stufe 1 und Stufe 2 und Richtungsvertauschung

Ausgegangen wird von der Menge $\Omega^{(z,z)}$ der ch. Vektoren $\vec{C}^{(z,z)}$ entsprechend Abschnitt 7.3.4, Seite 244.

Im Fall - "zufällige Auswahl" in Stufe 1 und Stufe 2 - erhält man die größte Reduktion der Anzahl der Unbekannten. Setzt man in Abschnitt 5.4.5, Seite 158 für die Menge $\Omega^{(z)}$ die Menge $\Omega^{(z,z)}$ ein, dann erhält man analog zur Menge $\Omega^{(z,R)}$ ($\Omega^{(z,R)}$: siehe Seite 158) jetzt die Menge $\Omega^{(z,z,R)}$.

Die Mächtigkeit MZZR der ch. Vektoren $\vec{C}^{(z,z,R)}$ ist hier durch die folgende Formel bestimmt:

$$MZZR = M \cdot MTK2 \cdot MTK3 \cdot MS2 \cdot MTRK, \quad (7.38a)$$

mit: - M nach Formel (2.11), Seite 53,
- MTK2 bzw. MTK3 nach Formel (2.16), Seite 63,
indem man für den Vektor \vec{TK} jetzt die Vektoren \vec{TK}_2 bzw. \vec{TK}_3 einsetzt,

- MTRK nach Formel (5.24) Seite 155 und
- MS2, der Mächtigkeit der Zustandsvektoren \overline{S}_2 .

Für die Mächtigkeit MS2 wurde noch keine geschlossene Lösung (Formel) gefunden, d.h. MS2 muß durch "Abzählen" ermittelt werden. Bei der Ermittlung von MS2 geht man also zweckmäßigerweise so vor, daß man zunächst die Reduktion nach Abschnitt 7.3.1 bis 7.3.3, Seite 234 durchführt, dann die Reduktion nach Abschnitt 7.4.1, Seite 259 und als letzte die Reduktion nach Abschnitt 7.3.4, Seite 244. Bei dieser Vorgehensweise kann man dann bei der Reduktion nach Abschnitt 7.3.4 die Mächtigkeit MS2 durch "Abzählen" bestimmen und hat damit den Vorteil, daß man von der kleinsten Obermenge von Belegungsmustern ausgeht.

7.5 Die ch. Vektoren von dreistufigen Linkssystemen mit gleicher Bündelgröße N_r und gleicher Bündelbelastung Y_r für einen Teil der R Abnehmerbündel

Für diesen Fall ist die Vorgehensweise völlig analog zur Vorgehensweise bei den entsprechenden zweistufigen Linkssystemen, siehe Abschnitt 5.5, Seite 159.

7.6 Die Ermittlung der ch. Zustandsräume SC_β der Zustandsräume S_α für Strukturen von dreistufigen Linkssystemen mit $k_r = k = I_3$ (einheitlich für alle Richtungen) und $K_2 = I_2$

Bei dem Sonderfall von Linkssystemstrukturen von zweistufigen Linkssystemen mit $k_r = k = I_2$ (einheitlich für alle Richtungen) sind alle kombinatorisch möglichen Belegungsmuster auch erlaubte Zustandsmuster (siehe Abschnitt 5.6, Seite 160, insbesondere Satz 5-i, Seite 161).

Die entsprechenden dreistufigen Linkssystemstrukturen sind Linksysteme mit einheitlich

$$k_r = k = I_3 \quad (7.38)$$

Abnehmerleitungen je Richtung r und je Koppelvielfach l der Stufe 3.

Bei den in dieser Arbeit betrachteten Linkssystemen mit stets "einer Zwischenleitung zwischen jedem Koppelvielfach j der Stufe 2 und jedem Koppelvielfach l der Stufe 3" folgt aus der Beziehung (7.27), Seite 236 (analog zum Satz 5-i, Seite 161, dort für zweistufige Linkssysteme) der Satz 7-o.

Satz 7-o: Die Sequenzen der Elemente $e_{\beta,i} \neq 0$ der zu den ch. Zustandsräumen SC_{β} gehörenden Zustandsvektoren \vec{E}_{β} des Er-satzsystems können interpretiert werden als "Kombinationen" von n Elementen $e_{\beta,i} \neq 0$ aus der Zeichenmenge

$$\begin{aligned} e_{\beta,i} & \{ 1, 2, \dots, a \}, \\ \text{mit } a & = (R \cdot K_2 + 1)^{K_1} - 1, \\ i & \in \{ 1, 2, \dots, n \}, \\ n & \in \{ 1, 2, \dots, G_1 \}, \\ \beta & \in \{ 1, 2, \dots, NC \} \quad \text{und} \end{aligned}$$

NC: Anzahl der ch. Zustandsmuster des betrachteten Linksystems.

Für diese Linkssysteme ($k_r = k = I_3$) ist jetzt die Anzahl NC der erlaubten ch. Zustandsmuster nicht gleich der Anzahl NK der nach obigem Satz 7-o kombinatorisch möglichen Zustandsmuster (Kombinationen). Für NK gilt nach /18 - 20/ die Formel

$$NK = \sum_{i=1}^{G_1} \binom{a}{i} . \quad (7.39)$$

Für NK und NC gilt die Ungleichung

$$NC < NK + 1 . \quad (7.40)$$

(Mit "+1" wird der Zustand "keine Belegung im Linksystem" berücksichtigt. In der Anzahl NC ist der Nullzustand bereits enthalten.)

Für die in diesem Abschnitt betrachteten dreistufigen Linkssysteme wird jetzt noch die folgende Voraussetzung gemacht:

$$K_2 = I_2 . \quad (7.41)$$

Ausgehend von der nach Bild 7.1, Seite 195 gegebenen Grund-Struktur der in dieser Arbeit betrachteten Linkssysteme folgt aus

(7.38), Seite 265 die Beziehung

$$k_r = k = I_3 = G_2 = K_1 \quad (7.42)$$

(einheitlich für alle Richtungen) und aus (7.41), Seite 266 folgt die Beziehung

$$G_1 = I_2 = K_2 = G_3 . \quad (7.43)$$

Aus den obigen Beziehungen (7.42) und (7.43) mit der Beziehung (7.22), Seite 225 folgt für die Elemente der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T}_2 und \vec{T}_3 :

$$t_{2,j} \cong G_1 = \underline{I_2} = \underline{K_2} = G_3 , \quad (7.44)$$

$$t_{3,l} \cong \underline{k_r} = \underline{k} = \underline{I_3} = G_2 = K_1 . \quad (7.45)$$

Aus den oben angegebenen Beziehungen (7.44) und (7.45) folgt für diesen Sonderfall von Linksystemstrukturen:

- a) Es können alle I_2 Eingänge eines Koppelvielfachs j der Stufe 2 belegt sein, und
- b) es können alle I_3 Eingänge eines Koppelvielfachs l der Stufe 3 in eine bestimmte Richtung r belegt sein.

Insgesamt folgt also aus den obigen Beziehungen und Bemerkungen:

Bei den zu den (nach Satz 7-o, Seite 266) gegebenen Zustandsvektoren \vec{E} gehörenden Zustandsmatrizen E muß nur noch die Bedingung "Satz 7-f, Seite 228" geprüft werden. Die nach Satz 7-o vorgegebenen Zustandsmatrizen E , die nicht die Bedingung "Satz 7-f" erfüllen, sind nach Definition 7-F, Seite 228 "unerlaubte" Zustandsmuster und müssen dementsprechend "entfernt" werden.

Man muß also bereits bei diesem Sonderfall von Linksystemstrukturen einen "EU - Algorithmus" anwenden. Bei den entsprechenden zweistufigen Linksystemen (Linksysteme mit $k_r = I_2$) ist das nicht der Fall (siehe Abschnitt 5.6, Seite 160).

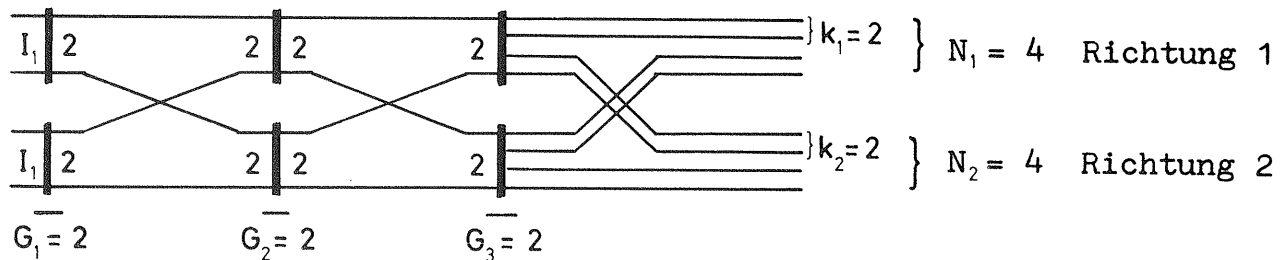
Anmerkung: Analog zum Abschnitt 5.6, Seite 160 wurde hier ebenfalls der Index "g", stehend für "geordnete Absuche", weglassen, da innerhalb dieses Abschnitts keine Unterscheidung der ch. Zustandsmuster bezüglich des Absuchverfahrens notwendig ist.

Beispiel 57: Bei dem unten dargestellten Linkssystem gilt

$$K_2 = I_2 = 2 \quad \text{und} \quad k_1 = k_2 = 2 = I_3 ,$$

d.h. die Bedingungen (7.38), Seite 265 und (7.41), Seite 266 sind erfüllt. Dieses Linkssystem hat damit die Sonderstruktur, die in diesem Abschnitt behandelt wird.

Das analoge Beispiel für zweistufige Linkssysteme mit Richtungs-
wahl ist das Beispiel 43, Seite 162.



Nach Beziehung (7.39), Seite 266 erhält man, entsprechend den oben gegebenen Strukturparametern die folgende Anzahl NK von Kombinationen:

$$NK = \sum_{i=1}^{G_1=2} \binom{a}{i} = 300$$

darin ist $a = (R \cdot K_2 + 1)^{k_1} - 1 = (2 \cdot 2 + 1)^2 - 1 = 24.$

Anmerkung zu NK: Es gibt in diesem Beispiel die folgenden Klassen von Mustern (Kombinationen):

- Klasse 1: 24 Muster mit "ein Element e_i von \vec{E} ungleich Null;
- Klasse 2: 276 Muster mit "zwei Elemente e_i von \vec{E} ungleich Null (siehe auch Tabelle 7.6-1, Seite 269).

Von den 24 Mustern mit einem Element $e_i \neq 0$ sind alle 24 Muster "erlaubte ch. Muster", d.h. die Bedingung - Satz 7-f Seite 228 - ist für alle 24 Muster erfüllt. Von den 276 Mustern mit zwei Elementen $e_i \neq 0$ sind jedoch nur 120 Muster "erlaubte ch. Muster", d.h. nur für diese 120 Muster ist die Bedingung - Satz 7-f - erfüllt. Man erhält also bei diesem Linkssystem

$$NC = 1 + 24 + 120 = 145$$

ch. Zustandsmuster (Zustandsmatrizen E bzw. Zustandsräume SC).

lfd. \overline{E}_β Nr. β	lfd. \overline{E}_β Nr. β	lfd. \overline{E}_β Nr. β	lfd. \overline{E}_β Nr. β	lfd. \overline{E}_β Nr. β	lfd. \overline{E}_β Nr. β	lfd. \overline{E}_β Nr. β	lfd. \overline{E}_β Nr. β
1 { 0 } 0	21 { 20 } 0	41 { 4 } 2	61 { 16 } 3	81 { 18 } 5	101 { 16 } 8	121 { 24 } 10	141 { 16 } 14
2 { 1 } 0	22 { 21 } 0	42 { 5 } 2	62 { 17 } 3	82 { 19 } 5	102 { 17 } 8	122 { 15 } 11	142 { 17 } 14
3 { 2 } 0	23 { 22 } 0	43 { 8 } 2	63 { 20 } 3	83 { 20 } 5	103 { 20 } 8	123 { 18 } 11	143 { 20 } 14
4 { 3 } 0	24 { 23 } 0	44 { 9 } 2	64 { 21 } 3	84 { 21 } 5	104 { 21 } 8	124 { 19 } 11	144 { 21 } 14
5 { 4 } 0	25 { 24 } 0	45 { 10 } 2	65 { 22 } 3	85 { 22 } 5	105 { 22 } 8	125 { 20 } 11	145 { 22 } 14
6 { 5 } 0	26 { 3 } 1	46 { 13 } 2	66 { 5 } 4	86 { 23 } 5	106 { 15 } 8	126 { 23 } 11	
7 { 6 } 0	27 { 4 } 1	47 { 14 } 2	67 { 6 } 4	87 { 24 } 5	107 { 16 } 9	127 { 24 } 11	
8 { 7 } 0	28 { 5 } 1	48 { 15 } 2	68 { 7 } 4	88 { 15 } 6	108 { 17 } 9	128 { 15 } 12	
9 { 8 } 0	29 { 8 } 1	49 { 18 } 2	69 { 10 } 4	89 { 18 } 6	109 { 20 } 9	129 { 18 } 12	
10 { 9 } 0	30 { 9 } 1	50 { 19 } 2	70 { 11 } 4	90 { 19 } 6	110 { 21 } 9	130 { 19 } 12	Tabelle 7.6-1
11 { 10 } 0	31 { 10 } 1	51 { 20 } 2	71 { 12 } 4	91 { 20 } 6	111 { 22 } 9	131 { 20 } 12	
12 { 11 } 0	32 { 13 } 1	52 { 23 } 2	72 { 15 } 4	92 { 23 } 6	112 { 15 } 10	132 { 23 } 12	
13 { 12 } 0	33 { 14 } 1	53 { 24 } 2	73 { 16 } 4	93 { 24 } 6	113 { 16 } 10	133 { 24 } 12	
14 { 13 } 0	34 { 15 } 1	54 { 5 } 3	74 { 17 } 4	94 { 15 } 7	114 { 17 } 10	134 { 15 } 13	
15 { 14 } 0	35 { 18 } 1	55 { 6 } 3	75 { 20 } 4	95 { 18 } 7	115 { 18 } 10	135 { 16 } 13	
16 { 15 } 0	36 { 19 } 1	56 { 7 } 3	76 { 21 } 4	96 { 19 } 7	116 { 19 } 10	136 { 17 } 13	
17 { 16 } 0	37 { 20 } 1	57 { 10 } 3	77 { 22 } 4	97 { 20 } 7	117 { 20 } 10	137 { 20 } 13	
18 { 17 } 0	38 { 23 } 1	58 { 11 } 3	78 { 15 } 5	98 { 23 } 7	118 { 21 } 10	138 { 21 } 13	
19 { 18 } 0	39 { 24 } 1	59 { 12 } 3	79 { 16 } 5	99 { 24 } 7	119 { 22 } 10	139 { 22 } 13	
20 { 19 } 0	40 { 3 } 2	60 { 15 } 3	80 { 17 } 5	100 { 15 } 8	120 { 23 } 10	140 { 15 } 14	

In der Tabelle 7.6-1, Seite 269 sind die Vektoren \vec{E}_β der ch. Zustandsräume SC_β aufgelistet.

Für die Mächtigkeiten erhält man:

$$M_1 = 1 \quad \text{und für } \beta \in \{2, 3, \dots, 145\} \text{ folgt } M_\beta = 2.$$

Bei diesem Linksystem gibt es demnach $NE = 1 + 2 \cdot 144 = 289$ erlaubte Zustände (siehe Beziehung (2.8), Seite 47).

Mit Hilfe der Zustandsmatrix E_β^* (siehe Definition 7-D, Seite 220 und Beispiel 55, Seite 246) kann aus dem Vektor \vec{E}_β die Zustandsmatrix E_β ermittelt werden. Aus den Zustandsmatrizen E_β können dann - mittels der Beziehungen (7.13 bis (7.15), Seite 216 - die zu den Zustandsvektoren \vec{E}_β gehörenden Zustandsräume SC_β ermittelt werden (siehe Beispiel 49, Seite 217).

Anmerkungen:

In dieser Arbeit werden nur

Linksysteme mit "einer Zwischenleitung zwischen jedem Koppelvielfach i der Stufe 1 und jedem Koppelvielfach j der Stufe 2" und "einer Zwischenleitung zwischen jedem Koppelvielfach j der Stufe 2 und jedem Koppelvielfach l der Stufe 3"

behandelt, siehe Bild 7.1, Seite 195. Es soll jedoch erwähnt werden, daß die Abbildung des Belegungszustandes mittels der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems auch den allgemeineren Fall "mehrere Zwischenleitungen zwischen jedem Koppelvielfach j der Stufe 2 und jedem Koppelvielfach l der Stufe 3" beinhaltet. Es sind jedoch für die Praxis nur jene Linksysteme "mit einer bis k_r Zwischenleitungen zwischen jedem Koppelvielfach j der Stufe 2 und jedem Koppelvielfach l der Stufe 3" von Bedeutung. Die Linksysteme mit k_r Zwischenleitungen zwischen zwei Koppelvielfachen der Stufe 2 und Stufe 3 stellen dann wieder einen Sonderfall dar, für den analog - der Satz 5-i, Seite 161 (dort für zweistufige Linksysteme) - gilt. In diesem Fall - $k_r = I_3$ - gilt in der Beziehung (7.27), Seite 236 für die Vektoren \vec{E}_β der ch. Zustandsräume SC_β wieder die Relation " \cong ".

7.7 Die Ermittlung der charakteristischen Zustandsräume SC_β der Zustandsräume S_α für Strukturen von dreistufigen Linkssystemen mit $k_r < I_3$

7.7.1 Der "EU - Algorithmus"

Die Vorgehensweise ist analog zu jener in Abschnitt 5.7.1, Seite 165 (dort für zweistufige Linkssysteme).

Für die vorgegebenen Zahlenwerte von G_1, K_1, K_2 und k_r ermittelt man zunächst die Vektoren \vec{E} der ch. Zustandsräume SC unter der Bedingung (Sonderfall für die Richtungserreichbarkeit)

$$k_1^* = k_2^* = \dots = k_r^* = \dots = k_R^* = I_3,$$

d.h. man ermittelt zunächst die Zustandsmuster für ein gedachtes Linkssystem, mit den Eigenschaften entsprechend Abschnitt 7.6, Seite 265. Aus dieser Menge - der Zustandsmuster des gedachten Linksystems - entfernt man dann jene Zustandsmuster, die - in einem realen System mit $k_r < I_3$ - nicht erlaubt sind. Die erlaubten Zustandsmuster des realen Systems müssen den Bedingungen - entsprechend (7.22) Seite 225, dem Satz 7-b Seite 227 und Satz 7-d Seite 228 - genügen. Der Algorithmus, der nach diesem Prinzip arbeitet, wurde schon auf Seite 58 als "EU - Algorithmus" bezeichnet.

7.7.2 Die Ermittlung der Richtungsräume TR_μ

Die Vorgehensweise ist analog zu jener in Abschnitt 5.7.2, Seite 166 (dort für zweistufige Linkssysteme).

Die Ermittlung der TR_μ ist hier jedoch einfacher, da die Elemente $tR_{\mu,r}$ nur die Werte 0 oder 1 annehmen können, siehe Definition 7-G Seite 229.

7.7.3 Die Partitionen bei dreistufigen Linkssystemen

Der Begriff "Partitionen" ist im Anhang A3, Seite 312 erläutert. Im Gegensatz zu den zweistufigen Linkssystemen erhält man jetzt

jedoch Partitionen, welche - außer der Null - keine gleichen Summanden (Elemente e_i) besitzen (siehe Beziehung (7.27), Seite 236).

Sind die Richtungsräume TR_μ gegeben (siehe Abschnitt 7.7.2, Seite 271), dann kann man die folgende Summe bilden:

$$SP_\mu = \sum_{l=1}^{k_2} \sum_{j=1}^{K_1} \sum_{r=1}^R p \cdot (PR + 1)^{j-1} \cdot tR_{\mu,l,j,r}, \quad (7.46)$$

mit $PR = K_2 \cdot R$ (gleich Anzahl der Pseudorichtungen) und

$$p = r + R \cdot (1 - 1) \text{ (lfd. Nr. der Pseudorichtungen, siehe Beziehung (7.9), Seite 211).}$$

Mit der obigen Summe SP_μ erhält man analog zu Satz 5-j, Seite 175 den Satz 7-p.

Satz 7-p:

Für die Elemente $e_{\mu,\beta,i}$ der zu den ch. Zustandsräumen $SC_{\mu,\beta}$ gehörenden Vektoren \vec{E} gilt:

Sie bilden "Partitionen der Länge n ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" zur Summe SP_μ .

Bei diesen Partitionen treten keine gleichen Summanden ungleich Null auf (siehe Beziehung (7.27), Seite 236). NP_μ sei die Anzahl der Partitionen, die aus SP_μ hervorgehen. NTR sei die Anzahl der erlaubten Richtungsräume TR , die durch die Strukturparameter G_1, K_1, K_2, R und k_r bestimmt ist. Für die Indizes gilt dann:

$$\begin{aligned} \mu &\in \{1, 2, \dots, NTR\}, \\ \beta &\in \{1, 2, \dots, NP_\mu\} \text{ und} \\ n &\in \{MAX [t_{2,\mu,j}], \dots, G_1\}. \end{aligned}$$

$t_{2,\mu,j}$ ist das Element j des allgemeinen Zustandsvektors $\vec{T}_{2,\mu}$, und es gilt: $MAX [t_{2,\mu,j}]$ ist gleich der minimalen Anzahl der Elemente $e_{\mu,\beta,i}$ ungleich Null (siehe auch Seite 65, dort für zweistufige Linkssysteme).

Der Satz 2-h, Seite 66 ist hier ebenfalls gültig, wenn man für den allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} jetzt die allgemeinen Zustandsvektoren

ren \overline{T}_2 oder \overline{T}_3 einsetzt. Die Anzahl $NT_{2,\mu}$ bzw. $NT_{3,\mu}$ der Permutationen von $\overline{T}_{2,\mu}$ bzw. $\overline{T}_{3,\mu}$ kann nach Formel (2.16), Seite 63 berechnet werden (siehe auch Bemerkungen zu MTK und MTK3 auf Seite 264, denn es gilt: $NT_{2,\mu} = MTK_{2,\mu}$ und $NT_{3,\mu} = MTK_{3,\mu}$).

Für die Ermittlung der Partitionen zur Summe SP gelten jetzt analog dazu die Ausführungen von Abschnitt 5.7.6, Seite 265.

7.7.4 Die Ordnungshierarchie der dreistufigen Linkssysteme für Richtungswahl mit $k_r = k$ (d.h. einheitlich) für alle Richtungen $r \in \{1, 2, \dots, R\}$

Die Ordnungshierarchie für zweistufige Linkssysteme mit Richtungswahl ist im Abschnitt 5.7.5, Seite 179 beschrieben.

Ausgehend von den Ausführungen im Abschnitt 2.8, Seite 72 und Abschnitt 5.7.5, Seite 179 folgt:

Es werden jetzt unterschiedliche Linkssystemstrukturen betrachtet, welche jedoch alle

- dieselbe Erreichbarkeit K_1 ,
- dieselbe Erreichbarkeit K_2 und
- dieselbe Anzahl R von Richtungen

haben, siehe z.B. Bild 7.9, Seite 274.

Mit den obigen Voraussetzungen kann, analog zur Definition 5-J, Seite 176, für die ch. Zustandsmuster von dreistufigen Linkssystemen eine Ordnungsmatrix Φ angegeben werden.

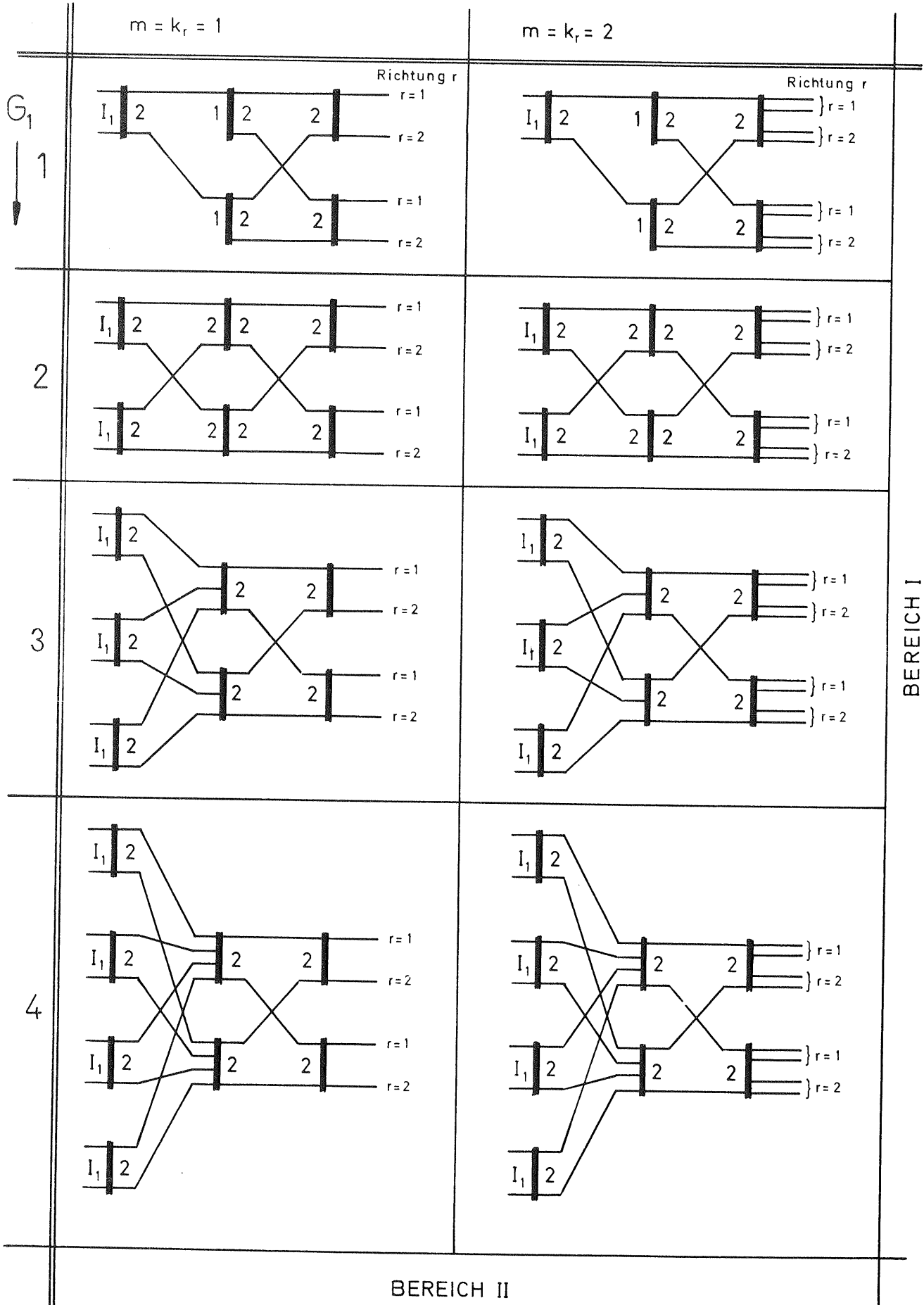
Als Beispiel sind auf der folgenden Seite 274 die Linkssysteme mit einheitlich $K_1 = 2$, $K_2 = 2$, $R = 2$

für $G_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $k_r \in \{1, 2\}$

dargestellt. Aus diesem Beispiel kann man jetzt das Ordnungsprinzip für die dreistufigen Linkssysteme mit Richtungswahl entnehmen. Bezüglich der Bereiche I und II gelten jetzt analog dazu die Bemerkungen von Seite 70.

Anmerkung: Die Anzahl f_m (siehe auch Seite 70 und Seite 177,

Linksyste me mit einheitlich $K_1 = 2, K_2 = 2; R = 2$



dort für zweistufige Linksysteme) der belegten Koppelvielfache
n der Stufe 1 - ab der keine weiteren ch. Zustände auftreten -
ist bei dreistufigen Linksystemen

$$f_m = G_2 \cdot K_2 = \text{"Anzahl der Zwischenleitungen zwischen Stufe 2 und Stufe 3"}$$

(siehe als Beispiel die Linksystemstrukturen nach Bild 7.9
Seite 274).

8. Die Kennzeichnung und die Ermittlung der charakteristischen Zustandsräume bei Linkssystemen für Richtungswahl mit s Stufen, d.h. beliebiger Stufenzahl $s \geq 3$

8.1 Einleitung

8.1.1 Die Struktur der Linkssysteme

Die Struktur der Linkssysteme mit s Stufen ist im Bild 1.2, Seite 26 dargestellt.

Analog zu den Beziehungen (7.1) bis (7.4), Seite 196 folgt:

$$\sum_{r=1}^R k_r = K_s, \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } k_r &\in \{1, 2, \dots, I_s\} \\ \text{und } K_v &\stackrel{\cong}{\leq} I_v \\ \text{mit } v &\in \{1, 2, \dots, s\}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Für die in dieser Arbeit betrachteten Linkssysteme gilt des Weiteren die Beziehung (1.1) Seite 27, d.h. es gilt

$$\text{und } \left. \begin{aligned} G_{v+1} &= K_v \\ I_{v+1} &= G_v \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Linkssysteme mit Blockstruktur, d.h. Ls. für die die obige Bedingung (8.3) fallen gelassen wird, siehe die Anmerkungen am Ende dieses Abschnitts Seite 278.

Um jetzt die Indizierung überschaubar zu machen, werden die Koppelvielfache der Stufen v und $v+1$ und die Eingänge und Ausgänge der Koppelvielfache der Stufen v und $v+1$ entsprechend Bild 8.1, Seite 277 durchnummeriert.

Es sei also i_v die lfd. Nr. der Koppelvielfache der Stufe v , und j_v sei die lfd. Nr. der Ausgänge eines Koppelvielfachs der Stufe v . Man hat damit eine einheitliche Darstellung für die Indizes der s Stufen des Linksystems. Bei "geordneter Verdrahtung" (siehe /3/) und der Indizierung nach Bild 8.1 folgt also:

$$i_{v+1} = j_v \quad \text{mit } v \in \{1, 2, \dots, s-1\}. \quad (8.4)$$

Anmerkungen zur Beziehung (8.3), Seite 276:

Betrachtet man Linksysteme mit Blockstruktur, dann gilt die Beziehung (8.3) nicht mehr.

Insbesondere bei Linksystemen mit mehr als drei Stufen wird - wegen der Koppelpunktsparsparnis - die Blockstruktur gewählt. Bei diesen Linksystemen kann - zur Beschreibung des Belegungszustandes des Linksystems - ebenfalls der s dimensionale Zustandsraum (siehe Abschnitt 8.2.2 Seite 281) verwendet werden.

In den Zustandsräumen S - der Linksysteme mit Blockstruktur - gilt jedoch - bei der Indizierung - nicht mehr die Beziehung $i_{v+1} = j_v$. Dies führt dazu, daß, wenn

- Z.B. die Stufe 1 und die Stufe 2 in Linkblöcken unterteilt sind, und
- die Koppelvielfache in der Stufe 1 gleichbelastet sind,

nur die i_1 Koppelvielfache innerhalb eines Linkblocks umgeordnet werden dürfen (gleichbedeutend mit: Vertauschung der Unter-räume $i_1 = \text{konstant des Zustandsraumes } S$).

Bei Linksystemen mit Blockstruktur hat man also noch einen weiteren Strukturparameter

- die Anzahl B_v der Linkblöcke zwischen aufeinanderfolgenden Stufen v und $v+1$,

Bei gleicher Belastung aller Koppelvielfache der Stufe 1 und z.B. Linkblöcken in Stufe 1 und Stufe 2 kann man - außer der Umordnung der Koppelvielfache in Stufe 1 - des weiteren die Linkblöcke umordnen, mit anderen Worten; Umordnung von Gruppen von Koppelvielfachen der Stufe 1.

Die Ermittlung der ch. Zustandsmuster kann auch bei Linksystemen mit Linkblöcken völlig analog zu den Ausführungen in den vorangegangenen Abschnitten 2 bis 7 durchgeführt werden.

Es sei jetzt:

- NE_{mB} die Anzahl der erlaubten Zustandsmuster von Linksystemen mit Linkblöcken,
- NC_{mB} die Anzahl der ch. Zustandsmuster von Linksystemen mit Linkblöcken,

- NE_{oB} die Anzahl der erlaubten Zustandsmuster von Linksystemen ohne Linkblöcke und
- NC_{oB} die Anzahl der ch. Zustandsmuster von Linksystemen ohne Linkblöcke.

Für die beiden Grundstrukturen von Linksystemen,

- Linksysteme ohne Linkblöcke und
- Linksysteme mit Linkblöcken,

sollen jetzt die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

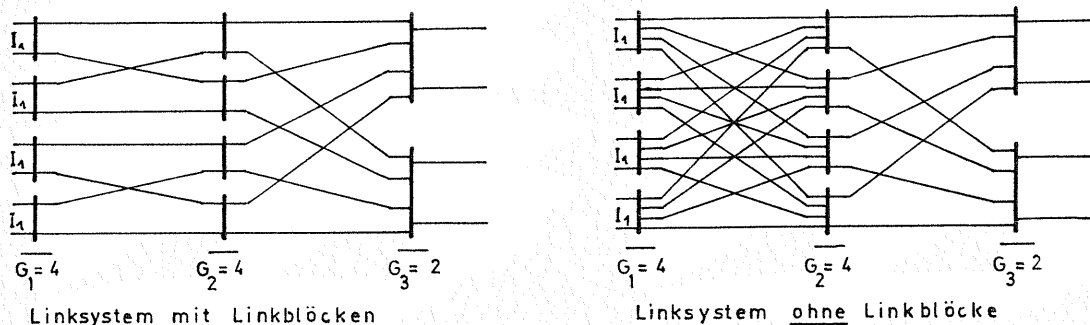
- Die Anzahl G_v der Koppelvielfache in der Stufe v sei bei beiden Linksystemen gleich, siehe untenstehendes Bild 8.2 .
- In der Stufe v des "Linksystems mit Linkblöcken" seien keine Linkblöcke; in diesem Fall sollen die Strukturparameter I_v und K_v der Stufe v beider Linksysteme gleich sein.
- Die Ausgangsbeschaltung der Stufe s beider Linksysteme sei ebenfalls gleich.

Erfüllen die beiden Linksysteme die obigen Voraussetzungen, dann gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} NE_{mB} &< NE_{oB} \\ \text{und } NC_{mB} &< NC_{oB}, \end{aligned}$$

d.h. also: Bei "vergleichbaren" Linksystemen erhält man bei Linksystemen mit Linkblöcken weniger erlaubte (bzw. ch.) Zustandsmuster als bei den entsprechenden Linksystemen ohne Linkblöcke. Die Ungleichheit in den obigen Ungleichungen kann beträchtlich sein, sie hängt stark von der gewählten Struktur der Linksysteme ab. Der Grund für diese Ungleichheit ist: Die Anzahl der Zwischenleitungen bei den "vergleichbaren" Linksystemen ist im Fall der "Linksysteme mit Linkblöcken" kleiner als im Fall der "Linksysteme ohne Linkblöcke".

Bild 8.2



8.1.2 Vorbemerkungen

Die Kennzeichnung und die Ermittlung der ch. Zustände kann beim s-stufigen Linksystem völlig analog zu Abschnitt 7., Seite 195 durchgeführt werden, d.h. wie beim dreistufigen Linksystem. Es werden deshalb im Abschnitt 8. nur noch die zum Verständnis der Zustandsbeschreibungen wesentlichen Beziehungen des s-stufigen Linksystems angegeben.

8.2 Beschreibung des Belegungszustandes beim s-stufigen Linksystem

8.2.1 Beschreibung des Belegungszustandes beim s-stufigen Linksystem mit "s - 1" Zustandsmatrizen S_v

Die Zustandsmatrix S_v sei die Zustandsmatrix, die den Belegungszustand der Zwischenleitungen zwischen Stufe v und der Stufe $v+1$ beschreibt. Die Elemente der Zustandsmatrix S_v werden mit

s_{v, i_v, j_v}

bezeichnet, mit

$$\begin{aligned} i_v &\in \{1, 2, \dots, G_v\}, \\ j_v &\in \{1, 2, \dots, K_v = G_{v+1}\} \quad \text{und} \\ v &\in \{1, 2, \dots, s-1\}. \end{aligned}$$

Für die Elemente der Zustandsmatrix S_v gilt:

$$\begin{aligned} s_{v, i_v, j_v} &= 0, \text{ wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \\ &\text{der Stufe } v \text{ nicht belegt ist und} \\ s_{v, i_v, j_v} &= r, \text{ wenn der Ausgang } j \text{ des Koppelvielfachs } i \\ &\text{der Stufe } v \text{ in eine bestimmte Richtung } r \text{ belegt$$

Als Beispiel siehe die Zustandsmatrizen S_v für $v=1$ und $v=2$ im Beispiel 46, Seite 198.

8.2.2 Beschreibung des Belegungszustandes des s stufigen-Linksystems mit einem s-dimensionalen Zustandsraum S

Den Belegungszustand des s-stufigen Linksystems kann man, an Stelle von den s-1 Zustandsmatrizen S_v (siehe vorhergehenden Abschnitt 8.2.1, Seite 280), auch mit einem s dimensional Zustandsraum S abbilden. Die Elemente des Zustandsraumes werden mit

$$S_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s}$$

bezeichnet, mit i_v : lfd. Nr. der Koppelvielfache in der Stufe v
und $i_v \in \{1, 2, \dots, G_v\}$,
sowie $G_v \in \{G_1, G_2, \dots, G_s\}$.

Für die Elemente des Zustandsraumes S gilt:

$S_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} = 0$, wenn keine Verbindung vom Koppelvielfach i_1 der Stufe 1 (Ausgang $j_1 = i_2$, siehe Beziehung (8.4), Seite 276) über die Koppelvielfache i_v (Ausgang $j_v = i_{v+1}$) der Stufen $v \in \{2, 3, \dots, s-1\}$ zum Koppelvielfach i_s der Stufe s durchgeschaltet ist und

$S_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} = r$, wenn eine Verbindung vom Koppelvielfach i_1 der Stufe 1 über die Koppelvielfache i_v der Stufen $v \in \{2, 3, \dots, s-1\}$ zum Koppelvielfach i_s der Stufe s durchgeschaltet ist.

Der Belegungszustand des Koppelvielfachs i_v des s-stufigen Linksystems ist im Unterraum $i_v = \text{konstant}$ abgebildet, siehe Abschnitt 8.4, Seite 285.

Bei den dreistufigen Linksystemen erhält man einen dreidimensionalen Zustandsraum S. Die "Unterräume $i_v = \text{konstant}$ " sind in diesem Fall Ebenen (siehe Seite 204 mit: $i_1 = i$, $i_2 = j$ und $i_3 = 1$).

8.2.3 Die Zustandsmatrix E des zweistufigen Ersatzsystems

Analog zu Satz 7-a, Seite 210 gilt jetzt der Satz 8-a, Seite 282.

Satz 8-a: Man kann jeden Belegungszustand des realen, s-stufigen Linksystems mit R Richtungen durch ein zweistufiges Linksystem mit

$$PR = R \cdot \prod_{v=1}^{s-1} K_v \quad (8.6)$$

Pseudorichtungen (dem Ersatzsystem) nachbilden.

Das Nachbilden erfolgt bei den Linksystemen mit mehr als $s = 3$ Stufen in "s-2" Schritten, z.B. bei einem vierstufigen Linksystem in zwei Schritten;

Schritt 1: Das vierstufige Linksystem wird zunächst in ein musteräquivalentes, dreistufiges Linksystem umgezeichnet.

Schritt 2: Dieses musteräquivalente, dreistufige Linksystem wird in ein, wiederum musteräquivalentes, zweistufiges Linksystem - dem eigentlichen Ersatzsystem - umgezeichnet (siehe Abschnitt 8.4, Seite 295).

Für dieses zweistufige Ersatzsystem gelten jetzt ebenfalls die Beziehungen (7.7) und (7.8), Seite 211, d.h. $I_1^* = I_1$, $K_1^* = K_1$, $G_1^* = G_1$, $I_2^* = I_2$, $G_2^* = G_2$ und $k_p^* = k_r$ (die mit einem Stern versehenen Parameter sind die Strukturparameter des Ersatzsystems).

Zwischen den Richtungen r mit $r \in \{1, 2, \dots, R\}$, und den Pseudorichtungen p mit $p \in \{1, 2, \dots, PR\}$ gilt die folgende Beziehung (siehe auch Beziehung (7.9), Seite 211 für s=3 stufige Linksysteme):

$$p = r + R \cdot (i_3 - 1) + R \left[\sum_{v=3}^{s-1} \prod_{\rho=3}^v G_\rho \cdot (i_{v+1} - 1) \right] \quad (8.7)$$

mit $r \in \{1, 2, \dots, R\}$,

$i_{v+1} \in \{1, 2, \dots, G_{v+1}\}$,

$v \in \{3, 4, \dots, s-1\}$

und $s \geq 4$, für $s=3$ gilt die Beziehung (7.9) Seite 211.

Setzt man in der Definition 7-B, Seite 214, an Stelle der Bezie -

hung (7.9), Seite 211 jetzt die Beziehung (8.7), Seite 282 ein, so gilt die Definition 7-B, Seite 214 ebenfalls beim s-stufigen Linksystem.

Zwischen den Elementen $s_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s}$ des Zustandsraumes S des realen Systems mit s Stufen und den Elementen e_{i_1, i_2} der Zustandsmatrix E des zweistufigen Ersatzsystems besteht die Beziehung

$$e_{i_1, i_2} = \sum_{i_s=1}^{G_s} \dots \sum_{i=1}^{G_v} \dots \sum_{i_3=1}^{G_3} \left[s_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} + R \cdot C \cdot \delta_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} \right] \quad (8.8)$$

mit den Hilfsgrößen:

$$C = (i_3 - 1) + \left[\sum_{v=3}^{s-1} \prod_{p=3}^v G_p \cdot (i_{v+1} - 1) \right] \text{ für } s \geq 4,$$

$$\delta_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} = 1, \text{ wenn } s_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} \neq 0$$

$$\text{und } \delta_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} = 0, \text{ wenn } s_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} = 0.$$

Bei den dreistufigen Linksystemen wurde gezeigt (siehe Seite 219), daß es bei der Ermittlung der ch. Zustandsmuster zweckmäßig ist, von der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems auszugehen. Dies gilt jetzt aus dem gleichen Grund (kleinere Anzahl von zu betrachtenden Mustern, siehe Seite 219) für Linksysteme mit mehr als drei Stufen.

Sind nun die Zustandsmatrizen E des Ersatzsystems bekannt, dann können daraus die Zustandsräume S des realen Systems berechnet werden. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

$e_{i_1, i_2} = 0$: Dann sind alle Elemente $s_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} = 0$, für gleiche Wertepaare i_1, i_2 mit $i_v \in \{1, 2, \dots, G_v\}$ und $v \in \{3, 4, \dots, s\}$.

$e_{i_1, i_2} = p$: Dann gilt: zunächst müssen die Indizes i_v für $v \in \{s, s-1, \dots, 4, 3\}$ rekursiv ermittelt werden.

$$i_v = \left[\frac{p - (i_{v+1} - 1) \cdot R \cdot D \cdot z}{R \cdot D / G_v} \right] + \begin{cases} 1 & \text{wenn der Bruch} \\ & \text{nicht ganzzahlig ist;} \\ 0 & \text{wenn der Bruch} \\ & \text{ganzzahlig ist,} \end{cases} \quad (8.9)$$

mit: $z = 0$ für $v = s$ und $z = 1$ für $v \in \{s-1, \dots, 4\}$; $D = \prod_{w=3}^v G_w$.

Mit den für $v \in \{s, \dots, 4\}$ nach (8.9) und für $v = 3$ nach (8.7), Seite 282 berechneten Indizes i_v und den entsprechend der bekannten Matrix E vorgegebenen Elementen e_{i_1, i_2} kann man jetzt die Elemente des Zustandsraumes S mit Hilfe der folgenden Beziehung berechnen.

$$s_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} = e_{i_1, i_2} - R \cdot (i_3 - 1) - R \cdot \left[\sum_{v=3}^{s-1} \prod_{p=3}^v G_p \cdot (i_{v+1} - 1) \right] \quad (8.10)$$

Für alle weiteren Elemente $s_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s}$ mit gleichen Wertepaaren i_1, i_2 folgt:

$$s_{i_1, i_2, \dots, i_v, \dots, i_s} = 0 \quad (8.11)$$

(Analog zu den obigen Beziehungen (8.9) bis (8.11) gelten für ein reales, dreistufiges Linkssystem die Beziehungen (7.13) bis (7.15), Seite 216, siehe auch Beispiel 49, Seite 217.)

8.2.4 Die allgemeine Zustandsvektoren \vec{T}_v mit $v \in \{2, 3, \dots, s\}$

Entsprechend den s Stufen des Linksystems gibt es jetzt $s - 1$ allgemeine Zustandsvektoren \vec{T}_v (siehe als Beispiel \vec{T}_2 und \vec{T}_3 im Abschnitt 7.2.6, Seite 221, dem Abschnitt für dreistufige Linkssysteme).

Für die Stufe $v = 1$ wurde der allgemeine Zustandsvektor mit \vec{T} bezeichnet, siehe Abschnitt 6, Seite 193 und Abschnitt 7.2.6, Seite 221. Diese Bezeichnung soll auch beim s -stufigen Linkssystem beibehalten werden.

Für die Elemente t_{v, i_v} der allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T}_v gilt:

t_{v, i_v} ist gleich der Anzahl der Belegungen im Koppelvielfach i_v der Stufe v mit $v \in \{2, 3, \dots, s\}$. Das ist gleichbedeutend mit der Formulierung: t_{v, i_v} ist die Anzahl der Belegungen im Unterraum $i_v = \text{konstant}$ des Zustandsraumes S (siehe z.B. die Bedeutung von $t_{2, j}$ Seite 224 im dreistufigen Linkssystem).

Für die Elemente τ_{i_1} von \vec{T} (Stufe $v = 1$) und für die Elemente t_{v,i_v} von \vec{T}_v gelten die Bedingungen

$$\begin{aligned} 0 \leq \tau_{i_1} &\leq \text{MIN}[I_1, K_1 = G_2] , \\ 0 \leq t_{v,i_v} &\leq \text{MIN}[I_v, K_v = G_{v+1}] \\ \text{mit } v &\in \{2, 3, \dots, s\} \\ \text{und } i_v &\in \{1, 2, \dots, G_v\} \end{aligned} \tag{8.12}$$

(siehe auch Beziehung (7.21), Seite 245 für dreistufige Systeme).

8.3 Die ch. Zustandsräume SC vom s-stufigen Linksystem (bei $s \geq 3$)

Die Vorgehensweise bei der Ermittlung der ch. Zustandsräume SC ist bei s-stufigen Linksystemen die gleiche wie für $s = 3$ im Abschnitt 7, Seite 195 und zwar im Zustandsraum S:

- Vertauschung der Unterräume mit $i_1 = \text{konstant}$ (siehe Seite 289) wie im Abschnitt 7.3.1, Seite 234, mit $i_1 \in \{1, 2, \dots, G_1\}$,
- Vertauschung der Unterräume mit $i_v = \text{konstant}$ (siehe Seite 290 und Seite 291) wie in den Abschnitten 7.3.2, Seite 236 und 7.3.4 Seite 244, mit $i_v \in \{1, 2, \dots, G_v\}$
und $v \in \{2, 3, \dots, s-1\}$,
- Vertauschung der Unterräume mit $i_s = \text{konstant}$ (siehe Seite 288) wie im Abschnitt 7.3.3, Seite 241, mit $i_s \in \{1, 2, \dots, G_s\}$.

8.4 Beispiel für den Zustandsraum S, die Zustandsmatrix E und für das Ersatzsystem

Für das auf Seite 286 dargestellte, vierstufige Linksystem sollen

- der Zustandsraum S,
- die Unterräume des Zustandsraumes S,
- die Zustandsmatrix E des zweistufigen Ersatzsystems und
- das zweistufige Ersatzsystem

angegeben werden.

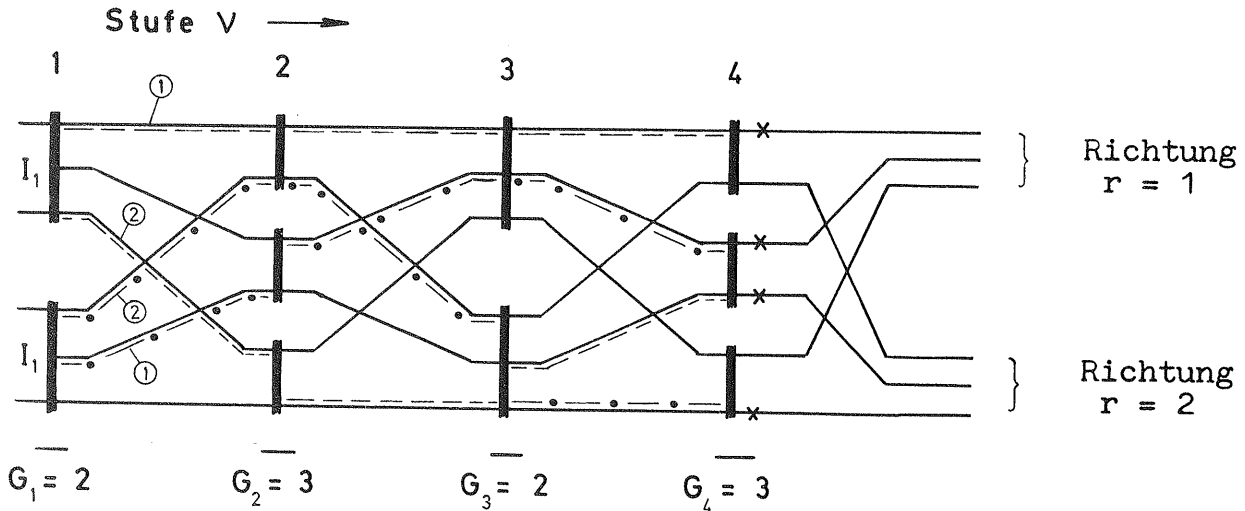


Bild 8.2

Im oben dargestellten Linksystm bedeuten:

- : Diese Linien kennzeichnen den Verbindungsverlauf der vom Koppelvielfach 1 der Stufe 1 ausgehenden Verbindungen.
- .-.-.- : Diese Linien kennzeichnen den Verbindungsverlauf der vom Koppelvielfach 2 der Stufe 1 ausgehenden Verbindungen.
- ①② : Die eingekreisten Zahlen geben die Richtung an, in der die entsprechende Verbindung durchgeschaltet ist.
- x : Die mit einem Kreuz gekennzeichneten Abnehmerleitungen sind belegt.

Aus der Beziehung (8.6), Seite 282 folgt: Das zweistufige Ersatzsystem hat

$$\underline{PR} = R \cdot \prod_{v=2}^{s-1} K_v = 2 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{12}$$

Pseudorichtungen.

Nach Beziehung (8.7), Seite 282 erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen der Ordnungsnummer p der Pseudorichtungen und den tatsächlichen Richtungen r sowie den Koppelvielfach - Nummern i_v der realen Stufen $v = 3$ und $v = 4$.

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
r	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
i_3	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
i_4	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3

Tabelle 8.4 - 1

Im Bild 8.3 Seite 288 ist der Zustandsraum S für das im Bild 8.2 Seite 286 dargestellte Linksystem abgebildet und zwar mit dem dort eingetragenen Belegungsmuster.

Vergleicht man das im Bild 8.2, Seite 286 dargestellte vierstufige Linksystem mit dem im Abschnitt 7.2.3, Seite 206 dargestellten dreistufigen Linksystem so folgt: Die Stufen 1 bis 3 - des im Bild 8.2 dargestellten vierstufigen Linksystems - sind identisch mit dem auf Seite 206 abgebildeten dreistufigen Linksystem und man erkennt daraus: Die Unterräume $i_4 = \text{konstant}$ sind identisch mit dem auf Seite 206 dargestellten Zustandsraum S des dreistufigen Linksystems.

In den folgenden Bildern 8.3 bis 8.6 (Seite 288 bis 291) ist jeweils der Zustandsraum S für ein und dasselbe Belegungsmuster (siehe Bild 8.2, Seite 286) abgebildet und zwar:

- im Bild 8.3, Seite 288 ist der Zustandsraum S unterteilt in $G_4 = 3$ Unterräume $i_4 = \text{konstant}$,
- im Bild 8.4, Seite 289 ist der Zustandsraum S unterteilt in $G_1 = 2$ Unterräume $i_1 = \text{konstant}$,
- im Bild 8.5, Seite 290 ist der Zustandsraum S unterteilt in $G_2 = 3$ Unterräume $i_2 = \text{konstant}$ und
- im Bild 8.6, Seite 291 ist der Zustandsraum S unterteilt in $G_3 = 2$ Unterräume $i_3 = \text{konstant}$.

Insgesamt gibt es bei einem vierstufigen Linksystem

$$G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \text{ Unterräume } i_v = \text{konstant}.$$

Die Anzahl der Unterräume $i_v = \text{konstant}$ ist gleich der Anzahl der Koppelvielfache aller s Stufen des Linksystems.

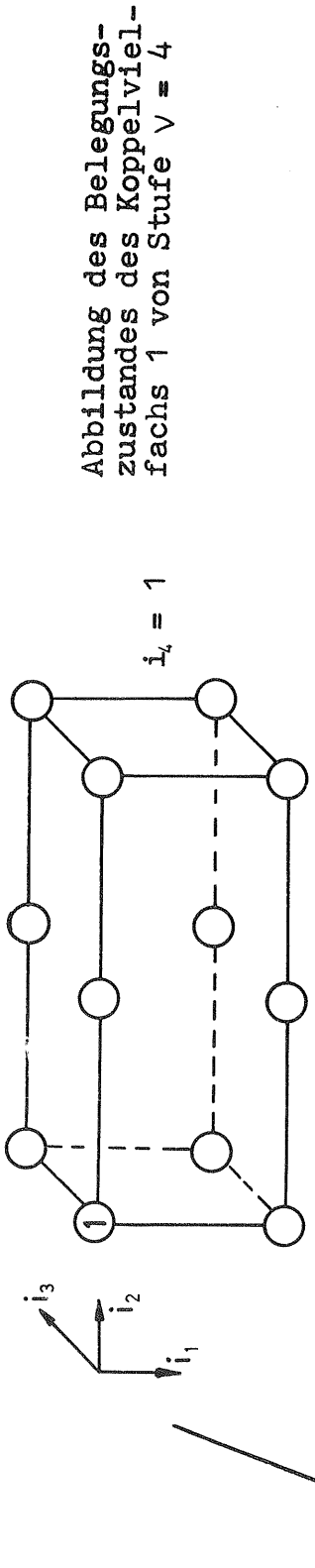


Abbildung des Belegungs-
zustandes des Koppelviel-
fachs 1 von Stufe $\nu = 4$

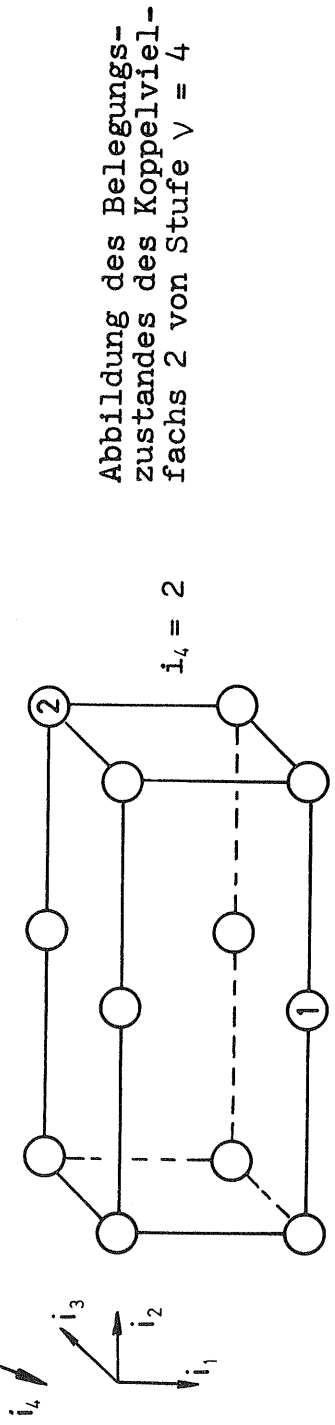


Abbildung des Belegungs-
zustandes des Koppelviel-
fachs 2 von Stufe $\nu = 4$

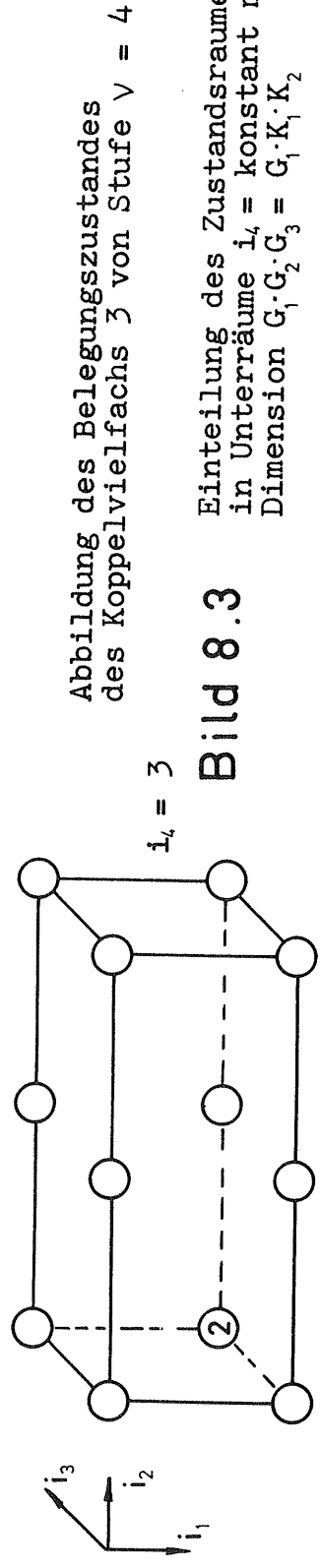


Abbildung des Belegungszustandes
des Koppelvielfachs 3 von Stufe $\nu = 4$

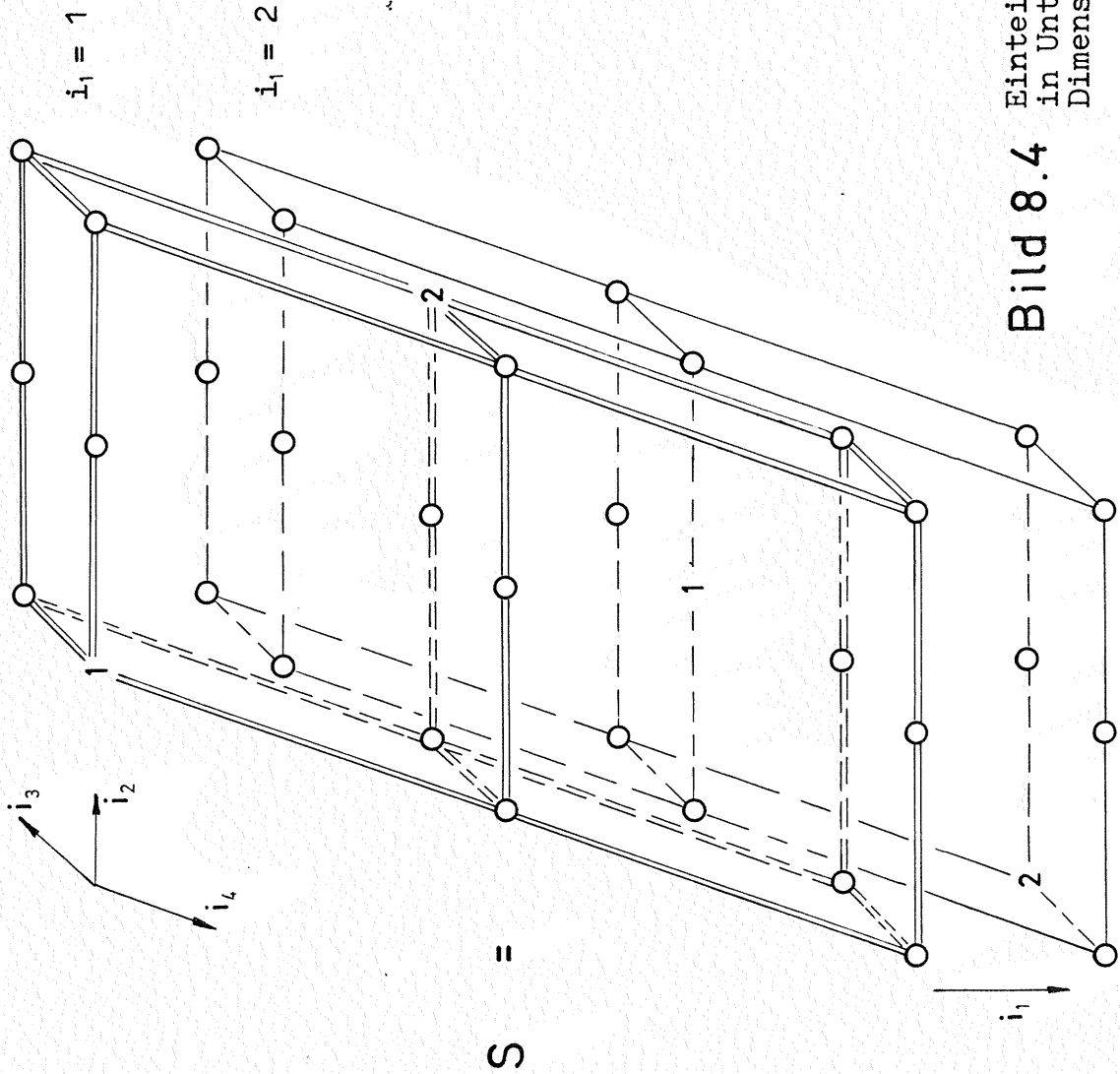
Einteilung des Zustandsraumes S
in Unterräume $i_4 = \text{konstant}$ mit der
Dimension $G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 = G_1 \cdot K_1 \cdot K_2$

Bild 8.3

S =

Abbildung des Belegungs-
zustandes des Koppelviel-
fachs 1 von Stufe $v = 1$

Abbildung des Belegungs-
zustandes des Koppelviel-
fachs 2 von Stufe $v = 1$



Einteilung des Zustandsraumes S
in Unterräume $i_1 = \text{konstant}$ mit der
Dimension $G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3$

Bild 8.4

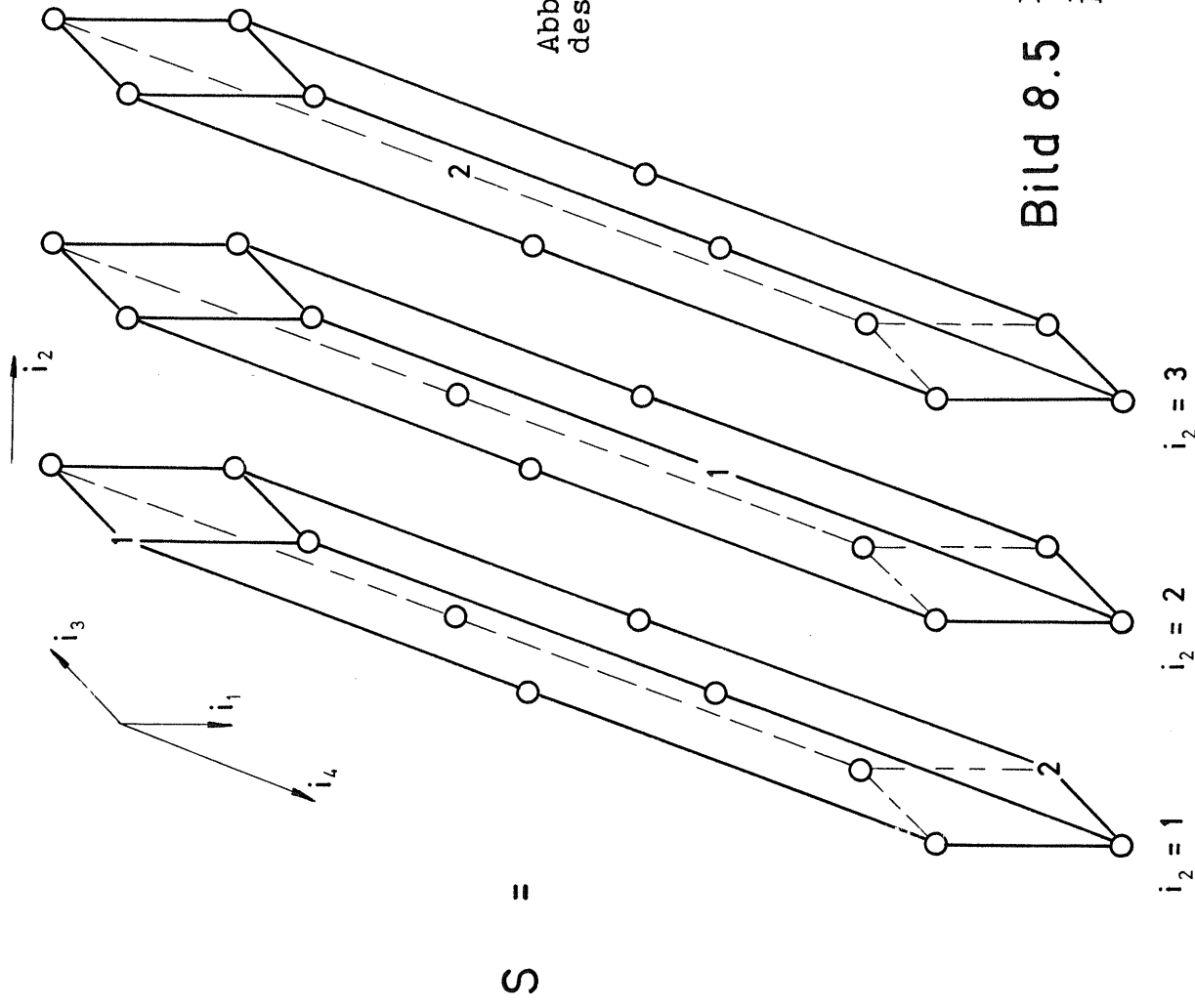


Abbildung des Belegungszustandes
des Koppelvielfachs 1 von Stufe $\nu = 2$

Abbildung des Belegungszustandes
des Koppelvielfachs 2 von Stufe $\nu = 2$

Abbildung des Belegungszustandes
des Koppelvielfachs 3 von Stufe $\nu = 2$

Bild 8.5 Einteilung des Zustandsraumes S
in Unterräume $i_2 = \text{konstant}$ mit der
Dimension $G_1 \cdot G_3 \cdot G_4 = G_1 \cdot K_2 \cdot K_3$

S =

$i_2 = 1$ $i_2 = 2$ $i_2 = 3$

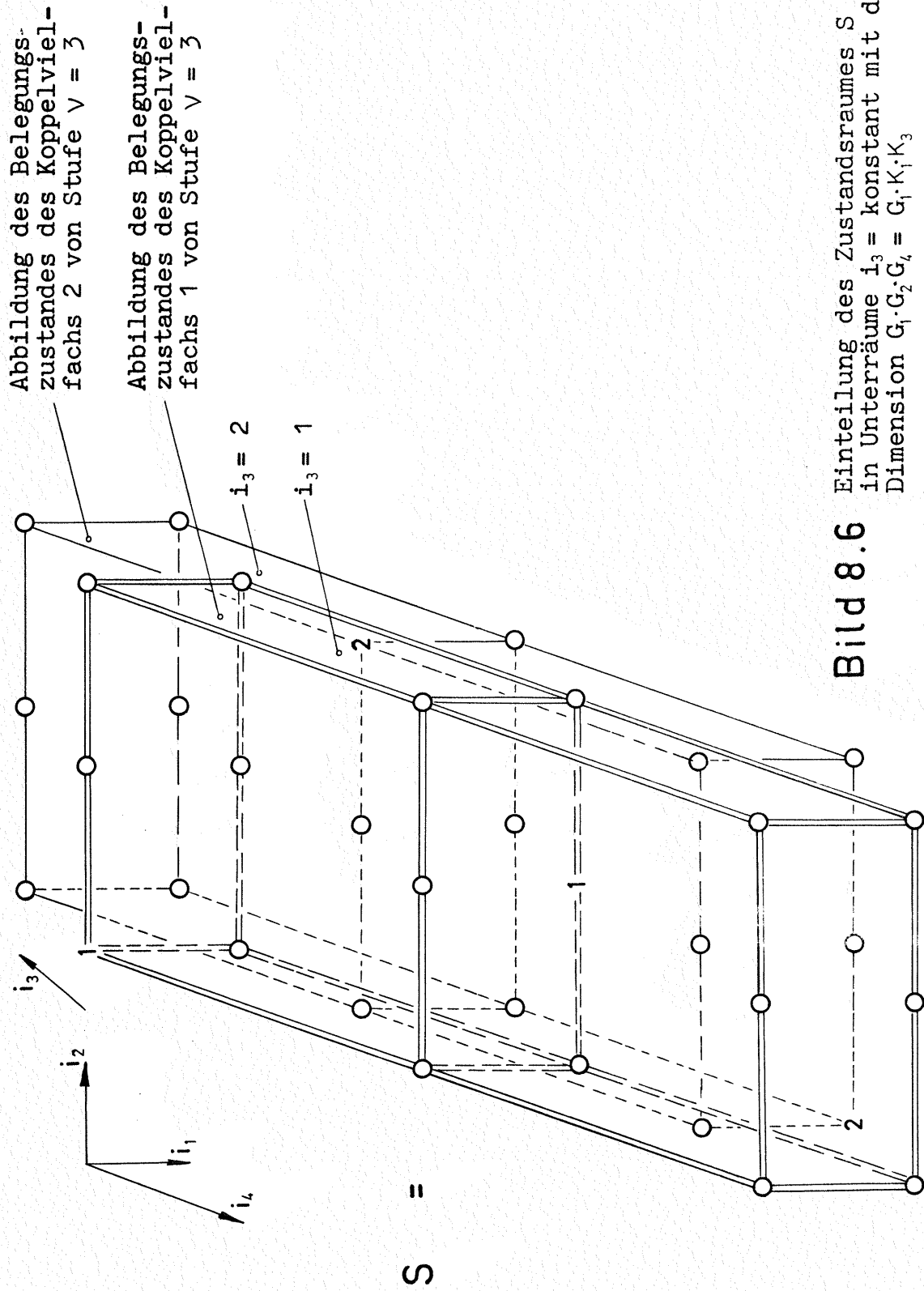


Bild 8.6 Einteilung des Zustandsraumes S
in Unterräume $i_3 = \text{konstant}$ mit der
Dimension $G_1 \cdot G_2 \cdot G_4 = G_1 \cdot K_1 \cdot K_3$

Zur einfacheren Darstellung werden die G_3 Ebenen $i_3 = \text{konstant}$ eines Unterraumes $i_4 = \text{konstant}$, nebeneinander dargestellt (siehe auch Seite 208 für $s = 3$). Für den im Bild 8.3 abgebildeten Zustandsraum S erhält man dann die folgende Darstellung:

$$S = \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{Koppelvielfach-Nr. } i_1 \\ \text{der Stufe 1} \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Koppelvielfach-Nr. } i_2 \\ \text{der Stufe 2} \\ \rightarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Koppelvielfach-Nr. } i_3 \\ \text{der Stufe 3} \\ \rightarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Koppelvielfach-Nr. } i_4 \\ \text{der Stufe 4} \\ \downarrow \end{array} \end{array}$$

		1	2	3	1	2	3			
	1	1	0	0		0	0	0		
	2	0	0	0		0	0	0		} 1
	1	0	0	0		0	0	2		
	2	0	1	0		0	0	0		} 2
	1	0	0	0		0	0	0		
	2	0	0	0		2	0	0		} 3
		} 1				} 2				

Aus dem obigen Zustandsraum S erhält man mit der Beziehung (8.8), Seite 283 die Zustandsmatrix E des Ersatzsystems.

Zunächst folgt aus (8.8) für das $s = 4$ - stufige Linkssystem:

$$e_{i_1, i_2} = \sum_{i_4=1}^{G_4} \sum_{i_3=1}^{G_3} \left[s_{i_1, i_2, i_3, i_4} + (R \cdot (i_3 - 1) + R \cdot G_3 \cdot (i_4 - 1)) \cdot \delta_{i_1, i_2, i_3, i_4} \right] \quad (8.13)$$

Mit den nach Bild 8.2, Seite 286 gegebenen Strukturparametern und der obigen Beziehung (8.13) folgt:

$$e_{i_1, i_2} = \sum_{i_4=1}^{G_4} \sum_{i_3=1}^{G_3} \left[s_{i_1, i_2, i_3, i_4} + (2 \cdot (i_3 - 1) + 2 \cdot 2 \cdot (i_4 - 1)) \cdot \delta_{i_1, i_2, i_3, i_4} \right] \quad (8.14)$$

In der oben angegebenen Beziehung (8.14) ist $\delta_{i_1, i_2, i_3, i_4}$ noch zu bestimmen. $\delta_{i_1, i_2, i_3, i_4}$ ist gleich 1 für die Elemente s_{i_1, i_2, i_3, i_4} ungleich Null (siehe Beziehung (8.8), Seite 283). Aus dem oben angegebenen Zustandsraum S erhält man $\delta_{i_1, i_2, i_3, i_4} = 1$ für die folgenden Elemente s_{i_1, i_2, i_3, i_4} :

für: $i_1 = 1, i_2 = 1, i_3 = 1, i_4 = 1$ - denn es ist $s_{1,1,1,1} = 1$;
 $i_1 = 1, i_2 = 3, i_3 = 2, i_4 = 2$ - denn es ist $s_{1,3,2,2} = 2$;
 $i_1 = 2, i_2 = 2, i_3 = 1, i_4 = 2$ - denn es ist $s_{2,2,1,2} = 1$;
 $i_1 = 2, i_2 = 1, i_3 = 2, i_4 = 3$ - denn es ist $s_{2,1,2,3} = 2$.

Für die oben angegebenen Indizes i_1 bis i_4 sind also bei dem betrachteten Belegungsmuster die $\delta_{i_1, i_2, i_3, i_4} = 1$ und man bekommt dadurch mit den obigen Indizes und der Beziehung (8.14), Seite 292 die folgenden Werte für die Elemente $e_{i_1, i_2} = 0$:

$$\begin{aligned} e_{1,1} &= 1 + 2 \cdot (1 - 1) + 4 \cdot (1 - 1) = 1, \\ e_{1,3} &= 2 + 2 \cdot (2 - 1) + 4 \cdot (2 - 1) = 8, \\ e_{2,2} &= 1 + 2 \cdot (1 - 1) + 4 \cdot (2 - 1) = 5 \quad \text{und} \\ e_{2,1} &= 2 + 2 \cdot (2 - 1) + 4 \cdot (3 - 1) = 12. \end{aligned}$$

Die restlichen zwei Elemente e_{i_1, i_2} der Matrix E sind gleich Null. Aus dem auf Seite 325 dargestellten Zustandsraum S erhält man damit die folgende Zustandsmatrix E. Diese Zustandsmatrix E beschreibt ebenfalls eindeutig den Belegungszustand der Zwischenleitungen des auf Seite 286 dargestellten Linksystems (siehe Satz 8-a, Seite 281).

$$E = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i_1 \rightarrow & 1 & 2 & 3 & \\ & \parallel & & & \parallel \\ & 1 & 0 & 3 & \\ & \parallel & & & \parallel \\ & 12 & 5 & 0 & \\ & & & & \parallel \end{array} \\ \begin{array}{c} i_2 \\ \downarrow \\ 1 \\ 2 \end{array} \end{array}$$

Anmerkung:

Der Zusammenhang (entsprechend Beziehung (8.7), Seite 282) zwischen

- einer bestimmten Richtung r,
- der lfd. Nr. p für die Pseudorichtungen,
- der lfd. Nr. i_3 für die Koppelvielfache der Stufe 3 und
- der lfd. Nr. i_4 für die Koppelvielfache der Stufe 4

ist für das auf Seite 286 dargestellte Linksystem in der Tabelle 8.4 - 1, Seite 286 tabelliert. Mit Hilfe dieser Tabelle kann man die Zustandsmatrix E ebenfalls ermitteln. Dabei geht man wie folgt vor:

Gegeben sind die Elemente s_{i_1, i_2, i_3, i_4} des Zustandsraumes S, hier zum Beispiel der Zustandsraum S nach Seite 286. In diesem Beispiel ist (z.B.) das Element

$$s_{2,2,1,2} = 1 = r;$$

es ist also: $i_1 = 2, i_2 = 2, i_3 = 1$ und $i_4 = 2$.

Mit $i_4 = 2, i_3 = 1$ und $r = 1$ erhält man jetzt aus der Tabelle 8.4 - 1, Seite 286 :

$$e_{i_1 = 2, i_2 = 2} = p = 1.$$

Bei den anderen Elementen von E geht man jetzt entsprechend vor.

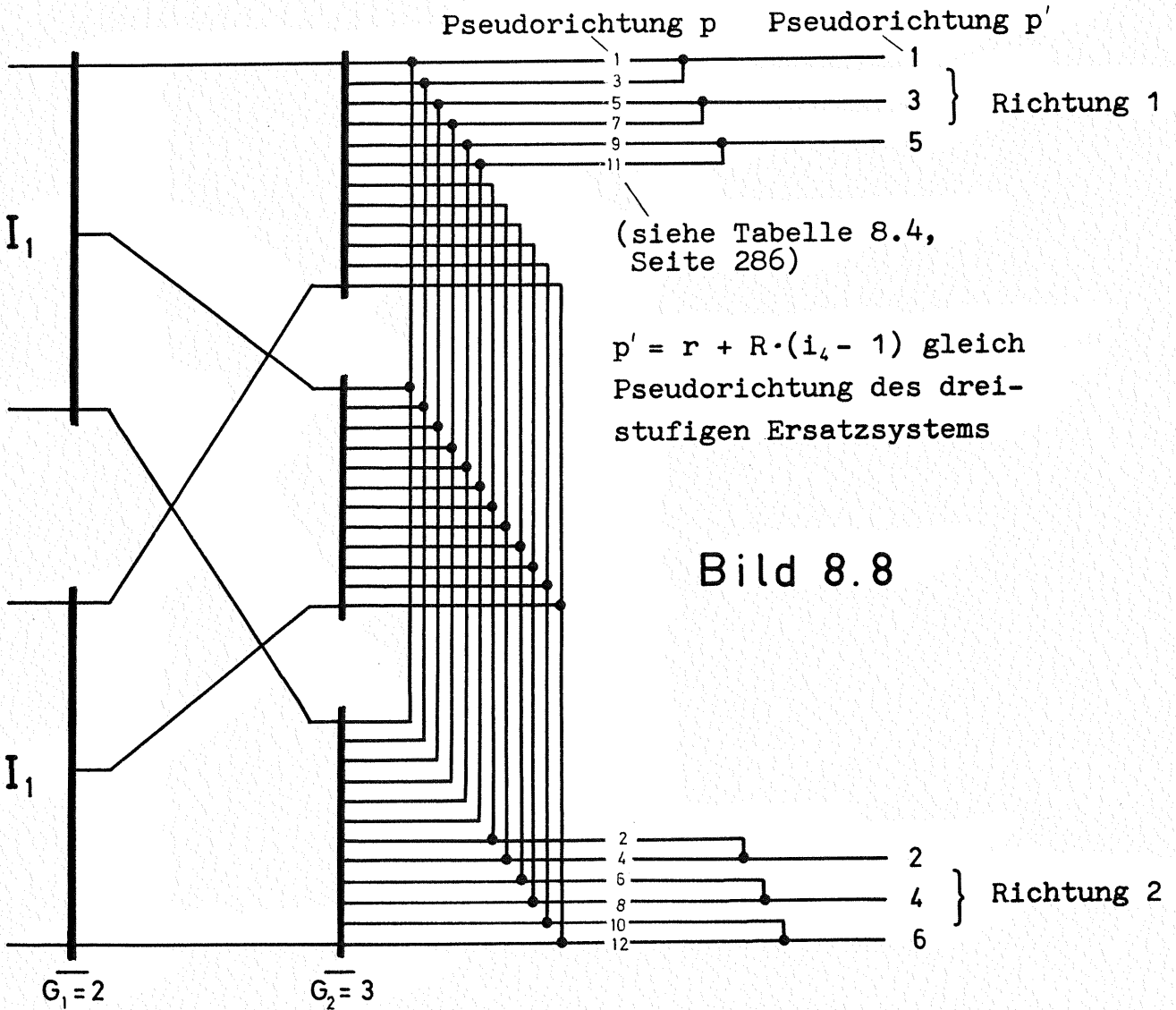
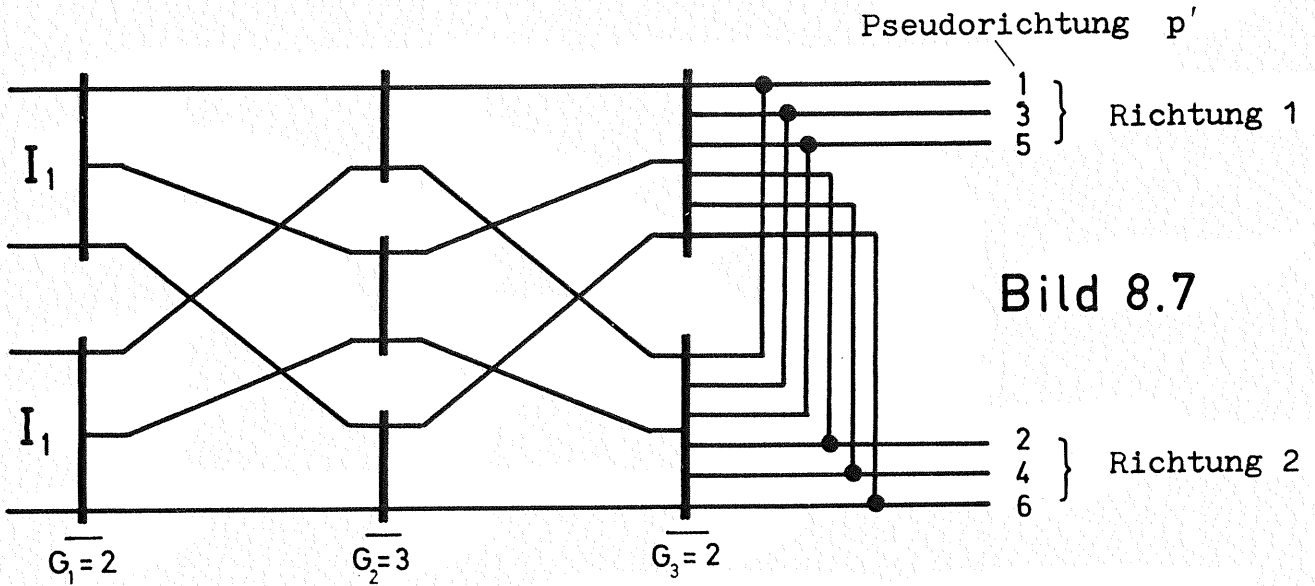
Die Anwendung der Tabelle 8.4 -1 ist zweckmäßig, wenn man manuell - aus dem Zustandsraum S des realen s-stufigen Linksystems - die Zustandsmatrix E des zweistufigen Ersatzsystems (oder umgekehrt: aus E den Zustandsraum S) bestimmen will.

Es sollen jetzt noch das dreistufige und das zweistufige Ersatzsystem für das auf Seite 286 dargestellte vierstufige Linksystem, angegeben werden.

1. Schritt: Ausgehend von dem vierstufigen Linksystem wird zunächst das zu diesem vierstufigen Linksystem - bezüglich der erlaubten Muster - musteräquivalente, dreistufige Linksystem angegeben. Das dreistufige Ersatzsystem ist ein System für das gilt: An jedes Koppelvielfach der Stufe 3 sind alle Abnehmerleitungen des realen, vierstufigen Linksystems angeschaltet und entsprechend gevielfacht, siehe Bild 8.7, Seite 295.

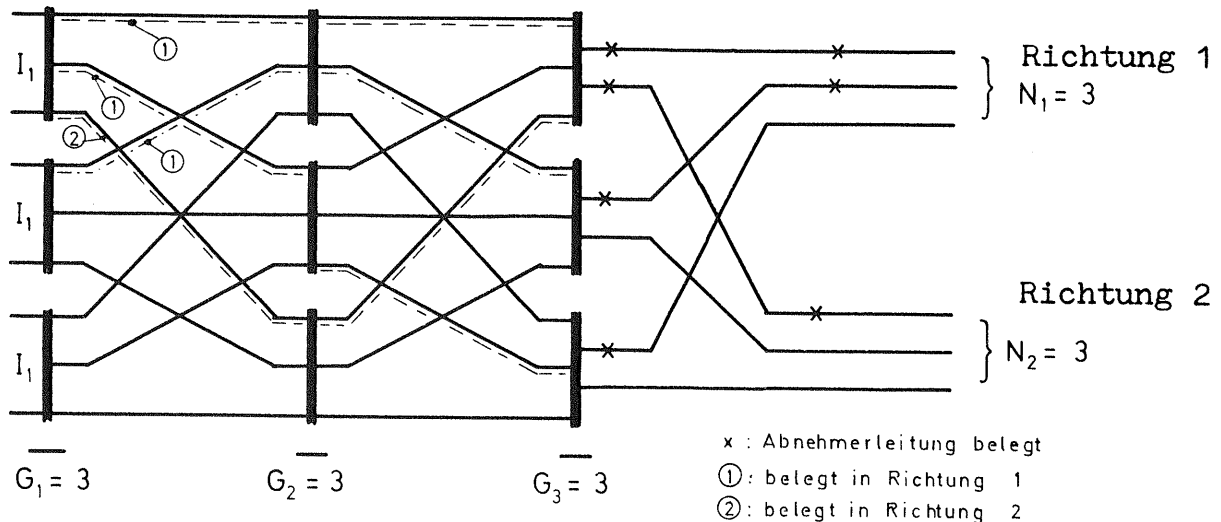
2. Schritt: Ausgehend von dem dreistufigen Ersatzsystem wird jetzt das zweistufige Ersatzsystem erstellt. Dieses zweistufige Ersatzsystem ist jetzt zunächst musteräquivalent - bezüglich der erlaubten Muster - zum dreistufigen Ersatzsystem. Da das dreistufige Ersatzsystem - zum realen, vierstufigen Linksystem - musteräquivalent ist, ist damit auch das zweistufige Ersatzsystem musteräquivalent zum vierstufigen Linksystem. Das zweistufige Ersatzsystem ist ein System, für das gilt: An jedes Koppelvielfach der Stufe 2 sind alle

"Abnehmerleitungen" des dreistufigen Ersatzsystems angeschaltet und entsprechend vervielfacht, siehe untenstehendes Bild 8.8.



9. Beispiel eines Linksystems, für das die Funktion $B = f(Y/N)$ exakt berechnet wurde

9.1 Struktur des Linksystems und Anzahl der ch. Zustandsmuster



Für das oben dargestellte Linksystem sollen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- gleichmäßige Belastung aller Koppelvielfache der Stufe 1,
- Absuchverfahren in Stufe 1 und Stufe 2: "zufällige Auswahl",
- gleichmäßige Belastung der beiden Abnehmerbündel.

Bei der Ermittlung der ch. Zustandsmuster können damit die Reduktionen nach Abschnitt 7.3, Seite 234 und Abschnitt 7.4, Seite 259 durchgeführt werden.

Führt man die Reduktion durch, so erhält man 2058 ch. Zustandsmuster, d.h. in dem linearen Gleichungssystem treten 2058 Unbekannte auf. Die Anzahl der erlaubten Zustandsmuster beträgt in diesem Beispiel 120 673, d.h. ohne Reduktion der Zustandsmuster müßte ein lineares Gleichungssystem mit 120 673 Unbekannten gelöst werden.

Das betrachtete Muster E = $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ bekommt die lfd. Nr. 1.

I lfd. Nr. in dieser Liste	II lfd. Nr. im Programm	III benachbarte Muster "von oben"	IV Vertreter der benachbarten Muster "von oben"	V Übergangs- koeffizient
2	308	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$1 \cdot \frac{1}{h}$
3	310	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$1 \cdot \frac{1}{h}$
4	318	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$1 \cdot \frac{1}{h}$
5	842	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$1 \cdot \frac{1}{h}$
6	844	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$1 \cdot \frac{1}{h}$
7	924	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$1 \cdot \frac{1}{h}$
8	1144	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$1 \cdot \frac{1}{h}$
		benachbarte Muster "von unten"	Vertreter der benachbarten Muster "von unten"	
9	99	$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$1 \cdot \alpha$
10	89	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$1 \cdot \alpha$
11	91	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{3} \cdot \alpha$
12	15	$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\frac{1}{3} \cdot \alpha$

Tabelle 9.2-1: Die benachbarten Muster

in Spalte IV: ch. Muster (Vertreter) der benachbarten Muster,
in Spalte V: mit dem BL-Algorithmus ermittelte Übergangs-
koeffizienten, siehe /11/

Bemerkungen zu den in Spalte III und Spalte IV von Tabelle
9.2-1 angegebenen Matrizen E

Wie bereits im Beispiel 9, Seite 44 (dort für das zweistufige
Linkssystem) angeführt, treten

bei der Ermittlung der benachbarten Muster, mit anderen
Worten: bei der Ermittlung der möglichen Übergänge,

Muster auf, die in der reduzierten Liste, d.h. der Liste der ch.
Zustandsmuster, nicht mehr vorhanden sind. Bei der Ermittlung
der möglichen Übergänge tritt also das Problem auf:

Zu vorgegebenen "nicht ch. Mustern" müssen deren Vertreter,
die "ch. Muster", ermittelt werden. Der Grund dafür ist:
In der reduzierten Liste der Zustandsmusters sind nur noch
die ch. Zustandsmuster vorhanden.

Die Lösung dieses Problems wird wie folgt erreicht:

Die gegebenen "nicht ch. Zustandsmuster"
werden durch Vertauschen der

- Zeilen der Matrix E des Ersatzsystems,
- Spalten der Matrix E des Ersatzsystems,
- Pseudorichtungen p in der Matrix E des Ersatzsystems und
- Richtungen r in der Matrix E des Ersatzsystems

in das entsprechende ch. Zustandsmuster überführt. Das soll
anhand eines Beispiels näher erläutert werden.

Beispiel: Ermittlung des ch. Musters für das Muster mit der
lfd. Nr. 8 in der Tabelle 9.2-1, Spalte III, Seite 298.

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} .$$

In dem betrachteten Beispiel werden die hier möglichen Reduktionen

- Zeilenvertauschung bei der Zustandsmatrix E (siehe Abschnitt 7.31, Seite 234),
- Elementvertauschung beim allgemeinen Zustandsvektor \vec{T}_2 (siehe Abschnitt 7.32, Seite 236),
- Elementvertauschung beim allgemeinen Zustandsvektor \vec{T}_3 (siehe Abschnitt 7.33, Seite 241) und
- Elementvertauschung beim Richtungsvektor \vec{TR} (siehe Abschnitt 7.4, Seite 259)

durchgeführt. Das

- durch Elementvertauschung bei dem jeweiligen Zustandsvektor
- aus dem Zustandsmuster mit der lff. Nr. 8 in der Tabelle 9.2-1, Seite 298

hervorgehende ch. Muster muß also die folgenden Bedingungen erfüllen:

- Beim Zustandsvektor \vec{E} (siehe Beziehung (7.27), Seite 236)

$$e_1 > e_2 > e_3 ; \quad (9.1)$$

- Beim allgemeinen Zustandsvektor \vec{T}_2 (siehe Beziehung (7.28), Seite 237)

$$t_{2,1} \cong t_{2,2} \cong t_{2,3} ; \quad (9.2)$$

- Beim allgemeinen Zustandsvektor \vec{T}_3 (siehe Beziehung (7.30), Seite 241)

$$t_{3,1} \cong t_{3,2} \cong t_{3,3} ; \quad (9.3)$$

- und beim Richtungsvektor \vec{TR} (siehe Beziehung (5.22), Seite 153)

$$tR_1 \cong tR_2 . \quad (9.4)$$

Zur Überprüfung der obigen Bedingungen (9.1) bis (9.4) müssen für das betrachtete Muster zuvor

- der Zustandsvektor \vec{E} ,
- der allgemeine Zustandsvektor \vec{T}_2 ,
- der allgemeine Zustandsvektor \vec{T}_3 und
- der Richtungsvektor \vec{TR}

berechnet werden.

Man bekommt aus der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems, mit $K_2 \cdot R + 1 = 7$ (siehe Beziehung (7.6), Seite 210):

$$E = \begin{matrix} & 7^0 & 7^1 & 7^2 \\ \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix} \Rightarrow E^* = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 35 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 98 \\ 0 \\ 294 \end{matrix} \end{matrix} \Rightarrow \vec{E} = \begin{matrix} \begin{matrix} 134 \\ 3 \\ 294 \end{matrix} \\ \leftarrow e_1 \\ \leftarrow e_2 \\ \leftarrow e_3 \end{matrix}$$

↓ Anzahl der Belegungen je Spalte

$$\vec{T}_2 = \{ 2 \quad 1 \quad 2 \} = \{ t_{2,1} \quad t_{2,2} \quad t_{2,3} \}$$

$$\vec{T}_3 = \{ 2 \quad 1 \quad 2 \} = \{ t_{3,1} \quad t_{3,2} \quad t_{3,3} \}$$

Anzahl der Belegungen in Pseudorichtung 5 oder 6
Anzahl der Belegungen in Pseudorichtung 3 oder 4
Anzahl der Belegungen in Pseudorichtung 1 oder 2

Aus der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems erhält man des weiteren den folgenden Richtungsraum TR:

$$TR = \begin{matrix} & 2^0 & 2^1 & 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 & \text{Belegungen in Richtung} \\ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \\ \leftarrow r = 1 \\ \leftarrow r = 2 \end{matrix}$$

p = 1,2 p = 3,4 p = 5,6 ← Belegungen in Pseudorichtung

Mit dem oben angegebenen Spaltengewicht erhält man den folgenden Richtungsraum TR^* ($2 = (k_r + 1)$, siehe Seite 143):

$$TR^* = \begin{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 8 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 128 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 256 \end{matrix} \end{matrix} \Rightarrow \vec{TR} = \begin{matrix} \begin{matrix} 137 \\ 256 \end{matrix} \\ \leftarrow tR_1 \\ \leftarrow tR_2 \end{matrix}$$

Ein Vergleich der oben angegebenen Vektoren \vec{E} , \vec{T}_1 , \vec{T}_2 und \vec{TR} mit den entsprechenden Beziehungen (9.1) bis (9.4), Seite 300 zeigt, daß keine der vier Bedingungen erfüllt ist.

Durch die entsprechenden Umformungen bei der Zustandsmatrix E des Ersatzsystems erhält man:

- Wegen $t_{3,3} > t_{3,2}$: Vertauschen der Pseudorichtungen
 - p = 3 mit p = 5 und
 - p = 4 mit p = 6 (siehe Satz 7-m, Seite 243).

Daraus folgt aus der Matrix E

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix},$$

die Matrix

$$E_I = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

- Wie man sieht, gilt auch bei der obigen Matrix E_I : $t_{2,3} > t_{2,2}$.
 - Deshalb müssen nun in der Matrix E_I die Spalten 2 und 3 miteinander vertauscht werden. Damit erhält man die folgende Matrix E_{II} :

$$E_{II} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

- Zu E_{II} gehört der folgende Richtungsraum TR_{II} :

$$TR = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{l} \longleftarrow r = 1 \\ \longleftarrow r = 2 \end{array}$$

$2^0 \ 2^1 \ 2^2 \quad 2^3 \ 2^4 \ 2^5 \quad 2^6 \ 2^7 \ 2^8$

$$TR^* = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \Longrightarrow \overrightarrow{TR}_{II} = \begin{Bmatrix} 97 \\ 18 \end{Bmatrix}.$$

Aus dem obigen Richtungsvektor \overrightarrow{TR}_{II} folgt: Die Bedingung (9.4), Seite 300 ist für die Matrix E_{II} bereits erfüllt.

- Die Bedingungen (9.2), (9.3) und (9.4) sind für die Matrix E_{II} erfüllt. Es muß jetzt noch die Bedingung (9.1) geprüft werden. Aus der obigen Matrix E_{II} folgt durch Gewichtung der Spalten j mit dem Gewicht 7^{j-1} , die Matrix E_{II}^* :

$$E_{II}^* = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 147 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \end{vmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{E}_{II} = \begin{Bmatrix} 162 \\ 5 \\ 28 \end{Bmatrix}.$$

Aus dem obigen Vektor \overrightarrow{E}_{II} folgt: Da $e_{II,3} > e_{II,2}$ ist, muß bei der Matrix E_{II} die Zeile 3 mit der Zeile 2 vertauscht werden. Durch diese Vertauschung erhält man die folgende

Matrix E_{III} .

$$E_{III} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Die Matrix E_{III} ist der gesuchte Vertreter des in diesem Beispiel betrachteten Musters E, siehe Tabelle 9.2-1, Spalte III und Spalte IV (Seite 298). Für die Matrix E_{III} sind alle vier Bedingungen (9.1) bis (9.4), Seite 300 erfüllt.

Anmerkung:

Die Umformung

eines gegebenen "nicht ch. Zustandsmusters"
in seinen Vertreter, dem ch. Zustandsmuster,

ist

bei der im obigen Beispiel angegebenen Reihenfolge
der Prüfung der Bedingungen (9.1) bis (9.4),

stets eindeutig.

Die Reihenfolge ist:

- 1) Prüfung der Bedingung (9.3),
- 2) Prüfung der Bedingung (9.2),
- 3) Prüfung der Bedingung (9.4) und
- 4) Prüfung der Bedingung (9.1).

Die Zustandsgleichung für das in diesem Abschnitt betrachtete Muster, das hier in dem Beispiel die lfd. Nr. 1 hat, lautet:

$$p_1 \cdot \left(\frac{4}{h} + 2 \right) = (p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8) \cdot \frac{1}{h} \quad \begin{array}{l} \text{Übergänge} \\ \text{"von oben"} \end{array} \\ + (p_9 + p_{10} + \frac{1}{3} \cdot p_{11} + \frac{1}{3} \cdot p_{12}) \quad \begin{array}{l} \text{Übergänge} \\ \text{"von unten"} \end{array}$$

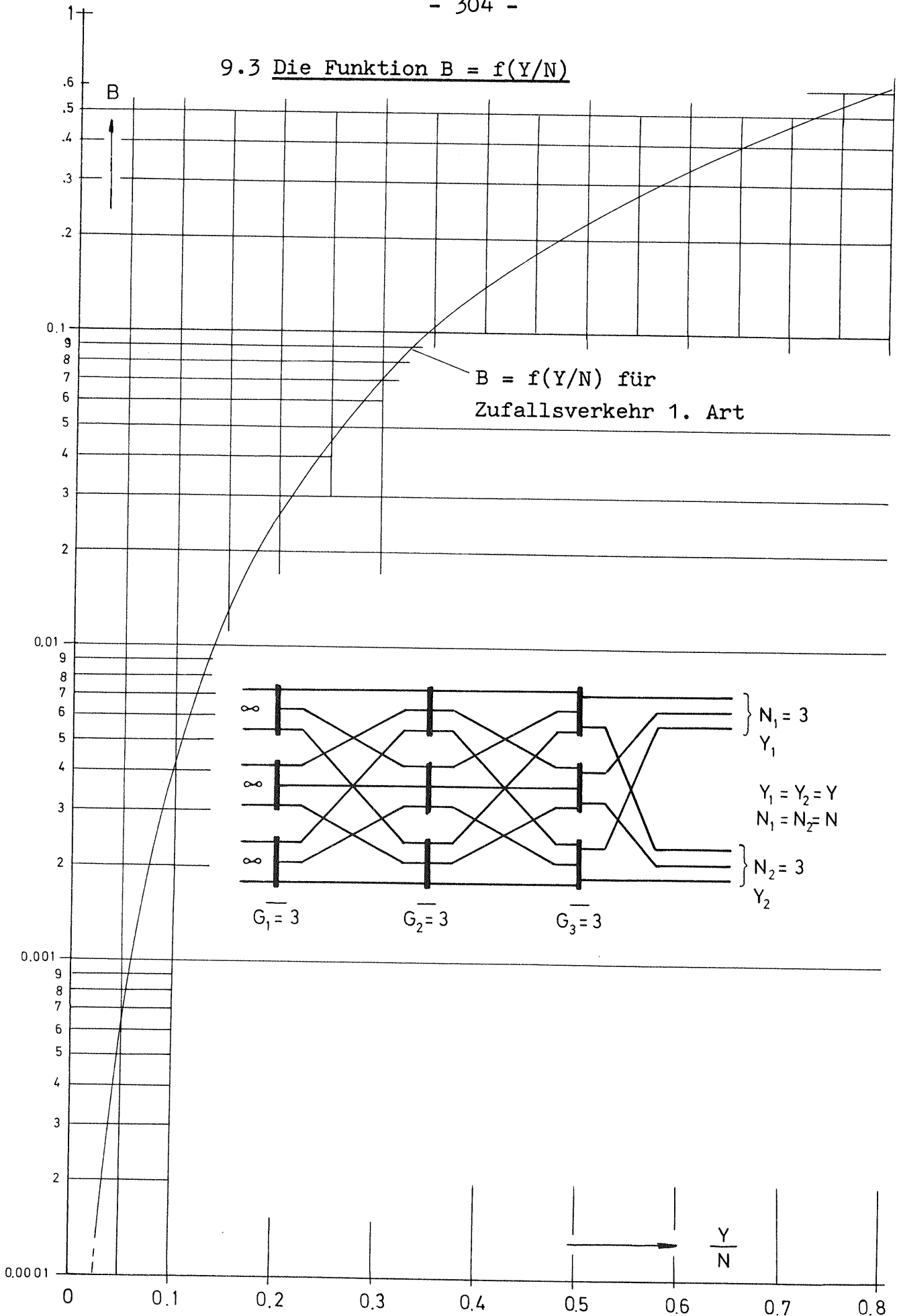
mit α : Anrufrichte je Richtung r pro Koppelvielfach
von Stufe 1

h: mittlere Belegungsdauer der Zwischenleitungen

p_1, p_2, \dots : Zustandswahrscheinlichkeiten der Muster 1, 2, ...
von Tabelle 9.2-1, Seite 298.

$A = \alpha \cdot h \cdot G_1 \cdot R$: Gesamtangebot.

9.3 Die Funktion $B = f(Y/N)$



10. Zusammenfassung

Die exakte Berechnung der ch. Verkehrsgrößen (Angebot, Belastung, Verlust u.a.) von mehrstufigen Linkssystemen führt zu dem Problem:

Lösung eines linearen Gleichungssystems von hohem Rang.

Die Unbekannten des Gleichungssystems sind die Zustandswahrscheinlichkeiten der Zustandsmuster.

Es wurde gezeigt, daß durch

- die Symmetrie-Eigenschaften der Linksystemstrukturen,
- die (realistische) Annahme einer gleichen Belastung aller Koppelvielfache der Stufe 1 und
- in Abhängigkeit vom bestimmten vorgebbaren Wegesuchverfahren

jeweils größere Klassen von Zustandsmustern die gleiche Zustandswahrscheinlichkeit haben.

Ausgehend von diesem Sachverhalt wurden Algorithmen hergeleitet, mit deren Hilfe der Rang des linearen Gleichungssystems wesentlich erniedrigt werden kann.

Z.B. erhält man bei einem zweistufigen Linksystem mit $G_1 = 10$ Koppelvielfachen in der Stufe 1, der Erreichbarkeit $K_1 = 3$ und 9 Abnehmerleitungen (siehe Bild 3.1, Seite 100) eine Reduktion von 5 451 776 Unbekannte auf nur 169 Unbekannte.

Die Vorgehensweise bei der Reduktion ist folgendermaßen:

- Die Zustandsmuster werden in Klassen gleicher Zustandswahrscheinlichkeit eingeteilt.
- Von einer Klasse von Zustandsmustern wird ein Zustandsmuster als Vertreter seiner Klasse gewählt. Dieses Muster wird als ch. Zustandsmuster bezeichnet.

Bei der Wahl der Vertreter wurde so vorgegangen, daß zum einen

- die Ermittlung der Vertreter (ch. Zustandsmuster) in möglichst einfacher Weise erfolgt,

und zum anderen mußte die Bedingung erfüllt sein

daß, ausgehend von einem beliebigen Zustandsmuster,

dieses Muster durch "Umordnung" stets eindeutig in seinen Vertreter überführbar ist.

Die Möglichkeit eine derartige eindeutige Umordnung eines beliebigen Zustandsmusters in seinen Vertreter durchzuführen, ist die Voraussetzung für die Anwendung der BL-Algorithmen zur Aufstellung des Zustandsgleichungssystems. Hierbei muß man dann nur noch die Zustandsgleichungen für die ch. Zustandsmuster aufstellen.

Eine weitere Bedingung, die für die Ausnutzung der Reduktion notwendig ist, konnte in einfacher Weise gelöst werden:

Die Mächtigkeiten der jeweiligen Klassen von Zustandsmustern können unmittelbar aus dem ch. Zustandsmuster mittels bekannter Formeln aus der Kombinatorik berechnet werden.

Es wurden entwickelt: Algorithmen zur Ermittlung der ch. Zustandsmuster für mehrstufige Linkssysteme mit Richtungswahl oder Mischwahl. Bei den Algorithmen ist "Expansion" oder "Konzentration", in jeder der s Stufen zugelassen.

Des Weiteren sind die Absuchverfahren

- zufällige Auswahl eines freien Ausgangs eines Koppelvielfachs oder
- geordnete Absuche (von fester Nullstellung) der Ausgänge eines Koppelvielfachs

zulässig. Bei den s Stufen eines Linksystems sind dabei alle möglichen Kombinationen dieser Absuchverfahren erlaubt. Für die Koppelvielfache einer Stufe ist jedoch das Absuchverfahren einheitlich zu wählen, "geordnet" oder "zufällig".

Die Algorithmen wurden in der Quellsprache "Fortran" programmiert.

Mit Hilfe der aufgestellten Algorithmen können jetzt wesentlich größere Linkssysteme exakt berechnet werden, als dies vor dieser Arbeit möglich war. Insbesondere kann jetzt der Einfluß der Strukturparameter auf die Zustandswahrscheinlichkeiten, und damit auch auf die Verkehrsparameter, in weiteren Bereichen untersucht werden.

ANHANG

A1: Kombinationen mit Wiederholungen /17,18,19,20,21/

Zunächst sollen die Kombinationen ohne Wiederholungen beschrieben werden.

Kombinationen ohne Wiederholungen

Gegeben sei ein Zeichenalphabet von n verschiedenen Zeichen

$$A_1, A_2, \dots, A_n \quad (1)$$

Aus diesem Alphabet werden jetzt Anordnungen von s verschiedenen Zeichen (mit anderen Worten: die Anordnungen haben die Länge s)

$$A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_k}, \dots, A_{j_s} \quad (2)$$

mit $s \leq n,$
 $j_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ und
 $k \in \{1, 2, \dots, s\}$

gebildet. Bei den Anordnungen der s Zeichen soll die Stellung der Zeichen A_{j_k} nicht berücksichtigt werden. Anordnungen dieser Art bezeichnet man in der Kombinatorik als "Kombinationen ohne Wiederholungen" (alle s Zeichen sind verschieden) oder kurz als "Kombinationen".

Die Anzahl $c_{n,s}$ der Kombinationen läßt sich in einfacher Weise manuell ermitteln, wenn man die Indizes j_k in den Anordnungen nach (2) so ordnet, daß die folgende Bedingung gilt:

$$j_{k+1} > j_k \quad (3)$$

(oder: $j_{k+1} < j_k$).

Beispiel: Gegeben seien die voneinander unterschiedlichen Zeichen A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , d.h. $n=5$ Zeichen. Es soll jetzt die Anzahl $c_{n,s}$ der Kombinationen der Länge $s=3$ ermittelt werden.

Lösung: Die folgenden Anordnungen genügen der obigen Bedingung (3) (vergleiche die Indizes):

$A_1 A_2 A_3$ $A_2 A_3 A_4$ $A_3 A_4 A_5$
 $A_1 A_2 A_4$ $A_2 A_3 A_5$
 $A_1 A_2 A_5$ $A_2 A_4 A_5$
 $A_1 A_3 A_4$
 $A_1 A_3 A_5$
 $A_1 A_4 A_5$.

Es gibt damit aus einem Zeichenalphabet mit $n=5$ verschiedenen Zeichen und der Länge $s=3$ insgesamt $c_{n,s} = 10$ Kombinationen.

Für beliebige Werte für s und n , mit $s \leq n$, erhält man die folgende Formel für die Anzahl der Kombinationen:

$$c_{n,s} = \binom{n}{s} = \frac{n!}{s! (n-s)!} \quad (4)$$

Kombinationen mit Wiederholungen

Gegeben sei wiederum ein Zeichenalphabet von n verschiedenen Zeichen A_1, A_2, \dots, A_n .

Aus diesem Alphabet werden Anordnungen

$$A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_k}, \dots, A_{j_s} \quad (5)$$

gebildet. Dabei können jetzt alle s Zeichen gleich sein oder ein Teil der s Zeichen kann gleich sein, mit anderen Worten: es treten "Wiederholungen" von Zeichen auf. Bei den Anordnungen entsprechend (5) soll jedoch die Stellung der Zeichen A_{j_k} wiederum nicht berücksichtigt werden. Anordnungen dieser Art bezeichnet man in der Kombinatorik als "Kombinationen mit Wiederholungen".

Die Anzahl $d_{n,s}$ der Kombinationen mit Wiederholungen läßt sich wiederum in einfacher Weise manuell ermitteln, wenn man die Indizes j_k in den Anordnungen nach (5) so ordnet, daß die folgende Bedingung gilt:

$$j_{k+1} \geq j_k \quad (6)$$

(oder: $j_k \geq j_{k+1}$).

Beispiel: Gegeben seien die $n=4$ voneinander unterschiedlichen Zeichen A_1, A_2, A_3 und A_4 . Es soll jetzt die Anzahl $d_{n,s}$ der "Kombinationen mit Wiederholungen" mit der Länge $s=3$ ermittelt werden.

Lösung: Die folgenden Anordnungen genügen der obigen Bedingung (6) (vergleiche die Indizes):

A_1	A_1	A_1	A_1	A_2	A_2	A_1	A_3	A_4	A_2	A_2	A_4	A_3	A_3	A_3
A_1	A_1	A_2	A_1	A_2	A_3	A_1	A_4	A_4	A_2	A_3	A_3	A_3	A_3	A_4
A_1	A_1	A_3	A_1	A_2	A_4	A_2	A_2	A_2	A_2	A_3	A_4	A_3	A_4	A_4
A_1	A_1	A_4	A_1	A_3	A_3	A_2	A_2	A_3	A_2	A_4	A_4	A_4	A_4	A_4

Es gibt damit aus einem Zeichenalphabet mit $n=4$ verschiedenen Zeichen und der Länge $s=3$ insgesamt $d_{n,s} = 16$ "Kombinationen mit Wiederholungen".

Für beliebige Werte für s und n , mit $s \leq n$, erhält man die folgende Formel für die Anzahl der "Kombinationen mit Wiederholungen":

$$d_{n,s} = \binom{n+s-1}{s} = \frac{(n+s-1)!}{s! (n-1)!} \quad (7)$$

Anmerkungen:

Die Anordnungen nach (2), Seite 307 bzw. (5), Seite 308 haben in der vorliegenden Arbeit stets die Länge n . Die Indizes j_k in der Beziehung (2), Seite 307 bzw. in der Beziehung (5), Seite 308 sind damit lückenlos, d.h. es gilt: $j_{k+1} = j_k + 1$, mit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Außerdem sind in der vorliegenden Arbeit die Zeichen A_1, A_2, \dots, A_n stets natürliche Zahlen.

Damit kann man - zur Ermittlung der Anzahl der Kombinationen mit oder ohne Wiederholungen - unmittelbar für die Zeichen A_k die Bedingungen

$$A_{k+1} > A_k \quad (\text{oder } A_{k+1} < A_k) \quad \text{bei den Kombinationen ohne Wiederholungen}$$

und $A_{k+1} \geq A_k \quad (\text{oder } A_{k+1} \leq A_k) \quad \text{bei den Kombinationen mit Wiederholung}$

aufstellen.

A2: Permutationen mit Wiederholungen /17,18,19,20,21/

Zunächst sollen die Permutationen ohne Wiederholungen beschrieben werden.

Permutationen ohne Wiederholungen

Gegeben sei ein Zeichenalphabet von n verschiedenen Zeichen

$$A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_n \quad (1)$$

Bei den Anordnungen der n Zeichen soll die Stellung der Zeichen A_k berücksichtigt werden.

Anordnungen dieser Art bezeichnet man in der Kombinatorik als "Permutationen ohne Wiederholungen" (alle s Zeichen sind verschieden) oder kurz als "Permutationen".

Beispiel: Gegeben seien die $n=3$ voneinander unterschiedlichen Zeichen A_1, A_2 und A_3 . Die Permutationen dieser drei Zeichen lauten:

$$\begin{array}{l} A_1 A_2 A_3 \\ A_1 A_3 A_2 \\ A_2 A_1 A_3 \\ A_2 A_3 A_1 \\ A_3 A_1 A_2 \\ A_3 A_2 A_1 \end{array}$$

Die Anzahl der Permutationen ist also, bei $n=3$ voneinander unterschiedlichen Zeichen gleich 6. Allgemein gilt für die Anzahl p_n , der Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Zeichen, die Formel

$$p_n = n! \quad (2)$$

Permutationen mit Wiederholungen

Gegeben sei ein Zeichenalphabet von n verschiedenen Zeichen

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

Aus diesen n verschiedenen Zeichen werden jetzt Anordnungen der folgenden Form gebildet, bei denen

$$\begin{array}{l} s_1 \text{ mal das Zeichen } A_1, \\ s_2 \text{ mal das Zeichen } A_2, \\ \vdots \\ s_n \text{ mal das Zeichen } A_n \end{array}$$

auftreten, d.h. Anordnungen der Form

$$A_1, A_1, \dots; A_2, A_2, \dots; \dots; A_j, A_j, \dots; \dots; A_n, A_n, \dots, A_n \quad (3)$$

mit $s_1 + s_2 + \dots + s_j + \dots + s_n = s$

und $s_j \geq 0$.

Bei den Anordnungen nach (3) soll außerdem die Stellung der Zeichen A_j berücksichtigt werden. Anordnungen dieser Art bezeichnet man in der Kombinatorik als "Permutationen mit Wiederholungen".

Beispiel: Gegeben seien $n=2$ Zeichen A_1 und A_2 . Die Permutationen mit Wiederholungen mit $s_1 = 3$ Zeichen A_1 und $s_2 = 2$ Zeichen A_2 sind:

$$\begin{array}{ll} A_1 A_1 A_1 A_2 A_2 & A_1 A_2 A_2 A_1 A_1 \\ A_1 A_1 A_2 A_1 A_2 & A_2 A_1 A_1 A_1 A_2 \\ A_1 A_1 A_2 A_2 A_1 & A_2 A_1 A_1 A_2 A_1 \\ A_1 A_2 A_1 A_1 A_2 & A_2 A_1 A_2 A_1 A_1 \\ A_1 A_2 A_1 A_2 A_1 & A_2 A_2 A_1 A_1 A_1 \end{array} .$$

Die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen ist also in dem speziellen Fall gleich 10. Allgemein gilt für die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen die folgende Formel:

$$p_n(s_1, s_2, \dots, s_n) = \frac{s!}{s_1! \cdot s_2! \cdot \dots \cdot s_j! \cdot \dots \cdot s_n!}, \quad (4)$$

mit $s = s_1 + s_2 + \dots + s_j + \dots + s_n$ und $s_j \geq 0$.

A3: Partitionen /siehe 16,17,18,19,21/

Ein einführendes Beispiel:

Gegeben sei die natürliche Zahl $m = 7$.

Gesucht sind die Zerlegungen der Zahl 7 in zwei Summanden A_1 und A_2 , die ebenfalls natürliche Zahlen sein sollen und für die gilt:

$$0 < A_1, A_2 \leq 6.$$

Die Reihenfolge der Summanden A_1 und A_2 sei dabei belanglos.

Lösung: Die Zahl 7 entsteht durch die folgenden Summenbildungen:

$$7 = 6 + 1,$$

$$7 = 5 + 2,$$

$$7 = 4 + 3.$$

Im vorliegenden Beispiel gibt es also drei Zerlegungen zur Zahl 7. Diese Zerlegungen der Zahl 7 werden in der Kombinatorik als "Partitionen der Zahl 7" bezeichnet.

Allgemein gilt:

Die additive Zerlegung einer natürlichen Zahl m in eine vorgegebene Menge von Summanden, die ebenfalls natürliche Zahlen sind, werden in der Kombinatorik als P A R T I T I O N E N der natürlichen Zahl m bezeichnet. Je nachdem ob die Reihenfolge der Summanden berücksichtigt wird oder nicht, spricht man von Partitionen mit bzw. ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Die Zerlegungen können nach mannigfaltigen Gesichtspunkten erfolgen:

- Die Partitionen der Zahl m sollen nur geradzahlige Zahlen A_k enthalten oder
- die Partitionen der Zahl m sollen nur ungeradzahlige Zahlen A_k enthalten oder
- die Partitionen der Zahl m sollen genau aus n Summanden A_k bestehen
- usw. .

Für die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl m gibt es keine allgemeingültige Formel. Sie kann durch sogenannte "erzeu-

gende Funktionen" bestimmt werden oder durch entsprechende Algorithmen.

Anmerkungen:

In der vorliegenden Arbeit wird nicht nur die Anzahl der Partitionen einer vorgegebenen Zahl m benötigt, sondern es werden insbesondere die Zerlegungen (Anordnungen) selbst benötigt. Da es sich in der vorliegenden Arbeit stets um "Partitionen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" handelt, ist es (entsprechend Anhang A1) zweckmäßig, für die Summanden der Zerlegungen (Partitionen) eine bestimmte Ordnung einzuführen.

Es werden die n Summanden A_k der Partitionen der Zahl m durchnummeriert mit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Für die Summanden der "Partitionen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge" wird in der vorliegenden Arbeit die folgende Ordnungsvorschrift verwendet:

$$A_k \cong A_{k+1} .$$

Diese Ordnungsvorschrift ist identisch mit der Ordnungsvorschrift für die Zeichen der "Kombinationen mit Wiederholungen", entsprechend Anhang A1, Seite 307.

A4: Ermittlung der Spaltenvektoren $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi}$

In der Gleichung (3.6), Seite 100 sind die Spaltenvektoren \vec{D}_{j-1} unbekannt. Sie sollen jetzt ermittelt werden.

Ist ein Element t_{j-1} von \vec{T} gleich Null, dann sind per Definition 3-A, Seite 94 alle Elemente $d_{j-1} = 0$.

Im folgenden sei t_{j-1} ungleich Null.

A4-1: Die Ermittlung der Spaltenvektoren $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi}$ für $\xi = 1$

Vorgegeben ist die Partition mit der lfd. Nr. ρ der Spalte j ,

$$\vec{V}_{j,\rho} = \left\{ \begin{array}{c} v_{j,\rho,1} \\ v_{j,\rho,2} \\ \vdots \\ v_{j,\rho,i} \\ \vdots \\ v_{j,\rho,r} \\ \vdots \\ v_{j,\rho,n} \end{array} \right\} \quad (1)$$

mit $j \in \{K_1, K_1-1, \dots, 2\}$,

$\rho \in \{1, 2, \dots, NP_j\}$,

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

NP_j : Anzahl der Partitionen \vec{V}_j der Spalte j ,
siehe Seite 99;

n : Länge der Partitionen der Spalte $j = 1$, denn
es gilt: $\vec{V}_1 = \vec{C}$;

r : Anzahl der Elemente $v_{j,\rho,i}$ von $\vec{V}_{j,\rho}$, die
nicht Null sind.

Gesucht sind die Elemente $d_{j-1,\rho,\xi,i}$ für $\xi = 1$, d.h. die Elemente von $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi}$, die den Wert pv_{j-1} annehmen. Welche Elemente den Wert pv_{j-1} annehmen, ist bestimmt durch die Summe

$$NT = \sum_{k=1}^{j-1} t_k \quad (2)$$

des gegebenen Vektors $\vec{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_{K_1}\}$.

Es werden zwei Fälle betrachtet, $j = 1$ und $j \in \{2, 3, \dots, K_1 - 1\}$.

Fall $j = 1$: 1.1 $NT = t_1 = n - r$ gleich Anzahl der Elemente
 $v_{j,\rho,i}$ ungleich Null;

$$d_{1,\rho,1,i} = pv_1, \text{ für } i \in \{r+1, \dots, n\} \text{ und}$$

$$d_{1,\rho,1,i} = 0, \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Im Fall 1.1 gibt es nur den oben genannten Vektor $\vec{D}_{1,\rho,1}$.

1.2 $NT = t_1 > n - r$

$$d_{1,\rho,1,i} = pv_1, \text{ für } i \in \{r+1, \dots, n\},$$

$$d_{1,\rho,1,i} = pv_1, \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, t_1 - (n-r)\} \text{ und}$$

$$d_{1,\rho,1,i} = 0, \text{ für } i \in \{t_1 - (n-r) + 1, \dots, r\}.$$

Fall $j \in \{2, 3, \dots, K_1\}$:

2.1 $NT - t_{j-1} \geq n - r$

$$d_{j-1,\rho,1,i} = pv_{j-1}, \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, t_{j-1}\},$$

$$d_{j-1,\rho,1,i} = 0, \text{ für } i \in \{t_{j-1} + 1, \dots, n\}.$$

2.2 $NT - t_{j-1} < n - r$

$$d_{j-1,\rho,1,i} = pv_{j-1}, \text{ für } i \in \{r+1, \dots, n - (NT - t_{j-1})\},$$

$$d_{j-1,\rho,1,i} = 0, \text{ für } i \in \{n - (NT - t_{j-1}) + 1, \dots, n\}.$$

Es gilt ferner:

a) Im Fall $n - r = NT$

$$d_{j-1,\rho,1,i} = 0, \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, r\} \text{ und}$$

b) im Fall $n - r < NT$

$$d_{j-1,\rho,1,i} = pv_{j-1}, \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, NT - (n-r)\},$$

$$d_{j-1,\rho,1,i} = 0, \text{ für } i \in \{NT - (n-r) + 1, \dots, r\}.$$

Der Spaltenvektor $\vec{D}_{j-1,\rho,1}$ ist damit bekannt.

Beispiel für den Fall 2.2-b:

$t_{j-1} = 4, n = 8, r = 4, NT = 6$, daraus folgt:

$$\vec{V}_{j,\rho} = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} pv_j \\ pv_j \\ pv_j \\ pv_j \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \right\} \quad \vec{D}_{j-1,\rho,1} = \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} pv_{j-1} \\ pv_{j-1} \\ 0 \\ 0 \\ pv_{j-1} \\ pv_{j-1} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = 1 \\ i = NT-(n-r) \\ i = NT-(n-r)+1 \\ i = r \\ i = r + 1 \\ i = n - (NT-t_{j-1}) \\ i = n - (NT-t_{j-1}) + 1 \\ i = n \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} NT-t_{j-1}$$

A4-2: Die Ermittlung der Spaltenvektoren $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi}$ zu einer vorgegebenen Partition $\vec{V}_{j,\rho}$, für $j \in \{K_1, K_1-1, \dots, 2\}$ und $\rho \in \{1, 2, \dots, NP_j\}$

NP_j ist die Anzahl der Partitionen $\vec{V}_{j,\rho}$, siehe Seite 99.

Gegeben ist der allgemeine Zustandsvektor \vec{T} . Bekannt sei die Partition $\vec{V}_{j,\rho}$. Des weiteren ist nach Anhang A4-1, Seite 314 der Vektor $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi}$ für $\xi=1$ bekannt.

Im folgenden wird ein Verfahren hergeleitet bei dem ausgehend von $\vec{D}_{j-1,\rho,1}$ die weiteren $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi}$ rekursiv ermittelt werden.

Aus \vec{T} folgt die Anzahl (t_{j-1}) der Elemente $d_{j-1,\rho,\xi,i}$, die gleich Null sind. $NP_{j-1,\rho}$ sei die Anzahl der Vektoren $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi}$. Alle Vektoren (Sequenzen) $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi}$ müssen, wenn sie zu $\vec{V}_{j,\rho}$ addiert werden, wiederum Partitionen (Kombinationen mit Wiederholungen) ergeben.

Die Ermittlung des Vektors $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi+1}$ aus dem Vektor $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi}$ basiert auf dem folgenden Grundgedanken:

Satz a: Ein weiterer Vektor $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi+1}$ existiert dann, wenn zwei Elemente von $\vec{D}_{j-1,\rho,\xi}$ mit

$$\begin{aligned} d_{j-1,\rho,\xi,i} &= pv_{j-1} \\ \text{und } d_{j-1,\rho,\xi,i+1} &= 0 \end{aligned}$$

vertauscht (permutiert) werden können. Dabei ist die Bedingung zu berücksichtigen, daß die Sequenz der Elemente des Vektors

$$\vec{V}_{j,\rho} + \vec{D}_{j-1,\rho,\xi+1}$$

ebenfalls die kombinatorische Figur "Kombination mit Wiederholungen" ergibt bzw. eine Partition zur Summe

$$SP = \sum_{m=j-1}^{K_j} t_m \cdot pv_m$$

ergeben muß, siehe Satz 3-a, Seite 96.

Für die Elemente von $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$, die miteinander vertauscht werden können, wird die folgende Definition eingeführt.

Definition A:

Das Element von $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$, das von

$$d_{j-1, \rho, \xi, i} = pv_{j-1} \quad \text{nach} \quad d_{j-1, \rho, \xi+1, i} = 0$$

wechselt, wird als "abgebendes Element" bezeichnet.

Das Element von $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$, das von

$$d_{j-1, \rho, \xi, i} = 0 \quad \text{nach} \quad d_{j-1, \rho, \xi+1, i} = pv_{j-1}$$

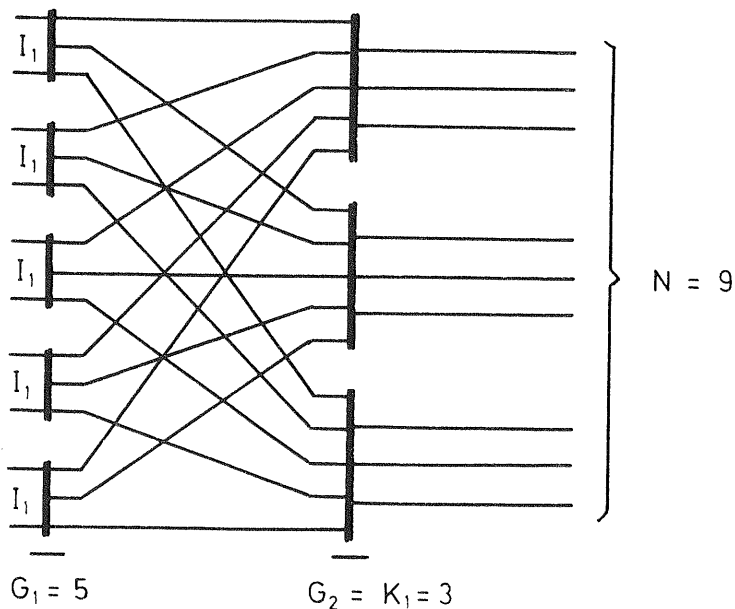
wechselt wird als "aufnehmendes Element" bezeichnet.

Damit folgt aus Satz a, Seite 316, daß man in $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$ ein Elementepaar "abgebend - aufnehmend" finden muß. Existiert kein solches Elementepaar dann gibt es keinen weiteren Vektor $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi+1}$.

Die zu einem allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} gehörenden Spaltenvektoren $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$ und Partitionen $\vec{V}_{j, \rho, \xi}$ können in einem Entscheidungsbaum dargestellt werden. Mehrere Elementenpaare "abgebend - aufnehmend" - bei ein und demselben Vektor $\vec{D}_{j, \rho, \xi}$ - führen zu "Gabeln" im Entscheidungsbaum. Dieser Sachverhalt soll an einem Beispiel erläutert werden.

Beispiel:

Das in diesem Beispiel verwendete Links-system (siehe nächste Seite) ist das gleiche wie im Beispiel 29, Seite 90. Für den allgemeinen Zustandsvektor $\vec{T} = \{3 \ 3 \ 2\}$ sind die ch. Vektoren \vec{C} entsprechend Tabelle 3.2-3, Seite 98 bekannt. In der Tabelle 3.2-3 sind die ch. Vektoren (Partitionen) \vec{C} nach gleichen Untermatrizen U^* geordnet.



Für die Spaltenvektoren $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$ erhält man den Entscheidungsbaum entsprechend Tabelle A4-1, Seite 320, und für die Partitionen $\vec{V}_{i, \rho, \xi}$ erhält man den Entscheidungsbaum entsprechend Tabelle A4-2, Seite 321. Die Struktur der beiden Entscheidungsbäume ist definitionsgemäß gleich, denn zu jedem Spaltenvektor $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$ gehört eine Partition $\vec{V}_{j, \rho, \xi}$. Die beiden Entscheidungsbäume wurden nur übersichtshalber getrennt dargestellt.

In den Entscheidungsbäumen gibt es zwei Arten von Verbindungen zwischen den verschiedenen Vektoren:

- 1) Verbindungen zwischen Vektoren mit unterschiedlichem j , dargestellt als Linien ohne Pfeil. Sie geben an, welche Vektoren $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$ ($\vec{V}_{j, \rho, \xi}$) zu einer Partition \vec{C} führen.
- 2) Verbindungen zwischen Vektoren mit gleichem j , dargestellt als Linien mit Pfeil. Sie geben die Reihenfolge der aus dem Vektor $\vec{D}_{j, \rho, \xi+1}$ ($\vec{V}_{j, \rho, \xi+1}$) entstehenden Vektoren $\vec{D}_{j, \rho, \xi}$ ($\vec{V}_{j, \rho, \xi}$) einer Spalte j an. Die Zahl der von einem Vektor $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$ ausgehenden Pfeile gibt an: Anzahl $NAB_{\rho, \xi}$ der Elementepaar "abgebend - aufnehmend" je Vektor $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$. Ist NAB größer als Eins, dann erhält man eine "Gabel" im Entscheidungsbaum, siehe Tabelle A4-1, Seite 320, Spalte $j=1$ ($\vec{D}_{j=1, \rho=1, \xi=1}$).

Damit der Algorithmus zur Ermittlung der Spaltenvektoren $\vec{D}_{j, \rho, \xi}$ eindeutig ist, müssen bei der Permutierung der Elemente $d_{j, \rho, \xi, i}$ von $\vec{D}_{j, \rho, \xi}$ (durch Bestimmung der Elementenpaare "abgebend-aufnehmend") die beiden folgenden Sätze berücksichtigt werden.

Satz b:

Bei einem Vektor $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$ gebe es mehrere Elementenpaare "abgebend-aufnehmend", mit anderen Worten: es gibt "Gabeln" im Entscheidungsbaum. Zur Eindeutigkeit des Algorithmus muß dann die folgende Bedingung erfüllt werden: Zuerst müssen die Elementenpaare mit den in i höherstehenden abgebenden Elementen $d_{j-1, \rho, \xi, i}$ permutiert werden. Dabei kann ein aufnehmendes Element mehrfach verwendet werden.

Satz c:

Wurde

ein mögliches abgebendes Element $d_{j-1, \rho, \xi, i}$ von $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$
mit $i = i_x$

mit einem möglichen aufnehmenden Element $d_{j-1, \rho, \xi, i}$ von $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$
mit $i = i_x + 1$

permutiert, dann muß geprüft werden, ob ab Element $d_{j-1, \rho, \xi, i}$ mit $i \in \{i_x + 1, \dots, n\}$, noch weitere Elementenpaare "abgebend - aufnehmend" existieren.

Ausgehend von dem nach Anhang A4-1, Seite 314 berechenbaren Spaltenvektor $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$ für $\xi=1$, können jetzt - mit einem Algorithmus entsprechend Satz b und Satz c - die weiteren Spaltenvektoren $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$ ermittelt werden mit $\xi \in \{2, 3, \dots\}$.

Mit den damit bekannten Spaltenvektoren $\vec{D}_{j-1, \rho, \xi}$ und der bekannten Partition $\vec{V}_{j, \rho}$ der Spalte j können jetzt die Partitionen $\vec{V}_{j-1, \rho, \xi}$ der Spalte $j - 1$ berechnet werden, mit Hilfe der Beziehung (3.6) von Seite 100.

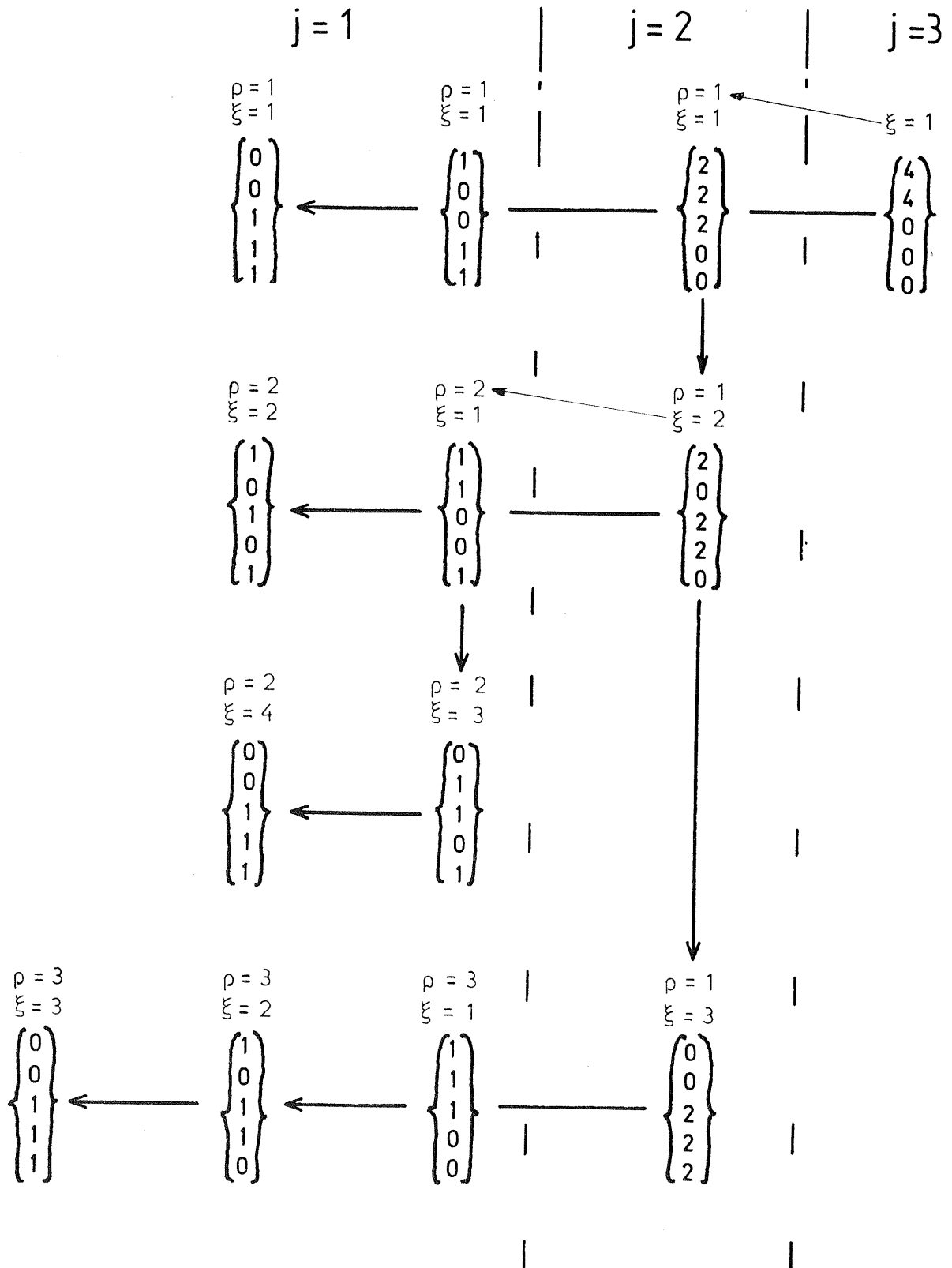


Tabelle A4-1: Entscheidungsbaum der Spaltenvektoren $\overrightarrow{D}_{j-1, \rho, \xi}$

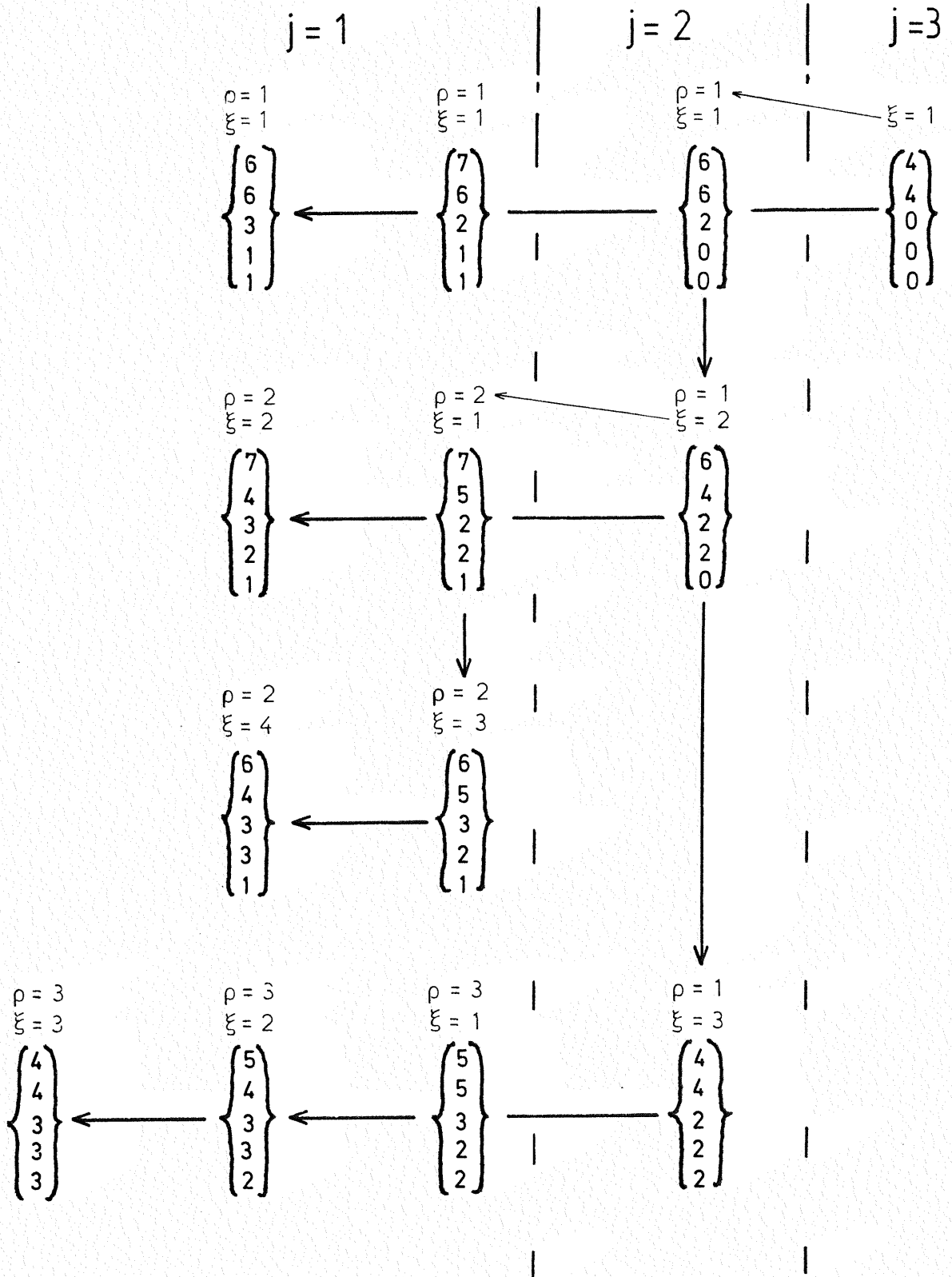
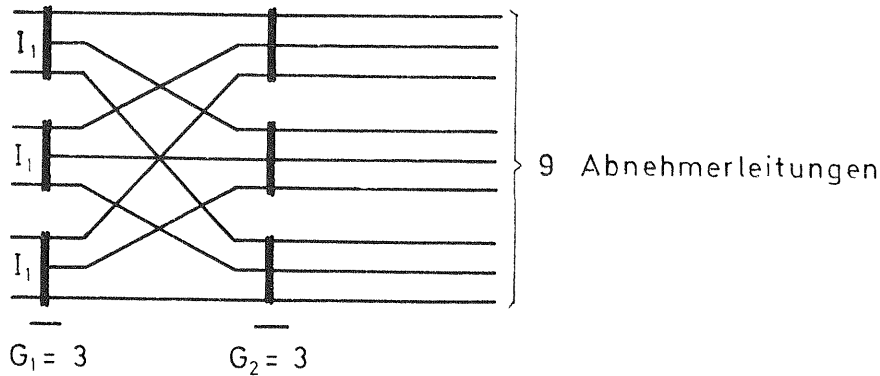


Tabelle A4-2: Entscheidungsbaum
der Partitionen \vec{V}_j, ρ, ξ

A5: Die Ordnungsmatrix Φ und die Mächtigkeitmatrix Ψ für das zweistufige Linkssystem mit $K_1 = 3$, $G_1 = 3$ und $K_2 = 3$ und "geordneter Absuche"

Betrachtetes Linkssystem für Mischwahl



Die Ordnungsmatrix Φ ist in Definition 2-K, Seite 68 definiert, und die Mächtigkeitenmatrix Ψ (der Mächtigkeiten $M_{\beta,1}$) ist in Definition 2-M, Seite 78 definiert.

Für das obige Linkssystem sind diese beiden Matrizen im folgenden dargestellt.

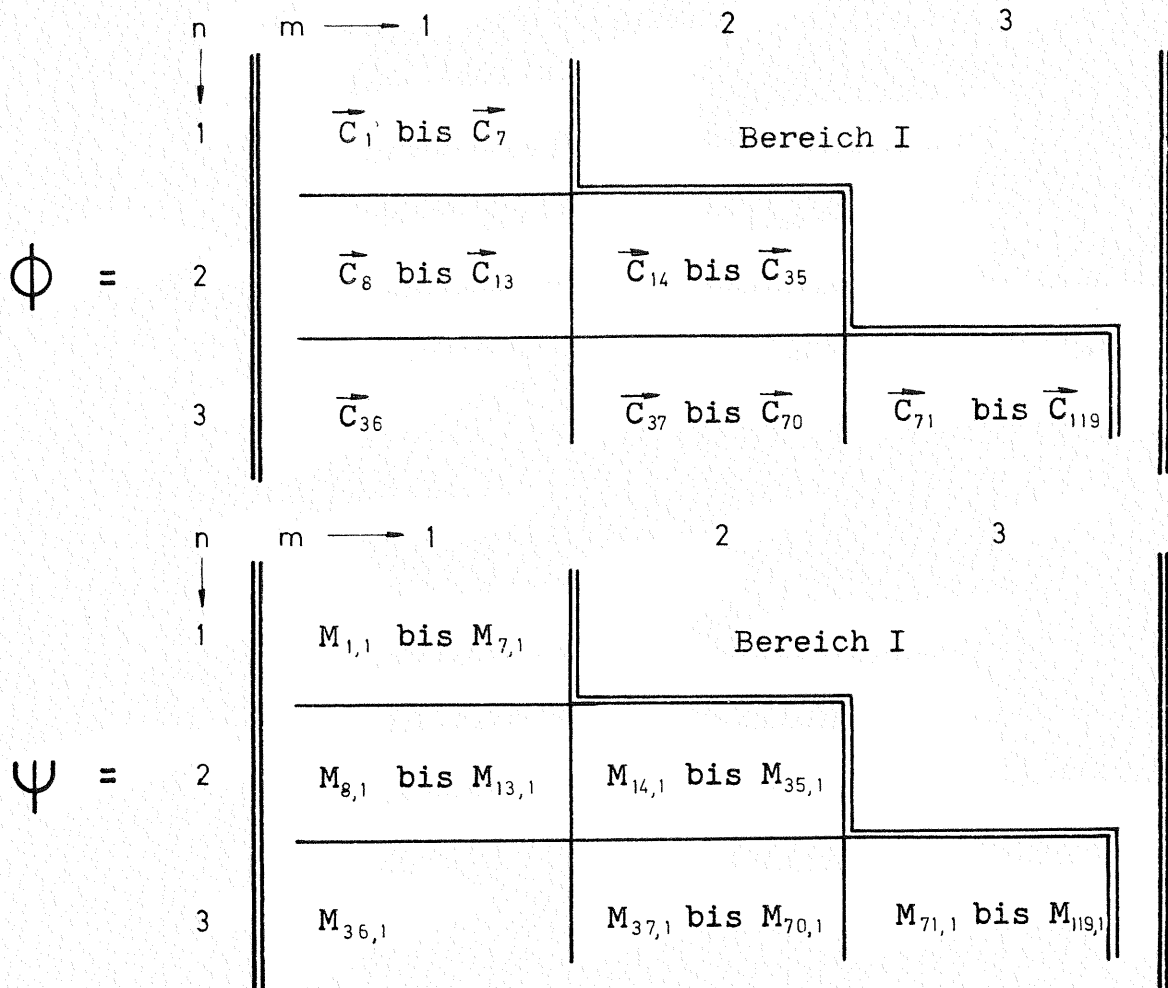
Wegen der bereits großen Zahl der ch. Vektoren \vec{C} (Partitionen) wurde - übersichtshalber - die folgende Darstellung gewählt: In der folgenden Tabelle 2, Seite 324 - 331 sind alle ch. Vektoren \vec{C} aufgelistet und fortlaufend numeriert. Außerdem sind die allgemeinen Zustandsvektoren \vec{T} und die Zustandsmatrizen S und S^* , die zu den ch. Vektoren \vec{C} gehören, angegeben. Des weiteren sind in der Tabelle 2 die Mächtigkeiten $M_{\beta,1}$ der ch. Vektoren angegeben. Die ch. Vektoren \vec{C} wurden so aufgelistet, daß Vektoren \vec{C}_β - mit gleicher Anzahl n von Null verschiedenen Elementen c_i und gleichem allgemeinen Zustandsvektor \vec{T} - in der Tabelle 2 untereinander stehen (siehe z.B. $\beta = 11, 12, 13$).

Aus der Tabelle 2, Seite 324 - 331 können jetzt unmittelbar die Teilmengen $\varphi_{n,m}$ (siehe Definition 2-K, Seite 68) der Ordnungsmatrix Φ entnommen werden. Es gilt:

n	m	lfd. Nr. β der ch. Vektoren \vec{C}_β in der Tabelle 2, die zu der Teilmenge $\varphi_{n,m}$ gehören
1	1	1 bis 7
2	1	8 bis 13
2	2	14 bis 35
3	1	36
3	2	37 bis 70
3	3	71 bis 119

Tabelle 1

In der Ordnungsmatrix Φ und der Mächtigkeitenmatrix Ψ sind jetzt nur die Indexbereiche β der ch. Vektoren \vec{C}_β bzw. der zu \vec{C}_β gehörenden Mächtigkeiten $M_{\beta,1}$ angegeben, entsprechend der obigen Tabelle 1.



n	m	β	\vec{C}_β	S_β^*	S_β	\vec{T}_β	$M_{\beta,1}$
2	2	31	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{0 \ 2 \ 2\}$	1
		32	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{2 \ 2 \ 1\}$	2
		33	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{2 \ 1 \ 2\}$	2
		34	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{1 \ 2 \ 2\}$	2
		35	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{2 \ 2 \ 2\}$	1
3	1	36	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{1 \ 1 \ 1\}$	6
3	2	37	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{2 \ 1 \ 0\}$	3
		38	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{2 \ 0 \ 1\}$	3
		39	$\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{1 \ 2 \ 0\}$	3
		40	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{1 \ 0 \ 2\}$	3
		41	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{0 \ 2 \ 1\}$	3
		42	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{0 \ 1 \ 2\}$	3
		43	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\{2 \ 1 \ 1\}$	3
		44	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$		6
		45	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$		6

Tabelle 2 - Blatt 3

n	m	β	\vec{C}_β	S_β^*	S_β	\vec{T}_β	$M_{\beta,1}$
3	2	46	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	{1 2 1}	6
		47	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$		6
		48	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$		6
		49	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	{1 1 2}	6
		50	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$		6
		51	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$		6
		52	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	{2 2 0}	6
		53	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	{2 0 2}	6
		54	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	{0 2 2}	6
		55	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	{2 2 1}	6
		56	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$		6
		57	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$		6
		58	$\begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$		3
		59	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	{2 1 2}	6
		60	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$		6

Tabelle 2 - Blatt 4

n	m	β	\vec{C}_β	S_β^*	S_β	\vec{T}_β	$M_{\beta,1}$
3	3	91	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{B}$	$\begin{B} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{B}$	{ 0 2 3 }	3
		92	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{B}$	{ 3 2 1 }	6
		93	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{B}$		3
		94	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{B}$	{ 3 1 2 }	6
		95	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{B}$		3
		96	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{B}$	{ 2 3 1 }	6
		97	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{B}$		3
		98	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{B}$	{ 1 3 2 }	6
		99	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{B}$		3
		100	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{B}$	{ 2 1 3 }	6
		101	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{B}$	$\begin{B} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{B}$	{ 2 1 3 }	3
		102	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{B}$	{ 1 2 3 }	6
		103	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{B}$	$\begin{B} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{B}$		3
		104	$\begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{B}$	{ 3 3 0 }	1
		105	$\begin{Bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$\begin{B} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{B}$	$\begin{B} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{B}$	{ 3 0 3 }	1

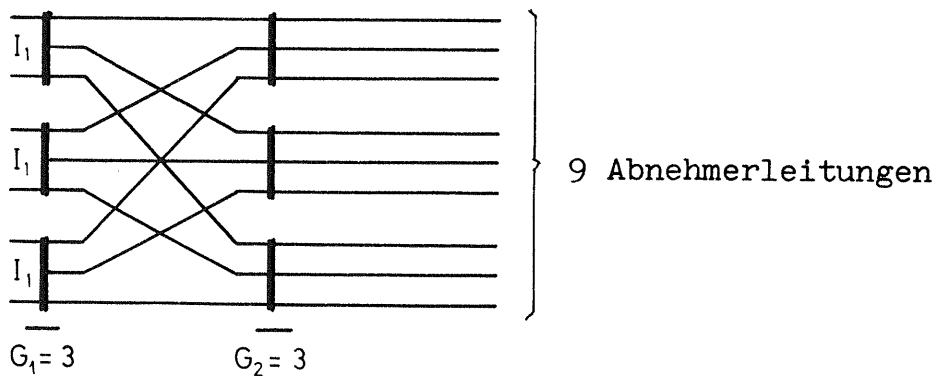
Tabelle 2 - Blatt 7

n	m	β	\vec{C}_β	S_β^*	S_β	\vec{T}_β	$M_{\beta,1}$
3	3	106	$\begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	{0 3 3}	1
		107	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$	{3 2 2}	3
		108	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$		6
		109	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 7 \\ 2 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	{2 3 2}	3
		110	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$		6
		111	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 7 \\ 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$	{2 2 3}	3
		112	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$		6
		113	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	{3 3 1}	3
		114	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$	{3 1 3}	3
		115	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \\ 6 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	{1 3 3}	3
		116	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$	{3 3 2}	3
		117	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{Bmatrix}$	{3 2 3}	3
		118	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 7 \\ 6 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	{2 3 3}	3
		119	$\begin{Bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$	{3 3 3}	1

Tabelle 2 - Blatt 8

A6: Die Ordnungsmatrix Φ und die Mächtigkeitenmatrix Ψ
für das zweistufige Linksystm mit $K_1 = 3$, $G_1 = 3$ und
 $K_2 = 3$ und "zufälliger Auswahl"

Betrachtetes Linksystm für Mischwahl



Die Ordnungsmatrix Φ ist in Definition 2-K, Seite 68 definiert,
und die Mächtigkeitenmatrix Ψ (der Mächtigkeiten $M_{\beta,1}$) ist in
Definition 2-M, Seite 74 definiert. Für das obige Linksystm sind
diese beiden Matrizen im folgenden angegeben.

