

Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung

Universität Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

10. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten

**Über die
exakte Berechnung von Überlaufsystemen
der Wählvermittlungstechnik**

von

RUDOLF SCHEHRER

Institute for Switching and Data Technics

University Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

10th Report on Studies in Congestion Theory

**On the
Exact Calculation of Overflow Systems
in Switching Networks**

by

RUDOLF SCHEHRER

1969

ABSTRACT

During the busy hours, telephone traffic can be described as a stationary, stochastic birth and death process. From numerous measurements it is well known that the arriving intervals of the calls and also their holding times have a negative exponential distribution.

For calculating the number of trunks or switching devices to which such a "pure chance traffic" is offered, many exact and approximate solutions are known.

In long distance networks, and sometimes also in large local networks, a connection between two subscribers is often not switched via a predetermined route; there are alternate routing facilities in one or several exchanges. According to a stored program, at first the most economical (usually the shortest) route is hunted. If an idle trunk is not available in this group, the call is overflowing to the so-called second route. Calls which can not be switched via the second route, too, may possibly be offered to a third route etc. and at last to a final route.

Thus, the traffic overflowing to the second routes, third routes etc. consists only of those traffic peaks which can not be handled by the groups hunted before. Such overflow traffic has statistical properties differing remarkably from those of the pure chance traffic offered to a first route. In particular, the variance of overflow traffic is greater than in case of pure chance traffic.

The number of trunks in the various groups should be dimensioned according to economic points of view and providing a certain grade of service. A usual index for the grade of service is the loss probability of the final route.

In dimensioning such groups with offered overflow traffic, exact methods can mostly not be applied because the numerical solution of such systems would need too much storage capacity (linear equations with $10^5 \dots 10^{20}$ and more unknowns). Approximate methods suitable for practical application are well known [1, 2, 12, 14, 16, 22, 23, 24, 26, 34, 35].

The topic of this paper is the extension of the range of exact and nearly exact methods for the loss calculation of overflow systems and furthermore the checking of the accuracy of the known approximation methods by means of the new exact methods developed.

After a short survey in chapter II, chapter III deals with overflow systems with groups of full availability. The exact loss probabilities of secondary groups are compared with approximate values according to the wellknown ERT-method. In case of two separate overflow traffics (or an overflow traffic and a pure chance traffic) offered to a secondary group, the actual loss probabilities of these individual traffics in the secondary group are calculated.

Chapter IV is concerned with overflow systems, in which the primary group (first route) or the secondary group (second route) has limited availability. For systems with a primary group of limited availability, an exact solution is achieved by means of a system of $2^{n_1}(n_2+1)$ linear equations. If the blocking probability function $G(x)$ of the primary group is known (or a sufficiently accurate approximation), the number of equations can be reduced to $(n_1+1) \cdot (n_2+1)$. In systems with a full available primary group and a secondary group of limited availability, an analytic solution of the loss probability as a function of the group sizes, the availabilities, the blocking probabilities and the offered traffic is derived. With this method, even overflow systems of this kind having larger trunk groups can be calculated with high accuracy.

Finally in chapter V overflow systems are treated, in which both, primary and secondary group, have limited availability. Ideal gradings (according to A. K. Erlang) as well as non-ideal gradings usually applied in practical systems are considered. Here, an exact calculation is only possible by the solution of large sets of linear equations.

Comparing the exact calculations for limited availability with approximate ones according to the RDA-method it can be seen, that the RDA-method, which is solely applicable in practice, is sufficiently accurate and that it yields loss probabilities which tend a little to higher values, i. e. to the safe side.

<u>INHALTSVERZEICHNIS</u>	Seite
SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS	5
ABKÜRZUNGEN	9
I. ÜBERSICHT	12
II. AUFGABENSTELLUNG	16
II.1. Struktur eines Überlaufsystems	16
II.2. Anrufprozess und Verkehrsablauf in einem Bündel	21
III. VOLLKOMMEN ERREICHBARE BÜNDEL IN ÜBERLAUF-SYSTEMEN	23
III.1. Überlaufsysteme mit zwei vollkommen erreichbaren Bündeln	23
III.1.1. Verlustwahrscheinlichkeit und Gleichzeitigkeitsverteilung im Primärbündel	24
III.1.2. Verlustwahrscheinlichkeit und Gleichzeitigkeitsverteilung im Sekundärbündel	27
III.2. Überlaufsysteme mit mehreren Primärbündeln vollkommener Erreichbarkeit	29
III.2.1. Exakte Berechnung	30
III.2.2. Das Streuwertverfahren für Bündel mit vollkommener Erreichbarkeit	32
III.2.3. Vergleich der exakten Werte mit Ergebnissen nach dem Streuwertverfahren	34

	Seite
IV. ÜBERLAUFSYSTEME MIT BÜNDELN VOLLKOMMENER UND UNVOLLKOMMENER ERREICHBARKEIT	47
IV.1. Unvollkommen erreichbares Primärbündel mit "realer" Mischung und vollkommen erreichbarem Sekundärbündel	47
IV.1.1. Der Verlust im unvollkommen erreichbaren Primärbündel	48
IV.1.2. Der Verlust im Sekundärbündel	53
IV.1.3. Die Gleichzeitigkeitsverteilungen	56
IV.2. Ideal gemischtes, unvollkommen erreichbares Primärbündel mit vollkommen erreichbarem Sekundärbündel	57
IV.2.1. Der Verlust im ideal gemischten Primärbündel	58
IV.2.2. Der Verlust im Sekundärbündel	60
IV.3. Vollkommen erreichbares Primärbündel mit unvollkommen erreichbarem Sekundärbündel mit realer Mischung	62
IV.4. Vollkommen erreichbares Primärbündel mit unvollkommen erreichbarem Sekundärbündel mit idealer Mischung	65
IV.4.1. Aufstellung der zweidimensionalen Zustandsgleichungen	66
IV.4.2. Graphische Darstellung der Zustandsgleichungen	69
IV.4.3. Reduzierung auf ein eindimensionales Gleichungssystem	71
IV.4.4. Darstellung der Werte $p(0, x_2)$ durch den Wert $p(0, n_2)$	75
IV.4.5. Geschlossene Lösung für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$	81

	Seite
IV.4.6. Verluste und Verkehrsreste	84
IV.4.7. Numerische Auswertung und Ergebnisse	85
IV.4.8. Ausdehnung des Verfahrens auf Sekundärbündel mit beliebiger nicht-idealer Mischung	88
V. ÜBERLAUFSYSTEME MIT UNVOLLKOMMEN ERREICHBAREN BÜNDELN	97
V.1. Real gemischtes Primärbündel mit real gemischtem Sekundärbündel	97
V.1.1. Exakte Verlustberechnung	97
V.1.2. Das Streuwertverfahren für unvollkommene Bündel	99
V.2. Ideal gemischtes Primärbündel mit ideal gemischtem Sekundärbündel	101
V.3. Real gemischtes Primärbündel mit ideal gemischtem Sekundärbündel	105
V.4. Ideal gemischtes Primärbündel mit real gemischtem Sekundärbündel	110
VI. ZUSAMMENFASSUNG	115
ANHANG	117

SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

- /1/ Bretschneider, G.: Die Berechnung von Leitungsgruppen für überfließenden Verkehr in Fernsprechwählanlagen. NTZ 9(1956), S.533-540
- /2/ Bretschneider, G.: Ein verallgemeinertes Verfahren zur Näherungsberechnung der Leistungsfähigkeit von Überlaufanordnungen. NTZ 15(1962), S.639-643
- /3/ Bretschneider, G.: Die exakte Bestimmung der Verkehrsleistung kleiner unvollkommener Fernsprechbündel. NTZ 16(1963), S.199-205
- /4/ Bretschneider, G.: Über eine neue Klasse einstufig erreichbarer idealer Anordnungen von Fernsprechleitungen. AEÜ 17(1963), S.69-74
- /5/ Bretschneider, G.: Vollkommenes Bündel, Berechnung der Momente R, D und T des Überlaufs. Beschreibung zum Programm Nr. 537 der Unterprogramm-bibliothek der Siemens Datenverarbeitungsanlage 2002
- /6/ Brockmeyer, E., Halstrøm, H., Jensen, A.: The Life and Works of A. K. Erlang. Acta Polytechnica Scandinavica (1960), Nr.287
- /7/ Brockmeyer, E.: The simple Overflow Problem in the Theory of Telephone Traffic. Teletechnik 5(1954), S.361-374
- /8/ Carlsson, S.G., Elldin, A.: Solving Equations of State with Digital Computers. II. Int. Teletr. Congr. The Hague (1958), paper 19, reprinted: Ericsson Techn.14(1958), S. 221 - 244
- /9/ Chastang, J.: Ein Beitrag zur Untersuchung von Überlaufverkehr. El.Nachr.-wesen 38(1963), S.88-95
- /10/ Elldin, A.: Further Studies on Gradings with Random Hunting. Ericsson Technics (1957), Nr.2

- /11/ Fisz, M.: Wahrscheinlichkeit und Mathematische Statistik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1958)
- /12/ Herzog, U.: Näherungsverfahren zur Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr hinter Mischungen. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der TH Stuttgart (1964)
- /13/ Herzog, U.: Die exakte Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr hinter Koppelanordnungen beliebiger Stufenzahl mit vollkommener bzw. unvollkommener Erreichbarkeit. AEÜ 20(1966), S.180-184
- /14/ Herzog, U., Lotze, A.: Das RDA-Verfahren, ein Streuwertverfahren für unvollkommene Bündel. NTZ 19(1966), S.640-646
- /15/ Herzog, U.: Adaptation of the MPJ Loss Formula to Gradings of Various Type. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1967)
- /16/ Herzog, U.: Die Bemessung ein- und mehrstufiger Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik für angebotenen Überlaufverkehr. Dissertation an der Universität Stuttgart (1968)
- /17/ Kirsch, R.: Sperrwahrscheinlichkeitsuntersuchungen an ein- und mehrstufigen Koppelanordnungen. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1966)
- /18/ Kjellberg, G.: On the convergence of successive overrelaxation applied to a class of linear systems of equations with complex eigen-values. Ericsson Techn. 14(1958), S.245-258
- /19/ Lotze, A.: Loss Formula, Artificial Traffic Checks and Quality Standards for Characterizing One Stage Gradings. ITC Paris (1961), Dok.28

- /20/ Lotze, A.: Verluste und Güteerkmale einstufiger Mischungen. NTZ 14(1961), S.449-453
- /21/ Lotze, A., Wagner, W.: Table of the Modified Palm-Jacobaeus-Loss-Formula. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1962)
- /22/ Lotze, A.: A Traffic Variance Method for Gradings of Arbitrary Type. ITC London (1964), Dok.80
- /23/ Lotze, A.: Tabellen für Streuwert und Verlust von einstufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener und vollkommener Erreichbarkeit. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1964) (2. Auflage 1966)
- /24/ Lotze, A.: Tafeln für Streuwert D und Überlaufverkehr R von einstufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit. Berechnung von Sekundärbündeln für angebotenen Überlaufverkehr (R, D). Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1965)
- /25/ Lotze, A.: Verkehrstheoretische Fragen bei der Gestaltung internationaler Fernwählnetze. Vortrag bei der NTG-Tagung (Sept. 1965) in München und NTZ 19(1966), S.633-639
- /26/ Lotze, A., Schehrer, R.: a) Die streuwertgerechte Bemessung von Leitungsbündeln in Wähl-netzen mit Leitweglenkung. NTZ 19(1966), S.719-724
b) The Design of Alternate Routing Systems with Regard to the Variance Coefficient. NTZ Communication Journal 7(1968), S.52-56
- /27/ Lotze, A.: History and Development of Grading Theory. ITC New York (1967), Prebook S.148-161
- /28/ Neovius, G.: Artificial Traffic Trials Using Digital Computers. Ericsson Technics 11(1955), S.279-291
- /29/ Palm, C.: Table of the Erlang Loss Formula. Kunigl. Telestyrelsen, Stockholm (1954)

- /30/ Schehrer, R.: Die Berücksichtigung des Streuwerts bei der Bemessung von Querwegen und Kennzahlwegen in der Landesfernwahl. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1964)
- /31/ Schehrer, R.: Optimal Design of Alternate Routing Systems. ITC New York (1967), Prebook S.378-389
- /32/ Störmer, H.: Über den zeitlichen Verlauf der Zustandswahrscheinlichkeiten in vollkommenen Leitungsbündeln. AEÜ 12(1958), S.173-176
- /33/ Trautmann, K.: Normmischungen für einstufige Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik. NTZ 16(1963), S.269-276
- /34/ Wahl, H.: Die Anwendung des Streuwertverfahrens bei der Planung von Fernsprechanlagen. Siemens und Halske Zeitschrift 33(1959), S.17-25
- /35/ Wilkinson, R.I., (Riordan, J.): Theories for Toll Traffic Engineering in the USA. BSTJ 35(1956), S.421-514 und ITC Copenhagen (1955), Dok.43
- /36/ Young, D.M.: Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Trans. Amer. Math. Soc. 76 (1954), S. 92 - 111

ABKÜRZUNGEN

A) Gebräuchliche Symbole der Fernsprechverkehrstheorie

n	Anzahl der Leitungen eines Abnehmerbündels
g	Anzahl der Zubringerteilgruppen
k	Erreichbarkeit
A	Zufallsverkehrs-Angebot (kurz Angebot genannt)
Y	Verkehrsbelastung
B	Verlustwahrscheinlichkeit (Verlust)
R	Verkehrsrest
V	Varianz (zweites Moment) eines Verkehrs
S	Schiefe (drittes Moment) eines Verkehrs
D	Streuwert
T	Unsymmetrie
\bar{R}	Summenüberlaufverkehr
\bar{D}	Summenstreuwert
x	Anzahl gleichzeitig belegter Leitungen
{x}	Zustand "x Leitungen belegt"
p(x)	Wahrscheinlichkeit für den Zustand "x Leitungen belegt"
G(x)	Sperrwahrscheinlichkeit im Belegungszustand {x}
$\mu(x)$	Durchlasswahrscheinlichkeit im Belegungszustand {x}
$E_n(A)$	Verlustwahrscheinlichkeit eines vollkommen erreichbaren Bündels mit n Leitungen beim Angebot A
t	Zeit
t_m	mittlere Belegungsdauer
\mathcal{E}	Wahrscheinlichkeitsdichte für das Enden einer Belegung
c_A	Anrufrichte
c_V	Anzahl der Verlustrufe je Zeiteinheit
q	Quellenzahl

B) Zusätzliche Abkürzungen

A'_{11}	}	Angebote, die (im Gegensatz zu A_{11} und A_{12}) keine Überlaufmöglichkeit haben
A'_{12}		
A_{Z1}	}	zusätzlich an das Sekundärbündel angebotene Zufallsverkehre
A_{Z2}		
A_{Zuf}		anstelle von Überlaufverkehr angebotener Zufallsverkehr
A,B,C,...		Symbole für die Orte (Netzknotenpunkte) A,B,C,...
\textcircled{A}		zum Knotenpunkt A führendes Leitungsbündel
$B_{Zuf,ex}$		exakter Verlust bei angebotenenem Zufallsverkehr
B_{MPJ}		Verlustwahrscheinlichkeit nach der MPJ-Näherungsformel
\tilde{B}		Näherungswert für die Verlustwahrscheinlichkeit B
g'		Zubringerteilgruppenzahl, die ein Bündel hätte, wenn es für sich allein betrieben würde
M		Mischungsmatrix
$m_{s,j}$		Elemente der Mischungsmatrix
Rg		Rang
$S_{r,m}$		Polynome m-ten Grades und r-ter Ordnung in A
$\{x\}_v$		Belegungsmuster Nr. v des pauschalen Belegungszustandes {x}
z_i		Belegungszustand der Leitung Nr. i (Boole'sche Variable $z_i = 0,1$)
c_1	}	Konstanten
c_2		
$a_{x,z}$	}	Hilfsgrößen
b_{x_2}		
c_{x_1,x_2}		
L		

R, R'	} Hilfsgrößen
i	
j	
m	
r	
s	
u	
v	
w	
z	
z _i	
z _v	
z _g	
z _o	
α	} Boole'sche Hilfsvariable
β	
γ	
δ	
ε	
ζ	
η	
λ	

Indices (bei den Größen A, B, R, Y, D, T, u, x, k, g, β, μ, p)

Erster Index:

- 1 Primärbündel
- 2 Sekundärbündel

Zweiter Index:

- 1 bezüglich Primärbündel I
- 2 bezüglich Primärbündel II

Str nach dem Streuwertverfahren berechnet

soll Sollwert

R reale Mischung

ID ideale Mischung

(i) hochgestellt Nr. der Näherungslösung in Abschnitt V.4.8

* hochgestellt fiktive Hilfsgröße

I
ÜBERSICHT

In den für die Dimensionierung der Schaltglieder und Leitungsbündel des öffentlichen Fernsprechnetzes interessierenden Hauptverkehrszeiten kann der Fernsprechverkehr als ein stationärer, stochastischer Geburts- und Sterbeprozess beschrieben werden. Aus zahlreichen Messungen ist bekannt, dass die am Eingang eines Netzknotenpunktes eintreffenden Anrufe in sehr guter Näherung eine negativ exponentielle Abstandsverteilung aufweisen. Ferner ist bekannt, dass die Belegungsauern in guter Näherung negativ exponentiell um ihren Mittelwert verteilt sind. Für die Berechnung von Schaltgliedergruppen oder Leitungsbündeln, denen ein derartiger "reiner Zufallsverkehr" angeboten wird, sind aus der Literatur zahlreiche exakte Lösungen und Näherungsverfahren bekannt.

Im Fernverkehr, teilweise auch in grossen Ortsnetzen, wird jedoch eine Verbindung zwischen Anrufer und Gerufenem in der Regel nicht auf einem a priori festgelegten Weg durch das Fernsprechnetzt hergestellt. Vielmehr wird in einem oder mehreren Netzknotenpunkten im Zuge des Verbindungsaufbaus eine sogenannte "alternative Leitweglenkung" durchgeführt. Zentrale Steuerglieder verarbeiten die in der Ortskennzahl (im Ortsverkehr in den vorderen Ziffern der Rufnummer) liegende Zielinformation derart, dass nach einem vorher bestimmten Programm zunächst der wirtschaftlichste (in der Regel der kürzeste) Weg zum Zielort abgesucht wird. Kann in dem Leitungsbündel dieses Weges keine freie Leitung gefunden werden, so sorgt die Steuerung dafür, dass der betreffende Anruf diesen "ersten Querweg" ü b e r l ä u f t und versucht, eine freie Leitung eines zweiten Querweges zu finden. Führt auch dieser Versuch nicht zum Erfolg, so kann unter Umständen ein dritter Querweg usw., schliesslich ein L e t z t w e g abgesucht werden.

Der auf Zweitwege, Drittwege usw. überlaufende Verkehr besteht also nur aus jenen Verkehrsspitzen, welche von den zuvor abgesuchten Wegen nicht verarbeitet werden können. Derartiger Überlaufverkehr hat statistische Eigenschaften, die von jenen des an die Erstwege angebotenen reinen Zufallsverkehrs stark abweichen. Insbesondere ist die Varianz dieser Überlaufverkehre oft wesentlich grösser als jene von Zufallsverkehr.

Die Leitungszahlen der verschiedenen Bündel werden aufgrund von Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen für einen bestimmten Ausnutzungsgrad in der Hauptverkehrsstunde bemessen /26, 30, 31/. Der Ausnutzungsgrad ist eine Funktion des Verkehrsangebots (der Anrufintensität), der Leitungszahl des betrachteten Bündels, der vollkommenen oder unvollkommenen Erreichbarkeit der Leitungen beim Absuchvorgang und der vorgeschriebenen Verlustwahrscheinlichkeit, mit der ein Anruf keine freie Leitung erreicht. Als Nebenbedingung muss hierbei beachtet werden, dass eine bestimmte Verkehrsgüte in der Hauptverkehrsstunde einzuhalten ist. Das übliche Mass für die Verkehrsgüte ist die Verlustwahrscheinlichkeit, mit der ein Anruf auf dem Letztweg keine freie Leitung erreicht, das ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Anrufende Besetztzeichen erhält und seinen Anruf später wiederholen muss.

Für die Bemessung derartiger Bündel, die ganz oder teilweise durch "Überlaufverkehr" gespeist werden, können streng exakte Bemessungsverfahren in der Regel nicht angewandt werden, weil deren numerische Auswertung die Leistungsfähigkeit heutiger Datenverarbeitungsanlagen übersteigt (lineare Gleichungssysteme vom Rang $10^5 \dots 10^{20}$ und darüber hinaus). Näherungsverfahren mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit sind aus der Literatur bereits bekannt /1, 2, 12, 14, 16, 22, 23, 24, 26, 34, 35/.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist es, den Bereich exakter oder nahezu exakter Verfahren für die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit von Systemen mit Überlaufbündeln

zu erweitern und die Genauigkeit bekannter Näherungsverfahren anhand der neu entwickelten Lösungen zu überprüfen.

Nach einer Übersicht über die Problemstellung in Kapitel II wird in Kapitel III das Überlaufproblem für Bündel mit vollkommener Erreichbarkeit (kurz: vollkommene Bündel) behandelt. Die exakt berechnete Verlustwahrscheinlichkeit eines Sekundärbündels wird verglichen mit den Näherungswerten, die mit dem in der Praxis üblichen Streuwertverfahren erhalten werden. Darüber hinaus werden die Teilverluste berechnet, wenn sich das Gesamtangebot an das Sekundärbündel aus einem Überlaufrest einerseits und einem Zufallsangebot andererseits oder aus zwei verschiedenen Überlaufangeboten zusammensetzt.

Kapitel IV behandelt Überlaufsysteme, bei denen das Primär- oder Sekundärbündel mit unvollkommener Erreichbarkeit abgesucht wird. Bei Systemen mit unvollkommen erreichbarem (kurz: unvollkommenem) Primärbündel wird eine exakte Lösung durchgeführt mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems vom Rang $2^{n_1} \cdot (n_2 + 1)$. Ist für das Primärbündel die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)$ exakt bekannt (ideale Mischung) oder existiert eine ausreichend genaue Näherungsfunktion hierfür, so lässt sich das Gleichungssystem reduzieren auf den Rang $(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1)$. Bei Systemen mit vollkommen erreichbarem Primärbündel und unvollkommen erreichbarem Sekundärbündel wird eine geschlossene Lösung für die Verlustwahrscheinlichkeit als Funktion von Bündelgrössen, Erreichbarkeiten, Sperrwahrscheinlichkeit und Verkehrsangebot hergeleitet. Damit werden auch Überlaufsysteme dieser Art mit grösseren Bündeln einer sehr genauen Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit zugänglich.

Schliesslich werden in Kapitel V Überlaufsysteme behandelt, bei denen sowohl Primärbündel als auch Sekundärbündel unvollkommen erreichbar sind. Dabei werden einerseits "ideale Mischungen" (nach A. K. Erlang), andererseits die in der Praxis üblichen "realen Mischungen" betrachtet. Eine exakte Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit ist hier nur auf dem Weg über die Lösung grosser linearer Gleichungssysteme möglich.

Der Vergleich der exakten Rechnungen mit Näherungswerten nach dem Streuwertverfahren zeigt, dass das für die Praxis allein anwendbare Streuwertverfahren ausreichend genau ist und Verlustwahrscheinlichkeiten liefert, die etwas zu hoch, das heisst auf der sicheren Seite liegen.

II AUFGABENSTELLUNG

II.1. Struktur eines Überlaufsystems

In Fernwählnetzen mit Leitweglenkung, wie zum Beispiel im Landesfernwahlnetz der BRD, stehen für die Herstellung einer Fernverbindung meist mehrere alternative Wege vom Abgangsort zum Zielort zur Verfügung. Diejenigen Rufe, welche auf dem kürzesten Weg (Querweg) wegen Mangels an freien Sprechwegen nicht vermittelt werden können, "laufen dann über" auf Leitungsbündel, welche über einen oder mehrere Umwege zum Ziel führen. Zwischen dem (ersten) Querweg und dem Letztweg werden in vielen Fällen noch weitere Leitungsbündel (zweiter, dritter Querweg usw.) abgesucht. In Bild 1 ist das Beispiel eines Netzknotenpunkts mit einer Serienschaltung von fünf ersten Querwegen, zwei zweiten Querwegen und einem Letztweg dargestellt.

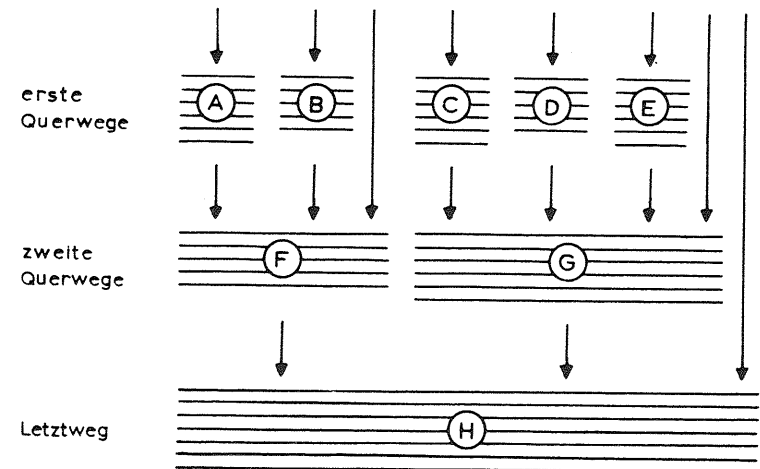


Bild 1: Beispiel für das Überlaufsystem einer Fernvermittlungsstelle mit dreistufiger Serienschaltung von Bündeln

Die Bündel (A), (B), (C), (D), (E) stellen direkte Querwege zu den Zielorten A...E dar. Die Bündel (F), (G) stellen direkte Querwege nach Zielort F bzw. G dar und gleichzeitig "zweite Querwege" über F nach A oder B bzw. über G nach C oder D oder E. Ist zum Beispiel im Querweg (F) ebenfalls momentan keine freie Leitung erreichbar, so können Anrufe nach A oder B oder F überlaufen auf den "letzten Weg" (H) und werden in dem Fernwahlknotenpunkt H des Netzes über einen oder mehrere Abschnitte nach A bzw. B bzw. F weitergeleitet. Anrufe nach dem Zielort H haben in diesem Beispiel keine Alternative.

Im folgenden werden der Übersichtlichkeit halber nur Systeme mit zweistufiger Serienschaltung behandelt. Systeme mit drei- und mehrstufiger Serienschaltung können prinzipiell stets nach denselben Verfahren exakt oder näherungsweise berechnet werden.

Ein Ausschnitt aus einem zweistufigen Überlaufsystem ist in Bild 2 skizziert.

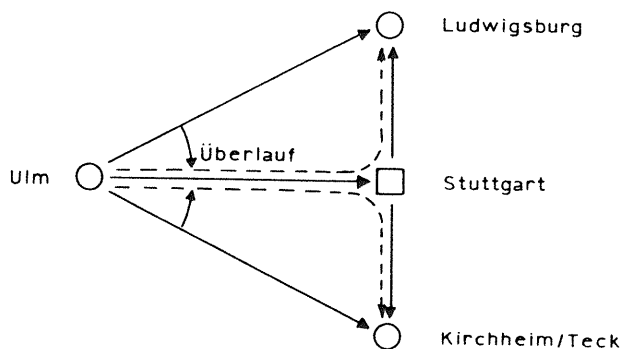


Bild 2: Ausschnitt aus einem zweistufigen Überlaufsystem

Für Rufe von Ulm nach Ludwigsburg (bzw. von Ulm nach Kirchheim/Teck) stehen jeweils eigene Querwege (direkte Leitungsbündel) zur Verfügung. Wenn eine Verbindung über die Querwege nicht möglich ist, können die Rufe auf dem Letztweg über Stuttgart durchgeschaltet werden. Die zu diesem Überlaufsystem gehörende Gruppierung ist in Bild 3 dargestellt.

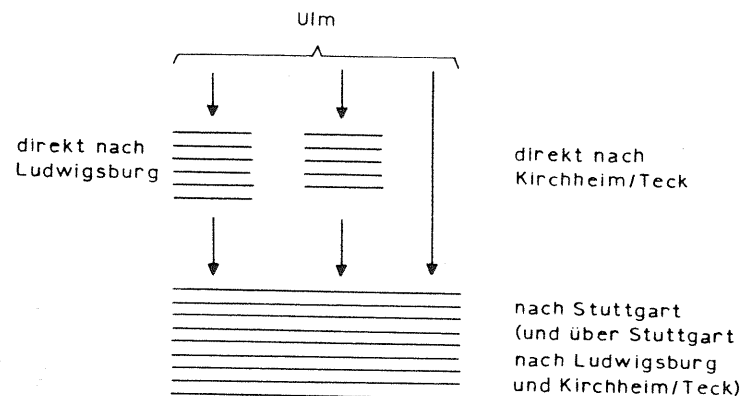


Bild 3: Gruppierung zu dem in Bild 2 dargestellten Überlaufsystem

Für grundsätzliche Untersuchungen ist es günstig, zunächst einfache Anordnungen mit nur einem Primärbündel zu betrachten (s. Bild 4).

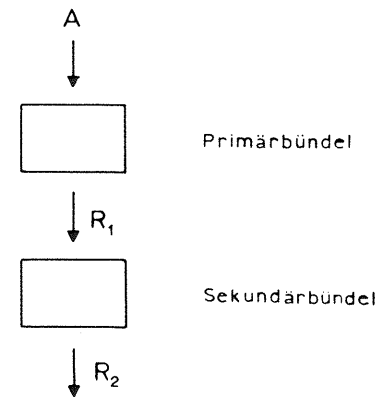


Bild 4: Einfache Zweistufen-Gruppierung

Hierbei sind mehrere Fälle zu unterscheiden. Jedes Bündel kann vollkommen oder unvollkommen erreichbar sein. Bei den Bündeln mit unvollkommener Erreichbarkeit ist ausserdem zwischen ideal gemischten und nicht ideal gemischten Bündeln zu unterscheiden.

Für einige Fälle dieser einfachen Zweistufengruppierungen sind schon exakte Lösungen bekannt, für andere noch nicht. Bild 5 zeigt dies in einer Übersicht.

Primär- Sekundär- Bündel	vollkommen erreichbar	unvollkommen erreichbar, Mischung nicht - ideal	unvollkommen erreichbar, Mischung ideal
vollkommen erreichbar	III	IV.1	IV.2
unvollkommen erreichbar, Mischung nicht - ideal	IV.3	V.1	V.4
unvollkommen erreichbar Mischung ideal	IV.4	V.3	V.2

schraffiert: Lösung bekannt

nicht schraffiert: neue Lösung

Ziffern = Abschnitt der Arbeit, in dem
das betreffende System behan-
delt wird

Bild 5: Einteilung der Zweistufengruppierungen

Die schon bekannten exakten Lösungen werden kurz erläutert. Für die anderen Anordnungen werden exakte Lösungen hergeleitet.

Bei Systemen mit mehreren Primärbündeln gibt es eine Vielzahl verschiedener Kombinationen aus vollkommen bzw. unvollkommen erreichbaren Primär- oder Sekundärbündeln. Sie werden nicht alle einzeln behandelt, können jedoch prinzipiell stets mit den hier angegebenen Verfahren berechnet werden, wenn die Speicherkapazität und Stellenzahl des verfügbaren Rechners ausreicht.

Die numerischen Ergebnisse nach exakten Methoden werden verglichen mit jenen Werten, die man nach bereits bekannten Näherungsverfahren erhält.

II.2. Anrufprozess und Verkehrsablauf in einem Bündel

Als mathematisches Modell wird Zufallsverkehr erster Art vorausgesetzt:

Die Wahrscheinlichkeitsdichten für den Einfall eines Rufes bzw. für das Enden einer Belegung sind konstant, das heisst Einfalls- und Endeprozess sind unabhängig von der Vorgeschichte. Die Einfallsabstände wie auch die Belegungsdauern sind deshalb negativ exponentiell verteilt. Angebotener Zufallsverkehr erster Art wird auch als "reiner Zufallsverkehr" oder als "Poisson-Angebot" bezeichnet.

Dieses Modell stellt, wie aus vielen Messungen im In- und Ausland bekannt ist, eine sehr wirklichkeitstreue Näherung dar für alle Fernsprechwahlvermittlungstellen der öffentlichen Netze. Da hier die Anzahl q der potentiellen Verkehrsteilnehmer (Verkehrsquellen) viel grösser ist als die Leitungszahl n aller betrachteten Abnehmerbündel ($q \gg n$), hat der Belegungszustand der einzelnen "Quelle" praktisch keinen Einfluss auf die Anrufintensität A .

Es ist im folgenden zweckmässig, die Zeit auf die mittlere Belegungsdauer t_m zu normieren. Das Angebot $A = c_A \cdot t_m$ ist dann betragsgleich mit der mittleren Anrufdichte c_A .

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Enden eines Rufes ist

$$\varepsilon = \frac{1}{t_m}$$

Durch die Normierung der Zeit auf die mittlere Belegungsdauer t_m wird also die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Enden einer Belegung

$$\varepsilon = 1$$

Denkt man sich das betrachtete Leitungsbündel zur Zeit $t = 0$ völlig frei und "schaltet" zu diesem Zeitpunkt den Verkehr ein, so ergibt sich zunächst ein Einschwingvorgang, der durch ein System von Differentialgleichungen beschrieben werden kann, welche unter Berücksichtigung der Anruf-

dichte c_A und der Wahrscheinlichkeitsdichte für das Enden bestehender Belegungen aufgestellt werden können. In /32/ wurde gezeigt, dass das System nach der Zeit von drei bis vier mittleren Belegungsdauern praktisch in den stationären Zustand, der durch zeitinvariante Wahrscheinlichkeiten gekennzeichnet ist, übergeht ("statistisches Gleichgewicht"). In diesem Zustand kann jede Anordnung durch ein System von Differenzgleichungen beschrieben werden. Die Intensität des Verkehrs in einem Bündel wird zwar im Laufe eines Tages schwanken, ist jedoch während der Hauptverkehrszeit praktisch konstant, das heisst, der Verkehr ist während dieser Zeit weitgehend stationär. Für diese Hauptverkehrszeit jedes Tages müssen auch Koppelanordnungen und Leitungsbündel dimensioniert werden.

Im folgenden werden deshalb alle Anordnungen für den Fall des stationären Verkehrs untersucht. Das "statistische Gleichgewicht" ist eine von A. K. Erlang eingeführte Kurzbezeichnung für den mathematischen Ansatz, welcher den Geburts- und Sterbeprozess bei stationärem Verkehr beschreibt.

III

VOLLKOMMEN ERREICHBARE BÜNDEL IN ÜBERLAUFSYSTEMEN

III.1. Überlaufsysteme mit zwei vollkommen erreichbaren Bündeln

Eine Gruppierung, die aus zwei vollkommen erreichbaren Bündeln besteht, ist in Bild 6 dargestellt.

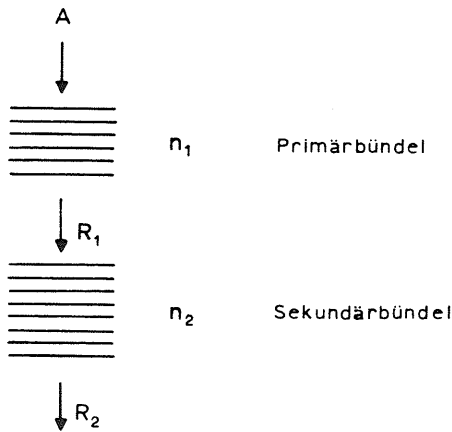


Bild 6: Gruppierung mit zwei vollkommen erreichbaren Bündeln

An ein Primärbündel von n_1 Leitungen wird der Zufallsverkehr A angeboten. Der Verkehrsrest R_1 , der von diesem Bündel nicht aufgenommen werden kann, läuft über auf ein Sekundärbündel mit n_2 Leitungen. Der Verkehrsanteil, der auch im Sekundärbündel nicht durchgeschaltet werden kann, wird als Verkehrsrest R_2 bezeichnet.

Unter der Verlustwahrscheinlichkeit (kurz "Verlust") B eines Bündels (bzw. einer Koppelanordnung) versteht man den

auf den angebotenen Verkehr bezogenen Verkehrsrest des Bündels. Der Verlust B_1 im Primärbündel ist also

$$B_1 = \frac{R_1}{A} \quad (1)$$

für den Verlust im Sekundärbündel gilt

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

und der Gesamtverlust B_{ges} der Gruppierung ist

$$B_{ges} = \frac{R_2}{A} \quad (3)$$

III.1.1. Verlustwahrscheinlichkeit und Gleichzeitigkeitsverteilung im Primärbündel

Der Verkehr (und damit auch die Verlustwahrscheinlichkeit) im Primärbündel ist wegen des Poisson-Anrufprozesses (Poisson-Angebots) unabhängig von der Struktur und Verkehrsbelastung der sekundären Koppelanordnungen und Bündel. Die Verlustwahrscheinlichkeit eines Primärbündels kann deshalb stets ohne Berücksichtigung des Sekundärbündels berechnet werden.

Für ein vollkommen erreichbares Primärbündel mit n_1 Leitungen und dem angebotenen Verkehr A erhält man für stationären Verkehr die Verlustwahrscheinlichkeit B_1 nach der Erlang'schen Verlustformel /6, 29/. Zum besseren Verständnis der folgenden Kapitel wird die Herleitung von A. K. Erlang kurz wiederholt:

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem vollkommen erreichbaren Primärbündel mit n_1 Leitungen gerade x_1 Leitungen belegt sind, sei mit $p(x_1)$ bezeichnet ($0 \leq x_1 \leq n_1$). Diese Wahrscheinlichkeiten $p(x_1)$ sind wegen des Poisson-Angebots zeitinvariant. Betrachtet man ein Zeitintervall $\Delta t \rightarrow 0$, so wird

nach dem Prinzip von der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts /6/ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $\{x_1\}$ (d.h. " x_1 Leitungen belegt") in einem Zeitintervall Δt entsteht, gleich gross wie jene Wahrscheinlichkeit, dass dieser Zustand im Zeitintervall Δt verschwindet. Oder anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $\{x_1\}$ im Zeitelement Δt in den Zustand $\{x_1+1\}$ übergeht, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall Δt der Zustand $\{x_1+1\}$ in den Zustand $\{x_1\}$ übergeht. Die Wahrscheinlichkeiten für mehr als ein Ereignis im Zeitelement Δt sind klein von höherer Ordnung in Δt und verschwinden deshalb für $\Delta t \rightarrow 0$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $\{x_1\}$ im Zeitelement Δt durch einen neuen Ruf in den Zustand $\{x_1+1\}$ übergeht, ist (bis auf Glieder höherer Ordnung in Δt):

$$p(x_1) \cdot c_A \cdot \Delta t$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $\{x_1+1\}$ im Zeitintervall Δt durch das Ende einer der (x_1+1) Belegungen in den Zustand $\{x_1\}$ übergeht, ist

$$p(x_1+1) \cdot (x_1+1) \cdot \varepsilon \cdot \Delta t$$

Man erhält deshalb nach dem Prinzip des statistischen Gleichgewichts (siehe oben) das folgende System von Differenzgleichungen für die Wahrscheinlichkeiten $p(x_1)$:

$$p(x_1) \cdot c_A \cdot \Delta t = p(x_1+1) \cdot (x_1+1) \cdot \varepsilon \cdot \Delta t, \quad (4a)$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1-1$$

Mit $\varepsilon = \frac{1}{t_m}$ ergibt sich hieraus

$$p(x_1) \cdot c_A = p(x_1+1) \cdot (x_1+1) \cdot \frac{1}{t_m},$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1-1$$

und mit $c_A \cdot t_m = A$

$$A \cdot p(x_1) = (x_1+1) \cdot p(x_1+1), \quad (4b)$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1-1$$

(Wenn man die Zeit auf die mittlere Belegungsdauer normiert ($c_A \rightarrow A, \varepsilon \rightarrow 1$), so ergibt sich die Gleichung (4a) direkt in der Gestalt von Gleichung (4b).) Aus Gleichung (4b) erhält man

$$p(x_1+1) = \frac{A}{x_1+1} \cdot p(x_1), \quad (4c)$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1$$

Diese Beziehung stellt eine Rekursionsformel für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1)$ dar. Ausserdem gilt die zusätzliche Bedingung, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $p(x_1)$ gleich eins ist:

$$\sum_{x_1=0}^{n_1} p(x_1) = 1 \quad (4d)$$

Die Auflösung des Gleichungssystems (4c,d) ergibt

$$p(x_1) = \frac{\frac{A^{x_1}}{x_1!}}{\sum_{\xi=0}^{n_1} \frac{A^\xi}{\xi!}}, \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \quad (5)$$

Die Verlustwahrscheinlichkeit B_1 ist bei Zufallsverkehr gleich der Blockierungswahrscheinlichkeit der erreichbaren Abnehmerleitungen, also hier gleich der Wahrscheinlichkeit $p(n_1)$, dass alle n_1 Leitungen belegt sind:

$$B_1 = \frac{\frac{A^{n_1}}{n_1!}}{\sum_{x_1=0}^{n_1} \frac{A^{x_1}}{x_1!}} = E_{n_1}(A) \quad (6)$$

Diese Beziehung (6) wird als Erlang'sche Verlustformel bezeichnet und mit $E_{n_1}(A)$ abgekürzt.

Der Verkehrsrest R_1 ist

$$R_1 = A \cdot B_1 = A \cdot E_{n_1}(A) \quad (7)$$

III.1.2. Verlustwahrscheinlichkeit und Gleichzeitigkeitsverteilung im Sekundärbündel

Bei der Berechnung des Verlusts B_2 im Sekundärbündel kann man davon ausgehen, dass das Primärbündel und das Sekundärbündel zusammen wieder ein vollkommen erreichbares Bündel darstellen. Man wird also den Gesamtverlust B_{ges} ebenfalls nach der Erlang'schen Formel (6) berechnen:

$$B_{ges} = E_{(n_1+n_2)}(A) = \frac{A^{n_1+n_2}}{(n_1+n_2)!} \sum_{x_1=0}^{n_1+n_2} \frac{A^{x_1}}{x_1!} \quad (8)$$

Damit ergibt sich der Verkehrsrest R_2 zu

$$R_2 = A \cdot B_{ges} \quad (9)$$

und der Verlust B_2 im Sekundärbündel

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} = \frac{A \cdot B_{ges}}{A \cdot B_1} = \frac{B_{ges}}{B_1}$$

oder

$$B_2 = \frac{E_{(n_1+n_2)}(A)}{E_{n_1}(A)} \quad (10)$$

Die Bestimmung der Gleichzeitigkeitsverteilung $p(x_2)$ im Sekundärbündel ist schwieriger, weil diese von der Verteilung $p(x_1)$ im Primärbündel abhängig ist. Wenn im Sekundärbündel x_2 Leitungen belegt sind, können gleichzeitig im Primärbündel $0, 1, 2, \dots, n_1$ Leitungen belegt sein. Demnach ist

$$p(x_2) = \sum_{x_1=0}^{n_1} p(x_1, x_2), \quad x_2 = 0, 1, \dots, n_2 \quad (11)$$

Dabei ist $p(x_1, x_2)$ die Wahrscheinlichkeit, dass im Primärbündel gerade x_1 Leitungen und im Sekundärbündel x_2 Leitungen belegt sind.

Nach dem Prinzip des statistischen Gleichgewichts erhält man für diese Zustände $p(x_1, x_2)$ ein System von $(n_1+1) \cdot (n_2+1)$ linearen Gleichungen folgender Form:

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) \cdot (\alpha \cdot A + x_1 + x_2) &= p(x_1-1, x_2) \cdot \beta \cdot A \\ &+ p(x_1, x_2-1) \cdot \gamma \cdot A \\ &+ p(x_1+1, x_2) \cdot (x_1+1) \cdot \delta \quad (12a) \\ &+ p(x_1, x_2+1) \cdot (x_2+1) \cdot \zeta, \end{aligned}$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2$$

Dabei ist

$$\alpha = 1, \text{ wenn } x_1+x_2 < n_1+n_2, \quad \text{sonst } \alpha = 0$$

$$\beta = 1, \text{ wenn } x_1 \neq 0, \quad \text{sonst } \beta = 0$$

$$\gamma = 1, \text{ wenn } x_1 = n_1 \text{ und } x_2 \neq 0, \quad \text{sonst } \gamma = 0$$

$$\delta = 1, \text{ wenn } x_1 < n_1, \quad \text{sonst } \delta = 0$$

$$\zeta = 1, \text{ wenn } x_2 < n_2, \quad \text{sonst } \zeta = 0$$

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ ist gleich eins:

$$\sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} p(x_1, x_2) = 1 \quad (12b)$$

Von Brockmeyer wurde eine geschlossene Lösung des Gleichungssystems (12a, b) angegeben /7/. Damit ist auch die Gleichzeitigkeitsverteilung $p(x_2)$ im Sekundärbündel bekannt.

Ein anderer Lösungsweg wurde von Chastang eingeschlagen /9/. Chastang löst dieses Gleichungssystem mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

III.2. Überlaufsysteme mit mehreren Primärbündeln vollkommener Erreichbarkeit

Wie schon erwähnt, haben in der Praxis oft mehrere Primärbündel ein gemeinsames Sekundärbündel (s. Bild 7).

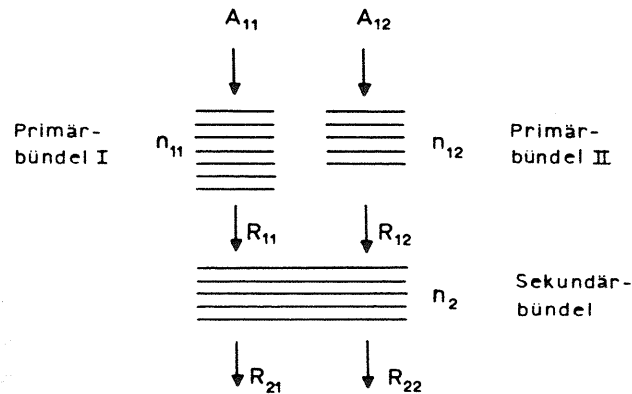


Bild 7: Überlaufsystem mit zwei Primärbündeln

III.2.1. Exakte Berechnung

Zu jedem der (n_2+1) im Sekundärbündel möglichen Belegungszustände gibt es im Primärbündel I jeweils $(n_{11}+1)$ mögliche Belegungszustände und dazu im Primärbündel II jeweils $(n_{12}+1)$ mögliche Zustände. Dieses Problem führt also auf ein lineares Gleichungssystem vom Rang $Rg = (n_{11}+1) \cdot (n_{12}+1) \cdot (n_2+1)$ der folgenden Form:

$$\begin{aligned} & (\alpha \cdot A_{11} + \beta \cdot A_{22} + x_{11} + x_{12} + x_2) \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_2) \\ &= \gamma \cdot A_{11} \cdot p(x_{11}-1, x_{12}, x_2) \\ &+ \delta \cdot A_{12} \cdot p(x_{11}, x_{12}-1, x_2) \\ &+ (\zeta \cdot A_{11} + \eta \cdot A_{12}) \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_2-1) \\ &+ \vartheta \cdot (x_{11}+1) \cdot p(x_{11}+1, x_{12}, x_2) \\ &+ \chi \cdot (x_{12}+1) \cdot p(x_{11}, x_{12}+1, x_2) \\ &+ \lambda \cdot (x_2+1) \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_2+1), \end{aligned} \quad (13a)$$

$$x_{11} = 0, 1, \dots, n_{11}$$

$$x_{12} = 0, 1, \dots, n_{12}$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2$$

Dabei ist $p(x_{11}, x_{12}, x_2)$ die Wahrscheinlichkeit, dass im Primärbündel I gerade x_{11} Leitungen, im Primärbündel II gerade x_{12} Leitungen und im Sekundärbündel x_2 Leitungen belegt sind. Für die Größen $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ gilt

$$\alpha = 1, \text{ wenn } x_{11} + x_2 < n_{11} + n_2, \quad \text{anderfalls } \alpha = 0$$

$$\beta = 1, \text{ wenn } x_{12} + x_2 < n_{12} + n_2, \quad \text{anderfalls } \beta = 0$$

$$\gamma = 1, \text{ wenn } x_{11} > 0, \quad \text{anderfalls } \gamma = 0$$

$$\delta = 1, \text{ wenn } x_{12} > 0, \quad \text{anderfalls } \delta = 0$$

$$\begin{aligned} \zeta &= 1, \text{ wenn } x_{11} = n_{11} \text{ und } x_2 > 0, \text{ anderfalls } \zeta = 0 \\ \eta &= 1, \text{ wenn } x_{12} = n_{12} \text{ und } x_2 > 0, \text{ anderfalls } \eta = 0 \\ \vartheta &= 1, \text{ wenn } x_{11} < n_{11}, \text{ anderfalls } \vartheta = 0 \\ \chi &= 1, \text{ wenn } x_{12} < n_{12}, \text{ anderfalls } \chi = 0 \\ \lambda &= 1, \text{ wenn } x_2 < n_2, \text{ anderfalls } \lambda = 0 \end{aligned}$$

Für die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_{11}, x_{12}, x_2)$ gilt ausserdem

$$\sum_{x_{11}=0}^{n_{11}} \sum_{x_{12}=0}^{n_{12}} \sum_{x_2=0}^{n_2} p(x_{11}, x_{12}, x_2) = 1 \quad (13b)$$

Eine geschlossene Lösung ist hierfür noch nicht bekannt; jedoch können derartige Systeme auf elektronischen Digitalrechnern numerisch gelöst werden.

Allerdings wurde dieses Verfahren bisher noch nicht zur Berechnung von Gruppierungen nach Art von Bild 7 benützt, sondern nur zur näherungsweise Berechnung des Verlusts von nicht verschränkten Mischungen /2/. Deshalb werden hier einige Gruppierungen nach Bild 7 untersucht.

Zur numerischen Berechnung derartiger Gleichungssysteme mit hohem Rang verwendet man zweckmässig iterative Methoden. Besonders geeignet ist das sogenannte Überrelaxationsverfahren /8, 18, 36/. Bei diesem Verfahren braucht man nicht die ganze Matrix des Gleichungssystems zu speichern ($Rg^2 + Rg$ Speicherplätze !), sondern nur die Näherungswerte für die Unbekannten (Rg Speicherplätze). Allerdings müssen dann die einzelnen Elemente der Matrix jedesmal neu berechnet werden, wenn sie im Lauf der Rechnung benötigt werden. Da die Zahl der Speicherplätze eines Digitalrechners begrenzt ist, kann man mit dem Überrelaxationsverfahren wesentlich umfangreichere Systeme lösen als mit Eliminationsverfahren.

Für die in Bild 7 gezeigte Gruppierung erhält man mit

den Angeboten

$$A_{11} = 8 \text{ Erl.}, \quad A_{12} = 6 \text{ Erl.},$$

und den Leitungszahlen

$$n_{11} = 7, \quad n_{12} = 4, \quad n_2 = 5$$

die Werte

$$\begin{aligned} R_{11} &= 2,465 \text{ Erlang}, & R_{12} &= 1,364 \text{ Erlang} \\ R_{21} &= 0,9566 \text{ Erlang}, & R_{22} &= 0,9711 \text{ Erlang} \end{aligned}$$

$$B_{21} = \frac{R_{21}}{R_{11}} = 38,80\%, \quad B_{22} = \frac{R_{22}}{R_{21}} = 34,47\%$$

$$B_2 = \frac{R_{21} + R_{22}}{R_{11} + R_{12}} = 36,49\%$$

Diese Werte werden in Abschnitt III.2.2. mit jenen aus Näherungsverfahren verglichen.

III.2.2. Das Streuwertverfahren für Bündel vollkommener Erreichbarkeit

Da unvollständige Serienschaltungen vollkommen erreichbarer Bündel in der Praxis häufig vorkommen, wurden geeignete Näherungsverfahren dafür entwickelt. Am genauesten ist das sogenannte Streuwertverfahren /1, 35/. Dieses geht davon aus, dass der auf das Sekundärbündel überlaufende Summenverkehr \bar{R} in seinen statistischen Eigenschaften erheblich abweicht von einem Zufallsverkehr gleichen Mittelwerts, dass er aber andererseits in guter Näherung durch einen anderen Überlaufverkehr mit gleichem Mittelwert \bar{R} (erstes Moment) und gleicher Varianz V (zweites Moment) ersetzt werden kann. Anstelle der Varianz V verwendet man in der Praxis zweckmässig den sogenannten Streuwert $D = V - R$ (s. Bild 8). Wegen $A = V$ für Poissonprozesse ist bei Zufallsverkehr der Streuwert $D = 0$.

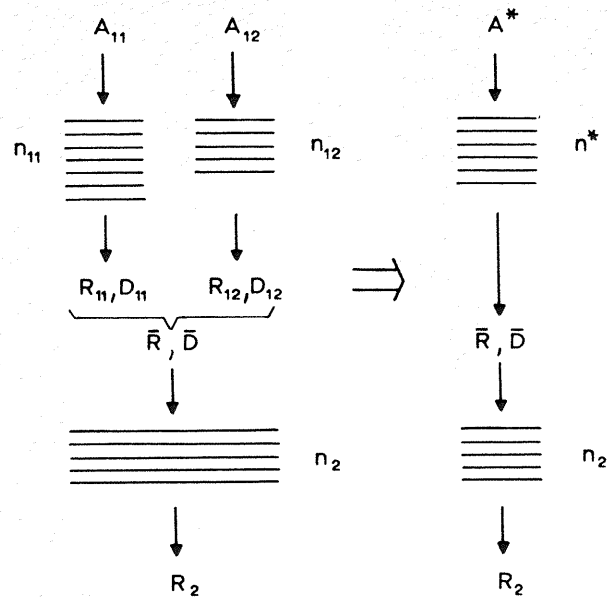


Bild 8: Prinzip des Streuwertverfahrens: die verschiedenen Primärbündel werden ersetzt durch ein (fiktives) Ersatz-Primärbündel mit dem gleichen Überlaufverkehr (\bar{R} , \bar{D})

Beim Streuwertverfahren berechnet man nun zunächst die auf das Sekundärbündel überlaufenden Verkehrsreste R_{11} und R_{12} und die zugehörigen Streuwerte D_{11} und D_{12} . Diese erhält man nach der Formel

$$D = \left[\frac{A}{n+1+A-R} - R \right] \quad (14)$$

Diese Beziehung wurde von Wilkinson und Riordan /35/ und von Bretschneider /1/ hergeleitet; ein neuer, vereinfachter Beweis wurde von Herzog erbracht /13, 16/.

Da Mittelwert und Varianz von statistisch unabhängigen Zufallsvariablen je additiv sind /11/, erhält man den

gesamten an das Sekundärbündel angebotenen Verkehr (\bar{R} , \bar{D}) aus

$$\bar{D} = D_{11} + D_{12} \quad (15)$$

$$\bar{R} = R_{11} + R_{12} \quad (16)$$

(und entsprechend bei mehreren Primärbündeln).

Nun ersetzt man die verschiedenen, in Wirklichkeit vorhandenen Primärbündel durch ein (fiktives) Ersatz-Primärbündel mit n^* Leitungen und einem Angebot A^* , das denselben Summen-Überlaufverkehr (\bar{R} , \bar{D}) liefert (s. Bild 8). Der Verlust im Sekundärbündel kann damit sehr einfach bestimmt werden nach der in Abschnitt III.1. beschriebenen Methode für Überlaufsysteme mit nur einem Primärbündel.

Bei dem in Abschnitt III.2.1 berechneten Beispiel der in Bild 7 gezeigten Gruppierung erhält man mit dem Streuwertverfahren für den Verlust im Sekundärbündel

$$B_{2\text{Str}} = 37,17\%$$

Der exakte Wert für den Verlust im Sekundärbündel ist (s. Abschnitt III.2.1)

$$B_2 = 36,49\%$$

III.2.3. Vergleich der exakten Werte mit Ergebnissen nach dem Streuwertverfahren

Durch zahlreiche Verkehrstests (Simulation von Anrufprozess und Bündeln auf Digitalrechnern /28/) wurde gezeigt, dass man mit dem Streuwertverfahren gute Näherungswerte erhält. Es liefert jedoch nur einen Wert für den pauschalen Verlust des gesamten Überlaufverkehrs im Sekundärbündel $B_2 = \frac{R_{21} + R_{22}}{R_{11} + R_{12}}$ und macht keine Aussage über die Verluste $B_{21} = R_{21}/R_{11}$ bzw. $B_{22} = R_{22}/R_{12}$ der einzelnen Überlaufreste R_{11} bzw. R_{12} . Der nach dem Streuwertverfahren berechnete Wert $B_{2\text{Str}}$ wird jedoch oft auch als Näherung für

die Werte B_{21} und B_{22} benutzt.

Im folgenden werden exakte Werte für den pauschalen Verlust B_2 und für die Einzelverluste B_{21} bzw. B_{22} mit dem Näherungswert B_{2Str} nach dem Streuwertverfahren verglichen.

Die Abweichung der Einzelverluste von dem pauschalen Verlust wird um so stärker sein, je mehr sich die überlaufenden Verkehrsreste bezüglich ihrer höheren Momente unterscheiden. Deshalb soll zunächst der in dieser Hinsicht extreme Sonderfall untersucht werden, dass ein Überlaufverkehr und ein Zufallsverkehr einem gemeinsamen Bündel angeboten werden (s. Bild 9).

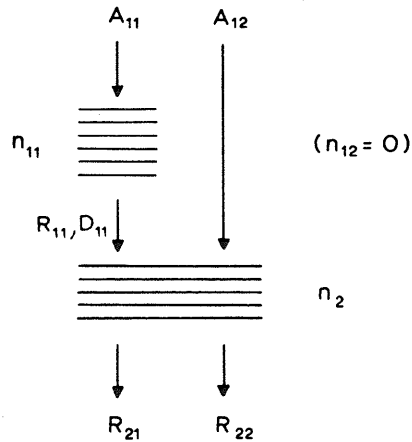


Bild 9: Sekundärbündel, dem ein Überlaufverkehr (R_{11}, D_{11}) und ein Zufallsverkehr (A_{12}) angeboten wird

In den Diagrammen in Bild 10 sind für eine solche Gruppierung die Einzelverluste $B_{21} = R_{21}/R_{11}$ und $B_{22} = R_{22}/A_{12}$, der pauschale Verlust $B_2 = \frac{R_{21} + R_{22}}{R_{11} + A_{12}}$ und die Näherung B_{2Str} nach dem Streuwertverfahren in Abhängigkeit von dem relativen

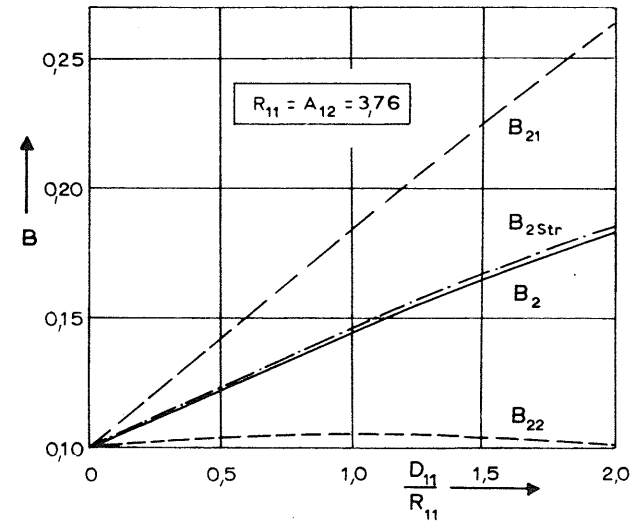
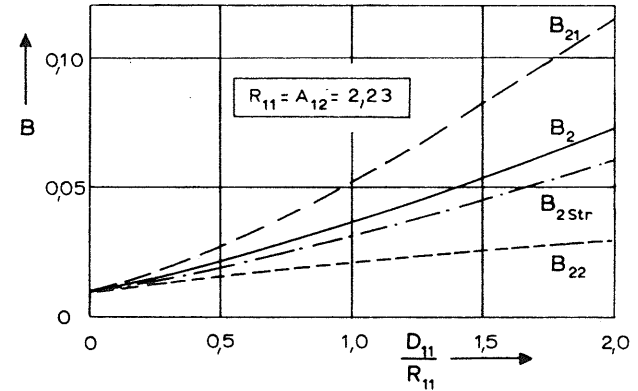


Bild 10: Einzelverluste B_{21} bzw. B_{22} , Pauschalverlust B_2 und Näherungswert B_{2Str} nach dem Streuwertverfahren für ein Überlaufsystem nach Bild 9 mit $R_{11} = A_{12} = 2,23$ Erlang (oberes Diagramm) bzw. $R_{11} = A_{12} = 3,76$ Erlang (unteres Diagramm) und mit $n_2 = 10$ Leitungen

Streuwert D_{11}/R_{11} dargestellt. Hierbei wurde eine Leitungszahl $n_2 = 10$ im Sekundärbündel zugrunde gelegt. Ausgehend von einem Verlust von $B_2 = 1\%$ (oberes Diagramm) bzw. $B_2 = 10\%$ (unteres Diagramm) für Zufallsverkehr (mit $R_{11} = A_{12} = 2,23$ Erl. bzw. $R_{11} = A_{12} = 3,76$ Erl. und $D_{11} = 0$) sind jeweils die Verluste aufgetragen, die entstehen, wenn $R_{11} = A_{12}$ konstant gehalten wird, der Streuwert D_{11} aber durch Vergrössern der Leitungszahl n_{11} erhöht wird.

Aus diesen Diagrammen (Bild 10) ist ersichtlich, dass das Streuwertverfahren einen guten Näherungswert für den pauschalen Verlust B_2 im Sekundärbündel liefert. Dagegen können die Einzelverluste B_{21} bzw. B_{22} unter Umständen stärker von diesem Wert abweichen, wobei der Verlust des Zufallsverkehrs kleiner ist als der pauschale Verlust, der Verlust des Überlaufverkehrs dagegen grösser:

$$B_{21} \cong B_2 \approx B_{2Str}$$

$$B_{22} \leq B_2 \approx B_{2Str}$$

Bei der Dimensionierung von Leitungsbündeln besteht oft die Vorschrift, dass der Verlust, den ein Zufallsverkehr insgesamt erfährt, einen bestimmten Wert nicht überschreitet, z.B. $B \leq 1\%$. Bei Gruppierungen nach Art von Bild 9 muss dann insbesondere der Verlust B_{22} des Zufallsverkehrs A_{12} diese Bedingung erfüllen.

Dimensioniert man also n_2 mit Hilfe des Streuwertverfahrens so, dass $B_{2Str} = B_{2soll}$, so ist der Verlust B_{22} des Zufallsverkehrs A_{12} kleiner als der vorgeschriebene Wert B_{2soll} (siehe Bild 10). Dies gilt nicht nur für den betrachteten Fall, sondern allgemein, und zwar aus folgendem Grund:

Das Streuwertverfahren berücksichtigt in jedem Fall die Tatsache, dass die Verluste des streuwertbehafteten Verkehrsanteils grösser sind als Blockierungszeit-proportional. Die Vernachlässigung der Momente dritter und höherer Ordnung bewirkt lediglich, dass diese Verlusterhöhung nicht streng exakt berücksichtigt wird. Da die Verluste des anteiligen Zufallsangebots stets zeitproportional, das heisst

$c\sqrt{A_2} \cdot p(n_2)$ sind, ist der Verlust des Zufallsverkehrs in jedem Falle kleiner als der nach dem Streuwertverfahren berechnete Wert B_{2Str} .

Umgekehrt wird der Verlust B_{21} des Überlaufverkehrs ($D > 0$) stets grösser sein als der Pauschalverlustwert B_2 und als B_{2Str} . Diese Ungenauigkeit des Streuwertverfahrens kann in Kauf genommen werden: Der Gesamtverlust $B_{1ges} = B_{11} \cdot B_{12}$ des Verkehrs A_{11} ist in allen Fällen kleiner als der zulässige Wert B_{2soll} ($B_{11} = R_{11}/A_{11}$ ist der "Verlust" des Verkehrs A_{11} im Primärbündel).

Die Anwendung des Streuwertverfahrens liefert also bezüglich B_{1ges} wie auch bezüglich B_{22} Verlustwerte $< B_2$, das heisst auf der sicheren Seite.

Bei Gruppierungen mit zwei Primärbündeln (s. Bild 7) liegen die Verhältnisse ähnlich. Damit man hier die Verlustwerte bei verschiedenen Werten D_{11}/R_{11} bzw. D_{12}/R_{12} besser miteinander vergleichen kann, ist es für die Rechnung nützlich, die Gruppierung nach Bild 7 etwas abzuwandeln, so dass es möglich ist, ausser den überlaufenden Verkehrsresten R_{11} bzw. R_{12} auch exakte Werte für die zugehörigen Streuwerte D_{11} bzw. D_{12} vorzugeben. (Bei den Gruppierungen nach Bild 7 bzw. Bild 9 müsste hierzu jeweils zwischen zwei Werten D bei verschiedenen Leitungszahlen des betreffenden Primärbündels interpoliert werden).

Nach einem Vorschlag von Bretschneider /2/ kann man dies mit einem zusätzlichen Angebot A'_{11} bzw. A'_{12} erreichen (s. Bild 11), das zwar dem betreffenden Primärbündel angeboten wird, dessen Verkehrsreste R'_{11} bzw. R'_{12} jedoch nicht auf das Sekundärbündel überlaufen.

Im folgenden wird eine andere Lösung angegeben, welche es ebenfalls erlaubt, exakte Wertepaare R_{11}, D_{11} bzw. R_{12}, D_{12} vorzuschreiben: Ausser den Verkehrsresten R_{11} bzw. R_{12} werden dem Sekundärbündel zusätzliche Zufallsverkehre A_{Z1} bzw. A_{Z2} angeboten (s. Bild 12).

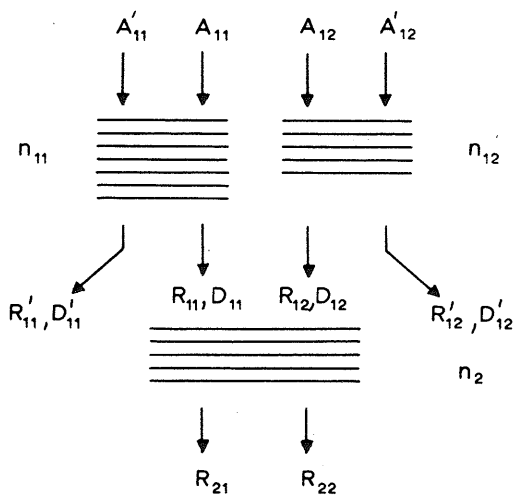


Bild 11: Überlaufsystem mit zusätzlichen Angeboten A'_{11} bzw. A'_{12} an die Primärbündel

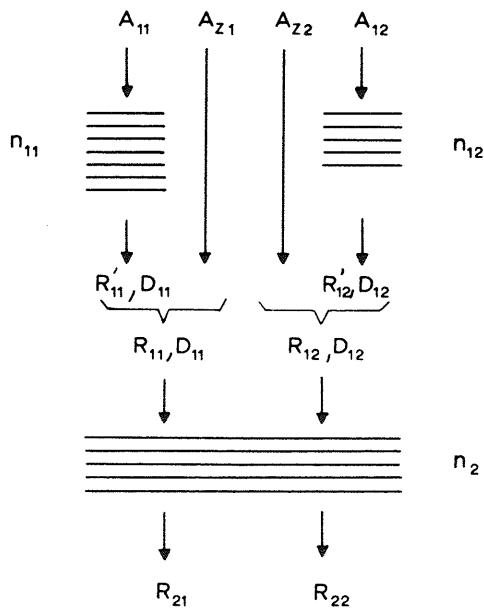


Bild 12: Überlaufsystem mit zusätzlichen Zufallsangeboten A_{Z1} bzw. A_{Z2} an das Sekundärbündel

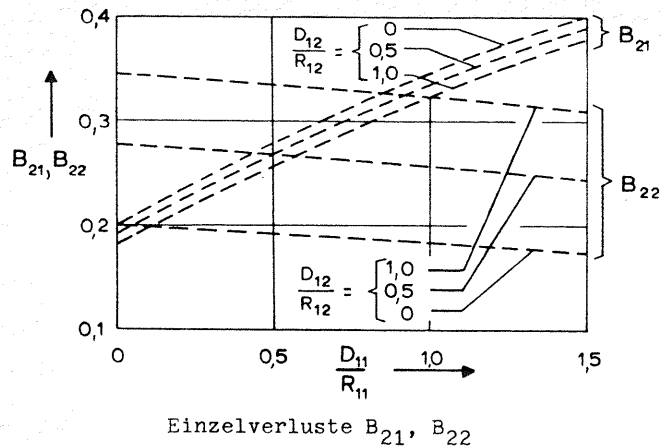
Man bestimmt dann die Paare (A_{11}, n_{11}) und (A_{12}, n_{12}) so, dass der Streuwert des Überlaufverkehrs den vorgegebenen Wert D_{11} bzw. D_{12} hat und der Verkehrsrest R'_{11} bzw. R'_{12} selbst etwas kleiner als der Sollwert sind (auf gerundete Werte n_1, n_2). Den fehlenden Betrag addiert man als Zufallsverkehr A_{Z1} bzw. A_{Z2} .

Die Unterschiede der Ergebnisse nach diesen Methoden gemäss Bild 11 und 12 sind sehr klein. Sie haben ihre Ursache in den Momenten höherer Ordnung der Verkehrsreste R_{11} bzw. R_{12} , die sich hier geringfügig voneinander unterscheiden. (Die Werte in den Diagrammen in Bild 13 wurden nach dem in Bild 11 dargestellten Verfahren berechnet).

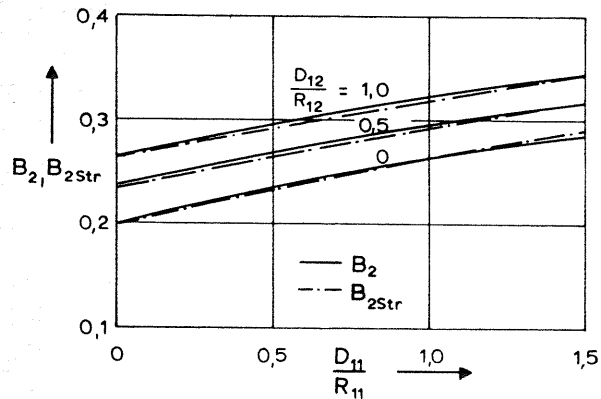
In den Diagrammen in Bild 13 sind die Einzelverluste B_{Z1} bzw. B_{Z2} (oberes Diagramm) sowie der pauschale Verlust B_2 und der Näherungswert B_{2Str} nach dem Streuwertverfahren aufgetragen (unteres Diagramm) für eine Gruppierung nach Bild 7 bzw. Bild 11 (mit $n_2 = 5$ Leitungen). Die Verluste sind hier, ähnlich wie bei dem Diagramm in Bild 10, in Abhängigkeit vom relativen Streuwert D_{11}/R_{11} dargestellt, jedoch mit dem relativen Streuwert D_{12}/R_{12} als Parameter. (Das Diagramm in Bild 10 stellt einen Sonderfall der Diagramme in Bild 13 dar für $D_{12}/R_{12} = 0$). Die überlaufenden Verkehrsreste R_{11} und R_{12} wurden (wie in Bild 10) gleich gross gewählt und konstant gehalten ($R_{11} = R_{12} = 2$ Erlang).

Aus Bild 13 ist zunächst wieder ersichtlich, dass das Streuwertverfahren einen guten Näherungswert für den pauschalen Verlust im Sekundärbündel liefert. Ausserdem sieht man, dass die Verluste der einzelnen Überlaufreste im allgemeinen hiervon abweichen. Dabei erfährt der Überlaufrest mit dem grösseren relativen Streuwert D/R den höheren Verlust.

Wenn die Verkehrsreste R_{11} und R_{12} nicht gleich sind, liegen die Verhältnisse ähnlich. Die exakte Rechnung zeigt, dass in den meisten Fällen auch bei ungleichen Verkehrsresten ($R_{11} \neq R_{12}$) derjenige Verkehrsrest das Sekundärbündel



Einzelverluste B_{21} , B_{22}



Pauschalverlust B_2 und Näherungswert B_{2Str} nach dem Streuwertverfahren

Bild 13: Verlustwahrscheinlichkeiten B_{21} , B_{22} , B_2 und B_{2Str} in Abhängigkeit des relativen Streuwerts D_{11}/R_{11} mit D_{12}/R_{12} als Parameter für ein Überlaufsystem nach Bild 7 bzw. Bild 11 (mit $R_{11} = R_{12} = 2$ Erlang und $n_2 = 5$ Leitungen)

mit der grösseren Verlustwahrscheinlichkeit absucht, welcher den grösseren relativen Streuwert besitzt. Dies wird nun an zwei Beispielen gezeigt:

a) Einem Sekundärbündel mit 12 Leitungen werden zwei Verkehrsreste

und

$$R_{11} = 3 \text{ Erlang, } D_{11} = 2,4$$

$$R_{12} = 1 \text{ Erlang, } D_{12} = 1,6$$

also insgesamt

$$R_{11} + R_{12} = 4 \text{ Erlang, } D_{11} + D_{12} = 4$$

angeboten. Die relativen Streuwerte dieser Verkehrsreste sind

$$\frac{D_{11}}{R_{11}} = 0,8, \quad \frac{D_{12}}{R_{12}} = 1,6$$

Der Verkehrsrest R_{11} mit dem grösseren Mittelwert hat also in diesem Fall den kleineren relativen Streuwert:

$$\frac{D_{11}}{R_{11}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{D_{12}}{R_{12}}$$

Für dieses Beispiel erhält man die Verlustwerte

$$B_{21} = 1,432\% \quad B_{22} = 3,330\%$$

d.h.

$$\frac{B_{21}}{B_{22}} = 0,430$$

Der pauschale Verlust B_2 im Sekundärbündel ist

$$B_2 = 1,907\%$$

Nach dem Streuwertverfahren erhält man hierfür den Näherungswert

$$B_{2Str} = 1,57\%$$

b) An ein Sekundärbündel mit 12 Leitungen werden wieder (wie in Beispiel a) zwei Verkehrsreste

$$R_{11} = 3 \text{ Erlang, } R_{12} = 1 \text{ Erlang}$$

mit einem Gesamtstreuwert $D_{11}+D_{12} = 4$ angeboten, jedoch mit den Einzelstreuwerten

$$D_{11} = 3,4286 \text{ und } D_{12} = 0,5714$$

Der Verkehrsrest R_{11} mit dem grösseren Mittelwert hat also in diesem Beispiel auch den grösseren relativen Streuwert:

$$\frac{D_{11}}{R_{11}} = 2 \cdot \frac{D_{12}}{R_{12}}$$

Man erhält dann die Verlustwahrscheinlichkeiten

$$B_{21} = 1,961\% , \quad B_{22} = 1,265\%$$

und damit

$$\frac{B_{21}}{B_{22}} = 1,551$$

Der pauschale Verlust im Sekundärbündel ist

$$B_2 = 1,787\%$$

Nach dem Streuwertverfahren erhält man hierfür wieder den Näherungswert

$$B_{2Str} = 1,57\%$$

Das Verhältnis der Verluste B_{21} und B_{22} wird also in erster Linie von den zweiten Momenten D_{11} und D_{12} bestimmt. Der Einfluss höherer Momente ist nur gering.

Wenn jedoch die relativen Streuwerte D_{11}/R_{11} und D_{12}/R_{12} nur geringfügig voneinander abweichen, kann auch der Fall eintreten, dass der Einfluss der höheren Momente überwiegt.

Dies wird am Beispiel eines Sekundärbündels mit 12 Leitungen gezeigt, dem die Verkehrsreste

$$\begin{aligned} R_{11} &= 3,5 \text{ Erlang, } & D_{11} &= 3,54 \\ R_{12} &= 0,5 \text{ Erlang, } & D_{12} &= 0,46 \end{aligned}$$

angeboten werden, wobei wieder

$$R_{11} + R_{12} = D_{11} + D_{12} = 4$$

ist. Die relativen Streuwerte sind

$$\frac{D_{11}}{R_{11}} = 1,011 \quad \text{und} \quad \frac{D_{12}}{R_{12}} = 0,92$$

also

$$\frac{D_{11}}{R_{11}} = 1,1 \cdot \frac{D_{12}}{R_{12}}$$

Für das dritte Moment, die Schiefe S eines Verkehrsrests, gilt

$$S = \sum_{x=0}^{\infty} (x - R)^3 \cdot p(x) \quad (17a)$$

Für die Verteilung von Überlaufverkehr hinter einem vollkommen erreichbaren Bündel ist von Bretschneider ein Rechenalgorithmus angegeben worden, mit dem die Schiefe berechenbar ist /5/. Ausserdem hat Bretschneider als weitere Kenngrösse noch die Unsymmetrie

$$T = S - 3D - R \quad (17b)$$

definiert /5/. Diese Definition ist zweckmässig, weil sie analog zu

$$D(V=0) = 0$$

auch den Wert

$$T(V=0) = 0$$

liefert. Ferner zeigt Gleichung (17b), dass bei gegebenen Parametern R und S die Unsymmetrie T mit wachsender Varianz $V = (R + D)$ abnimmt.

In dem hier betrachteten Beispiel erhält man für die Unsymmetrien der Verkehrsreste R_{11} und R_{12} die Werte

$$T_{11} = 2,589 , \quad T_{12} = 0,632$$

beziehungsweise für die relativen Unsymmetrien

$$\frac{T_{11}}{R_{11}} = 0,740 , \quad \frac{T_{12}}{R_{12}} = 1,264$$

Für die Verlustwahrscheinlichkeiten B_{21} und B_{22} ergeben sich die Werte

$$B_{21} = 1,655\% \quad \text{und} \quad B_{22} = 1,802\%$$

In diesem Beispiel hat also der Verkehrsrest R_{11} den kleineren Verlust, da er zwar einen grösseren relativen Streuwert, aber eine kleinere relative Unsymmetrie besitzt. (Die beiden Verlustwahrscheinlichkeiten unterscheiden sich in diesem Beispiel allerdings nur geringfügig).

Der Pauschalverlust B_2 im Sekundärbündel ist in diesem Fall

$$B_2 = 1,673\%$$

während man mit dem Streuwertverfahren wieder denselben Näherungswert

$$B_{2Str} = 1,57\%$$

erhält.

Die geringe Abhängigkeit der Verlustwahrscheinlichkeit vom dritten Moment (beziehungsweise von der Unsymmetrie T) des angebotenen Überlaufverkehrs zeigt auch Bild 14.

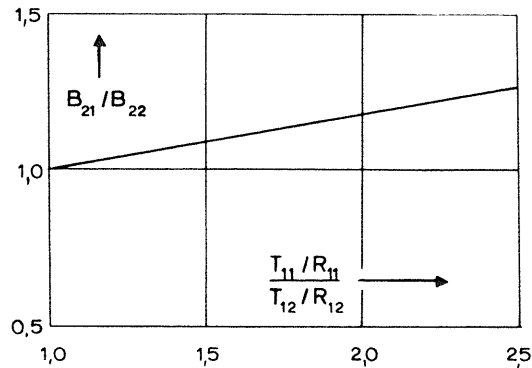


Bild 14: Der Einfluss der Unsymmetrie T auf die Verlustwahrscheinlichkeit

Hier ist die Relation B_{21}/B_{22} zweier an das Sekundärbündel angebotenen Restverkehre aufgetragen über dem Quotienten der relativen Schiefen $(T_{12}/R_{12}) : (T_{11}/R_{11})$. Beide Verkehrsreste haben hier stets den gleichen relativen Streuwert $D/R = 1$.

Zusammenfassung: Aufgrund obiger Untersuchungen ist ersichtlich, dass die Verlustwahrscheinlichkeiten in einem Sekundärbündel hauptsächlich von den zweiten Momenten der angebotenen Verkehrsreste abhängen und nur geringfügig von Momenten höherer Ordnung beeinflusst werden.

Mit dem Streuwertverfahren erhält man deshalb stets einen guten Näherungswert für den pauschalen Verlust B_2 im Sekundärbündel.

Die Teilverluste B_{21} und B_{22} der einzelnen Verkehrsreste weichen im allgemeinen von diesem Wert B_2 ab. Dabei erfährt in den meisten Fällen jener Verkehrsrest, welcher den grösseren relativen Streuwert hat, auch den grösseren Verlust.

Wenn jedoch die relativen Streuwerte der angebotenen Verkehrsreste nur wenig voneinander abweichen, kann der Einfluss der höheren Momente überwiegen, so dass unter Umständen der Verkehrsrest mit dem grösseren relativen Streuwert den kleineren Verlust hat. Allerdings liegen dann die Werte der Verlustwahrscheinlichkeiten so nahe beieinander, dass der Unterschied allenfalls von theoretischem Interesse sein kann.

IV

ÜBERLAUFSYSTEME MIT BÜNDELN VOLLKOMMENER UND UNVOLLKOMMENER ERREICHBARKEIT

IV.1. Unvollkommen erreichbares Primärbündel mit "realer" Mischung und vollkommen erreichbar Sekundärbündel

In Bild 15 ist eine Gruppierung dargestellt, die aus einem unvollkommen erreichbaren Primärbündel und einem vollkommen erreichbaren Sekundärbündel besteht. Bevor diese

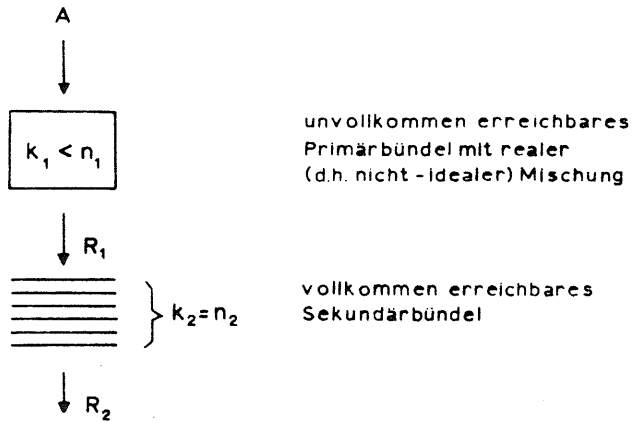


Bild 15: Überlaufsystem mit unvollkommen erreichbar, nicht-ideal gemischtem Primärbündel und vollkommen erreichbar Sekundärbündel

Gruppierung näher untersucht wird, soll im folgenden Abschnitt die Verlustberechnung bei unvollkommen erreichbaren Bündeln kurz erläutert werden.

IV.1.1. Der Verlust im unvollkommen erreichbaren Primärbündel

Bei unvollkommen erreichbaren Bündeln ist die Erreichbarkeit k kleiner als die Leitungszahl n , das heisst von den n vorhandenen Leitungen werden beim Eintreffen eines Rufes jeweils nur k abgesehen. Die Zuordnung der n Abnehmerleitungen zu den jeweils k Suchstellungen der einzelnen Zubringerteilgruppen bezeichnet man als Mischung. Es gibt eine Vielzahl verschiedener Prinzipien, nach denen solche Mischpläne entworfen werden können. Eine Übersicht der wichtigsten Mischungstypen findet sich in /33/.

Ein Beispiel einer sehr unkomplizierten Mischung mit $n = 10$ Leitungen, $g = 4$ Zubringerteilgruppen und der Erreichbarkeit $k = 4$ ist in Bild 16 dargestellt.

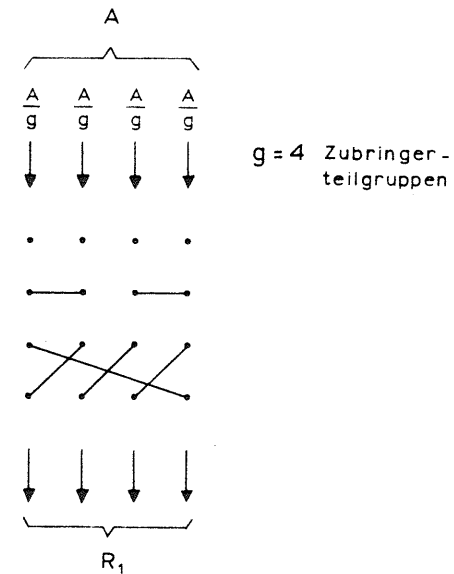


Bild 16: Einfache Mischung mit 10 Leitungen und der Erreichbarkeit $k = 4$

Der Typ einer Mischung wie auch deren Ausführung im Einzelfall hat unter Umständen grossen Einfluss auf den Verlust. Dies muss bei einer exakten Verlustberechnung berücksichtigt werden.

Ob ein Ruf eine freie Leitung erreicht, hängt im allgemeinen nicht nur von der Zahl der belegten Leitungen ab, sondern auch davon, welches Belegungs-"Muster" gerade im Mischungsplan besteht. Für eine exakte Berechnung genügt es also im allgemeinen Fall nicht, das System durch die pauschalen Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x)$ zu beschreiben, sondern es müssen auch noch die einzelnen Belegungsmuster unterschieden werden.

Für den Zustand "x aus n Leitungen belegt" gibt es $\binom{n}{x}$ mögliche Belegungsmuster. Insgesamt sind also

$$\sum_{x=0}^n \binom{n}{x} = 2^n$$

Belegungsmuster möglich. Die streng exakte Berechnung des Verlusts in einem unvollkommen erreichbaren Bündel mit n Leitungen führt deshalb auf ein lineares Gleichungssystem vom Rang 2^n . Nur bei speziellen Mischungen lässt sich dieser Rang aufgrund von Symmetrieeigenschaften mehr oder weniger reduzieren.

Bei einer exakten Berechnung des Verlusts muss auch die Absuchdisziplin berücksichtigt werden. Man unterscheidet:

- Die je Zubringerteilgruppe erreichten k Leitungen werden geordnet, von einer definierten Nullstellung aus abgesucht.
- Geordnetes Absuchen von der in einer vorangehenden Belegung benutzten Suchstellung aus (undefinierte Nullstellung).

- Zufällige Absuchfolge aller erreichbaren k Ausgänge (k! verschiedene, zufällig benutzte, mögliche Absuchfolgen).

Die Fälle des geordneten Absuchens ohne definierte Nullstellung kommen in der Praxis seltener vor. Sie können ausserdem (durch Umzeichnen) in allen sinnvollen Mischungen auf den allgemeineren Fall des geordneten Absuchens mit Nullstellung zurückgeführt werden.

Deshalb wird im folgenden immer vorausgesetzt, dass die Mischungen von einer definierten Nullstellung aus geordnet abgesucht werden.

Numeriert man die Leitungen einer Mischung in beliebiger Reihenfolge, so kann man die Mischung als Matrix M mit dem allgemeinen Glied $m_{s,j}$ beschreiben ($s = 1..k$, $j = 1..g$). Für das Beispiel der in Bild 16 gezeigten Mischung ist die zugehörige Matrix in Bild 17 dargestellt.

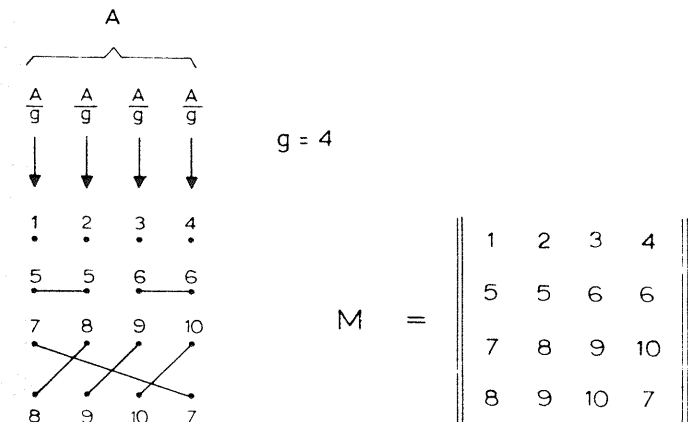


Bild 17: Darstellung der Mischung als Matrix

Der Belegungszustand einer Leitung Nr. i werde nun durch eine Boole'sche Variable z_i gekennzeichnet. Dabei bedeute

- $z_i = 0$: Leitung Nr. i ist frei und
- $z_i = 1$: Leitung Nr. i ist belegt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Leitungen Nr. 1, 2, ..., n in bestimmten Belegungszuständen z_1, z_2, \dots, z_n sind, sei $p(z_1, z_2, \dots, z_n)$.

Nach dem Prinzip von der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts (Stationarität des Verkehrs) ist die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass ein bestimmtes Belegungsmuster $\{x\}_y$, gekennzeichnet durch seine n Variablen z_i , verschwindet (durch Endigen einer Belegung oder durch einen neuen Ruf) gleich der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass dieses Muster entsteht. Ein Muster $\{x\}_y$ kann aus Mustern mit $(x+1)$ belegten Leitungen durch das Ende einer Belegung entstehen oder aus Mustern mit $(x-1)$ belegten Leitungen durch einen neuen (erfolgreichen) Ruf.

Wenn man berücksichtigt, dass die Mischung von einer Nullstellung aus geordnet abgesucht wird (in Bild 16 bzw. Bild 17 von oben nach unten), so erhält man 2^n Gleichungen folgender Form, die jeweils für eines der 2^n Belegungsmuster deren Wahrscheinlichkeitsdichte für Verschwinden (linke Seite) oder Entstehen (rechte Seite) angeben:

$$\left[\sum_{i=1}^n z_i + \frac{A}{g} \sum_{j=1}^g \left(1 - \prod_{s=1}^k z_{m_{s,j}} \right) \right] \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n (1 - z_i) \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_n) \quad (18a)$$

$$+ \frac{A}{g} \sum_{j=1}^g \sum_{s=1}^k p(z_1, z_2, \dots, z_{m_{s,j}-1}, 0, z_{m_{s,j}+1}, \dots, z_n) \cdot \prod_{s=1}^g z_{m_{s,j}}$$

$$z_i = 0, 1 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

Das Produkt $s = 1 \dots g$ erstreckt sich jeweils über die ersten g Suchstellungen einer der g Spalten der Matrix M. Die Summation $\xi = 1 \dots k$ erfasst alle Belegungsmuster je Zubringerteilgruppe (Spalten der Matrix M), bei welchen die ersten g Suchstellungen belegt sind.

Ausserdem gilt die Summenbedingung

$$\sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_n=0}^1 p(z_1, z_2, \dots, z_n) = 1 \quad (18b)$$

Zur Lösung derartiger Gleichungssysteme (18a,b) auf elektronischen Digitalrechnern verwendet man zweckmässig das Überrelaxationsverfahren (s. Abschnitt III.2). Aus den Wahrscheinlichkeiten $p(z_1, z_2, \dots, z_n)$ für die verschiedenen Belegungsmuster erhält man den überlaufenden Verkehrsrest R durch Addition all jener Anrufe, die in ihrer Zubringerteilgruppe keine freie Leitung erreichen:

$$R_1 = \frac{A}{g} \sum_{j=1}^g \sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_n=0}^1 \prod_{s=1}^k z_{m_{s,j}} \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (19)$$

Der Verlust B_1 in diesem Bündel ist

$$B_1 = \frac{R_1}{A} = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^g \sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_n=0}^1 \prod_{s=1}^k z_{m_{s,j}} \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (20)$$

Von G. Bretschneider wurden Verluste für Bündel mit bis zu 9 Leitungen berechnet /3/. Die entsprechenden Gleichungssysteme haben maximal $2^9 = 512$ Unbekannte. Auf dem Rechner TR4 der Universität Stuttgart können jetzt Bündel mit bis zu 14 Leitungen berechnet werden. (Die entsprechenden Gleichungssysteme haben bis zu $2^{14} = 16384$ Unbekannte).

Für ein unvollkommen erreichbares Bündel mit $n = 10$ Leitungen und der Erreichbarkeit $k = 4$ und mit der in Bild 16 bzw. Bild 17 gezeigten Mischung erhält man z.B.

bei einem Angebot von $A = 8$ Erlang die Werte

$$B_1 = 21,0771\%$$

für den Verlust und

$$R_1 = 1,686167 \text{ Erlang}$$

für den überlaufenden Verkehrsrest.

IV.1.2. Der Verlust im Sekundärbündel

Bei Gruppierungen, die aus einem unvollkommen erreichbaren Primärbündel und einem vollkommen erreichbaren Sekundärbündel bestehen (s. Bild 15 bzw. Bild 18), könnte man

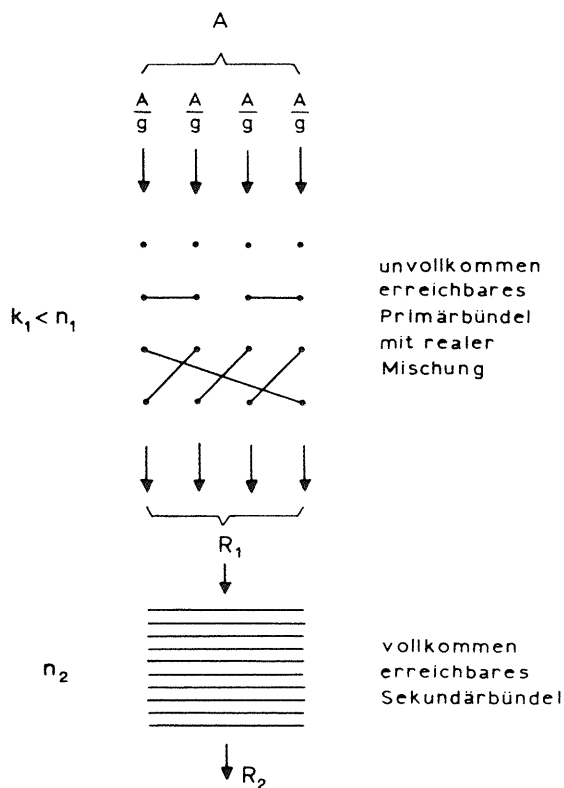


Bild 18: Unvollkommen erreichbares, real gemischtes Primärbündel mit vollkommen erreichbarem Sekundärbündel

den Verlust völlig analog zu IV.1.1 berechnen, wenn man beide Bündel (Primärbündel und Sekundärbündel) als eine Mischung behandelt. Der Rang des Gleichungssystems lässt sich aber reduzieren, weil im vollkommen erreichbaren Sekundärbündel die Unterscheidung der einzelnen Belegungsmuster $\{x_2\}_V$ irrelevant ist. Es müssen dann im Primärbündel 2^{n_1} Belegungsmuster und im Sekundärbündel nur (n_2+1) Zustände unterschieden werden. Das zu lösende Gleichungssystem hat dann noch den Rang $2^{n_1} \cdot (n_2+1)$ (statt $2^{n_1+n_2}$).

Die Leitungen des unvollkommen erreichbaren Primärbündels seien wieder durchnummeriert (wie in Abschnitt IV.1.1, s. Bild 17), so dass die Mischung als Matrix $\Pi = \|\pi_{s,j}\|$ dargestellt werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Leitungen Nr. $1, 2, \dots, n_1$ in den Belegungszuständen z_1, z_2, \dots, z_{n_1} sind, dass ausserdem im Sekundärbündel gerade x_2 Leitungen belegt sind, heisse $p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2)$. Dann gilt bei der angenommenen Stationarität des Verkehrs:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^{n_1} z_i + x_2 + (1-\alpha) \cdot A + \alpha \cdot \frac{A}{g} \cdot \sum_{j=1}^g \left(1 - \prod_{s=1}^k z_{m_{s,j}} \right) \right] \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} (1-z_i) \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_{n_1}; x_2) \\ &+ (1-\alpha) \cdot (x_2+1) \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2+1) \quad (21a) \\ &+ \frac{A}{g} \cdot \sum_{j=1}^g \sum_{\varrho=1}^{k_1} \prod_{s=1}^{\varrho} z_{m_{s,j}} \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{m_{\varrho,j}-1}, 0, z_{m_{\varrho,j}+1}, \dots, z_{n_1}; x_2) \\ &+ \beta \cdot \frac{A}{g} \cdot \sum_{j=1}^g \prod_{s=1}^{k_1} z_{m_{s,j}} \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2-1) \quad , \end{aligned}$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2 \quad ,$$

$$z_i = 0, 1 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n_1$$

Dabei ist

$$\alpha = 1 \text{ falls } x_2 = n_2, \text{ andernfalls } \alpha = 0,$$

$$\beta = 1 \text{ falls } x_2 > 0, \text{ andernfalls } \beta = 0.$$

Diese Gleichungen können folgendermassen interpretiert werden:

Die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass ein Belegungszustand verschwindet (durch Ende einer Belegung oder durch Entstehen einer neuen Belegung im Primär- oder Sekundärbündel)

ist gleich der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass er entsteht durch Ende einer Belegung im Primärbündel, plus der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass er entsteht durch Ende einer Belegung im Sekundärbündel, plus der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass er entsteht durch eine neue Belegung im Primärbündel plus der Wahrscheinlichkeitsdichte, dass er entsteht durch eine neue Belegung im Sekundärbündel.

Ausserdem gilt die Summenbedingung

$$\sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_1}=0}^1 \sum_{x_2=0}^{n_2} p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2) = 1 \quad (21b)$$

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten $p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2)$ kann der Erwartungswert c_V der pro Zeiteinheit im Primärbündel und Sekundärbündel erfolglosen Anrufe und damit auch der Verkehrsrest R_2 berechnet werden:

$$R_2 = \frac{A}{g} \sum_{j=1}^g \sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_1}=0}^1 p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; n_2) \cdot \prod_{s=1}^{k_1} z_{m_{s,j}} \quad (22)$$

Für den vom Primärbündel auf das Sekundärbündel überlaufenden Verkehrsrest R_1 erhält man entsprechend

$$R_1 = \frac{A}{g} \sum_{j=1}^g \sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_1}=0}^1 \sum_{x_2=0}^{n_2} p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2) \cdot \prod_{s=1}^{k_1} z_{m_{s,j}} \quad (23)$$

Der Verlust im Sekundärbündel ist

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

der Verlust im Primärbündel

$$B_1 = \frac{R_1}{A} \quad (1)$$

Zur Berechnung des Verlusts im Primärbündel braucht also nicht noch ein weiteres Gleichungssystem (nach Abschnitt IV.1.2) aufgelöst zu werden.

Für das Beispiel der in Bild 18 gezeigten Gruppierung mit einem unvollkommen erreichbaren Primärbündel mit $n_1 = 10$ Leitungen und der Erreichbarkeit $k_1 = 10$ und mit einem vollkommen erreichbaren Sekundärbündel mit $n_2 = 10$ Leitungen erhält man bei einem Angebot von $A = 8$ Erlang die werte

$$R_1 = 1,686167 \text{ Erlang}, \quad B_1 = 21,0771\%$$

$$R_2 = 0,002324 \text{ Erlang}, \quad B_2 = 0,1378\%$$

$$B_{\text{ges}} = 0,0291\%$$

IV.1.3. Die Gleichzeitigkeitsverteilungen

Ist das Gleichungssystem für die Zustandswahrscheinlichkeiten gelöst, so können die Gleichzeitigkeitsverteilungen

$$p(x_1) = p_T(x_1) = \sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_1}=0}^1 \sum_{x_2=0}^{n_2} \gamma(x_1) \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2),$$

$$\gamma(x_1) = 1, \text{ wenn } \sum_{i=1}^{n_1} z_i = x_1, \quad (24)$$

$$\gamma(x_1) = 0, \text{ wenn } \sum_{i=1}^{n_1} z_i \neq x_1$$

und

$$p(x_2) = p_2(x_2) = \sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_1}=0}^1 p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2) \quad (25)$$

leicht berechnet werden.

Für das oben behandelte Beispiel (s. Bild 19) erhält man

$p_1(0) = 0,00056961$	$p_2(0) = 0,27741220$
$p_1(1) = 0,00455684$	$p_2(1) = 0,26915343$
$p_1(2) = 0,01822736$	$p_2(2) = 0,19613737$
$p_1(3) = 0,04860630$	$p_2(3) = 0,12272892$
$p_1(4) = 0,09721261$	$p_2(4) = 0,06898437$
$p_1(5) = 0,15393842$	$p_2(5) = 0,03561256$
$p_1(6) = 0,19660099$	$p_2(6) = 0,01710734$
$p_1(7) = 0,20118032$	$p_2(7) = 0,00771428$
$p_1(8) = 0,15984253$	$p_2(8) = 0,00328827$
$p_1(9) = 0,09079821$	$p_2(9) = 0,00133561$
$p_1(10) = 0,02846682$	$p_2(10) = 0,00052567$

IV.2. Ideal gemischtes, unvollkommen erreichbares Primärbündel mit vollkommen erreichbarem Sekundärbündel

Wie in Abschnitt IV.1.1 erwähnt, lässt sich der hohe Rang der linearen Gleichungssysteme zur Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit und der Gleichzeitigkeitsverteilung in Mischungen nur reduzieren, wenn man Mischungen mit besonderen Symmetrieeigenschaften betrachtet. Die klassische Lösung dieser Art ist die sogenannte ideale Mischung nach A.K.Erlang /6/.

Im folgenden wird ein Primärbündel mit idealer Mischung vorausgesetzt.

IV.2.1. Der Verlust im ideal gemischten Primärbündel

In der Mischung des Primärbündels werden auf den k_1 Suchschritten einer Zubringerteilgruppe jeweils k_1 von den insgesamt n_1 Leitungen abgesucht. Hierfür gibt es $\binom{n_1}{k_1}$ Möglichkeiten.

Bei einer idealen Mischung werden alle diese $\binom{n_1}{k_1}$ Möglichkeiten genau einmal verwirklicht. Die ideale Mischung besteht also aus $\binom{n_1}{k_1}$ Zubringerteilgruppen. Wegen dieser hohen Zahl von Zubringerteilgruppen ist die ideale Mischung in der Praxis oft nicht ausführbar. Sie ist jedoch wichtig für theoretische Untersuchungen, weil sie mit einer geschlossenen Formel exakt berechnet werden kann. Ausserdem können die Verlustwerte bei idealen Mischungen als Näherungswerte für gewisse nicht-ideale Mischungen verwendet werden.

Unter der Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_1)$ einer Mischung versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass ein eintreffender Ruf keine freie Leitung findet, wenn gerade x_1 Leitungen belegt sind. Bei der idealen Mischung sind im Zustand " x_1 Leitungen belegt" von den $\binom{n_1}{k_1}$ vorhandenen Zubringerteilgruppen stets genau $\binom{x_1}{k_1}$ "gesperrt". Die Sperrwahrscheinlichkeit bei der idealen Mischung ist also

$$\sigma(x_1) = \frac{\binom{x_1}{k_1}}{\binom{n_1}{k_1}}, \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \quad (26a)$$

Die Gegenwahrscheinlichkeit zu $\sigma(x_1)$ nennt man die Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x_1)$:

$$\mu(x_1) = 1 - \sigma(x_1), \quad (26b)$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1$$

Unabhängig von der Frage der gleichen oder ungleichen Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Belegungs- u s t e r eines Zustands $\{x_1\}$ gelten (26a) und (26b) immer, da sie auf

dem relativen Anteil gesperrter Zubringerteilgruppen und nicht auf Wahrscheinlichkeiten für die Belegungsmuster beruhen. Es müssen deshalb nur die (n_1+1) Zustände unterschieden werden.

Für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1)$ erhält man deshalb nach dem Prinzip von der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts ein System von nur (n_1+1) linearen Gleichungen:

$$\begin{aligned} [x_1 + A \cdot \mu(x_1)] \cdot p(x_1) &= \alpha \cdot A \cdot \mu(x_1 - 1) \cdot p(x_1 - 1) \\ &+ \beta \cdot (x_1 + 1) \cdot p(x_1 + 1), \quad (27a) \\ x_1 &= 0, 1, \dots, n_1 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \text{ falls } x_1 \neq 0, & \text{andernfalls } \alpha &= 0, \text{ und} \\ \beta &= 1, \text{ falls } x_1 \neq n_1, & \text{andernfalls } \beta &= 0. \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems ergibt bei Berücksichtigung der Summenbedingung

$$\sum_{x_1=0}^{n_1} p(x_1) = 1 \quad (27b)$$

die Beziehung

$$p(x_1) = \frac{\frac{A^{x_1}}{x_1!} \prod_{u=0}^{x_1-1} \mu(u)}{1 + \sum_{\xi=1}^{n_1} \frac{A^\xi}{\xi!} \prod_{u=0}^{\xi-1} \mu(u)} \quad (28a)$$

und damit den Verlust

$$B_1 = \sum_{x_1=k_1}^{n_1} p(x_1) \cdot \sigma(x_1) \quad (28b)$$

Die Formel (28a,b) wird als "Erlang'sche Interconnectionsformel" bezeichnet /6/.

IV.2.2. Der Verlust im Sekundärbündel

Wenn der von einer idealen Mischung (mit n_1 Leitungen und der Erreichbarkeit k_1) überlaufende Verkehr einem vollkommen erreichbaren Sekundärbündel (mit n_2 Leitungen) angeboten wird (s. Bild 19), erhält man (vgl. IV.2.1) ein System von

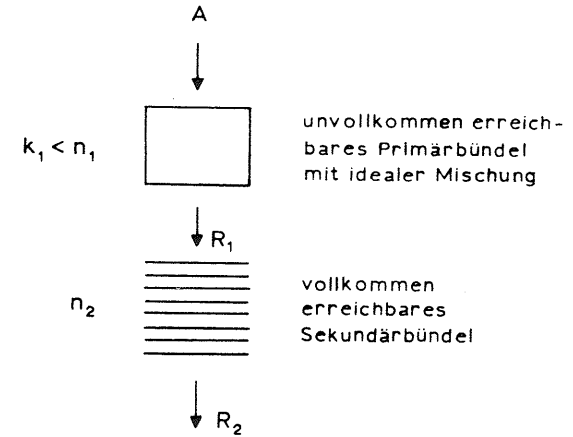


Bild 19: Unvollkommen erreichbares, ideal gemischtes Primärbündel mit vollkommen erreichbar Sekundärbündel

$(n_1+1) \cdot (n_2+1)$ linearen Gleichungen für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand $\{x_1, x_2\}$ verschwindet (durch Ende einer Belegung

im Primär- oder Sekundärbündel oder durch Einfallen eines Rufes) ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass dieser Zustand entsteht (durch Enden einer Belegung im Primärbündel im Zustand $\{x_1+1, x_2\}$ bzw. im Sekundärbündel im Zustand $\{x_1, x_2+1\}$, oder durch Eintreffen eines neuen Rufes im Zustand $\{x_1-1, x_2\}$ bzw. im Zustand $\{x_1, x_2-1\}$):

$$\begin{aligned} & [x_1+x_2 + \alpha \cdot A + (1-\alpha) \cdot A \cdot \mu(x_1)] \cdot p(x_1, x_2) \\ & = \beta \cdot (x_1+1) \cdot p(x_1+1, x_2) \\ & + \alpha \cdot (x_2+1) \cdot p(x_1, x_2+1) \quad (29a) \\ & + \gamma \cdot A \cdot \mu(x_1-1) \cdot p(x_1-1, x_2) \\ & + \delta \cdot A \cdot \sigma(x_1) \cdot p(x_1, x_2-1), \\ & x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \\ & x_2 = 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \text{ falls } x_2 \neq n_2, \text{ andernfalls } \alpha = 0 \\ \beta &= 1, \text{ falls } x_1 \neq n_1, \text{ andernfalls } \beta = 0 \\ \gamma &= 1, \text{ falls } x_1 > 0, \text{ andernfalls } \gamma = 0 \\ \delta &= 1, \text{ falls } x_2 > 0, \text{ andernfalls } \delta = 0. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt die Summenbedingung

$$\sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} p(x_1, x_2) = 1 \quad (29b)$$

Der Gesamtverlust B_{ges} ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass ein Ruf sowohl im Primärbündel als auch im Sekundärbündel keine freie Leitung erreicht:

$$B_{ges} = \sum_{x_1=k_1}^{n_1} p(x_1, n_2) \cdot \sigma(x_1) \quad (30)$$

Für den Verkehrsrest R_2 erhält man hiermit:

$$R_2 = A \sum_{x_1=k_1}^{n_1} p(x_1, n_2) \cdot \sigma(x_1) \quad (31)$$

Der Verlust im Sekundärbündel ist:

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

Beispiel: Für ein ideal gemischtes Primärbündel von $n_1 = 10$ Leitungen mit der Erreichbarkeit $k_1 = 4$ und ein vollkommen erreichbares Sekundärbündel von $n_2 = 10$ Leitungen erhält man bei einem Angebot von $A = 8$ Erlang die Werte

$$\begin{aligned} B_1 &= 19,9382\% , & R_1 &= 1,59506 \text{ Erlang} \\ B_2 &= 0,1278\% , & R_2 &= 0,00204 \text{ Erlang} \\ B_{ges} &= 0,0255\% \end{aligned}$$

IV.3. Vollkommen erreichbares Primärbündel mit unvollkommen erreichbarem Sekundärbündel mit realer Mischung

Ein Beispiel für eine Gruppierung mit einem vollkommen erreichbaren Primärbündel und einem unvollkommen erreichbaren Sekundärbündel mit realer Mischung ist in Bild 20 dargestellt. In dem vollkommen erreichbaren Primärbündel sind (n_1+1) verschiedene Belegungszustände zu unterscheiden. Da das Sekundärbündel unvollkommen erreichbar und nicht-ideal gemischt ist, muss man dort die einzelnen Belegungsmuster unterscheiden. In Abschnitt IV.1.1 wurde gezeigt, dass es bei einem unvollkommen erreichbaren Bündel mit n_2 Leitungen 2^{n_2} verschiedene Belegungsmuster gibt. Es ergibt sich also ein System von $(n_1+1) \cdot 2^{n_2}$ linearen Gleichungen.

Bei der Aufstellung des Gleichungssystems ist zu berücksichtigen, dass bei einem neu einfallenden Ruf immer

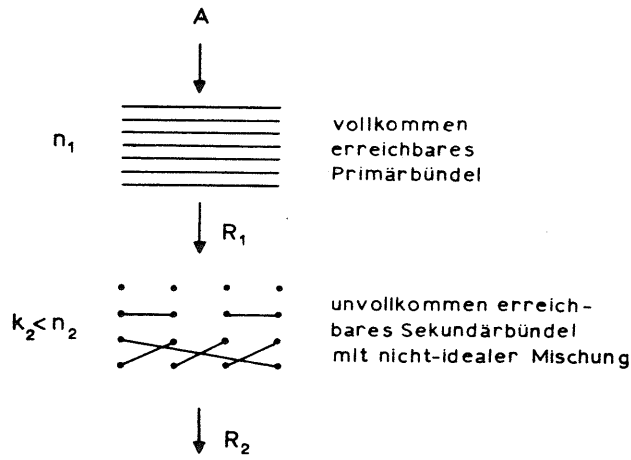


Bild 20: Vollkommen erreichbares Primärbündel mit unvollkommen erreichbar Sekundärbündel mit realer Mischung

eine Leitung im Primärbündel belegt wird, wenn $x_1 < n_1$ ist; nur wenn alle Leitungen des Primärbündels belegt sind ($x_1 = n_1$), kann eine Leitung im Sekundärbündel belegt werden. Man erhält dann Gleichungen folgender Art:

$$\left[x_1 + \sum_{i=1}^{n_2} z_i + (1-\alpha) \cdot A + \alpha \cdot \frac{A}{g} \cdot \sum_{j=1}^g \left(1 - \prod_{s=1}^{k_2} z_{m_{s,j}} \right) \right] \cdot p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2})$$

$$= (1-\alpha) \cdot (x_1+1) \cdot p(x_1+1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2})$$

$$+ \sum_{i=1}^{n_2} (1-z_i) \cdot p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_{n_2}) \quad (32a)$$

$$+ \beta \cdot A \cdot p(x_1-1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2})$$

$$+ \alpha \cdot \frac{A}{g} \cdot \sum_{j=1}^g \sum_{\varrho=1}^{k_2} \prod_{s=1}^{\varrho} z_{m_{s,j}} \cdot p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{m_{\varrho,j}-1}, 0, z_{m_{\varrho,j}+1}, \dots, z_{n_2}),$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1,$$

$$z_i = 0, 1 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n_2$$

Dabei ist

$$\alpha = 1, \quad \text{wenn } x_1 = n_1, \quad \text{sonst } \alpha = 0,$$

$$\beta = 1, \quad \text{wenn } x_1 \neq 0, \quad \text{sonst } \beta = 0,$$

$$z_{m_{s,j}} = 1, \quad \text{wenn Koppelpunkt (Matrixelement) } m_{s,j} \text{ belegt ist.}$$

Die Größen $z_1 \dots z_{n_2}$ sind die Belegungszustände der einzelnen Leitungen des Sekundärbündels, $M = \|m_{s,j}\|$ ist die Matrix der Mischung des Sekundärbündels (wie in Abschnitt IV.1.1 beschrieben). Der Zustand eines Elements $m_{s,j}$ wird wieder mit $z_{m_{s,j}}$ bezeichnet.

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss gleich eins sein:

$$\sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_2}=0}^1 \sum_{x_1=0}^{n_1} p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2}) = 1 \quad (32b)$$

Derartige Gleichungssysteme werden zweckmässig mit dem Überrelaxationsverfahren (s. Abschnitt III.2.1) gelöst. Aus den auf diese Weise erhaltenen Wahrscheinlichkeiten $p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2})$ ergibt sich der Verkehrsrest R_2 auf einfache Weise durch Summation aller erfolglosen Anrufe:

$$R_2 = \frac{A}{g} \cdot \sum_{j=1}^g \sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_2}=0}^1 \prod_{s=1}^{k_2} z_{m_{s,j}} \cdot p(n_1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2}) \quad (33)$$

Der auf das Sekundärbündel überlaufende Verkehrsrest R_1 lässt sich leicht nach der Erlang'schen Formel (6) berechnen:

$$R_1 = A \cdot E_{n_1}(A) \quad (7)$$

Der Verlust im Sekundärbündel ist dann

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

Für das in Bild 20 gezeigte Beispiel mit den Leitungszahlen $n_1 = 10$, $n_2 = 10$ und der Erreichbarkeit $k_2 = 4$ im Sekundärbündel erhält man für ein Angebot von $A = 8$ Erlang folgende Ergebnisse:

$$\begin{array}{ll} R_1 = 0,973 \text{ Erlang} & B_1 = 12,1661\% \\ R_2 = 0,00965 \text{ Erlang} & B_{\text{ges}} = 0,120639\% \\ B_2 = 0,992\% & \end{array}$$

IV.4. Vollkommen erreichbares Primärbündel mit unvollkommen erreichbarem Sekundärbündel mit idealer Mischung

Bei Gruppierungen mit einem vollkommen erreichbaren Primärbündel und einem unvollkommen erreichbaren, ideal gemischten Sekundärbündel (s. Bild 21) braucht man im Sekundärbündel nicht alle 2^{n_2} Belegungsmuster zu unterscheiden,

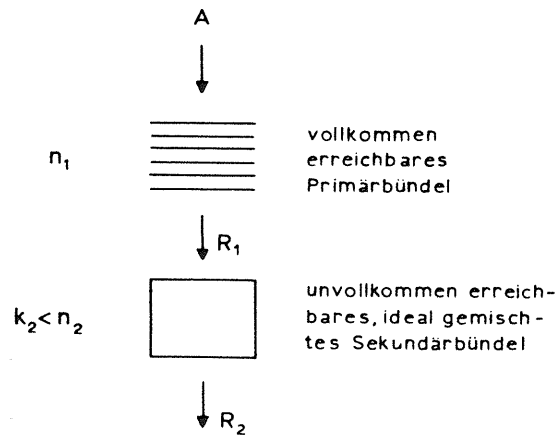


Bild 21: Vollkommen erreichbares Primärbündel mit unvollkommen erreichbarem Sekundärbündel mit idealer Mischung

sondern nur die (n_2+1) möglichen Belegungszustände. Der Grund dieser Vereinfachung liegt darin, dass bei "idealer Erlang-Mischungen" die Sperrwahrscheinlichkeit jedes Zustands $\{x\}$ musterinvariant ist. Ausserdem sind im Primärbündel jeweils (n_1+1) Zustände zu unterscheiden. Man erhält also ein System von $(n_1+1) \cdot (n_2+1)$ linearen Gleichungen für die Belegungszustände.

Derartige Systeme könnte man, ausgehend von den Differenzgleichungen zweiter Ordnung, welche sich aus der Stationaritätsbedingung für den fließenden Verkehr ergeben, mit Hilfe des Überrelaxationsverfahrens lösen. Im folgenden wird jedoch gezeigt, dass auch geschlossene Lösungen für die Gleichzeitigkeitsverteilung und die Verlustwahrscheinlichkeit hergeleitet werden können.

IV.4.1. Aufstellung der zweidimensionalen Zustandsgleichungen

Es sei $p(x_1, x_2)$ die Wahrscheinlichkeit, dass im Primärbündel x_1 Leitungen und im Sekundärbündel x_2 Leitungen belegt sind. Nach dem Prinzip des statistischen Gleichgewichts ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $\{x_1, x_2\}$ verschwindet gleich der Wahrscheinlichkeit, dass er entsteht.

Der Zustand $\{x_1, x_2\}$ kann verschwinden durch Ende einer Belegung im Primärbündel oder im Sekundärbündel oder durch einen neuen Anruf. Falls im Primärbündel $x_1 < n_1$ Leitungen belegt sind, wird ein neuer Ruf stets im Primärbündel durchgeschaltet. Nur während des Zustands $\{n_1, x_2 < n_2\}$ kann ein neu einfallender Ruf eine Leitung im Sekundärbündel belegen.

Die Entstehung eines Zustandes $\{x_1, x_2\}$ kann durch Enden einer Belegung in den Zuständen $\{x_1+1, x_2\}$ oder $\{x_1, x_2+1\}$ erfolgen oder durch Einfallen einer neuen Belegung im Zustand $\{x_1-1, x_2\}$. Die Zustände $\{n_1, x_2\}$ können

ausserdem durch eine neue Belegung im Sekundärbündel aus den Zuständen $\{n_1, x_2-1\}$ entstehen.

Mit der Sperrwahrscheinlichkeit

$$\sigma(x_2) = \frac{\binom{x_2}{k_2}}{\binom{n_2}{k_2}} \quad (34a)$$

bzw. der Durchlasswahrscheinlichkeit

$$\mu(x_2) = 1 - \sigma(x_2) \quad (34b)$$

erhält man deshalb Gleichungen folgender Form:

$$\begin{aligned} (x_1+x_2+A) \cdot p(x_1, x_2) &= (x_1+1) \cdot p(x_1+1, x_2) \\ &+ \alpha \cdot (x_2+1) \cdot p(x_1, x_2+1) \\ &+ \beta \cdot A \cdot p(x_1-1, x_2), \end{aligned} \quad (35a)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, 1, \dots, n_1-1 \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [n_1+x_2+A \cdot \mu(x_2)] \cdot p(n_1, x_2) &= \alpha \cdot (x_2+1) \cdot p(n_1, x_2+1) \\ &+ A \cdot p(n_1-1, x_2) \\ &+ \gamma \cdot A \cdot \mu(x_2-1) \cdot p(n_1, x_2-1), \end{aligned} \quad (35b)$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \text{ wenn } x_2 \neq n_2, \text{ sonst } \alpha = 0, \\ \beta &= 1, \text{ wenn } x_1 \neq 0, \text{ sonst } \beta = 0, \\ \gamma &= 1, \text{ wenn } x_2 \neq 0, \text{ sonst } \gamma = 0. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt die Bedingung, dass die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ gleich eins ist :

$$\sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} p(x_1, x_2) = 1 \quad (35c)$$

Die Beziehungen (35a) und (35b) stellen zusammen ein System von $n_1 \cdot (n_2+1) + (n_2+1) = (n_1+1) \cdot (n_2+1)$ linearen Gleichungen dar. Diese Gleichungen sind jedoch nicht voneinander unabhängig. Man erhält irgendeine Gleichung von (35a) oder (35b), indem man alle übrigen Gleichungen von (35a) und (35b) addiert. Wenn man also eine beliebige Gleichung von (35a) oder (35b) weglässt und stattdessen die Beziehung (35c) hinzunimmt, so hat man ein inhomogenes System von $(n_1+1) \cdot (n_2+1)$ linear unabhängigen Gleichungen, aus dem sich die $(n_1+1) \cdot (n_2+1)$ Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ berechnen lassen. Es wird sich als zweckmässig herausstellen, die Gleichung (35b) für $x_2 = 0$ nicht zu benutzen.

Damit sich die Schreibweise etwas vereinfacht (Wegfall der Koeffizienten α, β, γ), sei definiert, dass die Wahrscheinlichkeiten für alle nicht existierenden Zustände gleich Null sind. Es sei also

$$p(x_1, x_2) = 0 \text{ für } \begin{aligned} x_1 &< 0, \\ x_2 &< 0, \\ x_1 &> n_1, \\ x_2 &> n_2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (35a) und (35b) gehen dann über in

$$\begin{aligned} (x_1+x_2+A) \cdot p(x_1, x_2) &= (x_1+1) \cdot p(x_1+1, x_2) \\ &+ (x_2+1) \cdot p(x_1, x_2+1) \\ &+ A \cdot p(x_1-1, x_2), \end{aligned} \quad (36a)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, 1, \dots, n_1-1, \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [n_1+x_2+A\cdot\mu(x_2)]\cdot p(n_1, x_2) &= (x_2+1)\cdot p(n_1, x_2+1) \\
 &+ A\cdot p(n_1-1, x_2) \\
 &+ A\cdot\mu(x_2-1)\cdot p(n_1, x_2-1), \\
 x_2 &= 0, 1, \dots, n_2
 \end{aligned}
 \tag{36b}$$

IV.4.2. Graphische Darstellung der Zustandsgleichungen

Um zu einer geschlossenen Lösung für $p(x_1, x_2)$ sowie B_2 zu kommen, werden zunächst die Gleichungen (36a, b) auf ein eindimensionales Gleichungssystem reduziert.

Die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ kann man sich auf einem Gitter angeordnet denken (s. Bild 22).

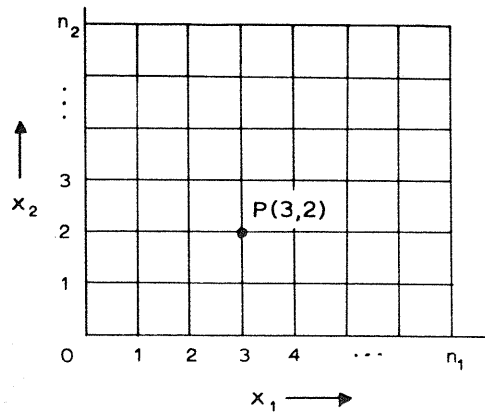


Bild 22: Anordnung der Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ auf einem Gitter

Die Gleichungen (36a) und (36b) stellen Beziehungen zwischen zwei, drei oder vier solcher p -Werte dar und können in diesem Gitter durch kleine Graphen angedeutet werden, die die entsprechenden Punkte miteinander ver-

binden. In Bild 23 ist Gleichung (36a) dargestellt für $x_1 = 4, x_2 = 3$.

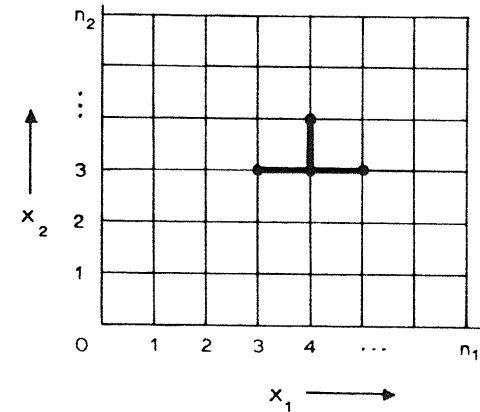


Bild 23: Darstellung der Gleichung (36a) für $x_1 = 4, x_2 = 3$

In Bild 24 sind weitere Beispiele für Gleichung (36a) eingezeichnet, darunter auch die Sonderfälle $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ und $x_2 = n_2$.

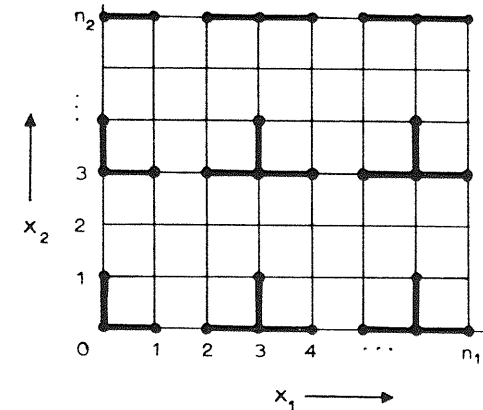


Bild 24: Darstellung von Gleichung (36a)

Der Übersichtlichkeit halber sind in Bild 24 nicht alle vorkommenden Gleichungen nach (36a) dargestellt.

Die Gleichungen (36b) lassen sich auf ähnliche Weise durch Graphen darstellen, die jedoch (wegen $x_1 = n_1$) immer am rechten Rand des Gitters liegen (s. Bild 25).

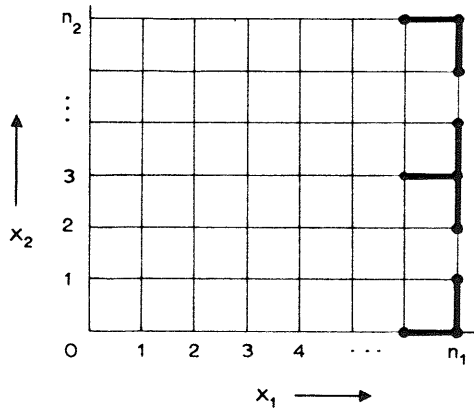


Bild 25: Darstellung von Gleichung (36b)

IV.4.3. Reduzierung auf ein eindimensionales Gleichungssystem

Es sollen zunächst alle Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ als Funktion von $p(0, x_2)$ dargestellt werden.

Betrachtet man die oberste Zeile des Gitters in Bild 24, so sieht man, dass (links oben) zwischen den Werten $p(0, n_2)$ und $p(1, n_2)$ eine Beziehung besteht. Nach Gleichung (36a) ist für $x_1 = 0, x_2 = n_2$

$$(n_2 + A) \cdot p(0, n_2) = p(1, n_2)$$

oder in vereinfachter Darstellung

$$p(1, n_2) = c_{1, n_2, n_2} \cdot p(0, n_2) \quad (37a)$$

(Die allgemeine Form der dreifach indizierten Konstanten c wird weiter unten angegeben, s. Gleichung (39)).

Ausserdem besteht eine Beziehung zwischen $p(0, n_2)$, $p(1, n_2)$ und $p(2, n_2)$. Nach Gleichung (36a) ist für $x_1 = 1, x_2 = n_2$

$$(1 + n_2 + A) \cdot p(1, n_2) = 2 \cdot p(2, n_2) + A \cdot p(0, n_2)$$

Mit (37a) ergibt sich hieraus

$$(1 + n_2 + A) \cdot c_{1, n_2, n_2} \cdot p(0, n_2) = 2 \cdot p(2, n_2) + A \cdot p(0, n_2)$$

oder

$$p(2, n_2) = \frac{1}{2} \cdot [(1 + n_2 + A) \cdot c_{1, n_2, n_2} - A] \cdot p(0, n_2)$$

oder in vereinfachter Schreibweise

$$p(2, n_2) = c_{2, n_2, n_2} \cdot p(0, n_2) \quad (37b)$$

Mit Hilfe der Beziehung (37b) lässt sich also auch der Wert $p(2, n_2)$ durch $p(0, n_2)$ ausdrücken. Fährt man so fort, so kann man auch die übrigen Werte $p(x_1, n_2)$ für $x_1 = 3 \dots n_1$ der Reihe nach durch $p(0, n_2)$ ausdrücken:

$$p(x_1, n_2) = c_{x_1, n_2, n_2} \cdot p(0, n_2) \quad (37c)$$

Damit sind die p -Werte am oberen Rand des Gitters (s. Bild 24) als Funktionen der Wahrscheinlichkeit $p(0, n_2)$ an der linken oberen Ecke ausgedrückt.

In der zweiten Zeile des Gitters liefert Gleichung (36a) eine Beziehung zwischen $p(0, n_2)$, $p(0, n_2 - 1)$ und $p(1, n_2 - 1)$:

$$(n_2 - 1 + A) \cdot p(0, n_2 - 1) = p(1, n_2 - 1) + n_2 \cdot p(0, n_2)$$

oder in abgekürzter Schreibweise

$$p(1, n_2 - 1) = c_{1, n_2 - 1, n_2 - 1} \cdot p(0, n_2 - 1) + c_{1, n_2 - 1, n_2} \cdot p(0, n_2) \quad (37d)$$

Der Wert $p(1, n_2-1)$ lässt sich also durch die Werte $p(0, n_2-1)$ und $p(0, n_2)$ ausdrücken. Auf die gleiche Weise lassen sich die Werte $p(x_1, n_2-1)$ für $x_1 = 2 \dots n_1$ durch die Werte $p(0, n_2-1)$ und $p(0, n_2)$ ausdrücken:

$$p(x_1, n_2-1) = c_{x_1, n_2-1, n_2-1} \cdot p(0, n_2-1) + c_{x_1, n_2-1, n_2} \cdot p(0, n_2), \quad (37e)$$

$$x_1 = 1, 2, \dots, n_1$$

und so fort.

Allgemein kann man alle Werte $p(x_1, x_2)$ durch die Werte $p(0, x_2)$ ausdrücken, welche die linke Berandung des Gitters darstellen. Jeder Wert $p(x_1, x_2)$ ist eine Funktion der Werte

$$\begin{aligned} & p(0, x_2), \\ & p(0, x_2 + 1), \\ & p(0, x_2 + 2), \\ & \vdots \\ & p(0, n_2) \end{aligned}$$

(dabei können einige Terme wegfallen, und zwar dann, wenn $x_1 + x_2 < n_2$ ist). Man erhält allgemein

$$p(x_1, x_2) = \sum_{\xi=x_2}^{n_2} c_{x_1, x_2, \xi} \cdot p(0, \xi), \quad (38)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, 2, \dots, n_1, \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned}$$

Die Konstanten $c_{x_1, x_2, \xi}$ können allgemein durch folgende Gleichung ausgedrückt werden (s. Anhang):

$$c_{x_1, x_2, \xi} = (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, x_1+x_2-\xi}, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, 2, \dots, n_1 \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned}$$

wobei

$$S_{r,m} = \sum_{v=0}^m \frac{A^{m-v}}{(m-v)!} \cdot \binom{r-1+v}{v}, \quad (40a)$$

$$m, r \geq 0$$

ist, oder ausgeschrieben

$$S_{r,m} = \frac{A^m}{m!} + \frac{A^{m-1}}{(m-1)!} \cdot \binom{r}{1} + \frac{A^{m-2}}{(m-2)!} \cdot \binom{r+1}{2} + \dots + 1 \cdot \binom{r-1+m}{m}, \quad (40b)$$

$$m, r \geq 0$$

Der einfachen Schreibweise wegen sei ausserdem definiert, dass

$$S_{r,m} = 0 \quad \text{für} \quad m < 0 \quad \text{oder} \quad r < 0$$

Mit (38), (39) und (40a) bzw. (40b) kann man die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ folgendermassen darstellen:

$$p(x_1, x_2) = \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, x_1+x_2-\xi} \cdot p(0, \xi) \quad (41)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, 2, \dots, n_1 \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt auch noch im Falle $x_1 = 0$. Der Beweis für Gleichung (41) kann leicht durch Einsetzen in Gleichung (36a) geführt werden /7/ (s. Anhang).

Wenn die Werte $p(0, x_2)$ am linken Rand des Gitters bekannt sind (s. Abschnitt IV.4.4), lassen sich alle übrigen Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ nach Gleichung (41) berechnen. Die Zahl der Unbekannten ist damit von $(n_1+1) \cdot (n_2+1)$ reduziert auf (n_2+1) .

IV.4.4. Darstellung der Werte $p(x_1, x_2)$ durch den Wert $p(0, n_2)$

Bis jetzt wurden nur die Gleichungen nach (36a) verwendet (Zustände mit $x_1 < n_1$). Die Gleichungen (36b) stehen noch zur Verfügung. Im folgenden wird gezeigt, dass sich die Werte $p(0, x_2)$ - und damit nach Gleichung (41) alle Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ - mit Hilfe von Gleichung (36b) als Funktion von $p(0, n_2)$ ausdrücken lassen.

Nach (36b) ist

$$\begin{aligned} [A \cdot \mu(x_2) + n_1 + x_2] \cdot p(n_1, x_2) &= (x_2 + 1) \cdot p(n_1, x_2 + 1) \\ &+ A \cdot p(n_1 - 1, x_2) \\ &+ A \cdot \mu(x_2 - 1) \cdot p(n_1, x_2 - 1), \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} A \cdot \mu(x_2 - 1) \cdot p(n_1, x_2 - 1) &= [A \cdot \mu(x_2) + n_1 + x_2] \cdot p(n_1, x_2) \\ &- A \cdot p(n_1 - 1, x_2) \\ &- (x_2 + 1) \cdot p(n_1, x_2 + 1), \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned} \quad (42)$$

Mit Gleichung (41) erhält man hieraus

$$\begin{aligned} &A \cdot \mu(x_2 - 1) \cdot \sum_{\xi=x_2-1}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2+1} \cdot \binom{\xi}{x_2-1} \cdot S_{\xi, n_1+x_2-1-\xi} \cdot p(0, \xi) \\ &= [A \cdot \mu(x_2) + n_1 + x_2] \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, n_1+x_2-\xi} \cdot p(0, \xi) \\ &- A \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, n_1-1+x_2-\xi} \cdot p(0, \xi) \\ &- (x_2 + 1) \cdot \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2-1} \cdot \binom{\xi}{x_2+1} \cdot S_{\xi, n_1+x_2+1-\xi} \cdot p(0, \xi), \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned} \quad (43)$$

Die letzte Summe in Gleichung (43) ändert sich nicht, wenn man ihre untere Grenze x_2+1 in x_2 abändert, da für $\xi = x_2$ der Faktor $\binom{\xi}{x_2+1} = \binom{x_2}{x_2+1} = 0$ wird. Wenn man von der Summe auf der linken Seite der Gleichung (43) das Glied für $\xi = (x_2 - 1)$ abspaltet und ferner alle vier Summen dieser Gleichung zusammenfasst, so erhält man:

$$\begin{aligned} p(0, x_2 - 1) &= \frac{1}{A \cdot \mu(x_2 - 1) \cdot S_{x_2-1, n_1}} \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot p(0, \xi) \cdot \\ &\cdot \left(\left[\mu(x_2 - 1) \cdot \binom{\xi}{x_2-1} - \binom{\xi}{x_2} \right] \cdot A \cdot S_{\xi, n_1+x_2-1-\xi} \right. \\ &+ [A \cdot \mu(x_2) + n_1 + x_2] \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, n_1+x_2-\xi} \\ &+ (x_2 + 1) \cdot \binom{\xi}{x_2+1} \cdot S_{\xi, n_1+x_2+1-\xi} \left. \right), \\ x_2 &= (0), 1, 2, \dots, n_2 \end{aligned} \quad (44a)$$

Da die Gleichungen (36a) und (36b) nicht linear unabhängig sind, kann eine beliebige von diesen Gleichungen unberücksichtigt bleiben. Es ist zweckmässig, die Gleichung (36b) bzw. (44a) für $x_2 = 0$ nicht zu benutzen. Die Beziehung (36b) bzw. (44a) wird also nur für $x_2 = 1, 2 \dots n_2$ verwendet. Die weggelassene Gleichung für $x_2 = 0$ ist in dem Gitter in Bild 25 in der rechten, unteren Ecke eingezeichnet. Diese Gleichung wird im folgenden nicht mehr aufgeführt.

Ersetzt man in Gleichung (44a) x_2 durch (x_2+1) , so erhält man

$$\begin{aligned} p(0, x_2) &= \frac{1}{A \cdot \mu(x_2) \cdot S_{x_2, n_1}} \cdot \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2-1} \cdot p(0, \xi) \cdot \\ &\cdot \left(\left[\mu(x_2) \cdot \binom{\xi}{x_2} - \binom{\xi}{x_2+1} \right] \cdot A \cdot S_{\xi, n_1+x_2-\xi} \right. \\ &+ [A \cdot \mu(x_2+1) + n_1 + x_2 + 1] \cdot \binom{\xi}{x_2+1} \cdot S_{\xi, n_1+x_2+1-\xi} \\ &+ (x_2 + 2) \cdot \binom{\xi}{x_2+2} \cdot S_{\xi, n_1+x_2+2-\xi} \left. \right), \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 - 1 \end{aligned} \quad (44b)$$

Die Polynome $S_{r,m}$ erfüllen mehrere Beziehungen, unter anderem die Gleichungen (45) und (46), die sich mit Hilfe der Definition dieser Polynome (40) leicht verifizieren lassen /4/:

$$S_{r,m} = S_{r,m-1} + S_{r-1,m} \quad (45)$$

$$(A+r+m-1) \cdot S_{r,m-1} = m \cdot S_{r,m} + A \cdot S_{r,m-2} \quad (46)$$

Die Beziehung (45) wird sich später bei der numerischen Rechnung als sehr nützlich erweisen. Mit Hilfe von (46) kann die Gleichung (44b) etwas umgeformt und vereinfacht werden. Setzt man $r = \xi$ und $m = n_1 + x_2 + 2 - \xi$, so erhält man mit Gleichung (46) für den zweiten Ausdruck in der grossen Klammer in Gleichung (44b)

$$\begin{aligned} & [A \cdot \mu(x_2 + 1) + n_1 + x_2 + 1] \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 + 1 - \xi} \\ &= -A \cdot \sigma(x_2 + 1) \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 + 1 - \xi} \\ & \quad + (A + n_1 + x_2 + 1) \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 + 1 - \xi} \\ &= -A \cdot \sigma(x_2 + 1) \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 + 1 - \xi} \\ & \quad + (n_1 + x_2 + 2 - \xi) \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 + 2 - \xi} + A \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 - \xi} \end{aligned} \quad (47)$$

Ausserdem ist im dritten Ausdruck in der geschweiften Klammer in Gleichung (44b)

$$(x_2 + 2) \cdot \binom{\xi}{x_2 + 2} = (\xi - x_2 - 1) \cdot \binom{\xi}{x_2 + 1} \quad (48)$$

Damit erhält man aus Gleichung (44b)

$$\begin{aligned} p(0, x_2) &= \frac{1}{A \cdot \mu(x_2) \cdot S_{x_2, n_1}} \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2-1} \cdot p(0, \xi) \cdot \\ & \quad \cdot \left[A \cdot \mu(x_2) \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 - \xi} \right. \\ & \quad \left. - A \cdot \sigma(x_2 + 1) \cdot \binom{\xi}{x_2 + 1} \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 + 1 - \xi} \right. \\ & \quad \left. + (n_1 + 1) \cdot \binom{\xi}{x_2 + 1} \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 + 2 - \xi} \right], \end{aligned}$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2 - 1$$

oder

$$\begin{aligned} p(0, x_2) &= \frac{1}{S_{x_2, n_1}} \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2-1} \cdot p(0, \xi) \cdot \\ & \quad \cdot \left[\binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 - \xi} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sigma(x_2 + 1)}{\mu(x_2)} \cdot \binom{\xi}{x_2 + 1} \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 + 1 - \xi} \right. \\ & \quad \left. + \frac{n_1 + 1}{A \cdot \mu(x_2)} \cdot \binom{\xi}{x_2 + 1} \cdot S_{\xi, n_1 + x_2 + 2 - \xi} \right], \end{aligned} \quad (49)$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2 - 1$$

Mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} a_{x,z} &= \frac{(-1)^{z-x-1}}{S_{x, n_1}} \cdot \left[\binom{z}{x} \cdot S_{z, n_1 + x - z} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sigma(x + 1)}{\mu(x)} \cdot \binom{z}{x + 1} \cdot S_{z, n_1 + x + 1 - z} \right. \\ & \quad \left. + \frac{n_1 + 1}{A \cdot \mu(x)} \cdot \binom{z}{x + 1} \cdot S_{z, n_1 + x + 2 - z} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

kann man die Gleichung (49) in vereinfachter Form darstellen:

$$p(0, x_2) = \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} a_{x_2, \xi} \cdot p(0, \xi) \quad , \quad (51a)$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2-1$$

Ausgeschrieben hat das Gleichungssystem (51a) die Gestalt

$$\begin{aligned} p(0, n_2-1) &= a_{n_2-1, n_2} \cdot p(0, n_2) \\ p(0, n_2-2) &= a_{n_2-2, n_2-1} \cdot p(0, n_2-1) + a_{n_2-2, n_2} \cdot p(0, n_2) \\ p(0, n_2-3) &= a_{n_2-3, n_2-2} \cdot p(0, n_2-2) + a_{n_2-3, n_2-1} \cdot p(0, n_2-1) \\ &\quad + a_{n_2-3, n_2} \cdot p(0, n_2) \\ &\dots \\ p(0, 0) &= a_{0,1} \cdot p(0,1) - a_{0,2} \cdot p(0,2) + \dots + a_{0, n_2} \cdot p(0, n_2) \end{aligned} \quad (51b)$$

Mit Hilfe dieses Gleichungssystems ist es nun einfach, die Werte $p(0, x_2)$ durch den Wert $p(0, n_2)$ auszudrücken: $p(0, n_2-1)$ kann mit Hilfe der ersten Gleichung von (51b) direkt angegeben werden. Mit diesem Wert ergibt sich $p(0, n_2-2)$ direkt aus der zweiten Gleichung von (51b), und so fort. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned} p(0, n_2-1) &= b_{n_2-1} \cdot p(0, n_2) \\ p(0, n_2-2) &= b_{n_2-2} \cdot p(0, n_2) \\ &\dots \\ p(0, 0) &= b_0 \cdot p(0, n_2) \end{aligned} \quad (52a)$$

Definiert man noch

$$b_{n_2} = 1$$

und nimmt zu (52a) noch die Gleichung

$$p(0, n_2) = b_{n_2} \cdot p(0, n_2)$$

hinzu, so gilt

$$p(0, x_2) = b_{x_2} \cdot p(0, n_2) \quad , \quad (52b)$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2$$

wobei

$$\begin{aligned} b_{n_2} &= 1 \quad , \\ b_{n_2-1} &= a_{n_2-1, n_2} \quad , \\ b_{n_2-2} &= a_{n_2-2, n_2} + a_{n_2-2, n_2-1} \cdot a_{n_2-1, n_2} \quad , \\ b_{n_2-3} &= a_{n_2-3, n_2} + a_{n_2-3, n_2-1} \cdot a_{n_2-1, n_2} \\ &\quad + a_{n_2-3, n_2-2} \cdot (a_{n_2-2, n_2} + a_{n_2-2, n_2-1} \cdot a_{n_2-1, n_2}) \quad , \\ &\dots \end{aligned} \quad (53a)$$

oder allgemein

$$b_{x_2} = \sum_{z_1=x_2+1}^{n_2} a_{x_2, z_1} \cdot \sum_{z_2=z_1+1}^{n_2} a_{z_1, z_2} \cdot \sum_{z_3=z_2+1}^{n_2} a_{z_2, z_3} \cdot \dots \cdot \sum_{z_w=z_{w-1}+1}^{n_2} a_{z_{w-1}, z_w} \quad (53b)$$

$$\begin{aligned} \text{für } x_2 &= 0, 1, \dots, n_2-1 \\ \text{mit } w &= n_2 - x_2 \end{aligned}$$

In Gleichung (53b) sind all jene Summen, bei denen die untere Grenze den Wert n_2 übersteigt, gleich eins zu setzen. Mit Hilfe der Gleichungen (41) und (52b) lassen sich nun alle Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ durch den Wert $p(0, n_2)$ ausdrücken:

$$p(x_1, x_2) = p(0, n_2) \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot b_{\xi} \cdot S_{\xi, x_1+x_2-\xi} \quad , \quad (54)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, 1, \dots, n_1 \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned}$$

Damit sind die Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ ausgedrückt allein als Funktion der bekannten Parameter $x_1, x_2, n_1, n_2, k_2, A$ und der vorläufig noch unbekannt Wahrscheinlichkeit $p(0, n_2)$.

IV.4.5. Geschlossene Lösung für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$

Mit der Beziehung (54) sind die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ bis auf den Faktor $p(0, n_2)$ festgelegt. Nachdem hierzu die Gleichungen (36a) und (36b) bzw. (35a) und (35b) bereits ausgenutzt wurden, bleibt zur Bestimmung dieses Faktors $p(0, n_2)$ noch die Summenbedingung (35c), die besagt, dass die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ den Wert eins ergibt. Man kann also nach Gleichung (54) alle Werte $p(x_1, x_2)$ bis auf den Faktor $p(0, n_2)$ berechnen und diesen selbst aus Gleichung (35c).

Der Wert $p(0, n_2)$ lässt sich jedoch noch einfacher bestimmen, wenn man berücksichtigt, dass ausser der Summenbedingung (35c) auch noch die Gleichzeitigkeitsverteilung $p_1(x_1)$ im Primärbündel bekannt ist. Nach der Erlang-Formel gilt

$$p_1(x_1) = \frac{\frac{A^{x_1}}{x_1!}}{\sum_{\xi=0}^{n_1} \frac{A^\xi}{\xi!}}, \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \quad (5)$$

und mit Gleichung (40b)

$$p_1(x_1) = \frac{\frac{A^{x_1}}{x_1!}}{\sum_{\xi=0}^{n_1} \frac{A^\xi}{\xi!}} = \frac{S_{0, x_1}}{S_{1, n_1}}, \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \quad (55)$$

Andererseits ist

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2=0}^{n_2} p(x_1, x_2), \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \quad (56)$$

Mit den Gleichungen (5), (55) und (56) ergeben sich dann folgende - gegenüber der Gleichung (35c) einfachere - Summenbedingungen

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2=0}^{n_2} p(x_1, x_2) = \frac{S_{0, x_1}}{S_{1, n_1}}, \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \quad (57)$$

Man kennt also nicht nur die Summe aller Werte $p(x_1, x_2)$ nach Gleichung (35c), sondern auch die Teilsummen nach Gleichung (57). Wenn man in Gleichung (57) $x_1 = 0$ setzt, so erhält man die einfache und für die weitere Rechnung am besten geeignete Bedingung

$$\sum_{x_2=0}^{n_2} p(0, x_2) = \frac{S_{0, 0}}{S_{1, n_1}} \quad (58)$$

und wegen $S_{0, 0} = 1$

$$p_1(0) = \sum_{x_2=0}^{n_2} p(0, x_2) = \frac{1}{S_{1, n_1}} = \frac{1}{\sum_{\xi=0}^{n_1} \frac{A^\xi}{\xi!}} \quad (59)$$

Mit Gleichung (52b) erhält man hieraus

$$p(0, n_2) \cdot \sum_{x_2=0}^{n_2} b_{x_2} = \frac{1}{\sum_{\xi=0}^{n_1} \frac{A^\xi}{\xi!}} \quad (60)$$

Der Wert $p(0, n_2)$ ist also

$$p(0, n_2) = \frac{1}{\left(\sum_{\xi=0}^{n_1} \frac{A^\xi}{\xi!}\right) \cdot \left(\sum_{x_2=0}^{n_2} b_{x_2}\right)}$$

Damit ist das Gleichungssystem (35a,b,c) gelöst.

Für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ ergibt sich also, kurz zusammengefasst, nach Gleichung (54) und Gleichung (61)

$$p(x_1, x_2) = \frac{\sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot b_\xi \cdot S_{\xi, x_1+x_2-\xi}}{S_{1, n_1} \cdot \sum_{\xi=0}^{n_2} b_\xi}, \quad (62a)$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2$$

oder mit den Gleichungen (5) und (59)

$$p(x_1, x_2) = p_1(x_1) \cdot \frac{\sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot b_\xi \cdot S_{\xi, x_1+x_2-\xi}}{\frac{A^{x_1}}{x_1!} \cdot \sum_{\xi=0}^{n_2} b_\xi}, \quad (62b)$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2$$

Dabei ist

$$S_{r, m} = \sum_{v=0}^m \frac{A^{m-v}}{(m-v)!} \cdot \binom{r-1+v}{v}, \quad r, m \geq 0 \quad (40a)$$

ausserdem

$$b_\xi = \sum_{z_1=\xi+1}^{n_2} \alpha_{\xi, z_1} \cdot \sum_{z_2=z_1+1}^{n_2} \alpha_{z_1, z_2} \cdot \sum_{z_3=z_2+1}^{n_2} \alpha_{z_2, z_3} \cdot \dots \cdot \sum_{z_w=z_{w-1}+1}^{n_2} \alpha_{z_{w-1}, z_w}, \quad (53b)$$

$$\text{für } \xi = 0, 1, \dots, n_2 - 1$$

$$\text{mit } w = n_2 - \xi$$

und

$$b_{n_2} = 1$$

(In Gleichung (53b) sind alle jene Summen gleich eins zu setzen, bei welchen die untere Grenze grösser ist als der wert n_2). Hierbei ist

$$\alpha_{x, z} = \frac{(-1)^{z-x-1}}{S_{x, n_1}} \cdot \left[\binom{z}{x} \cdot S_{z, n_1+x-z} - \frac{\sigma(x+1)}{\mu(x)} \cdot \binom{z}{x+1} \cdot S_{z, n_1+x+1-z} + \frac{n_1+1}{A \cdot \mu(x)} \cdot \binom{z}{x+1} \cdot S_{z, n_1+x+2-z} \right] \quad (50)$$

mit

$$\sigma(x_2) = \frac{\binom{x_2}{k_2}}{\binom{n_2}{k_2}} \quad (34a)$$

und

$$\mu(x_2) = 1 - \sigma(x_2) \quad (34b)$$

IV.4.6. Verluste und Verkehrsreste

Der Verlust im Primärbündel ergibt sich nach der Erlang'schen Formel (6) zu

$$B_1 = E_{n_1}(A) \quad ,$$

der vom Primärbündel auf das Sekundärbündel überlaufende Verkehrsrest R_1 ist

$$R_1 = A \cdot B_1 = A \cdot E_{n_1}(A) \quad (7)$$

Den vom Sekundärbündel nicht verarbeiteten Verkehrsrest R_2 erhält man durch Addition aller derjenigen Teile des Angebots, die sowohl im Primärbündel als auch im Sekundärbündel alle erreichbaren Leitungen belegt vorfinden:

$$R_2 = A \cdot \sum_{x_2=k_2}^{n_2} \sigma(x_2) \cdot p(n_1, x_2) \quad (63)$$

Für den gesuchten Verlust B_2 im Sekundärbündel erhält man damit

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{E_{n_1}(A)} \cdot \sum_{x_2=k_2}^{n_2} \sigma(x_2) \cdot p(n_1, x_2) \quad (64)$$

IV.4.7. Numerische Auswertung und Ergebnisse

Die Gleichung (62) stellt eine explizite Formel für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ dar. Sie ist numerisch leicht auszuwerten, wenn die Polynome $S_{r,m}$ ($0 \leq r \leq n_2$, $0 \leq m \leq n_1$) und die Werte b_ξ ($0 \leq \xi \leq n_2$) bekannt sind.

Die Polynome $S_{r,m}$ könnte man nach der Definition (40a) berechnen. Günstiger ist es jedoch, wenn man die Beziehung (45) verwendet.

Die Werte $S_{r,0}$ sind bekannt, denn nach (40) ist für

$m = 0$

$$S_{r,0} = \frac{A^0}{0!} \cdot \binom{r-1}{0} = 1 \quad , \quad r \geq 0$$

Die Werte $S_{0,m}$ lassen sich leicht rekursiv berechnen. Nach Gleichung (40) erhält man für $r = 0$

$$S_{0,m} = \frac{A^m}{m!} \quad , \quad m \geq 0 \quad (65a)$$

oder

$$S_{0,m} = \frac{A}{m} \cdot S_{0,m-1} \quad , \quad m > 0 \quad (65b)$$

Dann lassen sich alle übrigen Werte $S_{r,m}$ mit Hilfe der Beziehung (45) durch die Addition von zwei schon bekannten Werten berechnen, zum Beispiel der Reihe nach

$$\begin{array}{cccc} S_{1,1} & , & S_{1,2} & , \dots & S_{1,n_1} & , \\ S_{2,1} & , & S_{2,2} & , \dots & S_{2,n_1} & , \\ \dots & & \dots & & \dots & \\ S_{n_2,1} & , & S_{n_2,2} & , \dots & S_{n_2,n_1} & . \end{array}$$

Für die Berechnung der Werte $S_{r,m}$ ist also (ausser für $r = 0$) jeweils nur eine einzige Addition erforderlich /6/.

Für die Berechnung der Grössen b_ξ verwendet man zweckmässig anstelle der expliziten Darstellung (53b) die Gleichungen (51b) und (52a). Es lassen sich dann mit Hilfe der Beziehung (51b) alle Werte b_ξ der Reihe nach direkt berechnen, da die jeweils benötigten Werte alle schon vorher bestimmt wurden.

Beispiel: Für eine Gruppierung mit einem vollkommenen Primärbündel von $n_1 = 10$ Leitungen und einem ideal gemischten Sekundärbündel mit $n_2 = 10$ Leitungen und der Erreichbarkeit $k_2 = 4$ erhält man bei einem Angebot von $A = 8$ Erlang die Werte

$p(0, 0) = 3,35741850 \cdot 10^{-4}$	$p(n_1, 0) = 0,02745662$
$p(0, 1) = 5,71147723 \cdot 10^{-5}$	$p(n_1, 1) = 0,02980710$
$p(0, 2) = 1,36920208 \cdot 10^{-5}$	$p(n_1, 2) = 0,02443275$
$p(0, 3) = 3,47343165 \cdot 10^{-6}$	$p(n_1, 3) = 0,01717170$
$p(0, 4) = 8,74303076 \cdot 10^{-7}$	$p(n_1, 4) = 0,01080976$
$p(0, 5) = 2,10220933 \cdot 10^{-7}$	$p(n_1, 5) = 0,00621989$
$p(0, 6) = 4,64918935 \cdot 10^{-8}$	$p(n_1, 6) = 0,00328629$
$p(0, 7) = 9,01472698 \cdot 10^{-9}$	$p(n_1, 7) = 0,00157226$
$p(0, 8) = 1,42848040 \cdot 10^{-9}$	$p(n_1, 8) = 0,00065225$
$p(0, 9) = 1,63676042 \cdot 10^{-10}$	$p(n_1, 9) = 0,00021174$
$p(0, 10) = 1,01349044 \cdot 10^{-11}$	$p(n_1, 10) = 0,00004069$

$p_2(0) = 0,53106025$	$\sigma(0) = 0,00000000$
$p_2(1) = 0,21965296$	$\sigma(1) = 0,00000000$
$p_2(2) = 0,11922839$	$\sigma(2) = 0,00000000$
$p_2(3) = 0,06515401$	$\sigma(3) = 0,00000000$
$p_2(4) = 0,03434341$	$\sigma(4) = 0,00476190$
$p_2(5) = 0,01721326$	$\sigma(5) = 0,02380952$
$p_2(6) = 0,00809573$	$\sigma(6) = 0,07142857$
$p_2(7) = 0,00348749$	$\sigma(7) = 0,16666667$
$p_2(8) = 0,00131021$	$\sigma(8) = 0,33333333$
$p_2(9) = 0,00038652$	$\sigma(9) = 0,60000000$
$p_2(10) = 0,00006776$	$\sigma(10) = 1,00000000$

Mit den Gleichungen (6), (63) und (64) ergibt sich dann

$R_1 = 0,9733$ Erlang	$R_2 = 0,008652$ Erlang
$B_1 = 12,1661\%$	$B_2 = 0,8889\%$
$B_{ges} = 0,1081\%$	

Die hierbei nötige Rechenzeit von 1 sec ist um den Faktor 35 kleiner als bei iterativer Rechnung mit Hilfe des Relaxationsverfahrens.

IV.4.8. Ausdehnung des Verfahrens auf Sekundärbündel mit beliebiger nicht-idealer Mischung

Da das in Abschnitt IV.4.1 bis IV.4.7 beschriebene Verfahren zur Berechnung von Gruppierungen mit vollkommen erreichbarem Primärbündel und ideal gemischtem Sekundärbündel bei der numerischen Rechnung ohne Iteration auskommt und deshalb sehr wenig Rechenzeit benötigt, erhebt sich die Frage, ob man mit diesem Verfahren auch Gruppierungen mit nicht-ideal gemischtem Sekundärbündel exakt berechnen kann. Dies ist prinzipiell möglich, wenn man für die betrachtete "reale" Mischung deren exakte Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_R(x_2)$ ebenfalls kennen würde. Im allgemeinsten Fall ist

$$\sigma_R(x_2) = f(n_2, k_2, x_2, \text{statistische Eigenschaften des Überlaufverkehrs}).$$

Dabei ist $\sigma_R(x_2)$ als Erwartungswert über alle Belegungsmuster $\{x_2\}_r$, $0 \leq r \leq n_2$ zu verstehen. Diese Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_R(x_2)$ ist aber im allgemeinen Fall exakt nur berechenbar über die in Abschnitt IV.3 behandelte Lösung eines Systems von $(n_1+1) \cdot 2^{n_2}$ Zustandsgleichungen.

Das in IV.4.1 bis IV.4.7 beschriebene Verfahren muss daher für reale Mischungen ausgehen von Näherungsverfahren zur Berechnung von $\sigma_R(x_2)$. Nachstehend werden verschiedene Lösungen für die näherungsweise Berechnung von $\sigma_R(x_2)$ hergeleitet und kritisch verglichen.

Lösung 1:

Es wird die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_{ID}(x_2)$ einer idealen Mischung als Näherung für $\sigma_R(x_2)$ benutzt. Die Güte dieser Näherung hängt jedoch sehr von den speziellen Eigenschaften der betrachteten Mischung ab und kann unter Umständen verhältnismässig grob sein. Dies gilt besonders bei Mischungen, die aus technischen Gründen stark vereinfacht sind (zum Beispiel kleines Mischungsverhältnis, nur begrenztes Übergreifen und normierte Staffelung oder

O'Dell-Mischung ohne Übergreifen). Für die in Abschnitt IV.3 behandelte Gruppierung (s. Bild 20), die bei einem Angebot von 8 Erlang nach exakter Rechnung gemäss Abschnitt IV.3 den Verlust

$$B_2 = 0,9916\%$$

aufweist, erhält man den Näherungswert

$$B_2^{(1)} = 0,8889\% \dots \dots \sigma_H^{(1)}(x_2) = \sigma_{ID}(x_2) .$$

Der relative Fehler des Verlustes $B_2^{(1)}$ ist in diesem Fall

$$\frac{B_2^{(1)} - B_2}{B_2} = -10,4\% .$$

Lösung 2:

Eine bessere Näherung für $\sigma_R(x_2)$ erhält man, wenn man die exakte Sperrwahrscheinlichkeit der betrachteten Mischung für jenen angebotenen Z u f a l l sverkehr berechnet, bei dem sich im Sekundärbündel derselbe Verlust B_2 einstellt wie im Fall einer exakten Berechnung des Gesamtsystems aus Primär- und Sekundärbündel. Dieser Vergleich ist zunächst nur von theoretischem Interesse, da diese exakte Berechnung nur in den seltensten Fällen numerisch auf heutigen Digitalrechnern ausführbar ist; die Näherungslösung ist in diesen Fällen selbstredend nicht mehr interessant. Die nachfolgend beschriebenen Verfahren benutzen jedoch denselben Grundgedanken.

Der Lösungsweg verläuft wie folgt:

Zunächst wird, beginnend mit einem Schätzwert für das Zufallsangebot $A^{(2)}$ die Verteilung $p(x_2)$ aus der Lösung der Zustandsgleichungen gerechnet, wobei $A^{(2)}$ solange iteriert wird, bis sich der Wert B_{soll} (hier = 0,9916%) eingestellt hat.

Anschliessend werden aus dieser - für angebotenen Z u f a l l sverkehr exakten - Verteilung $p(x_2)$ mit Hilfe

des bekannten rekursiven Ansatzes

$$p(x_2+1) \cdot (x_2+1) = A^{(2)} \cdot p(x_2) \cdot \sigma_R^{(2)}(x_2) \quad (66)$$

die Sperrwahrscheinlichkeiten $\sigma_H^{(2)}(x_2)$, $0 \leq x_2 \leq n_2$, berechnet. Mit dieser Näherung $\sigma_R^{(2)}(x_2)$ für die Sperrwahrscheinlichkeit erhält man nach dem Verfahren in Abschnitt IV.4.7 den Näherungswert

$$B_2^{(2)} = 1,0090\%$$

anstelle des (hier noch exakt berechenbaren) Wertes $B_2 = 0,9916\%$. Der relative Fehler des Näherungswertes $B_2^{(2)}$ beträgt in diesem Beispiel nur noch

$$\frac{B_2^{(2)} - B_2}{B_2} = 1,75\% .$$

Lösung 3:

Diese Lösung ist anwendbar für jene Fälle, in denen das betrachtete, real gemischte Sekundärbündel f ü r s i c h a l l e i n und für angebotenen Z u f a l l sverkehr noch exakt berechenbar ist ($n_2 \leq 18$ je nach Grösse der Datenverarbeitungsanlage, also 2^{n_2} Zustandsgleichungen).

Der exakte Verlust B_2 für den vom Primärbündel angebotenen Überlaufverkehr (K_1, D_1) sei nicht mehr exakt berechenbar ($(n_1+1) \cdot 2^{n_2}$ Zustandsgleichungen!).

Lösungsweg:

Das Wertepaar (K_1, D_1) des vollkommen erreichbaren Primärbündels wird wie üblich exakt berechnet. Mit Hilfe des Streuwertverfahrens für unvollkommene Bündel /12, 14, 22, 23, 24/ wird nun ein erster Näherungswert für \tilde{B}_2 errechnet (vergleiche Abschnitt V.1.2). Für das Wertetripel (n_2, k_2, \tilde{B}_2) wird unter Berücksichtigung des Typs der betrachteten realen Mischung mit Hilfe der MPJ-Verlustformel und deren Anpassung an verschiedene Mischungstypen /15/

ein zu \tilde{B}_2 gehörender Angebotswert $A^{(3)}$ iterativ berechnet.

Für dieses Angebot $A^{(3)}$ und die individuellen Daten der Sekundärmischung wird nunmehr die Verteilung $p(x_2)$ exakt berechnet (kein Iterationsverfahren auf einen Wert B_{soll}). Unbeschadet der (in der Regel sehr kleinen Differenzen zwischen exaktem "Zufalls-Verlust" und "MPJ-Verlust" werden aus dieser Verteilung $p(x_2)$ wie bei Lösung 2 aus dem rekursiven Ansatz für stationären Verkehr die Sperrwahrscheinlichkeiten $\sigma_R^{(3)}(x_2)$ für angebotenen Zufallsverkehr exakt berechnet. Es folgt dann wieder der Rechnungsgang nach Abschnitt IV.4.7 für das Gesamtsystem (Primärbündel + Sekundärbündel).

In unserem Beispiel erhält man zunächst

$$B_2^{(3)} = 1,053\% \text{ (exakt } 0,9916\%).$$

Der relative Fehler dieses Werts ist

$$\frac{B_2^{(3)} - B_2}{B_2} = 6,15\%.$$

Der Wert $B_2^{(3)}$ ist also noch nicht so genau wie jener mit Hilfe des (meist nicht greifbaren) exakten Wertes B_2 berechnete Näherungswert $B_2^{(2)}$ in Lösung 2. Wenn man aber, ausgehend von $B_2^{(3)}$ das Verfahren mit $B_2^{(3)} \rightarrow \tilde{B}_2$ erneut anwendet, erhält man den - sehr genauen - Näherungswert

$$B_2^{(3)} = 1,009\%$$

mit einem relativen Fehler von nur

$$\frac{B_2^{(3)} - B_2}{B_2} = 1,75\%.$$

Weitere Iterationsschritte $B_2^{(3)} \rightarrow \tilde{B}_2$ sind möglich und können (zum Beispiel bei grösseren Bündeln oder schlechterer Übereinstimmung $B_{Zuf,ex} \leftrightarrow B_{MPJ}$) eventuell noch kleine Verbesserungen bringen. Das Verfahren konvergiert auf einen Wert B_2 , der sehr nahe beim exakten Wert liegt.

Mit diesem Verfahren kann also für kleinere Sekundärbündel ($n_2 \approx 18$) auf einfache Weise ein sehr guter Näherungswert für den Verlust B_2 von nicht-ideal gemischten Sekundärbündeln gerechnet werden ($n_2 = 18$ entspricht einem linearen Gleichungssystem vom Range 2^{18} , das auf einer sehr grossen DVA gerade noch lösbar ist).

Lösung 4:

Diese Lösung ist anwendbar für grössere Sekundärbündel, deren Verteilung $p(x_2)$ auch für angebotenen Zufallsverkehr numerisch nicht mehr exakt berechenbar ist ($n \approx 10 \dots 18$). Bei der Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten von grösseren Sekundärbündeln kann deshalb auch für angebotenen Zufallsverkehr nur ein Näherungswert $\sigma_R^{(4)}(x_2)$ für die Sperrwahrscheinlichkeit gesucht werden. Die einfachste Näherung ist wieder die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_{ID}(x_2)$ der idealen Mischung. Dieser Ansatz führt auf die Lösung 1, welche den Verlust oft etwas unterschätzt.

Eine Verbesserung erhält man, wenn man die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_R^{(4)}(x_2)$ für angebotenen Zufallsverkehr ($A_{Zuf} = R_1$) nach einer (empirischen) Näherungsformel von R. Kirsch /17/ bestimmt. Bei dieser Näherung wird die Sperrwahrscheinlichkeit wie bei einer idealen Mischung berechnet, jedoch nicht mit der tatsächlichen Erreichbarkeit k_2 , sondern mit einer "effektiven" Erreichbarkeit k^* . Man erhält dann für die Sperrwahrscheinlichkeit

$$\sigma_R^{(4)}(x_2) = \frac{\binom{x_2}{k^*}}{\binom{n_2}{k^*}}, \quad x_2 = 0, 1, \dots, n_2 \quad (67a)$$

Dabei gilt für die effektive Erreichbarkeit

$$k^* = k_2 - c_1 \cdot (k_2 - 5) \cdot \frac{n_2 - k_2}{n_2} \cdot \left(\frac{Y_2}{n_2} - c_2 \cdot \sqrt[4]{k_2 - 6} \right), \quad (67b)$$

$$k_2 \geq 6$$

Speziell für vereinfachte Normmischungen, wie sie bei der Deutschen Bundespost verwendet werden, ist durch Vergleiche zwischen Rechnung und zahlreichen Verkehrstests bekannt /17/, dass

$$c_1 = 1,26$$

$$c_2 = 0,32.$$

und

Da bei dieser Näherung (67a,b) die Sperrwahrscheinlichkeit $G_R^{(4)}$ ausser von n_2 , k_2 und x_2 auch noch von dem - zunächst noch unbekanntem - Verkehr Y_2 im Sekundärbündel abhängt, ist zur Berechnung von $G_R^{(4)}(x_2)$ eine Iteration erforderlich.

Für ein Zufallsangebot A_{Zuf} (hier $A_{Zuf} = R_1$) wird zunächst für das Sekundärbündel $a l l e i n$ nach der MPJ-Formel ein Näherungswert \tilde{B} für den Verlust und damit eine Näherung $Y_2 = A_{Zuf} \cdot (1 - \tilde{B})$ für den Verkehr bestimmt. Mit diesem Wert Y_2 lässt sich nach (67a,b) die Sperrwahrscheinlichkeit $G_R^{(4)}(x_2)$ berechnen und hieraus ein verbesserter Wert B . Dieser Wert für den Verlust B kann als Ausgangswert für den nächsten Iterationsschritt verwendet werden.

Dieses Näherungsverfahren für die Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit $G_R^{(4)}(x_2)$ konvergiert sehr rasch. Schon beim dritten Iterationsschritt ändert sich der Wert B meist um weniger als 0,01% (relativ).

Die Güte dieser Näherung für $G(x_2)$ bei der Berechnung des Gesamtsystems aus Primärbündel und Sekundärbündel wird nun am Beispiel eines grösseren Sekundärbündels untersucht, wie es in der Praxis des öfteren vorkommen wird. Die betrachtete Gruppierung ist in Bild 26 dargestellt.

Dem Primärbündel mit $n_1 = 36$ Leitungen wird ein Zufallsverkehr von $A = 64,2$ Erlang angeboten. Von diesem Bündel läuft ein Verkehrsrest $R_1 = 29,1$ Erlang (mit einem relativen Streuwert $D_1/R_1 = 0,995$) auf ein Sekundärbündel mit $n_2 = 60$ Leitungen und der Erreichbarkeit $k_2 = 10$ über. Die Mischung dieses Sekundärbündels stellt eine sogenannte "vereinfachte Normmischung" dar, wie sie z.B. bei der Deutschen Bundespost verwendet wird.

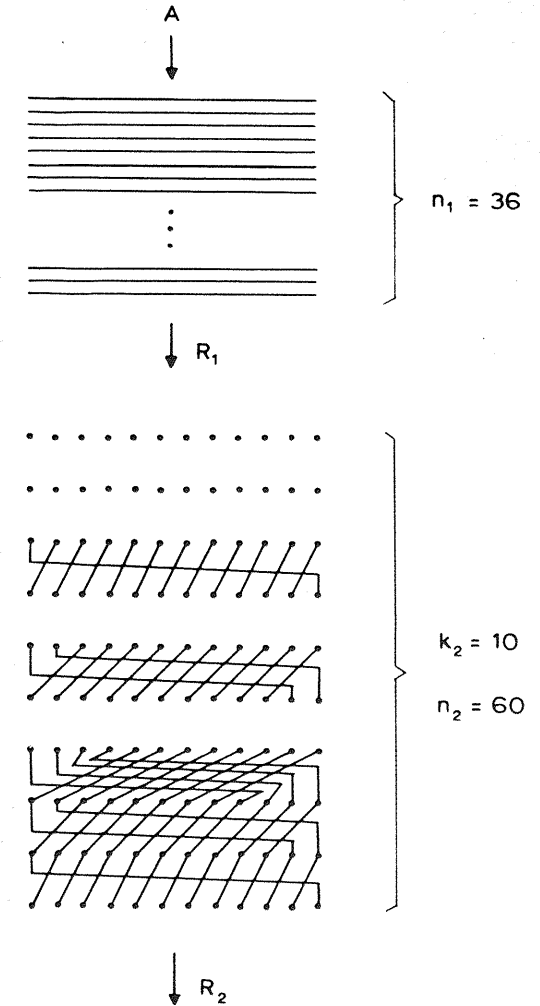


Bild 26: Überlaufsystem mit vollkommen erreichbarem Primärbündel und unvollkommen erreichbarem Sekundärbündel ("Normmischung")

Ein Verkehrstest (mit 200.000 Rufen) ergab den Verlustwert

$$B_2 = 0,573\%$$

mit einem Vertrauensintervall von $\pm 12\%$ (relativ).

Für den Näherungswert $B_2^{(1)}$ (bei Verwendung der Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_{ID}(x_2)$ der idealen Mischung, siehe oben) erhält man

$$B_2^{(1)} = 0,506\%$$

Dieser Wert liegt noch innerhalb des Vertrauensintervalls und hat gegenüber dem Testwert eine relative Abweichung von

$$\frac{B_2^{(1)} - B_2}{B_2} = -11,5\%.$$

Für den Näherungswert $B_2^{(4)}$ (mit Verwendung der Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_R^{(4)}(x_2)$, siehe oben) erhält man den Wert

$$B_2^{(4)} = 0,540\%$$

mit einer relativen Abweichung vom Testwert von

$$\frac{B_2^{(4)} - B_2}{B_2} = -6,7\%.$$

In einem weiteren Beispiel wird nun nochmals die in Bild 26 dargestellte Gruppierung betrachtet, jedoch bei einem Angebot von $A = 80$ Erlang.

Für diesen Fall ergab eine Simulation (mit 200.000 Rufen) den Verlust

$$B_2 = 7,50\%$$

mit einem Vertrauensintervall von $\pm 5,3\%$.

Für die Näherung $B_2^{(1)}$ (bei Verwendung der Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_{ID}(x_2)$ der idealen Mischung) erhält man den Wert

$$B_2^{(1)} = 6,345\%$$

der einen relativen Fehler von -15% hat und ausserhalb des Vertrauensintervalls liegt.

Verwendet man dagegen die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_R^{(4)}(x_2)$, so erhält man den sehr genauen Näherungswert

$$B_2^{(4)} = 7,520\%$$

der vom Simulationswert B_2 nur um $0,26\%$ abweicht.

Mit dem in Lösung 4 beschriebenen Verfahren lässt sich also für Anordnungen gemäss Bild 26 auch die Verlustwahrscheinlichkeit grösserer Sekundärbündel, wie sie in der Praxis häufig vorkommen, auf einfache Weise sehr genau berechnen. Das Verfahren (4) wird überall dort von Nutzen sein, wo für die Entwicklung neuer Vermittlungssysteme genauere Angaben über die Verkehrsleistung von Überlaufanordnungen erwünscht sind, als sie mit den bisherigen (für die Praxis ausreichenden) Näherungsverfahren erzielt werden können.

V

ÜBERLAUFSYSTEME MIT UNVOLLKOMMEN ERREICHBAREN BÜNDELN

V.1. Real gemischtes Primärbündel mit real gemischtem Sekundärbündel

V.1.1. Exakte Verlustberechnung

Die Serienschaltung zweier unvollkommen erreichbarer Bündel mit nicht-idealer Mischung ist eine Gruppierung, die in der Praxis sehr häufig vorkommt. Ein sehr einfaches Beispiel für eine solche Gruppierung zeigt Bild 27.

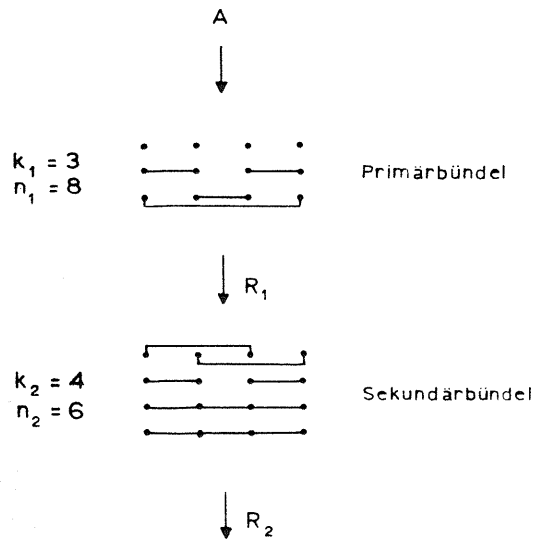


Bild 27: Real gemischtes Primärbündel mit real gemischtem Sekundärbündel

Diese Gruppierung besteht aus einem Primärbündel mit $n_1 = 8$ Leitungen und der Erreichbarkeit $k_1 = 3$ sowie aus

einem Sekundärbündel mit $n_2 = 6$ Leitungen und der Erreichbarkeit $k_2 = 4$. Die Zahl der Zubringerteilgruppen ist $g = 4$.

Der Verlust B_1 in dem nicht-ideal gemischten Primärbündel bzw. der auf das Sekundärbündel überlaufende Verkehrsrest R_1 lässt sich nach dem in Abschnitt IV.1.1 beschriebenen Verfahren berechnen.

Bei der Berechnung des Gesamtverlusts B_{ges} bzw. des vom Sekundärbündel nicht aufgenommenen Verkehrsrests R_2 kann man von der Tatsache ausgehen, dass die Mischung des Primärbündels und die Mischung des Sekundärbündels zusammen als eine Gesamtmischung mit $n = n_1 + n_2$ Leitungen und der Erreichbarkeit $k = k_1 + k_2$ betrachtet werden können, wie dies in Bild 28 dargestellt ist.

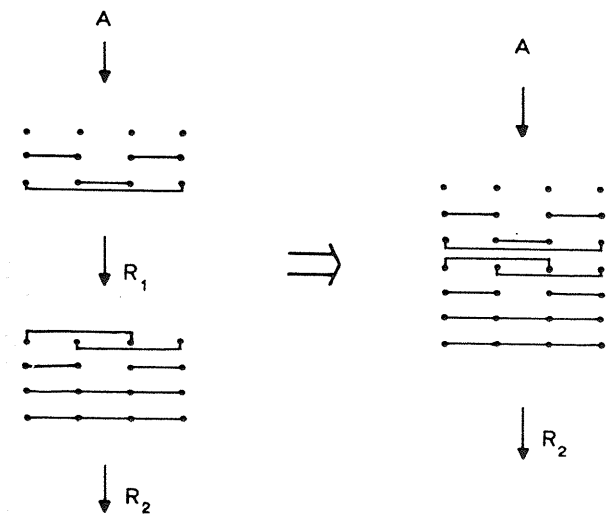


Bild 28: Darstellung der beiden Mischungen als eine Gesamtmischung

Für diese Gesamtmischung kann der Verlust B_{ges} bzw. der Verkehrsrest R_2 ebenfalls nach dem in Abschnitt IV.1.1

beschriebenen Verfahren bestimmt werden. Der Verlust B_2 im Sekundärbündel ist dann

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

Für die in Bild 28 gezeigte Gruppierung erhält man bei einem Angebot von $A = 8$ Erlang die Werte

$$\begin{aligned} B_1 &= 33,5506\% & R_1 &= 2,6840 \text{ Erlang} \\ B_2 &= 11,423\% & R_2 &= 0,3066 \text{ Erlang} \\ B_{\text{ges}} &= 3,8325\% \end{aligned}$$

Bei der Berechnung des Gesamtverlusts muss nach Abschnitt IV.1.1 ein System von $2^{(n_1+n_2)}$ linearen Gleichungen aufgelöst werden. Wie schon in Abschnitt IV.1.1 erwähnt wurde, konnten bisher wegen der begrenzten Speicherkapazität der Rechner nur Mischungen mit bis zu 9 Leitungen berechnet werden /10/. Auf der Rechenanlage TR4 ist es jetzt möglich, Mischungen mit bis zu 14 Leitungen zu berechnen. Die Leitungszahlen, für die exakte Verlustberechnungen noch durchgeführt werden können, sind also verhältnismässig klein. Dies erklärt die Tatsache, dass dieses Verfahren zur Bestimmung des Verlusts in unvollkommen erreichbaren Sekundärbündeln bisher praktisch nicht angewandt wird.

Ein Vergleich mit dem in der Praxis heute üblichen Streuwertverfahren findet sich auf Seite 101.

V.1.2. Das Streuwertverfahren für unvollkommene Bündel

Die Berechnung des Verlusts von unvollkommen erreichbaren Sekundärbündeln mit nicht-idealer Mischung kommt in der Praxis häufig vor, besonders bei der Bemessung von Fernsprechnetzen mit Leitweglenkung /16, 25, 26, 30/.

Die dabei auftretenden Bündel sind aber so gross, dass eine exakte Verlustberechnung (s. Abschnitt V.1.1) im allgemeinen nicht möglich ist. Ein guter Näherungswert für den Verlust derartiger grösserer Sekundärbündel kann jedoch leicht mit Hilfe des Streuwertverfahrens für unvollkommene Bündel von U. Herzog und A. Lotze berechnet werden /12, 14, 16, 22, 23, 24/. In diesem allgemeineren Verfahren ist das Streuwertverfahren für vollkommene Bündel (s. Abschnitt III.2.2) als Sonderfall enthalten.

Mit dem Streuwertverfahren für unvollkommene Bündel können auch Gruppierungen mit mehreren Primärbündeln berechnet werden (s. Bild 29 links). Zur Bestimmung des

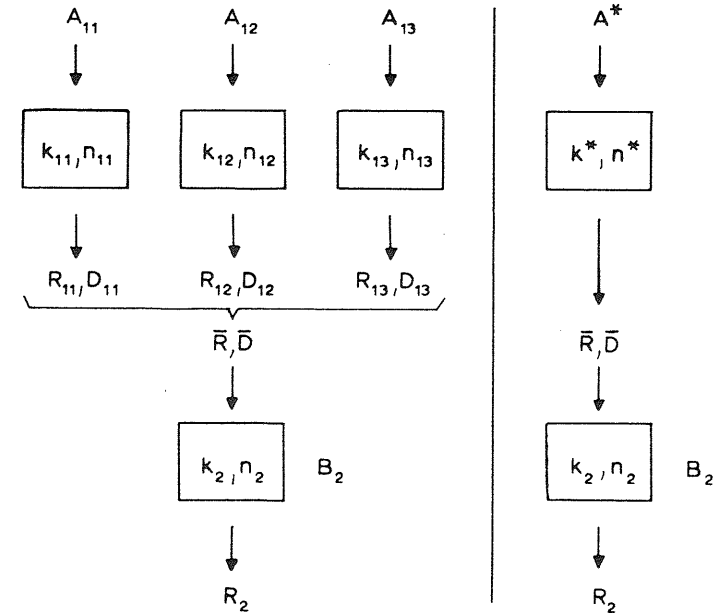


Bild 29: Ersatz von drei unvollkommen erreichbaren Primärbündeln mit den Angeboten A_{11} , A_{12} und A_{13} durch eine unvollkommen erreichbare "Ersatz-Primärmischung" mit einem Angebot A^* , der Leitungszahl n^* und einer Erreichbarkeit $k^* < n^*$, welche den gleichen Überlaufverkehr (\bar{R} , \bar{D}) an ein unvollkommen erreichbares Sekundärbündel (n_2 , k_2 , B_2) anbietet

Verlusts im Sekundärbündel (mit n_2 Leitungen und der Erreichbarkeit k_2) sucht man zunächst ein (unvollkommen erreichbares) Ersatz-Primärbündel mit dem Ersatzangebot A^* , der Erreichbarkeit k^* und der Leitungszahl n^* , welches den gleichen Überlaufrest \bar{R} und den gleichen Streuwert \bar{D} liefert, wie die verschiedenen, in Wirklichkeit vorhandenen Primärbündel zusammen (s. Bild 29). Bei geeignetem Mischungsverhältnis dieser Ersatz-Primärmischung kann man sie zusammen mit der Mischung des Sekundärbündels als eine Gesamtmischung mit (n^*+n_2) Leitungen und der Erreichbarkeit (k^*+k_2) betrachten. Für diese Gesamtmischung kann man den Verkehrsrest R_2 wie üblich berechnen. Es ist

$$R_2 = A^* \cdot B_{ges} \quad (68)$$

Damit ist auch der Verlust B_2 des Sekundärbündels bekannt

$$B_2 = \frac{R_2}{\bar{R}} \quad (69)$$

Für die in Bild 28 gezeigte Gruppierung erhält man nach dem Streuwertverfahren

Exakte Rechnung nach Seite 64

$$\begin{aligned} D_1 &= 1,31 \\ R_2 &= 0,369 \text{ Erlang} \\ B_2 &= 13,74\% \end{aligned} \quad \begin{aligned} R_2 &= 0,3066 \text{ Erlang} \\ B_2 &= 11,423\% \end{aligned}$$

Diese Näherungswerte stimmen gut mit den exakten Werten überein.

V.2. Ideal gemischtes Primärbündel mit ideal gemischtem Sekundärbündel

In Bild 30 ist eine Gruppierung dargestellt, die aus einem ideal gemischten Primärbündel mit n_1 Leitungen und der Erreichbarkeit k_1 und aus einem ideal gemischten

Sekundärbündel mit n_2 Leitungen und der Erreichbarkeit k_2 besteht.

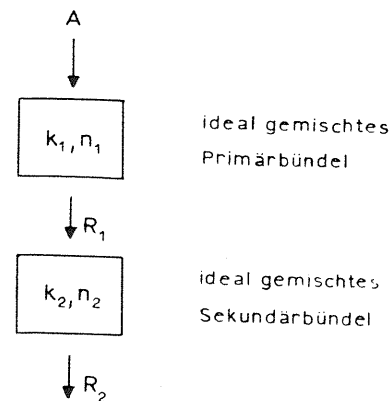


Bild 30: Ideal gemischtes Primärbündel mit ideal gemischtem Sekundärbündel

Wie in Abschnitt IV.2 gezeigt wurde, gilt für die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_1(x_1)$ im ideal gemischten Primärbündel

$$\sigma_1(x_1) = \frac{\binom{x_1}{k_1}}{\binom{n_1}{k_1}}, \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \quad (70a)$$

und für die Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu_1(x_1)$

$$\mu_1(x_1) = 1 - \sigma_1(x_1), \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \quad (70b)$$

Entsprechend gilt für die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_2(x_2)$ im Sekundärbündel

$$\sigma_2(x_2) = \frac{\binom{x_2}{k_2}}{\binom{n_2}{k_2}}, \quad x_2 = 0, 1, \dots, n_2 \quad (71a)$$

und für die Durchlasswahrscheinlichkeit $\sigma_2(x_2)$

$$\mu_2(x_2) = 1 - \sigma_2(x_2), \quad x_2 = 0, 1, \dots, n_2 \quad (71b)$$

Um ein ideal gemischtes Primär- und Sekundärbündel ungleicher Erreichbarkeit und/oder ungleicher Leitungszahl in Serie zu betreiben, müssen beide Bündel die einheitliche Zubringerteilgruppenzahl

$$g = g'_1 \cdot g'_2 = \binom{n_1}{k_1} \cdot \binom{n_2}{k_2} \quad (72)$$

erhalten. Damit ist auch bei ungleichen Teilverkehrsresten $R_{11} \dots R_{1, g'_1}$ sichergestellt, dass im Sekundärbündel allen $\binom{n_1}{k_1}$ Untergruppen - aus je $\binom{n_2}{k_2}$ Zubringerteilgruppen, welche dieselben Abnehmerleitungen in derselben Reihenfolge absuchen - derselbe Teilrestverkehr angeboten wird. Dann ist der Gesamtverlust B_2 exakt mit nachstehendem Verfahren berechenbar.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Primärbündel gerade x_1 Leitungen und im Sekundärbündel x_2 Leitungen belegt sind, heiße $p(x_1, x_2)$. Nach der Stationaritätsbedingung erhält man dann mit den Beziehungen (70a,b) und (71a,b) ein System von $(n_1+1) \cdot (n_2+1)$ linearen Gleichungen folgender Art:

$$\begin{aligned} & \left[x_1 + x_2 + A \cdot (1 - \sigma_1(x_1) \cdot \sigma_2(x_2)) \right] \cdot p(x_1, x_2) \\ &= \alpha \cdot (x_1+1) \cdot p(x_1+1, x_2) \\ &+ \beta \cdot (x_2+1) \cdot p(x_1, x_2+1) \\ &+ A \cdot \gamma \cdot \mu_1(x_1-1) \cdot p(x_1-1, x_2) \\ &+ A \cdot \delta \cdot \sigma_1(x_1) \cdot \mu_2(x_2-1) \cdot p(x_1, x_2-1) \quad , \\ & \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \\ & \quad x_2 = 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned} \quad (73a)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \text{ falls } x_1 < n_1, \text{ sonst } \alpha = 0, \\ \beta &= 1, \text{ falls } x_2 < n_2, \text{ sonst } \beta = 0, \\ \gamma &= 1, \text{ falls } x_1 > 0, \text{ sonst } \gamma = 0, \\ \delta &= 1, \text{ falls } x_2 > 0, \text{ sonst } \delta = 0. \end{aligned}$$

Ausserdem gilt die Bedingung, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ gleich eins ist:

$$\sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} p(x_1, x_2) = 1 \quad (73b)$$

Der Verlust B_1 im Primärbündel ergibt sich nach der EIF-Formel (6a,b) (s. Abschnitt IV.2.1) zu

$$B_1 = \sum_{x_1=k_1}^{n_1} \frac{\frac{A^{x_1}}{x_1!} \cdot \prod_{u=0}^{x_1-1} \mu_1(u)}{1 + \sum_{\xi=1}^{n_1} \frac{A^\xi}{\xi!} \cdot \prod_{u=0}^{\xi-1} \mu_1(u)} \cdot \sigma_1(x_1) \quad (74)$$

Damit ist auch der Verkehrsrest R_1 bekannt:

$$R_1 = A \cdot B_1 \quad (75)$$

Der Verkehrsrest R_2 wird

$$R_2 = A \cdot \sum_{x_1=k_1}^{n_1} \sum_{x_2=k_2}^{n_2} p(x_1, x_2) \cdot \sigma_1(x_1) \cdot \sigma_2(x_2) \quad (76)$$

Damit erhält man für den Verlust B_2 im Sekundärbündel

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{B_1} \cdot \sum_{x_1=k_1}^{n_1} \sum_{x_2=k_2}^{n_2} p(x_1, x_2) \cdot \sigma_1(x_1) \cdot \sigma_2(x_2) \quad (77)$$

und für den Gesamtverlust B_{ges}

$$B_{ges} = \frac{R_2}{A} = \sum_{x_1=k_1}^{n_1} \sum_{x_2=k_2}^{n_2} p(x_1, x_2) \cdot \sigma_1(x_1) \cdot \sigma_2(x_2) \quad (78)$$

Die Verluste bei solchen Gruppierungen mit ideal gemischtem Primärbündel und ideal gemischtem Sekundärbündel wurden von G. Bretschneider numerisch berechnet /4/.

Beispiel: Für eine Gruppierung mit den Leitungszahlen $n_1 = 10$ und $n_2 = 10$ und mit den Erreichbarkeiten $k_1 = 4$ und $k_2 = 4$ erhält man bei einem Angebot von $A = 8$ Erlang die Werte

$$\begin{aligned} R_1 &= 1,595 \text{ Erlang} & R_2 &= 0,015163 \\ B_1 &= 19,9382\% & B_2 &= 0,9506\% \\ B_{ges} &= 0,1895\% \end{aligned}$$

Eine näherungsweise Verlustberechnung des Sekundärbündels nach dem Streuwertverfahren /12, 14, 16, 22, 23, 24/ liefert zu R_1 den Streuwert

$$D_1 = 0,916$$

ferner

$$R_2 = 0,0295 \quad B_2 = 1,85\%$$

V.3. Real gemischtes Primärbündel mit ideal gemischtem Sekundärbündel

In diesem Abschnitt werden Gruppierungen untersucht, die aus einem nicht-ideal gemischtem Primärbündel und aus einem ideal gemischtem Sekundärbündel bestehen. Bild 31 zeigt eine derartige Gruppierung.

Die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma_2(x_2)$ im Sekundärbündel ist

$$\sigma_2(x_2) = \frac{\binom{x_2}{k_2}}{\binom{n_2}{k_2}}, \quad x_2 = 0, 1, \dots, n_2 \quad (71a)$$

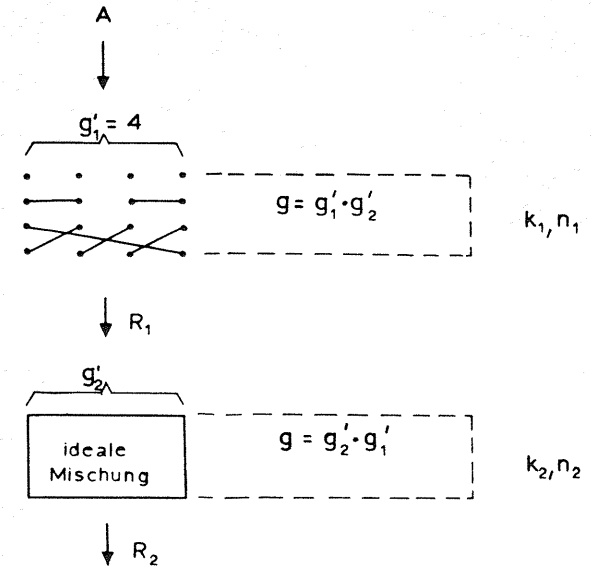


Bild 31: Nicht-ideal gemischtes Primärbündel mit ideal gemischtem Sekundärbündel

(s. Abschnitt IV.2.1). Für die Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu_2(x_2)$ im Sekundärbündel gilt

$$\mu_2(x_2) = 1 - \sigma_2(x_2), \quad x_2 = 0, 1, \dots, n_2 \quad (71b)$$

Die Verlustwahrscheinlichkeit des Sekundärbündels kann aber nur dann mit dem unten beschriebenen Verfahren exakt berechnet werden, wenn allen Zubringerteilgruppen des Sekundärbündels derselbe Teil-Überlaufverkehr angeboten wird. Die Zubringerteilgruppen des Primärbündels und Sekundärbündels müssen deshalb vervielfacht und entsprechend kombiniert werden, wie dies in Abschnitt V.2 beschrieben wurde:

Die Zubringerteilgruppennzahlen, die das Primärbündel und das Sekundärbündel hätten, wenn sie je für sich allein

betrieben würden, seien mit g_1' bzw. g_2' bezeichnet. Die tatsächliche Zubringerteilgruppenzahl der Gruppierung ist dann

$$g = g_1' \cdot g_2' \quad (79)$$

Wegen,

$$g_2' = \binom{n_2}{k_2} \quad (80)$$

(s. Abschnitt V.2) ist also die Zubringerteilgruppenzahl

$$g = g_1' \cdot \binom{n_2}{k_2} \quad (81)$$

In der in Bild 31 gezeigten Gruppierung ist $g_1' = 4$.

Bei der Berechnung des Verlusts in derartigen Gruppierungen muss man im real gemischten Primärbündel alle 2^{n_1} möglichen Belegungs- u s t e r unterscheiden, jedoch im ideal gemischten Sekundärbündel nur die (n_2+1) verschiedenen Belegungs- u s t ä n d e. Es ergibt sich deshalb ein System von $2^{n_1} \cdot (n_2+1)$ linearen Gleichungen.

Die Leitungen des Primärbündels seien wieder numeriert (wie in Abschnitt IV.1.1, s. Bild 17), so dass die Mischung als Matrix $M = \|m_{s,j}\|$ dargestellt werden kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Leitungen Nr. $1, 2, \dots, n_1$ des Primärbündels in den Belegungszuständen z_1, z_2, \dots, z_{n_1} sind und dass im Sekundärbündel gerade x_2 Leitungen belegt sind, werde mit $p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2)$ bezeichnet. Dabei bedeutet (wie in Abschnitt IV.1.1) $z_i = 0$, dass die betreffende Leitung frei ist, und $z_i = 1$, dass die Leitung belegt ist ($1 \leq i \leq n_1$).

Aus der Bedingung, dass das Verkehrsangebot A und damit auch der in den Bündeln fließende Verkehr Y_1 bzw. Y_2 stationär ist, erhält man dann folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=1}^{n_1} z_i + x_2 + A \cdot \left(1 - \left[1 - \frac{1}{g_1'} \cdot \sum_{j=1}^{g_1'} \left(1 - \prod_{s=1}^{k_1} z_{m_{s,j}} \right) \cdot \sigma_2(x_2) \right] \right) \right] \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} (1 - z_i) \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_{n_1}; x_2) \\ &+ (1 - \alpha) \cdot (x_2 + 1) \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2 + 1) \quad (82a) \\ &+ \frac{A}{g_1'} \sum_{j=1}^{g_1'} \sum_{s=1}^{k_1} \prod_{s=1}^s z_{m_{s,j}} \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{m_{s,j}-1}, 0, z_{m_{s,j}+1}, \dots, z_{n_1}; x_2) \\ &+ \beta \cdot \mu_2(x_2 - 1) \cdot \frac{A}{g_1'} \sum_{j=1}^{g_1'} \prod_{s=1}^{k_1} z_{m_{s,j}} \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2 - 1), \\ & \quad x_2 = 0, 1, \dots, n_2, \\ & \quad z_i = 0, 1 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n_1 \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \quad \text{wenn } x_2 = n_2, \quad \text{sonst } \alpha = 0, \\ \beta &= 1, \quad \text{wenn } x_2 > 0, \quad \text{sonst } \beta = 0. \end{aligned}$$

Die Summe aller $2^{n_1} \cdot (n_2+1)$ Wahrscheinlichkeiten $p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2)$ muss gleich eins sein:

$$\sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_1}=0}^1 \sum_{x_2=0}^{n_2} p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2) = 1 \quad (82b)$$

Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten $p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2)$ lässt sich nunmehr der Verkehrsrest R_2 berechnen. Man erhält

$$R_2 = \frac{A}{g_1'} \sum_{j=1}^{g_1'} \sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_1}=0}^1 \sum_{x_2=k_2}^{n_2} \sigma_2(x_2) \cdot p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2) \cdot \prod_{s=1}^{k_1} z_{m_{s,j}} \quad (83)$$

Auf die gleiche Weise erhält man für den Verkehrsrest R_1

$$R_1 = \frac{A}{g_1'} \sum_{j=1}^{g_1'} \sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_1}=0}^1 \sum_{x_2=0}^{n_2} p(z_1, z_2, \dots, z_{n_1}; x_2) \prod_{s=1}^{k_1} z_{m_s, j} \quad (84)$$

Damit ist auch der Verlust B_1 im Primärbündel bekannt

$$B_1 = \frac{R_1}{A} \quad (1)$$

und der Verlust B_2 im Sekundärbündel

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

sowie der Gesamtverlust B_{ges}

$$B_{ges} = \frac{R_2}{A} \quad (3)$$

Beispiel: Für ein Primärbündel von $n_1 = 10$ Leitungen mit der Erreichbarkeit $k_1 = 4$ und der in Bild 31 gezeigten Mischung und für ein ideal gemischtes Sekundärbündel mit der Erreichbarkeit $k_2 = 4$ und $n_2 = 10$ Leitungen erhält man bei einem Angebot von $A = 8$ Erlang die exakten Werte

$$\begin{array}{ll} R_1 & = 1,686167 \text{ Erlang} & R_2 & = 0,017284 \text{ Erlang} \\ B_1 & = 21,0771\% & B_2 & = 1,0251\% \\ B_{ges} & = 0,2161\% & & \end{array}$$

Die Zahl der Zubringerteilgruppen ist gemäss (81) bei dieser Gruppierung

$$g = 4 \cdot \binom{10}{4} = 840$$

Die Näherungsberechnung nach dem Verfahren der MPJ-Formel

/19, 20, 21/ in Verbindung mit dem Streuwertverfahren liefert

$$\begin{array}{ll} R_1 & = 1,73 \text{ Erlang} & R_2 & = 0,0390 \text{ Erlang} \\ B_1 & = 21,6\% & B_2 & = 2,25\% \\ B_{ges} & = 0,488\% & & \end{array}$$

V.4. Ideal gemischtes Primärbündel mit real gemischtem Sekundärbündel

Die Gruppierungen, die in diesem Abschnitt behandelt werden, bestehen aus einem ideal gemischten Primärbündel und aus einem real gemischten Sekundärbündel. In Bild 32 ist eine einfache Gruppierung dieser Art dargestellt.

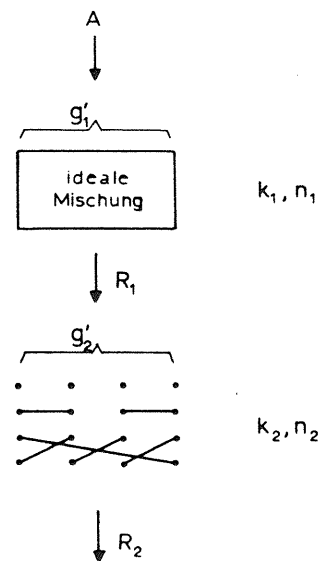


Bild 32: Ideal gemischtes Primärbündel mit real gemischtem Sekundärbündel

Für die Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_1)$ des Primärbündels gilt (s. Abschnitt IV.2.1):

$$G_1(x_1) = \frac{\binom{x_1}{k_1}}{\binom{n_1}{k_1}}, \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \quad (70a)$$

und für die Durchlasswahrscheinlichkeit

$$\mu_1(x_1) = 1 - G_1(x_1), \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1 \quad (70b)$$

In der Rechnung wird vorausgesetzt, dass an jede Zubringerteilgruppe des Sekundärbündels derselbe Teil-Überlaufverkehr angeboten wird. Deshalb müssen die Zubringerteilgruppen von Primärbündel und Sekundärbündel (wie in Abschnitt V.3 beschrieben) vervielfacht und so angeordnet werden, dass alle möglichen Kombinationen einer Zubringerteilgruppe des Primärbündels mit einer Zubringerteilgruppe des Sekundärbündels gerade einmal vorkommen.

Die Gruppierung (s. Bild 32) hat dann die Zubringerteilgruppenzahl

$$g = g'_1 \cdot g'_2 = \binom{n_1}{k_1} \cdot g'_2 \quad (85)$$

Die Leitungen des Sekundärbündels seien durchnummeriert, so dass die Mischung des Sekundärbündels als Matrix $M = \|m_{s,j}\|$ dargestellt werden kann (s. Abschnitt IV.1.1). Die Belegungszustände der Leitungen des Sekundärbündels seien mit z_1, z_2, \dots, z_{n_2} bezeichnet. Dabei bedeutet $z_i = 1$, dass die Leitung Nr. i belegt ist, und $z_i = 0$, dass sie gerade frei ist ($1 \leq i \leq n_2$).

Die Wahrscheinlichkeit, dass im Primärbündel x_1 Leitungen belegt sind und dass die Leitungen Nr. 1, 2, ... n_2 des Sekundärbündels in den Belegungszuständen z_1, z_2, \dots, z_{n_2}

sind, heiße $p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2})$.

Für stationäres Angebot wird dann der Geburts- und Sterbeprozess des Verkehrs durch ein lineares Gleichungssystem vom Rang $(n_1+1) \cdot 2^{n_2}$ folgender Form beschrieben:

$$\begin{aligned} & \left[x_1 + \sum_{i=1}^{n_2} z_i + A \cdot \mu_1(x_1) + \frac{A}{g'_2} \cdot G_1(x_1) \cdot \sum_{j=1}^{g'_2} \left(1 - \prod_{s=1}^{k_2} z_{m_{s,j}} \right) \right] \cdot p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2}) \\ &= (1-\alpha) \cdot (x_1+1) \cdot p(x_1+1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2}) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_2} (1-z_i) \cdot p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_{n_2}) \\ &+ \beta \cdot A \cdot \mu_1(x_1-1) \cdot p(x_1-1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2}) \\ &+ \frac{A}{g'_2} \cdot G_1(x_1) \cdot \sum_{j=1}^{g'_2} \sum_{s=1}^{k_2} \prod_{s=1}^s z_{m_{s,j}} \cdot p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{m_{s,j-1}}, 0, z_{m_{s,j}+1}, \dots, z_{n_2}), \\ & \quad x_1 = 0, 1, \dots, n_1, \\ & \quad z_i = 0, 1 \text{ für } i = 1, 2, \dots, n_2 \end{aligned} \quad (86a)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \text{ wenn } x_1 = n_1, \text{ sonst } \alpha = 0, \\ \beta &= 1, \text{ wenn } x_1 \neq 0, \text{ sonst } \beta = 0, \\ z_{m_{s,j}} &= 1, \text{ wenn Koppelpunkt (Matrizelement) } m_{s,j} \\ & \quad \text{belegt ist, andernfalls } z_{m_{s,j}} = 0 \end{aligned}$$

Ausserdem gilt für die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2})$ die Bedingung

$$\sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_2}=0}^1 \sum_{x_1=0}^{n_1} p(x_1; z_1, z_2, \dots, z_{n_2}) = 1 \quad (86b)$$

Zur Lösung derartig grosser Gleichungssysteme sind iterative Methoden am besten geeignet, insbesondere das Überrelaxationsverfahren (s. Abschnitt III.2.1). Aus den so gewonnenen Werten für die Wahrscheinlichkeiten lässt sich die Zahl der Verlustrufe pro Zeiteinheit und damit der Verkehrsrest R_2 bestimmen:

$$R_2 = \frac{A}{g_2'} \sum_{j=1}^{g_2'} \sum_{z_1=0}^1 \sum_{z_2=0}^1 \dots \sum_{z_{n_2}=0}^1 \sum_{x_1=k_1}^{n_1} G_1(x_1) \cdot p(x_1, z_1, z_2, \dots, z_{n_2}) \cdot \prod_{s=1}^{k_2} Z_{m_{s,j}} \quad (87)$$

Der Verlust B_1 im ideal gemischten Primärbündel bzw. der Verkehrsrest R_1 kann nach der Erlang'schen Interkonnectionsformel (28a,b) bzw. (74) berechnet werden:

$$B_1 = \sum_{x_1=k_1}^{n_1} \frac{\frac{A^{x_1}}{x_1!} \prod_{u=0}^{x_1-1} \mu_1(u)}{1 + \sum_{\xi=1}^{n_1} \frac{A^\xi}{\xi!} \cdot \prod_{u=0}^{\xi-1} \mu_1(u)} \cdot G_1(x_1) \quad (74)$$

$$R_1 = A \cdot B_1 \quad (75)$$

Man erhält damit für den Verlust B_2 im Sekundärbündel

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} \quad (2)$$

und für den Gesamtverlust B_{ges}

$$B_{ges} = \frac{R_2}{A} \quad (3)$$

Beispiel: Bei einer Gruppierung mit $n_1 = 10$ Leitungen und der Erreichbarkeit $k_1 = 4$ im Primärbündel und mit einem Sekundärbündel von $n_2 = 10$ Leitungen mit der Erreichbarkeit $k_2 = 4$ mit der in Bild 32 gezeigten Mischung erhält man für ein Angebot von $A = 8$ Erlang die Werte

$$\begin{aligned} B_1 &= 19,938\% & R_1 &= 1,595 \text{ Erlang} \\ B_2 &= 1,0787\% & R_2 &= 0,0172 \text{ Erlang} \\ B_{ges} &= 0,215\% \end{aligned}$$

Die Zahl der Zubringerteilgruppen ist bei dieser Gruppierung

$$g = \binom{10}{4} \cdot 4 = 840 .$$

Das in der Praxis der Deutschen Bundespost künftig angewandte neue Verfahren in Verbindung mit dem Streuwertverfahren /12, 14, 16, 22, 23, 24/ liefert folgende Werte

$$\begin{aligned} B_1 &= 21,72\% & R_1 &= 1,738 \text{ Erlang} \\ B_2 &= 2,66\% & R_2 &= 0,0463 \text{ Erlang} \\ B_{ges} &= 0,333\% \end{aligned}$$

VI

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurden Systeme mit einfachem Überlauf, bestehend aus je einem Primärbündel und einem Sekundärbündel, untersucht. Die hierfür angewandten Rechenverfahren können prinzipiell auch für Systeme mit mehrfachem Überlauf benutzt werden, soweit dies die Speichergrösse der verfügbaren Digitalrechner zulässt. Für alle Kombinationen aus vollkommen erreichbaren Bündeln und ideal bzw. real gemischten unvollkommen erreichbaren Bündeln werden exakte Lösungen angegeben und, soweit erforderlich, mit Näherungsverfahren verglichen.

Die bekannte Lösung für die Berechnung des Pauschalverlustes von Sekundärbündeln vollkommener Erreichbarkeit, denen entweder zwei Überlaufverkehre hinter vollkommen erreichbaren Primärbündeln oder auch ein zusätzlicher direkter Zufallsverkehr angeboten wird, konnte erweitert werden. Ausser dem Pauschalverlust werden auch die Verlustwahrscheinlichkeiten der einzelnen Teilangebote mit Hilfe von Iterationsverfahren exakt berechnet.

Während bisher für Systeme mit grösserer Leitungszahl die bereits bekannten Näherungslösungen nur durch die Simulation des Verkehrs auf Digitalrechnern überprüft werden konnten, ist es jetzt in vielen Fällen möglich, auch eine Nachprüfung mit Hilfe exakter numerischer Verfahren durchzuführen. Insbesondere kann auch die Verlustwahrscheinlichkeit grösserer real gemischter Sekundärbündel hinter vollkommen erreichbaren Primärbündeln mit einem exakten numerischen Verfahren berechnet werden, wenn die Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2, k_2, n_2, R_1, D_1)$ unter Berücksichtigung des

Mischungstyps hinreichend genau approximiert werden kann. Es konnte gezeigt werden, dass dies durch eine geeignete Anwendung des in /17/ für Zufallsverkehr entwickelten Verfahrens möglich ist.

ANHANG (zu Abschnitt IV.4.3, Gleichung (41))

Es ist zu beweisen, dass

$$p(x_1, x_2) = \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, x_1+x_2-\xi} \cdot p(0, \xi) \quad (41)$$

die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{aligned} (x_1+x_2+A) \cdot p(x_1, x_2) &= (x_1+1) \cdot p(x_1+1, x_2) \\ &+ (x_2+1) \cdot p(x_1, x_2+1) \\ &+ A \cdot p(x_1-1, x_2), \end{aligned} \quad (36a)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, 1, \dots, n_1-1 \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 \end{aligned}$$

Beweis:

Durch Einsetzen von Gleichung (41) erhält man für die linke Seite der Gleichung (36a)

$$\begin{aligned} L &= (x_1+x_2+A) \cdot p(x_1, x_2) \\ &= (x_1+x_2+A) \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, x_1+x_2-\xi} \cdot p(0, \xi) \end{aligned} \quad (87)$$

Für die rechte Seite von Gleichung (36a) erhält man mit Gleichung (41)

$$\begin{aligned} R &= (x_1+1) \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, x_1+x_2+1-\xi} \cdot p(0, \xi) \\ &+ (x_2+1) \cdot \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2-1} \cdot \binom{\xi}{x_2+1} \cdot S_{\xi, x_1+x_2+1-\xi} \cdot p(0, \xi) \\ &+ A \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, x_1+x_2-1-\xi} \cdot p(0, \xi) \end{aligned} \quad (88)$$

Die untere Grenze der zweiten Summe in Gleichung (88) kann auf $\xi = x_2$ erniedrigt werden, da $\binom{x_2}{x_2+1} = 0$ ist. Mit der Beziehung

$$(x_2+1) \cdot \binom{\xi}{x_2+1} = (\xi-x_2) \cdot \binom{\xi}{x_2}$$

erhält man dann

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot p(0, \xi) \cdot \left[(x_1+1) \cdot S_{\xi, x_1+x_2+1-\xi} \right. \\ &\quad \left. - (\xi-x_2) \cdot S_{\xi, x_1+x_2+1-\xi} \right. \\ &\quad \left. + A \cdot S_{\xi, x_1+x_2-1-\xi} \right] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} R &= \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot p(0, \xi) \cdot \left[(x_1+x_2+1-\xi) \cdot S_{\xi, x_1+x_2+1-\xi} \right. \\ &\quad \left. + A \cdot S_{\xi, x_1+x_2-1-\xi} \right] \end{aligned} \quad (89)$$

Bezeichnet man den Ausdruck in der eckigen Klammer in Gleichung (89) mit R' , so gilt

$$R = \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot p(0, \xi) \cdot R' \quad (90)$$

und

$$R' = [(x_1+x_2+1-\xi) \cdot S_{\xi, x_1+x_2+1-\xi} + A \cdot S_{\xi, x_1+x_2-1-\xi}] \quad (91)$$

Setzt man der Übersichtlichkeit halber

$$x_1+x_2+1-\xi = m \quad (92)$$

so erhält man

$$R' = m \cdot S_{\xi, m} + A \cdot S_{\xi, m-2} \quad (93a)$$

Mit der Definitionsgleichung (40a) für die S-Polynome ergibt sich hieraus

$$R' = m \cdot \sum_{v=0}^m \frac{A^{m-v}}{(m-v)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v} + A \cdot \sum_{v=0}^{m-2} \frac{A^{m-v-2}}{(m-v-2)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v}$$

oder

$$R' = m \cdot \sum_{v=0}^m \frac{A^{m-v}}{(m-v)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v} + \sum_{v=0}^{m-2} (m-v-1) \cdot \frac{A^{m-v-1}}{(m-v-1)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v} \quad (93b)$$

Die zweite Summe in Gleichung (93) ändert sich nicht, wenn man die obere Grenze auf $(m-1)$ erhöht. Man erhält dann (etwas umgeformt)

$$R' = m \cdot \frac{A^m}{m!} + m \cdot \sum_{v=1}^m \frac{A^{m-v}}{(m-v)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v} + \sum_{v=0}^{m-1} [(m-1+\xi) - (v+\xi)] \cdot \frac{A^{m-v-1}}{(m-v-1)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v}$$

oder

$$R' = \frac{A^m}{(m-1)!} + m \cdot \sum_{v=1}^m \frac{A^{m-v}}{(m-v)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v} + (m-1+\xi) \cdot \sum_{v=0}^{m-1} \frac{A^{m-v-1}}{(m-v-1)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v} - \sum_{v=1}^m \frac{A^{m-v}}{(m-v)!} \cdot (v+\xi-1) \cdot \binom{\xi-2+v}{v-1} \quad (94)$$

Die dritte Summe in Gleichung (94) lässt sich mit der Beziehung

$$(v+\xi-1) \cdot \binom{\xi-2+v}{v-1} = v \cdot \binom{\xi-1+v}{v}$$

weiter umformen. Man erhält dann mit Gleichung (40a)

$$R' = \frac{A^m}{(m-1)!} + A \cdot \sum_{v=1}^m m \cdot \frac{A^{m-v-1}}{(m-v)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v} + (m-1+\xi) \cdot S_{\xi, m-1} - A \cdot \sum_{v=1}^m v \cdot \frac{A^{m-v-1}}{(m-v)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v}$$

oder

$$R' = A \cdot \frac{A^{m-1}}{(m-1)!} + A \cdot \sum_{v=1}^m (m-v) \cdot \frac{A^{m-v-1}}{(m-v)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v} + (m-1+\xi) \cdot S_{\xi, m-1} \quad (95)$$

Die obere Grenze der Summe in Gleichung (95) kann auf $(m-1)$ erniedrigt werden. Dann ergibt sich

$$R' = A \cdot \frac{A^{m-1}}{(m-1)!} + A \cdot \sum_{v=1}^{m-1} \frac{A^{m-v-1}}{(m-v-1)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v} + (m-1+\xi) \cdot S_{\xi, m-1}$$

oder

$$R' = A \cdot \sum_{v=0}^{m-1} \frac{A^{m-v-1}}{(m-v-1)!} \cdot \binom{\xi-1+v}{v} + (m-1+\xi) \cdot S_{\xi, m-1}$$

Mit Gleichung (40a) erhält man

$$R' = A \cdot S_{\xi, m-1} + (m-1+\xi) \cdot S_{\xi, m-1}$$

oder

$$R' = (A+m-1+\xi) \cdot S_{\xi, m-1}$$

Mit Gleichung (92) ergibt sich hieraus

$$R' = (x_1+x_2+A) \cdot S_{\xi, x_1+x_2-\xi} \quad (96)$$

Setzt man Gleichung (96) in Gleichung (90) ein, so erhält man für die rechte Seite der Gleichung (36a)

$$R = (x_1+x_2+A) \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot S_{\xi, x_1+x_2-\xi} \cdot p(0, \xi) \quad (97)$$

Aus den Gleichungen (87) und (97) folgt

$$L \equiv R$$

Die Formel (41) erfüllt also die Gleichung (36a), was zu beweisen war.

