Sonderdruck
aus
ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Wartesysteme und gemischte Verlust- und Wartesysteme mit unvollkommener Erreichbarkeit

von MARTIN THIERER *

Mitteilung aus dem Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart

(A.E.Ü. **23** [1969], Heft 5, 261–267; eingegangen am 28. November 1968)

DK 621.395

In Vermittlungseinrichtungen werden häufig Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit (Mischungen) verwendet. Diese Anordnungen können als Verlustsystem, Wartesystem oder gemischtes Verlust- und Wartesystem betrieben werden.

Für die beiden Betriebsarten, als Wartesystem bzw. als gemischtes Verlust- und Wartesystem, werden die charakteristischen Größen: Wartewahrscheinlichkeit, Verlustwahrscheinlichkeit und mittlere Wartezeit bei stationärem Verkehr berechnet. Aus dem gemischten Verlust- und Wartesystem ergibt sich als Grenzübergang die klassische Lösung von A.K. ERLANG für Verlustsysteme.

Die theoretischen Ergebnisse werden durch Verkehrssimulation auf dem Digitalrechner überprüft.

Delay Systems and Combined Loss and Delay Systems with Limited Availability

In switching systems connecting arrays with limited availability (gradings) find many applications. These arrangements can be operated as loss system, delay system or combined loss and delay system.

For the two operating modes, viz. delay system and combined loss and delay system, respectively, the characteristic parameters — probability of delay, probability of loss and mean waiting time — are calculated with steady-state traffic. From the combined loss and delay system the classical solution of A. K. ERLANG for loss system is obtained by a boundary transition.

The theoretical results are checked by traffic simulation on the digital computer.

1. Einleitung

Moderne Vermittlungseinrichtungen sind „zentralgesteuerte" Anlagen. In diesen Systemen müssen zu verschiedenen Zeitpunkten des Verbindungsaufbaus Schaltglieder (Baugruppen) auf zentrale Steuereinrichtungen warten. In zunehmendem Maße gewinnt deshalb hierfür die verkehrstheoretische Behandlung von Wartesystemen an Bedeutung. Dieselben Fragen treten andererseits auch in großen elektronischen Rechenanlagen auf, die Mehrfachzugriff durch viele angeschlossene Benutzer erlauben.

Aus wirtschaftlichen und technischen Gründen sind diese zentralen Einrichtungen oft nur „unvollkommen erreichbar", d.h. ein Teilnehmer hat nicht Zugriff zu *allen* vorhandenen zentralen Gliedern gleichen Typs. So kann es vorkommen, daß ein Teilnehmer warten muß, obwohl noch solche Einrichtungen frei sind. Wartesysteme mit diesen Eigenschaften sollen im folgenden behandelt werden. Als erstes sollen die statistischen Eigenschaften des Verkehrs definiert werden.

1.1. Der Verkehr

Dem System werde Zufallsverkehr erster Art (Poisson-Angebot) mit einer mittleren Anzahl c_A von Rufen je Zeiteinheit angeboten. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß während des kurzen Zeitintervalls $(t, t + \Delta t)$ ein Ruf eintrifft

$$c_A \Delta t + o(\Delta t) . \tag{1}$$

Die Funktion $o(\Delta t)$ umfaßt alle Glieder mit höherer Ordnung in Δt.

Die Zeitdauern der Belegungen sollen einer Exponentialverteilung mit der „mittleren Belegungsdauer" h gehorchen. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß während des kurzen Zeitintervalls $(t, t+\Delta t)$ eine bestimmte Belegung endet

$$\frac{\Delta t}{h} + o(\Delta t) . \tag{2}$$

Als Maß für die Intensität des angebotenen Zufallsverkehrs wird das „Angebot"

$$A = c_A h \tag{3}$$

mit der Einheit Erlang verwendet.

Dieser Verkehr wird nun einem Wartesystem angeboten, dessen Struktur im folgenden Abschnitt näher beschrieben wird.

1.2. Das System

Einstufige Koppelanordnungen mit n Abnehmerleitungen, g Zubringerteilgruppen und der Erreichbarkeit k sollen betrachtet werden. In Bild 1 ist als Beispiel eine Koppelanordnung mit $n = 4$ Abnehmerleitungen, $g = 6$ Zubringerteilgruppen und der Erreichbarkeit $k = 2$ dargestellt.

Ein Ruf trifft in einer bestimmten Zubringerteilgruppe ein und kann eine freie von insgesamt k erreichbaren Abnehmerleitungen belegen. Die Erreichbarkeit k kann kleiner oder gleich der Abnehmerleitungszahl n sein, im ersten Fall nennt man das Abnehmerbündel unvollkommen erreichbar, im zweiten Fall vollkommen erreichbar. Ist keine der

* Dr. M. THIERER, im Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität, 7 Stuttgart 1, Breitscheidstraße 2.

k erreichbaren Abnehmerleitungen frei, dann wartet der Ruf in dieser Zubringerteilgruppe bis eine Leitung frei wird.

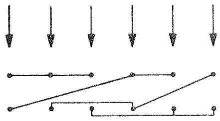

Bild 1. Koppelanordnung mit unvollkommener Erreichbarkeit; $n=4$, $k=2$, $g=\binom{4}{2}=6$.

Es soll angenommen werden, daß beliebig viele Rufe vor jeder Zubringerteilgruppe warten können (Wartesystem mit unbeschränkter Wartemöglichkeit). Weiterhin soll kein Teilnehmer vorzeitig verzichten, wenn er gezwungen ist, eine längere Zeit zu warten. Das Angebot sei in allen Zubringerteilgruppen gleich groß.

2. Die Zustände des Systems

Ein Belegungszustand $\{x, z\}$ des Systems sei gekennzeichnet durch die Zahl x der belegten Abnehmerleitungen $(0 \leqq x \leqq n)$ und die Summe z der Rufe, die vor allen g Zubringerteilgruppen warten $(0 \leqq z \leqq \infty)$.

Befindet sich das System im stationären Zustand — „im statistischen Gleichgewicht" [1] —, dann sind die Wahrscheinlichkeiten $p(x, z)$ für das Auftreten der Zustände $\{x, z\}$ zeitunabhängig. Die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x, z)$ können mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten zu und von den Nachbarzuständen des Zustands $\{x, z\}$ berechnet werden. Nachbarzustände gehen durch den Einfall *eines* Rufes oder durch das Enden *einer* Belegung ineinander über. Demnach hat der Zustand $\{x, z\}$ vier Nachbarzustände, wenn er kein Randzustand ist, Bild 2.

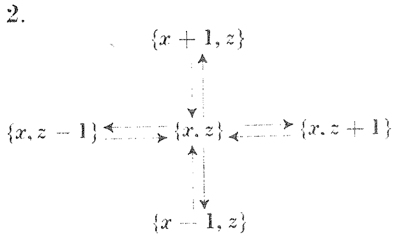

Bild 2. Die Nachbarzustände von $\{x, z\}$.

2.1. *Die Übergangswahrscheinlichkeiten*

Die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang des Zustands $\{x, z\}$ in jeden der vier Nachbarzustände sollen nun im einzelnen abgeleitet werden.

2.1.1. Ein Ruf kommt an

Übergang $\{x, z\} \to \{x, z+1\}$

Wenn in einer Koppelanordnung x Leitungen belegt sind, dann findet ein ankommender Ruf mit einer vorläufig unbekannten Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)$ keine freie Leitung mehr. Die Zahl z der wartenden Teilnehmer erhöht sich in diesem Fall um eins. Das System ist vom Zustand $\{x, z\}$ in den Nachbarzustand $\{x, z+1\}$ übergegangen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß während des Zeitintervalls $(t, t + \Delta t)$ dieser Übergang stattfindet, ist

$$p(x, z)\, \sigma(x)\, c_{\mathrm{A}}\, \Delta t + o(\Delta t)\,, \tag{4}$$
$$x = 0, 1, \ldots, n\,;\; z = 0, 1, \ldots.$$

Ist die Zahl x der belegten Leitungen kleiner als die Erreichbarkeit k, dann kann keine Zubringerteilgruppe gesperrt sein, deshalb ist

$$\sigma(x) = 0\,, \quad x = 0, 1, \ldots, k-1\,. \tag{5}$$

Für $x = n$ wird $\sigma(n) = 1$.

Übergang $\{x, z\} \to \{x+1, z\}$

Ein im Zustand $\{x, z\}$ eintreffender Ruf findet mit der Wahrscheinlichkeit $[1 - \sigma(x)]$ eine freie Leitung und die Zahl x der belegten Leitungen erhöht sich damit um eins. Der Zustand $\{x, z\}$ geht deshalb mit der Wahrscheinlichkeit

$$p(x, z)\, [1 - \sigma(x)]\, c_{\mathrm{A}}\, \Delta t + o(\Delta t)\,, \tag{6}$$
$$x = 0, 1, \ldots, n-1\,, \quad z = 0, 1, \ldots$$

in den Zustand $\{x+1, z\}$ über.

2.1.2. Eine Belegung endet

Übergang $\{x, z\} \to \{x, z-1\}$

Die z wartenden Rufe verteilen sich über die Warteplätze der g Zubringerteilgruppen. Mit der Wahrscheinlichkeit $\varrho(x, z)$ warten keine Rufe vor jenen Zubringerteilgruppen, welche die freigewordene Leitung erreichen würden.

Endet eine Belegung auf einer Abnehmerleitung im Zustand $\{x, z\}$, dann wird mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \varrho(x, z)$ einer der z wartenden Rufe diese Leitung erreichen, also belegen können. Die Zahl z der wartenden Rufe vermindert sich um eins, während die Zahl x der belegten Leitungen sich nicht ändert; das System befindet sich nach dem Übergang im Zustand $\{x, z-1\}$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß in dem Zeitraum $(t, t + \Delta t)$ eine beliebige der x Belegungen endet und der Übergang stattfindet, ist demnach

$$p(x, z)\, [1 - \varrho(x, z)]\, x\, \frac{\Delta t}{h} + o(\Delta t)\,, \tag{7}$$
$$x = 1, \ldots, n\,, \; z = 1, 2, \ldots$$

Übergang $\{x, z\} \to \{x-1, z\}$

Umgekehrt ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine beliebige der x Belegungen endet und keiner der wartenden Rufe die freiwerdende Leitung belegen kann (da alle z Rufe vor solchen Zubringerteilgruppen warten, die die freiwerdende Leitung nicht erreichen können)

$$p(x, z)\, \varrho(x, z)\, x\, \frac{\Delta t}{h} + o(\Delta t)\,, \tag{8}$$
$$x = 1, \ldots, n\,, \quad z = 0, 1, \ldots.$$

In diesem Fall geht das System vom Zustand $\{x, z\}$ über in den Zustand $\{x-1, z\}$.

Zwei Grenzwerte der Wahrscheinlichkeit $\varrho(x, z)$ sollen angegeben werden:

Sind gerade $x = k$ Leitungen belegt, dann kann immer einer der wartenden Rufe eine freiwerdende Leitung erreichen:

$$\varrho(k, z) = 0\,, \quad z = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Außerdem wird definiert

$$\varrho(x, 0) = 1\,, \quad x = 1, \ldots, n\,. \tag{10}$$

2.2. *Die Zustandsgleichungen*

Im stationären Gleichgewicht ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmter Zustand $\{x, z\}$ entsteht gleich der Wahrscheinlichkeit, daß er verschwindet, d.h. die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten von einem bestimmten Zustand $\{x, z\}$ zu seinen Nachbarzuständen ist gleich der Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten in umgekehrter Richtung. Die Wahrscheinlichkeiten der Übergänge zu nichtbenachbarten Zuständen sind von höherer Ordnung in Δt. Deshalb kann mit Hilfe der Beziehungen (4), (6), (7) und (8) folgendes Gleichungssystem angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} & p(x,z)\,\sigma(x)\,c_A\,\Delta t + \\ & + p(x,z)\,[1-\sigma(x)]\,c_A\,\Delta t + \\ & + p(x,z)\,\varrho(x,z)\,\frac{x}{h}\,\Delta t + \\ & + p(x,z)\,[1-\varrho(x,z)]\,\frac{x}{h}\,\Delta t = \\ & = p(x,z-1)\,\sigma(x)\,c_A\,\Delta t + \qquad (11) \\ & + p(x-1,z)\,[1-\sigma(x-1)]\,c_A\,\Delta t + \\ & + p(x+1,z)\,\varrho(x+1,z)\,\frac{x+1}{h}\,\Delta t + \\ & + p(x,z+1)\,[1-\varrho(x,z+1)]\,\frac{x}{h}\,\Delta t + o(\Delta t)\,. \end{aligned}$$

Multipliziert man Gl. (11) mit $h/\Delta t$ und bildet den Grenzübergang $\Delta t \to 0$, dann erhält man

$$\begin{aligned} p(x,z)\,(A+x) &= p(x,z-1)\,\sigma(x)\,A + \qquad (12) \\ & + p(x-1,z)\,[1-\sigma(x-1)]\,A + \\ & + p(x+1,z)\,\varrho(x+1,z)\,(x+1) + \\ & + p(x,z+1)\,[1-\varrho(x,z+1)]\,x\,. \end{aligned}$$

Die Übergänge zwischen dem Zustand $\{x, z\}$ und seinen Nachbarzuständen können in einem Zustandsdiagramm, Bild 3, übersichtlich gezeigt werden. Die Ausdrücke an den Pfeilen sind die Koeffizienten der Zustandswahrscheinlichkeiten.

Die Gl. (12) stellt ein lineares Gleichungssystem für die Wahrscheinlichkeiten $p(x, z)$ dar. Die Zahl der Unbekannten $p(x, z)$ ist unendlich groß, da die Zahl der Zustände $\{x, z\}$ in den Wartesystemen mit unbeschränkter Wartemöglichkeit unbegrenzt ist.

Um dieses Gleichungssystem lösen zu können, wird angenommen, daß im statistischen Gleichgewicht das Verschwinden des Zustands $\{x, z\}$ durch das Enden einer Belegung die gleiche Wahrscheinlichkeit hat wie das Entstehen dieses Zustands infolge des Eintreffens eines neuen Rufes:

$$\begin{aligned} & p(x,z)\left\{\varrho(x,z)\,\frac{x}{h}\,\Delta t + [1-\varrho(x,z)]\,\frac{x}{h}\,\Delta t\right\} = \\ & \quad = p(x-1,z)\,[1-\sigma(x-1)]\,c_A\,\Delta t + \qquad (13) \\ & \quad + p(x,z-1)\,\sigma(x)\,c_A\,\Delta t + o(\Delta t)\,, \\ & \quad x = 1,\ldots,n\,, \quad z = 1,2,\ldots\,. \end{aligned}$$

Verschwindet der Zustand $\{x, z\}$ durch Enden einer Belegung, dann entsteht entweder der Zustand $\{x-1, z\}$ oder $\{x, z-1\}$. Die Übergangswahrscheinlichkeit *zu* diesen beiden Zuständen stehen auf der linken Seite von Gl. (13). Andererseits ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Zustand $\{x, z\}$ durch Eintreffen eines Rufes aus dem Zustand $\{x-1, z\}$ oder $\{x, z-1\}$ entsteht, gleich der Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite von Gl. (13).

Multipliziert man Gl. (13) mit $h/\Delta t$ und führt den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ durch, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} & p(x,z)\,x = \qquad (14) \\ & = p(x-1,z)\,[1-\sigma(x-1)]\,A + p(x,z-1)\,\sigma(x)\,A\,, \\ & \quad x = 1,\ldots,n\,, \quad z = 1,2,\ldots\,. \end{aligned}$$

Dies ist eine Rekursionsformel für die Wahrscheinlichkeiten der Zustände $\{x, z\}$, wenn $z \neq 0$ und $x \neq 0$.

Dabei ist zu beachten, daß folgende Zustandswahrscheinlichkeiten verschwinden, weil die entsprechenden Zustände nicht existieren:

$$p(x,z) = 0\,, \quad x = 0,\ldots,k-1\,, \quad z = 1,2,\ldots\,. \qquad (15)$$

Eine Rekursionsformel für die Wahrscheinlichkeiten der Zustände $\{x, 0\}$ erhält man aus den speziellen Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen $\{x, 0\}$ und $\{x-1, 0\}$:

$$\begin{aligned} p(x,0)\,\varrho(x,0)\,x &= p(x-1,0)\,[1-\sigma(x-1)]\,A\,, \\ & x = 1,\ldots,n\,. \qquad (16) \end{aligned}$$

$\varrho(x, 0)$ ist nach Gl. (10) immer gleich eins, deshalb wird aus Gl. (16)

$$\begin{aligned} p(x,0)\,x &= p(x-1,0)\,[1-\sigma(x-1)]\,A\,, \qquad (17) \\ & x = 1,\ldots,n\,. \end{aligned}$$

Die Zustandswahrscheinlichkeit $p(0, 0)$ erhält man aus der Bedingung, daß die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten gleich eins sein muß:

$$\sum_{x=0}^{n} \sum_{z=0}^{\infty} p(x,z) = 1\,. \qquad (18)$$

Mit den Gl. (14), (17) und (18) lassen sich die Wahrscheinlichkeiten aller Zustände $\{x, z\}$ rekursiv berechnen.

Zur Charakterisierung des Verkehrsverhaltens von Koppelanordnungen in der Praxis ist die Angabe der Zustandswahrscheinlichkeiten meist zu unhandlich. Es werden deshalb weitere Kenngrößen aus $p(x, z)$ abgeleitet.

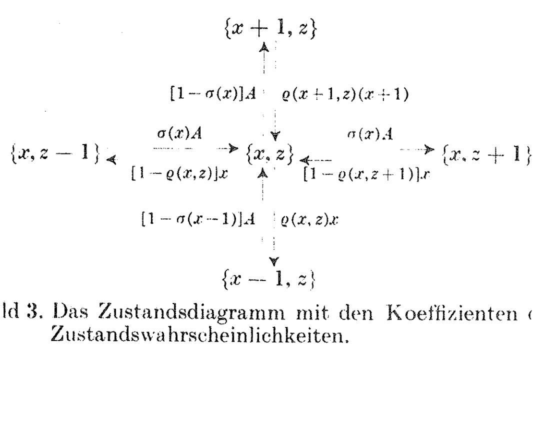

Bild 3. Das Zustandsdiagramm mit den Koeffizienten der Zustandswahrscheinlichkeiten.

2.3. *Die Verteilung $p(x)$*

Die Wahrscheinlichkeiten, daß x Abnehmerleitungen belegt sind, erhält man durch Aufsummieren der Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x, z)$ über alle z:

$$p(x) = \sum_{z=0}^{\infty} p(x, z), \quad x = 0, 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Summiert man Gl. (14) auf beiden Seiten über z auf, so erhält man

$$x \sum_{z=1}^{\infty} p(x, z) = [1 - \sigma(x-1)] A \sum_{z=1}^{\infty} p(x-1, z) + + \sigma(x) A \sum_{z=1}^{\infty} p(x, z-1). \tag{20}$$

Wenn man dazu die Rekursionsformel (17) für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x, 0)$ addiert, so ergibt sich

$$x\, p(x) = [1 - \sigma(x-1)] A\, p(x-1) + \sigma(x) A\, p(x) \tag{21}$$

oder

$$[x - \sigma(x) A]\, p(x) = [1 - \sigma(x-1)] A\, p(x-1), \quad x = 1, \ldots, n. \tag{22}$$

Mit dieser Rekursionsformel kann die Verteilung $p(x)$ berechnet werden [6]. Löst man die Rekursionsformel auf, so erhält man

$$p(x) = p(0) A^x \frac{\prod_{i=0}^{x-1} [1 - \sigma(i)]}{\prod_{i=1}^{x} [i - \sigma(i) A]}, \quad x = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Mit der Bedingung $\sum_{x=0}^{n} p(x) = 1$, vgl. Gl. (18), erhält man den Anfangswert $p(0)$:

$$\frac{1}{p(0)} = 1 + \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\prod_{i=0}^{j-1} [1 - \sigma(i)]}{\prod_{i=1}^{j} [i - \sigma(i) A]}. \tag{24}$$

Der Erwartungswert Y – die „Belastung" – ist die Zahl der im Mittel gleichzeitig belegten Leitungen. Berechnet man Y für die gefundene Verteilung $p(x)$, so ergibt sich

$$Y = \sum_{x=1}^{n} x\, p(x) = A, \tag{25}$$

d.h. die Belastung ist gleich dem Angebot. Dieses Ergebnis war zu erwarten, da in dem betrachteten Wartesystem Rufe weder ausscheiden noch verloren gehen können. Deshalb ist auch die Annahme des statistischen Gleichgewichts nur erfüllt, wenn

$$A < n \tag{26}$$

gilt.

2.4. *Die Wartewahrscheinlichkeit*

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf im System vor Durchschaltung auf eine Abnehmerleitung warten muß, wird Wartewahrscheinlichkeit genannt. Mit der Wahrscheinlichkeit $p(x)$ sind genau x Abnehmerleitungen belegt, bzw. $n - x$ Leitungen frei. Ein ankommender Ruf findet laut Definition (Abschnitt 2.1.1) mit der Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)$ keine freie Leitung in seiner Zubringergruppe und muß warten. Die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Ruf sowohl x Leitungen belegt antrifft, als auch, daß er warten muß, ist $p(x)\, \sigma(x)$. Die Wartewahrscheinlichkeit W erhält man dann durch Aufsummieren dieser Wahrscheinlichkeiten

$$W = \sum_{x=k}^{n} p(x)\, \sigma(x). \tag{27}$$

Es muß nur von $x = k$ aufsummiert werden, da stets $\sigma(x) = 0$ ist für $x < k$ nach Gl. (5).

Wenn man die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x)$ nach Gl. (23) und (24) in Gl. (27) einsetzt, erhält man für die Wartewahrscheinlichkeit den Ausdruck [6]

$$W = \frac{\sum_{x=k}^{n} A^x \frac{\prod_{i=0}^{x-1} [1 - \sigma(i)]}{\prod_{i=1}^{x} [i - \sigma(i) A]} \sigma(x)}{1 + \sum_{x=1}^{n} A^x \frac{\prod_{i=0}^{x-1} [1 - \sigma(i)]}{\prod_{i=1}^{x} [i - \sigma(i) A]}}. \tag{28}$$

2.5. *Die Wartebelastung Ω*

Die Anzahl der im Mittel gleichzeitig Wartenden wird Wartebelastung Ω genannt. Ω kann mit den Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x, z)$ berechnet werden:

$$\Omega = \sum_{x=k}^{n} \sum_{z=1}^{\infty} z\, p(x, z). \tag{29}$$

Um die Doppelsumme in Gl. (29) zu berechnen, soll zuerst die einfache Summe

$$\omega(x) = \sum_{z=1}^{\infty} z\, p(x, z) \tag{30}$$

berechnet werden. Dazu wird die Rekursionsformel für $p(x, z)$ nach Gl. (14) mit z multipliziert:

$$x\, p(x, z)\, z = = [1 - \sigma(x-1)] A\, p(x-1, z)\, z + \sigma(x) A\, p(x, z-1)\, z. \tag{31}$$

Gl. (31) wird über z aufsummiert und ergibt mit den Abkürzungen (19) und (30):

$$x\, \omega(x) = [1 - \sigma(x-1)] A\, \omega(x-1) + + \sigma(x) A\, \omega(x) + \sigma(x) A\, p(x)$$

oder

$$[x - \sigma(x) A]\, \omega(x) = = [1 - \sigma(x-1)] A\, \omega(x-1) + \sigma(x) A\, p(x). \tag{32}$$

Es ist $\omega(x) = 0$ für $x = 0, 1, \ldots, k-1$, da nach Gl. (15) $p(x, z) = 0$ ist für $x = 0, \ldots, k-1$ und $z = 1, 2, \ldots$.

Die Funktion $\omega(x)$ für $x = k, \ldots, n$ kann aus der Rekursionsformel (32) abgeleitet werden. Für $x = k$ erhält man aus (32)

$$\omega(k) = p(k) \frac{\sigma(k) A}{k - \sigma(k) A}. \tag{33}$$

Für $\omega(x)$ wird die Funktion

$$\omega(x) = p(x) \sum_{i=k}^{x} \frac{\sigma(i) A}{i - \sigma(i) A} \tag{34}$$

angenommen. Aus Gl. (33) weiß man, daß die Behauptung für $x = k$ richtig ist. Man kann nun annehmen, die Behauptung sei für $(x - 1)$ bewiesen

$$\omega(x-1) = p(x-1) \sum_{i=k}^{x-1} \frac{\sigma(i)\,A}{i - \sigma(i)\,A}. \tag{35}$$

Es läßt sich nun zeigen, daß aus dieser Annahme die Richtigkeit der Behauptung (34) für $\omega(x)$ folgt. Gl. (35) wird in die Rekursionsformel (32) eingesetzt:

$$\omega(x) = \frac{[1-\sigma(x-1)]\,A}{x-\sigma(x)\,A}\, p(x-1) \times \tag{36}$$
$$\times \sum_{i=k}^{x-1} \frac{\sigma(i)\,A}{i-\sigma(i)\,A} + \frac{\sigma(x)\,A}{x-\sigma(x)\,A}\, p(x),$$
$$x = k, \ldots, n.$$

Mit Hilfe der Rekursionsformel (22) für $p(x)$ kann man Gl. (36) umformen:

$$\omega(x) = p(x) \sum_{i=k}^{x-1} \frac{\sigma(i)\,A}{i-\sigma(i)\,A} + \frac{\sigma(x)\,A}{x-\sigma(x)\,A}\, p(x)$$

oder $$\omega(x) = p(x) \sum_{i=k}^{x} \frac{\sigma(i)\,A}{i-\sigma(i)\,A}.$$

Damit ist Gl. (34) für $x = k, \ldots, n$ bewiesen.

Die gesamte Wartebelastung erhält man gemäß Gl. (29) und (30) zu

$$\Omega = \sum_{x=k}^{n} \left[p(x) \sum_{i=k}^{x} \frac{\sigma(i)\,A}{i-\sigma(i)\,A} \right]. \tag{37}$$

2.6. *Die mittlere Wartezeit*

Die mittlere Wartezeit t_W eines der wartenden Rufe ist gleich der mittleren Zahl Ω der gleichzeitig Wartenden geteilt durch die mittlere Anzahl c_W der in der Zeiteinheit wartenden Rufe:

$$t_W = \Omega / c_W. \tag{38}$$

Mit der Beziehung $c_W = W\, c_A$ wird

$$t_W = \Omega / W c_A. \tag{39}$$

Die mittlere Wartezeit t_W, bezogen auf die mittlere Belegungsdauer h, heiße τ_W. Außerdem gilt $A = c_A h$, vgl. Gl. (3). Damit erhält man

$$\tau_W = t_W / h = \Omega / W A. \tag{40}$$

Bezieht man die mittlere Wartezeit τ_W auf alle c_A in der Zeiteinheit eintreffenden Rufe, so erhält man aus Gl. (40)

$$\tau_W^* = \tau_W \cdot c_W / c_A = \tau_W\, W = \Omega / A. \tag{41}$$

Da W nach Gl. (28) und Ω nach Gl. (37) bekannt sind, können auch τ_W und τ_W^* berechnet werden.

Die Grenzwerte der mittleren Wartezeit für verschwindendes und maximal zulässiges Angebot ergeben sich zu

$$\tau_W = 1/k \quad \text{und} \quad \tau_W^* = 0 \quad \text{für} \quad A = 0,$$
$$\tau_W \to \infty \quad \text{und} \quad \tau_W^* \to \infty \quad \text{für} \quad A \to n.$$

Damit können die charakteristischen Größen für das verkehrstheoretische Verhalten von Wartesystemen mit unvollkommener Erreichbarkeit berechnet werden, nämlich die Wartewahrscheinlichkeit W und die mittlere Wartezeit τ_W. Die Lösung soll Interconnection Delay Formula (IDF) genannt werden [6] in Anlehnung an ERLANGS Interconnection Formula (EIF) für Verlustsysteme. Die Schwierigkeit besteht nun darin die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)$ für die verschiedenen Koppelanordnungen anzugeben.

3. Erlangs ideale Mischungen

A. K. ERLANG hat einen besonderen Typ von einstufigen Koppelanordnungen vorgeschlagen, die als „ideale ERLANG-Mischungen" bezeichnet werden. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß die Anzahl g der Zubringerteilgruppen gleich der Anzahl der möglichen Kombinationen von k aus n Abnehmerleitungen ist. Von jeder Teilgruppe wird dann eine andere Kombination (k aus n) erreicht [1].

Die Zahl der Zubringerteilgruppen ist deshalb

$$g = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}. \tag{42}$$

Bild 1 zeigt eine ideale ERLANG-Mischung mit $n = 4$ Abnehmerleitungen, der Erreichbarkeit $k = 2$ und deshalb $g = \binom{4}{2} = 6$ Zubringerteilgruppen.

Für die idealen ERLANG-Mischungen kann die Sperrwahrscheinlichkeit exakt angegeben werden [1]:

$$\sigma(x) = \binom{x}{k} \Big/ \binom{n}{k}, \quad x = k, \ldots, n. \tag{43}$$

Mit der Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)$ nach Gl. (43) wurden die Wartewahrscheinlichkeit W und die mittlere Wartezeit τ_W aus Gl. (28) und (40) berechnet.

Für das Beispiel einer idealen ERLANG-Mischung mit $n = 9$, $k = 6$ und $g = 84$ sind in den Bildern 4 und 5 die Wartewahrscheinlichkeit W und die mittlere Wartezeit τ_W über dem Angebot A aufgetragen.

Das Verkehrsverhalten einer Koppelanordnung mit dieser idealen ERLANG-Mischung wurde auf einer elektronischen Rechenanlage mit künstlichem Fernsprechverkehr simuliert. Die Testergebnisse sind mit ihrem Vertrauensintervall für eine statistische Sicherheit von 95% in den Bildern 4 und 5 eingezeichnet.

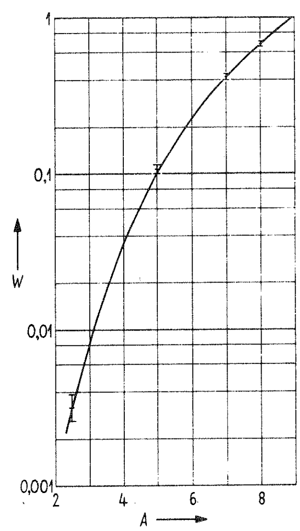

Bild 4.
Die Wartewahrscheinlichkeit W über dem Angebot A; $n = 9$, $k = 6$, $g = 84$, ERLANGS ideale Mischung.

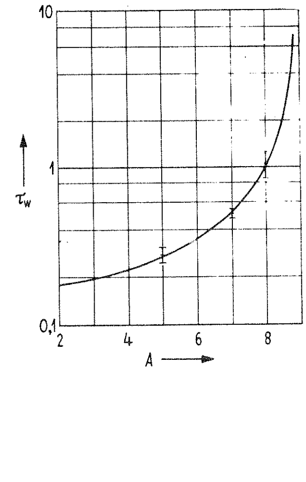

Bild 5.
Die mittlere Wartezeit τ_W der Wartenden über dem Angebot A; $n = 9$, $k = 6$, $g = 84$. ERLANGS ideale Mischung.

Die nach der Interconnections-Warteformel (IDF) berechnete Wartewahrscheinlichkeit W und die mittlere Wartezeit τ_W können für verschiedene Erreichbarkeiten k und Abnehmerleitungszahlen n den „Wartesystem-Tafeln für unvollkommene und vollkommene Erreichbarkeit“ [2] entnommen werden.

4. Wartesysteme mit vollkommener Erreichbarkeit ($k = n$)

Für den Sonderfall, daß von jeder Zubringerteilgruppe alle n Abnehmerleitungen erreicht werden können ($k = n$), nimmt die Sperrwahrscheinlichkeit stets die zwei Werte

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \dots, n-1 \\ 1, & x = n \end{cases} \tag{44}$$

an. Die Wartewahrscheinlichkeit W aus Gl. (28) kann damit umgeformt werden:

$$W = \frac{\dfrac{A^n}{n!}\,\dfrac{n}{n-A}}{\sum\limits_{j=0}^{n} \dfrac{A^j}{j!} + \dfrac{A^n}{n!}\,\dfrac{A}{n-A}}. \tag{45}$$

Für die mittlere Wartezeit erhält man die Ausdrücke

$$\tau_W = \frac{1}{n-A} \quad \text{bzw.} \quad \tau_W^* = \frac{1}{n-A}\,W. \tag{46}$$

Diese Ergebnisse wurden bereits von A. K. Erlang hergeleitet [1] und sind als Sonderfall in der Interconnections-Warteformel (IDF) enthalten.

5. Das gemischte Verlust- und Wartesystem mit unvollkommener Erreichbarkeit

Ein Vermittlungssystem soll betrachtet werden, in dem die Rufe einer Klasse W unbeschränkte Wartemöglichkeit haben. Den ankommenden Rufen einer zweiten Klasse V wird nicht erlaubt zu warten. Sie „gehen verloren“, wenn sie nicht sofort eine freie Abnehmerleitung finden.

Das Angebot A an das System unterteilt sich demgemäß in ein Teilangebot A_W, das durch jene Rufe erzeugt wird, die warten dürfen, und ein Teilangebot A_V, dessen Rufe bei Blockierung des Systems verloren gehen:

$$A = A_W + A_V. \tag{47}$$

In diesem System können nun wieder die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen benachbarten Zuständen hergeleitet werden. Die Übergänge sollen in Bild 6 am geänderten Zustandsdiagramm gezeigt werden.

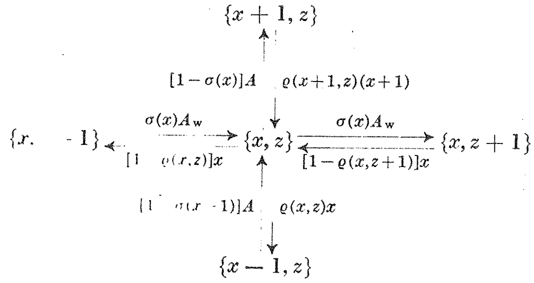

Bild 6. Das Zustandsdiagramm des gemischten Verlust- und Wartesystems.

Gegenüber dem Zustandsdiagramm des reinen Wartesystems (Bild 3) ändern sich nur die Übergänge vom Zustand $\{x, z-1\}$ zum Zustand $\{x, z\}$ bzw. von $\{x, z\}$ zu $\{x, z+1\}$, denn eine Erhöhung der Zahl der wartenden Rufe kann nur das Teilangebot A_W bewirken. Alle übrigen Übergänge werden von der Unterteilung in zwei Klassen von Rufen nicht betroffen.

Nachdem das abgeänderte Zustandsdiagramm aufgestellt ist, können die Formeln für das gemischte Verlust- und Wartesystem Schritt für Schritt analog zu Kapitel 2 abgeleitet werden. In den folgenden Abschnitten werden deshalb nur einige Zwischenergebnisse und die Endresultate angegeben. Zum Studium der ausführlichen Herleitung wird auf Kapitel 2 verwiesen.

Aus dem Zustandsdiagramm Bild 6 läßt sich eine Rekursionsformel für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x, z)$ ableiten, die der im Kapitel 2 hergeleiteten Rekursionsformel (14) sehr ähnlich ist:

$$p(x,z)\,x = \tag{48}$$
$$= p(x-1,z)\,[1-\sigma(x-1)]\,A + p(x,z-1)\,\sigma(x)\,A_W,$$
$$x = 1, \dots, n, \quad z = 1, 2, \dots .$$

5.1. *Die Verteilung $p(x)$*

Durch Aufsummieren der Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x, z)$ über alle z erhält man die Verteilung $p(x)$ im Abnehmerbündel:

$$p(x) = p(0)\,A^x \frac{\prod\limits_{i=0}^{x-1} [1-\sigma(i)]}{\prod\limits_{i=1}^{x} [i - \sigma(i)\,A_W]}. \tag{49}$$

Die Wahrscheinlichkeit $p(0)$ liefert die Bedingung (18), daß die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $p(x)$ gleich eins ist:

$$\frac{1}{p(0)} = 1 + \sum_{j=1}^{n} A^j \frac{\prod\limits_{i=0}^{j-1} [1-\sigma(i)]}{\prod\limits_{i=1}^{j} [i - \sigma(i)\,A_W]}. \tag{50}$$

5.2. *Die Blockierungswahrscheinlichkeit*

Die Blockierungswahrscheinlichkeit ist gleich den Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x)$ multipliziert mit deren Sperrwahrscheinlichkeiten $\sigma(x)$ und aufsummiert von $x = k$ bis $x = n$:

$$B = W = \sum_{x=k}^{n} p(x)\,\sigma(x). \tag{27}$$

Blockierung bedeutet für die Rufe des Teilangebots A_V „Verlust“ und für die Rufe des Teilangebots A_W „Warten“. In diesem System sind also Verlustwahrscheinlichkeit und Wartewahrscheinlichkeit gleich groß.

Setzt man die Verteilung $p(x)$ aus Gl. (49) in die Formel (27) für die Blockierungswahrscheinlichkeit ein, so erhält man

$$W = B = \frac{\sum_{x=k}^{n} A^x \frac{\prod_{i=0}^{x-1}[1-\sigma(i)]}{\prod_{i=1}^{x}[i-\sigma(i)A_W]}\,\sigma(x)}{1+\sum_{x=1}^{n} A^x \frac{\prod_{i=0}^{x-1}[1-\sigma(i)]}{\prod_{i=1}^{x}[i-\sigma(i)A_W]}}\,. \tag{51}$$

5.3. *Die mittlere Wartezeit*

Zur Berechnung der mittleren Wartezeit soll wieder zuerst die Größe

$$\omega(x) = \sum_{z=1}^{\infty} z\,p(x,z) \tag{30}$$

bestimmt werden. Dazu wird die Rekursionsformel (48) mit z multipliziert und über alle z aufsummiert. Die neue Rekursionsformel für $\omega(x)$ lautet

$$\begin{aligned}[x-\sigma(x)A_W]\,\omega(x) &= \\ &= [1-\sigma(x-1)]\,A\,\omega(x-1)+\sigma(x)A_W\,p(x)\,, \\ &\quad x = k,\ldots,n\,.\end{aligned} \tag{52}$$

Diese Rekursionsformel läßt sich auf die folgende Art auflösen:

$$\omega(x) = p(x)\sum_{i=k}^{x}{}' \frac{\sigma(i)A_W}{i-\sigma(i)A_W}\,. \tag{53}$$

Die Wartebelastung Ω ergibt sich als Summe über alle $\omega(x)$

$$\Omega = \sum_{x=k}^{n}{}' \omega(x)\,. \tag{54}$$

Die mittlere Wartezeit der wartenden Rufe

$$\tau_W = \Omega/W A_W \tag{55}$$

kann nun berechnet werden.

Für W muß die Wartewahrscheinlichkeit nach Gl. (51) eingesetzt werden.

Ebenso kann die mittlere Wartezeit τ_W^* *aller* Rufe, die zur Klasse W gehören, bestimmt werden:

$$\tau_W^* = \Omega/A_W\,. \tag{56}$$

6. Das gemischte Verlust- und Wartesystem mit vollkommener Erreichbarkeit ($n = k$)

Für den Sonderfall des vollkommen erreichbaren Abnehmerbündels [4] erhält man mit den speziellen Werten der Sperrwahrscheinlichkeit nach Gl. (44) die Blockierungswahrscheinlichkeit

$$B = W = \frac{\frac{A^n}{n!}\,\frac{n}{n-A_W}}{\sum_{j=0}^{n}\frac{A^j}{j!}+\frac{A^n}{n!}\,\frac{A_W}{n-A_W}}\,. \tag{57}$$

Die mittlere Wartezeit der wartenden Rufe ist

$$\tau_W = \frac{1}{n-A_W}\,, \tag{58}$$

die mittlere Wartezeit bezogen auf alle Rufe

$$\tau_W^* = \frac{1}{n-A_W}\,W\,. \tag{59}$$

7. Das reine Verlustsystem

Aus der Formel für die Blockierungswahrscheinlichkeit (51) im gemischten Verlust- und Wartesystem lassen sich die zum Teil schon bekannten Lösungen anderer Systeme ableiten.

Setzt man das Teilangebot $A_W = 0$, d.h. das gesamte Angebot A besteht aus Rufen der Klasse V ($A = A_V$), dann erhält man die Verlustwahrscheinlichkeit eines reinen Verlustsystems:

$$B = \frac{\sum_{x=k}^{n}\frac{A^x}{x!}\prod_{i=0}^{x-1}[1-\sigma(i)]\,\sigma(x)}{1+\sum_{x=1}^{n}\frac{A^x}{x!}\prod_{i=0}^{x-1}[1-\sigma(i)]}\,. \tag{60}$$

Diese Formel wurde bereits von A. K. Erlang als Verlustwahrscheinlichkeit von idealen Erlang-Mischungen angegeben, sie wird auch Erlangs Interconnectionsformel (EIF) genannt [1].

Andererseits geht Gl. (51) über in die Formel (28) für die Wartewahrscheinlichkeit W des reinen Wartesystems, wenn $A_V = 0$ ($A = A_W$) gesetzt wird. In Bild 7 sind diese Zusammenhänge dargestellt. Die dick umrandeten Felder sind die Systeme, die in dieser Arbeit behandelt wurden. Das verkehrstheoretische Verhalten der übrigen Systeme war bereits bekannt [1], [3], [4]. Für reine Wartesysteme mit unvollkommener Erreichbarkeit hat Gambe durch Vergleich mit Verlustsystemen eine Näherungslösung vorgeschlagen [5].

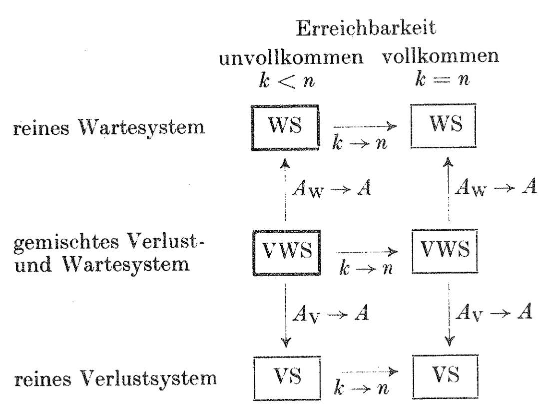

Bild 7. Überblick über die behandelten Systeme.

Schrifttum

[1] Brockmeyer, E., Halstrøm, H. L. und Jensen, A., The Life and Works of A. K. Erlang. Copenhagen 1960.

[2] Thierer, M., Wartesystem-Tafeln für unvollkommene und vollkommene Erreichbarkeit nach der Interconnections-Warteformel. 7. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten des Instituts für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart 1968.

[3] Lotze, A., Berechnung der Verkehrsgrößen im Wartesystem aus den Verkehrsgrößen eines Verlustsystems. Fernmeldetech. Z. 7 [1954], 443–453.

[4] Cohen, J. W., Certain delay problems for a full availability trunk group loaded by two traffic sources. Commun. News 16 [1956], 105–113.

[5] Gambe, E., A study on the efficiency of graded multiple delay systems through artificial traffic trials. Instn. of Elect. Engrs., Paper No. 3537 E (Juni 1961).

[6] Thierer, M., Delay systems with limited accessibility. Prebook of the International Teletraffic Congress (ITC), New York 1967.