

Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung

Universität Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

16. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten

**Über die Berechnung von Überlaufsystemen
mit vollkommen erreichbaren Bündeln
bei endlicher Quellenzahl**

von

RUDOLF SCHEHRER

Institute for Switching and Data Technics

University of Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

16th Report on Studies in Congestion Theory

**On the Calculation of Overflow Systems with
Full Available Groups and Finite Source Traffic**

by

RUDOLF SCHEHRER

Diese Untersuchungen wurden im Rahmen eines Forschungsvorhabens der Deutschen Forschungsgemeinschaft durchgeführt.

These investigations could be performed within a research project of the Deutsche Forschungsgemeinschaft (German Research Society).

Abstract

I. General

This paper deals with the calculation of overflow systems with a finite number of sources and full available groups. Such systems are widely used in telecommunication networks. By q_{11} traffic sources (each with the calling rate α_{11}) a finite source traffic is offered to a primary trunk group consisting of n_{11} trunks. A further primary group has n_{12} trunks and q_{12} sources with the calling rate α_{12} . (In the general case, more than two primary groups can exist). Calls which can not be switched in these primary groups are overflowing to a secondary group with n_2 trunks; calls which can not be switched in the secondary group are lost (and cleared out of the system, according to the model "lost calls cleared").

II. Exact calculations

An exact, analytic solution is derived for systems having only one primary group. Along this method the variance of the overflow traffic behind a primary group can also be calculated.

Furthermore, an exact method for the calculation of overflow systems with two primary groups (as shown in fig.1) is presented. This method is, however, only practicable in case of "small" systems.

III. Simulation programs

For investigating the variance of the overflow traffic behind a primary group with a finite number of sources, a simulation program has been established. A further simulation program enables the determination of the loss probabilities in overflow systems with an arbitrary number of primary groups. These simulation programs can also be applied to overflow systems with groups of limited availability (see section V).

IV. Approximation methods

Regarding the limited number of sources, practicable approximate formulae for the overflow traffic R behind a primary group and for the variance V of this overflow traffic in case of an "infinite secondary group" (i.e. a secondary group with $n_2 = q_1 - n_1$ trunks) are given.

For the calculation of large overflow systems (with two or more primary groups), an approximate method is derived which regards the mean as well as the variance of offered overflow traffic. For systems with a large number of traffic sources, this method approaches the well-known equivalent random theory (ERT-method) which holds for an infinite number of sources. In the new method, the ERT-method is contained as a special (limiting) case. Therefore the method presented here could be looked at as an "ERT-method for finite source traffic".

For reasons of the finite number of sources, this method is a little more complicated than the ERT-method, but the basic idea is the same. In principle, the method presented proceeds as follows:

- a) First, the overflow traffic parcels offered to the secondary group and the corresponding variance values are calculated under the assumption that the real secondary group is replaced by a fictitious secondary group with zero loss probability (i.e. with $\tilde{n}_2 = q_{11} + q_{12} - n_{11} - n_{12}$ trunks).
- b) Then, a fictitious primary group (with n^* trunks and q^* sources of call intensity α^*) is searched such that the overflow traffic offered to the fictitious secondary group has the same mean and variance as in case of the various (really existing) primary groups.
- c) Now the overflow system consisting of the fictitious primary group and the real secondary group (with $n_2 < \tilde{n}_2$ trunks) is considered. For this system the loss in the secondary group is calculated. This loss value turns out to be a good approximation

of the loss in the (in fact existing) secondary group of the given system.

The above mentioned methods are demonstrated in examples. A comparison shows that the results according to the presented approximation method ("ERT-method for finite source traffic") are in good agreement with exact calculations and with simulation results.

V. Preliminary investigations for the calculation of overflow systems with groups of limited availability and a finite number of sources

The exact and approximate methods presented in section II and section IV are valid for overflow systems consisting of full available groups. It is obvious to extend these methods to overflow systems with groups of limited availability.

Preliminary investigations for the calculation of such overflow systems with groups of limited availability and a finite number of sources have been carried out, whereas a detailed study of this subject would be beyond the scope of this paper.

As an exact calculation of overflow systems with groups of limited availability is practically not feasible, the investigation of such systems must be based on simulations. It is convenient that the simulation programs described in section III can also be applied to overflow systems with groups of limited availability.

Section V contains preliminary investigations for approximation formulae for mean and variance of the overflow traffic behind groups of limited availability in case of offered finite source traffic. Furthermore, an approximation method for the calculation of the loss probabilities of overflow systems with groups of limited availability and a finite number of sources is proposed which regards the means as well as the variance of offered overflow traffic. This method represents a generalization of the ERT-method for finite source traffic which is derived in section IV.

<u>Inhalt</u>	<u>Seite</u>
I. Allgemeines	4
II. Exakte Verlustberechnung	10
1. Die charakteristischen Verkehrsgrößen eines vollkommen erreichbaren Bündels bei ZV2	10
2. Überlaufsysteme mit einem vollkommen erreichbaren Primärbündel	16
2. 1. Die Gruppierung	16
2. 2. Das Angebot A und der Verkehrsrest R_2	17
2. 3. Die zweidimensionalen Zustandsgleichungen	19
2. 4. Einführung erzeugender Funktionen	22
2. 5. Berechnung der Werte $p(x_1, n_2)$ als Funktion des Werts $p(0, n_2)$	24
2. 6. Berechnung der Werte $p(x_1, n_2 - 1)$ als Funktion der Werte $p(0, n_2 - 1)$ und $p(0, n_2)$	32
2. 7. Berechnung der Werte $p(x_1, n_2 - 2)$ als Funktion der Werte $p(0, n_2 - 2)$, $p(0, n_2 - 1)$ und $p(0, n_2)$	37
2. 8. Bestimmung der Werte $p(x_1, x_2)$ als Funktion der Werte $p(0, x_2)$	39
2. 9. Darstellung der Werte $p(x_1, x_2)$ durch den Wert $p(0, n_2)$	43
2.10. Geschlossene Lösung für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$	49
2.11. Verluste und Verkehrsreste	52
2.12. Der Verkehrsrest und dessen Varianz hinter einem Primärbündel beim Modell LCH	53
2.13. Numerische Auswertung und Ergebnisse	55
3. Überlaufsysteme mit zwei vollkommen erreichbaren Primärbündeln	60

	<u>Seite</u>
III. Simulationsprogramme	68
1. Varianz von Überlaufverkehr	68
2. Überlaufsysteme mit mehreren Primärbündeln und einem Sekundärbündel	69
IV. Näherungsverfahren	71
1. Berechnung von Überlaufsystemen mit Berücksichtigung des ersten und zweiten Moments des angebotenen Überlaufverkehrs und Vergleich mit exakten Werten	71
2. Näherungsweise Berechnung des Verkehrsrests R_1 bei vorhandenem Sekundärbündel ($n_2 \leq q_1 - n_1$)	83
3. Näherungsweise Berechnung der Varianz	86
4. Vereinfachtes Zwei-Momenten-Verfahren	88
V. Vorarbeiten für die Berechnung von Überlaufsystemen mit unvollkommen erreichbaren Bündeln bei endlicher Quellenzahl	93
1. Allgemeines	93
2. Simulationsprogramme	94
2.1. Mittelwert und Varianz von Überlaufverkehr	94
2.2. Überlaufsysteme mit mehreren Primärbündeln	95
3. Näherungsweise Berechnung des Verkehrsrests R_1 und der Varianz V_1 bei vorhandenem Sekundärbündel	96
4. Zwei-Momenten-Verfahren für Überlaufsysteme mit unvollkommen erreichbaren Bündeln	96

I. Allgemeines

In vielen Vermittlungsnetzen mit Wählbetrieb können die Anrufe über mehrere alternative Wege durchgeschaltet werden: Trifft ein neuer Ruf ein, so wird dieser zunächst einem direkten Leitungsbündel, dem sogenannten Primärbündel, angeboten. Wenn hier keine freie Leitung erreichbar ist, läuft der Ruf über auf einen (meist längeren und daher teureren) Umweg, das sogenannte Sekundärbündel.

Bei der Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit solcher Überlaufsysteme muss man berücksichtigen, dass der an das Sekundärbündel angebotene Überlaufverkehr andere statistische Eigenschaften hat als Zufallsverkehr. Wegen seiner grösseren "Spitzigkeit" verursacht ein Überlaufverkehr (der sich aus mehreren Verkehrsresten und Zufallsangeboten zusammensetzen kann) höhere Verluste als ein Zufallsverkehr gleichen Mittelwerts.

Für den Sonderfall, dass die Zahl der Verkehrsquellen sehr gross gegenüber der Zahl der Leitungen ist (im Grenzfall unendlich viele Verkehrsquellen), das heisst für sogenannten Zufallsverkehr 1. Art (ZV1) oder Poisson-Angebot, stehen exakte und näherungsweise Verfahren zur Verlustberechnung bei solchen Überlaufsystemen zur Verfügung /1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24/. Eine exakte Verlustberechnung ist grundsätzlich möglich, führt jedoch auf lineare Gleichungssysteme von oft sehr hohem Rang. Mit Digitalrechnern lassen sich kleinere Überlaufsysteme berechnen; dagegen steigt bei Systemen, die in der Praxis vorkommen, die Zahl der Gleichungen meist so stark an (zum Beispiel $\gg 10^4$), dass auch auf modernen Digitalrechnern eine Auswertung nicht mehr durchführbar ist. Man ist dann auf Näherungsverfahren angewiesen. Am genauesten ist das sogenannte Streuwertverfahren für vollkommen bzw. unvollkommen erreichbare Bündel (ERT- bzw. RDA-Verfahren) /1, 9, 11, 24/.

Das Streuwertverfahren geht davon aus, dass der auf das Sekundärbündel überlaufende Summenverkehr \bar{R} in seinen statistischen Eigenschaften erheblich abweicht von einem Zufallsverkehr gleichen Mittelwerts, dass er aber andererseits in guter Näherung durch einen anderen Überlaufverkehr mit gleichem Mittelwert R (erstes Moment) und gleicher Varianz V (zweites Moment) ersetzt werden kann. Anstelle der Varianz V verwendet man in der Praxis zweckmässig den sogenannten Streuwert $D = V - R$ (siehe Bild 1). Wegen $A = V$ für Poissonprozesse ist bei Zufallsverkehr der Streuwert $D = 0$.

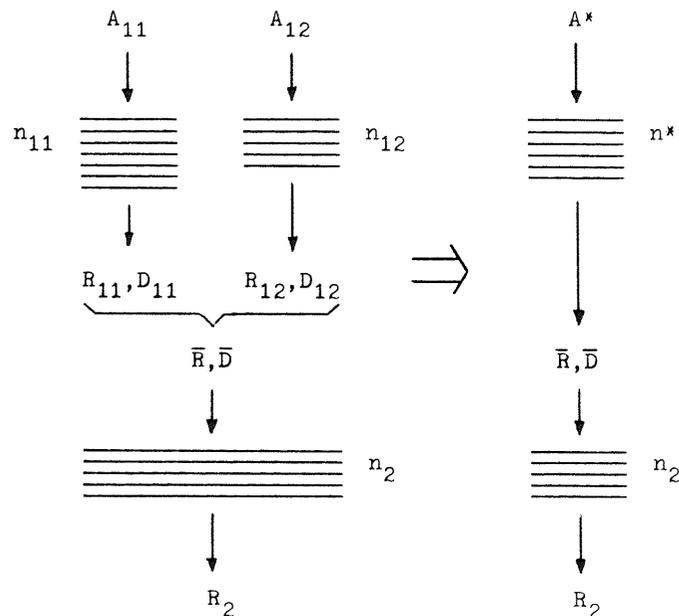


Bild 1: Prinzip des Streuwertverfahrens: die verschiedenen Primärbündel werden ersetzt durch ein (fiktives) Ersatz-Primärbündel mit dem gleichen Überlaufverkehr (\bar{R}, \bar{D})

Beim Streuwertverfahren berechnet man nun zunächst die auf das Sekundärbündel überlaufenden Verkehrsreste R_{11} und R_{12} und die zugehörigen Streuwerte D_{11} und D_{12} . Diese erhält man bei vollkommen erreichbaren Bündeln nach der Formel

$$D = \left[\frac{1}{B \cdot (n+1-A+R)} - 1 \right] \cdot R^2 \quad (1a)$$

bzw.

$$D = p \cdot R^2 \quad (1b)$$

wobei

$$p = \left[\frac{1}{B \cdot (n+1-A+R)} - 1 \right] \quad (1c)$$

Die Beziehung (1a) wurde von R. I. Wilkinson und I. Riordan /24/ und von G. Bretschneider /1/ hergeleitet; ein neuer, vereinfachter Beweis wurde von U. Herzog erbracht /8, 11/.

Bei unvollkommenen Bündeln mit der Erreichbarkeit k lässt sich der Streuwert nach der Beziehung

$$D = p \cdot R^2 \cdot \frac{k}{n} \quad (2)$$

berechnen. Diese Formel wurde von A. Lotze und U. Herzog hergeleitet /7, 8, 9, 11, 15/.

Da Mittelwert und Varianz von statistisch unabhängigen Zufallsvariablen je additiv sind /11/, erhält man den gesamten an das Sekundärbündel angebotenen Verkehr (\bar{R}, \bar{D}) aus

$$\bar{R} = R_{11} + R_{12}$$

$$\bar{D} = D_{11} + D_{12}$$

(und entsprechend bei mehreren Primärbündeln).

Nun ersetzt man die verschiedenen, in Wirklichkeit vorhandenen Primärbündel durch ein (fiktives) Ersatz-Primärbündel mit n^* Leitungen und einem Angebot A^* , das denselben Summen-Überlaufverkehr (\bar{R} , \bar{D}) liefert (siehe Bild 1). Damit ist das Problem auf die Berechnung des Verlusts in einem Überlaufsystem mit nur einem Primärbündel zurückgeführt, die ihrerseits durch zweimalige Anwendung von bekannten Formeln für Zufallsverkehr lösbar ist.

Für den allgemeineren Fall endlich vieler Verkehrsquellen, also für Zufallsverkehr 2. Art (ZV2) sind bis jetzt noch keine Verfahren zur Berechnung des Verlusts in Überlaufsystemen bekannt.

In dieser Arbeit werden nun Überlaufsysteme mit vollkommen erreichbaren Bündeln bei ZV2 untersucht.

Kapitel II behandelt exakte Verfahren.

In Abschnitt II.1. wird zunächst (zum besseren Verständnis der folgenden Abschnitte) die schon bekannte Berechnung der charakteristischen Verkehrsgrößen für ein einzelnes, vollkommen erreichbares Bündel kurz wiederholt.

In Abschnitt II.2. folgt dann die Herleitung neuer, geschlossener, exakter Formeln für die Verkehrsgrößen von Überlaufsystemen, die nur aus einem vollkommen erreichbaren Primärbündel und einem vollkommen erreichbaren Sekundärbündel bestehen. Hierbei wird unter anderem auch die Varianz von Überlaufverkehr exakt berechnet.

In Abschnitt II.3. wird die exakte Berechnung von Überlaufsystemen mit zwei Primärbündeln behandelt. Dieses Verfahren kann auf dem Digitalrechner TR4 bei Systemen mit bis zu etwa 40 Leitungen ausgewertet werden. Für die Untersuchung grösserer Systeme wurde ein Simulationsprogramm erstellt. (Dieses Programm ist auch für Systeme mit unvollkommen erreichbaren Bündeln verwendbar.)

Die verwendeten Simulationsprogramme werden in Kapitel III beschrieben.

Kapitel IV enthält Näherungsverfahren für die Berechnung von Überlaufsystemen mit vollkommen erreichbaren Bündeln bei ZV2.

In Abschnitt IV.1. wird gezeigt, dass man bei ZV2 - ähnlich wie bei ZV1 - den Verlust im Sekundärbündel in guter Näherung mit einem Zwei-Momentenverfahren (Streuwertverfahren) berechnen kann, das heisst, wenn man ausser dem Mittelwert des angebotenen Überlaufverkehrs nur noch seine Varianz berücksichtigt. (Dabei werden die exakten Verfahren nach Kapitel II mitbenützt.) Diese Methode stellt ein "Streuwertverfahren für ZV2" dar, das auf dem gleichen Prinzip beruht wie das Streuwertverfahren bei ZV1. Da jedoch die exakte Berechnung von Mittelwert und Varianz des Überlaufverkehrs bei ZV2 (im Gegensatz zu ZV1) sehr kompliziert ist, werden in den Abschnitten IV.2. und IV.3. einfache Näherungsformeln für diese beiden Grössen hergeleitet. In Abschnitt IV.4. wird mit Hilfe dieser Näherungsformeln ein vereinfachtes Streuwertverfahren für ZV2 entwickelt und mit exakten Werten (und mit Ergebnissen nach dem Verfahren von Abschnitt IV.1.) verglichen.

Kapitel V enthält Vorarbeiten für ein späteres Forschungsvorhaben zur Bemessung von Überlaufsystemen mit Bündeln unvollkommener Erreichbarkeit. Eine exakte Berechnung ist zwar hier im Prinzip ebenfalls möglich; sie liesse sich jedoch in diesem Fall selbst auf sehr grossen Digitalrechnern nur bei sehr kleinen (in der Praxis nicht interessanten) Systemen durchführen. Stattdessen wurden Verkehrssimulationen durchgeführt und erste Ansätze für Näherungslösungen untersucht.

Nach einigen grundsätzlichen Betrachtungen in Abschnitt V.1. folgt in Abschnitt V.2. eine Übersicht über die verwendeten Simulationsprogramme. In den Abschnitten V.3. und V.4. werden dann Näherungsformeln für den Überlaufverkehr unter unvollkommen erreichbaren Bündeln und für seine Varianz behandelt.

II. Exakte Verlustberechnung

II.1. Die charakteristischen Verkehrsgrößen eines vollkommen erreichbaren Bündels bei ZV2

In Bild 2 ist ein einzelnes, vollkommen erreichbares Bündel mit n Leitungen dargestellt. Es sind

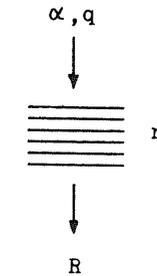


Bild 2: Vollkommen erreichbares Bündel mit ZV2

q Verkehrsquellen vorhanden, von denen jede die Anrufdichte α hat (das heisst während der mittleren Belegungsdauer t_m im Mittel α Rufe startet), solange sie frei ist. Die Belegungs-dauern seien negativ exponentiell um ihren Mittelwert t_m verteilt. Dann gilt für die Endedichte

$$\epsilon = \frac{1}{t_m} \tag{3}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im folgenden t_m als Zeiteinheit definiert; damit gilt

$$t_m = 1 \tag{4}$$

$$\epsilon = 1 \tag{5}$$

Die q Verkehrsquellen erzeugen einen ZV2 mit dem (zunächst unbekanntem) Mittelwert A , der dem Bündel angeboten wird. Vom Bündel wird der Verkehr Y aufgenommen. Diejenigen Rufe, welche nicht durchgeschaltet werden können (weil sie alle Leitungen belegt vorfinden), bilden den Verkehrsrest

$$R = A - Y \quad (6)$$

Unter der Verlustwahrscheinlichkeit (kurz: Verlust) B versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass ein eintreffender Ruf nicht durchgeschaltet werden kann. Es gilt

$$B = \frac{R}{A} \quad (7)$$

Dagegen bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, dass alle n Leitungen belegt sind, als Blockierungswahrscheinlichkeit E :

$$E = p(n) \quad (8)$$

Für das Angebot A gilt

$$A = \alpha \cdot (q - Y) \quad (9)$$

das heisst, das Angebot (= Zahl der eintreffenden Rufe pro Zeiteinheit) ist gleich der Anruhdichte α mal der Zahl der im Mittel freien Quellen ($q - Y$). Ausserdem erhält man für den Verkehrsrest noch die Beziehung

$$R = \alpha \cdot E \cdot (q - n) \quad (10)$$

das heisst, der Verkehrsrest (Zahl der Verlustrufe pro Zeiteinheit) ist gleich der Wahrscheinlichkeit E , dass alle Leitungen belegt sind, multipliziert mit der Anruhdichte α je Quelle und der Zahl der in diesem Zustand freien Quellen ($q - n$).

Aus Gleichung (9) ist ersichtlich, dass bei ZV2 - im Gegensatz zu ZV1 - das Angebot A vom Verkehr Y und damit von der Leitungszahl abhängt, also nicht konstant ist.

Die Gleichzeitigkeitsverteilung in dem betrachteten Bündel ohne Überlauf und damit auch die Werte A , B , E , R und Y können nach "Erlang's Bernoulli-Formel" /3/ berechnet werden. Zum besseren Verständnis der folgenden Abschnitte wird hier deren Herleitung nach A. K. Erlang kurz wiederholt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass in dem Bündel mit n Leitungen gerade x Leitungen belegt sind, sei mit $p(x)$ bezeichnet ($0 \leq x \leq n$). Der Zustand " x Leitungen belegt" wird im folgenden mit $\{x\}$ bezeichnet.

Betrachtet man ein Zeitintervall $\Delta t \rightarrow 0$, so wird nach dem Prinzip von der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $\{x\}$ (das heisst " x Leitungen belegt") in diesem Zeitintervall Δt entsteht, gleich gross wie jene Wahrscheinlichkeit, dass dieser Zustand im Zeitintervall Δt verschwindet. Oder anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $\{x\}$ im Zeitelement Δt in den Zustand $\{x + 1\}$ übergeht, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall Δt der Zustand $\{x + 1\}$ in den Zustand $\{x\}$ übergeht. Die Wahrscheinlichkeiten für mehr als ein Ereignis im Zeitelement Δt sind klein von höherer Ordnung in Δt und verschwinden deshalb für $\Delta t \rightarrow 0$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $\{x\}$ im Zeitintervall Δt durch einen neuen Ruf (von einer der $q - x$ freien Quellen) in den Zustand $\{x + 1\}$ übergeht, ist (bis auf Glieder höherer Ordnung in Δt)

$$p(x) \cdot \alpha \cdot (q - x) \cdot \Delta t$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $\{x + 1\}$ im Zeitintervall Δt durch das Enden einer der $(x + 1)$ Belegungen in den Zustand $\{x\}$ übergeht, ist

$$p(x+1) \cdot (x+1) \cdot \epsilon \cdot \Delta t$$

Man erhält deshalb nach dem Prinzip des statistischen Gleichgewichts (siehe oben) das folgende System von linearen Gleichungen für die Wahrscheinlichkeiten $p(x)$:

$$p(x) \cdot \alpha \cdot (q-x) \cdot \Delta t = p(x+1) \cdot (x+1) \cdot \epsilon \cdot \Delta t, \quad (11a)$$

$$x = 0, 1, \dots, n-1$$

Mit

$$\epsilon = \frac{1}{t_m}$$

ergibt sich hieraus

$$p(x) \cdot \alpha \cdot t_m \cdot (q-x) = p(x+1) \cdot (x+1),$$

$$x = 0, 1, \dots, n-1$$

Wenn man die Zeit auf die Belegungsdauer t_m normiert ($t_m = 1$), so erhält man

$$\alpha \cdot (q-x) \cdot p(x) = (x+1) \cdot p(x+1), \quad (11b)$$

$$x = 0, 1, \dots, n-1$$

oder

$$p(x+1) = \frac{\alpha \cdot (q-x)}{x+1} \cdot p(x), \quad (11c)$$

$$x = 0, 1, \dots, n-1$$

Diese Beziehung stellt eine Rekursionsformel für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x)$ dar. Ausserdem gilt die zusätzliche Bedingung, dass die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich eins ist:

$$\sum_{x=0}^n p(x) = 1 \quad (11d)$$

Die Auflösung des Gleichungssystems (11c, d) ergibt

$$p(x) = \frac{\binom{q}{x} \cdot \alpha^x}{\sum_{\xi=0}^n \binom{q}{\xi} \cdot \alpha^\xi}, \quad (12)$$

$$x = 0, 1, \dots, n$$

Diese Gleichung (12) ist als "Erlang's Bernoulli-Formel" bekannt. Die Blockierungswahrscheinlichkeit E , das heisst die Wahrscheinlichkeit $p(n)$, dass alle n Leitungen belegt sind, ist damit

$$E = p(n) = \frac{\binom{q}{n} \cdot \alpha^n}{\sum_{\xi=0}^n \binom{q}{\xi} \cdot \alpha^\xi} \quad (13)$$

Aus Gleichung (10) folgt hiermit für den Verkehrsrest

$$R = E \cdot \alpha \cdot (q-n) \quad (10)$$

Für das Angebot A erhält man aus den Gleichungen (6) und (9)

$$A = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot (q + R) \tag{14}$$

Den Verkehr Y kann man als mittlere Gleichzeitigkeit der Belegungen im Bündel berechnen:

$$Y = \sum_{x=0}^n x \cdot p(x) \tag{15a}$$

Er lässt sich jedoch noch einfacher aus Gleichung (4) bestimmen:

$$Y = A - R \tag{15b}$$

Nach Gleichung (7) lässt sich schliesslich der Verlust

$$B = \frac{R}{A}$$

bestimmen.

II.2. Überlaufsysteme mit einem vollkommen erreichbaren Primärbündel

II.2.1. Die Gruppierung

Ein Überlaufsystem, das aus zwei vollkommen erreichbaren Bündeln besteht, ist in Bild 3 dargestellt.

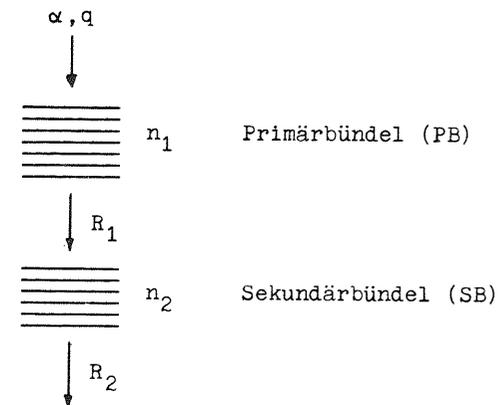


Bild 3: Überlaufsystem mit zwei vollkommen erreichbaren Bündeln

Es sind q Verkehrsquellen vorhanden; jede Quelle hat die Anrufrichte α , solange sie frei ist. Der Verkehrsrest R_1 , der vom Primärbündel nicht aufgenommen wird, läuft über auf ein Sekundärbündel mit n_2 Leitungen. Der Verkehrsanteil, welcher auch im Sekundärbündel nicht durchgeschaltet werden kann, wird als Verkehrsrest R_2 bezeichnet.

Unter der Verlustwahrscheinlichkeit (kurz "Verlust") B eines Bündels (bzw. einer Koppelanordnung) versteht man den auf den angebotenen Verkehr bezogenen Verkehrsrest des Bündels. Der Verlust B_1 im Primärbündel ist also

$$B_1 = \frac{R_1}{A} \quad (16)$$

für den Verlust im Sekundärbündel gilt

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} \quad (17)$$

und der Gesamtverlust B_{ges} der Gruppierung ist

$$B_{ges} = \frac{R_2}{A} \quad (18)$$

II.2.2. Das Angebot A und der Verkehrsrest R_2

Bei der Berechnung des Angebots A und des Verkehrsrests R_2 kann man davon ausgehen, dass das Primärbündel und das Sekundärbündel zusammen ebenfalls ein vollkommen erreichbares Bündel (mit $n_1 + n_2$ Leitungen) darstellen. Die Verkehrsgrößen für dieses Gesamtbündel kann man deshalb nach dem in Abschnitt II.1.1. angegebenen Verfahren berechnen. Man erhält dann nach Gleichung (13) die Gesamtblockierungswahrscheinlichkeit

$$E_{ges} = p(n_1+n_2) = \frac{\binom{q}{n_1+n_2} \cdot \alpha^{n_1+n_2}}{\sum_{\xi=0}^{n_1+n_2} \binom{q}{\xi} \cdot \alpha^\xi} \quad (19)$$

Der Verkehrsrest R_2 ist nach Gleichung (10)

$$R_2 = E_{ges} \cdot \alpha \cdot (q - n_1 - n_2) \quad (20)$$

Damit erhält man für das Angebot A den Wert

$$A = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot (q + R_2) \quad (21)$$

Für den gesamten Verkehr

$$Y = Y_1 + Y_2$$

ergibt sich nach Gleichung (15b)

$$Y = A - R_2 \quad (22)$$

Für den Verlust B_{ges} der aus Primärbündel und Sekundärbündel bestehenden Anordnung erhält man

$$B_{ges} = \frac{R_2}{A} \quad (18)$$

Das Angebot A und der Verkehrsrest R_2 können also (unter anderem) auf diese Weise sehr einfach berechnet werden.

Dagegen ist die Berechnung des Verkehrsrests R_1 viel schwieriger. Dieser Verkehrsrest R_1 hängt ausser von α , q und n_1 auch noch von der Leitungszahl n_2 ab. Deshalb kann er nicht mit Hilfe von Erlang's Bernoulli-Formel (12) berechnet werden, denn diese Formel gilt in bezug auf das Primärbündel nur für $n_2 = 0$.

Eine exakte Formel für den Verkehrsrest R_1 wird in den folgenden Abschnitten hergeleitet.

Anmerkung:

Bei ZV1 ist - im Gegensatz zu ZV2 - die Berechnung von R_1 sehr einfach: Der Verkehrsrest R_1 ist im Falle von ZV1 u n a b h ä n g i g von n_2 und kann deshalb nach der bekannten "Erlang'schen Verlustformel" bestimmt werden.

II.2.3. Die zweidimensionalen Zustandsgleichungen

Wenn im Primärbündel gerade x_1 Leitungen belegt sind, können gleichzeitig im Sekundärbündel $0, 1, \dots, n_2$ Leitungen belegt sein. Die Wahrscheinlichkeit, dass im Primärbündel gerade x_1 Leitungen und im Sekundärbündel x_2 Leitungen belegt sind, werde mit $p(x_1, x_2)$ bezeichnet.

Nach dem Prinzip des statistischen Gleichgewichts ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zustand $\{x_1, x_2\}$ verschwindet gleich der Wahrscheinlichkeit, dass er entsteht.

Der Zustand $\{x_1, x_2\}$ kann verschwinden durch Ende einer Belegung im Primärbündel oder im Sekundärbündel oder durch einen neuen Anruf. Falls im Primärbündel $x_1 < n_1$ Leitungen belegt sind, wird ein neuer Ruf stets im Primärbündel durchgeschaltet. Nur während des Zustands $\{n_1, x_2 < n_2\}$ kann ein neu einfallender Ruf eine Leitung im Sekundärbündel belegen.

Die Entstehung eines Zustandes $\{x_1, x_2\}$ kann durch Enden einer Belegung in den Zuständen $\{x_1 + 1, x_2\}$ oder $\{x_1, x_2 + 1\}$ erfolgen oder durch Einfallen einer neuen Belegung im Zustand $\{x_1 - 1, x_2\}$. Die Zustände $\{n_1, x_2\}$ können ausserdem durch eine neue Belegung im Sekundärbündel aus den Zuständen $\{n_1, x_2 - 1\}$ entstehen. Man erhält deshalb ein Gleichungssystem folgender Form:

$$p(x_1, x_2) \cdot [\alpha \cdot (q - x_1 - x_2) + x_1 + x_2] = p(x_1 - 1, x_2) \cdot \beta \cdot \alpha \cdot [q - (x_1 - 1) - x_2] + p(x_1 + 1, x_2) \cdot (x_1 + 1) + p(x_1, x_2 + 1) \cdot \gamma \cdot (x_2 + 1), \quad (23a)$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1 - 1,$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2,$$

$$p(n_1, x_2) \cdot [\gamma \cdot \alpha \cdot (q - n_1 - x_2) + n_1 + x_2] = p(n_1 - 1, x_2) \cdot \alpha \cdot [q - (n_1 - 1) - x_2] + p(n_1, x_2 - 1) \cdot \delta \cdot \alpha \cdot [q - n_1 - (x_2 - 1)] + p(n_1, x_2 + 1) \cdot \gamma \cdot (x_2 + 1),$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2, \quad (23b)$$

wobei

$$\beta = 1, \text{ wenn } x_1 > 0, \text{ sonst } \beta = 0$$

$$\gamma = 1, \text{ wenn } x_2 < n_2, \text{ sonst } \gamma = 0$$

$$\delta = 1, \text{ wenn } x_2 > 0, \text{ sonst } \delta = 0.$$

Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ ist gleich eins:

$$\sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} p(x_1, x_2) = 1 \quad (23c)$$

Damit sich die Schreibweise etwas vereinfacht (Wegfall der Koeffizienten β , γ und δ in Gleichung (23a)), sei definiert, dass

$$p(x_1, x_2) = 0 \quad \text{für} \quad \begin{matrix} x_1 < 0 \\ x_2 < 0 \\ x_2 > n_2 \end{matrix} \quad (24)$$

Die Gleichungen (23a) und (23b) gehen dann über in

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) \cdot [\alpha \cdot (q - x_1 - x_2) + x_1 + x_2] &= p(x_1 - 1, x_2) \cdot \alpha \cdot [q - (x_1 - 1) - x_2] \\ &+ p(x_1 + 1, x_2) \cdot (x_1 + 1) \\ &+ p(x_1, x_2 + 1) \cdot (x_2 + 1), \end{aligned} \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, 1, \dots, n_1 - 1, \\ x_2 &= 0, 1, \dots, n_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(n_1, x_2) \cdot [\gamma \cdot \alpha \cdot (q - n_1 - x_2) + n_1 + x_2] &= p(n_1 - 1, x_2) \cdot \alpha \cdot [q - (n_1 - 1) - x_2] \\ &+ p(n_1, x_2 - 1) \cdot \alpha \cdot [q - n_1 - (x_2 - 1)] \\ &+ p(n_1, x_2 + 1) \cdot (x_2 + 1), \end{aligned} \quad (25b)$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2,$$

wobei

$$\gamma = 1, \text{ wenn } x_2 < n_2, \text{ sonst } \gamma = 0.$$

Im folgenden wird eine geschlossene Lösung für das Gleichungssystem (25a, 25b, 23c) hergeleitet. Dazu werden zunächst erzeugende Funktionen eingeführt (Abschnitt II.1.2.4). Damit lassen sich die Gleichungen (25a, b) auf ein eindimensionales Gleichungssystem reduzieren (Abschnitte II.1.2.5 bis II.1.2.8), aus welchem sich dann die allgemeine Formel für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ ableiten lässt (Abschnitte II.1.2.9 und II.1.2.10).

II.2.4. Einführung erzeugender Funktionen

Die erzeugenden Funktionen für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ seien folgendermassen definiert /12/:

$$F(t) = G\{p(x_1, x_2)\} = \sum_{x_1=0}^{\infty} p(x_1, x_2) \cdot t^{x_1}, \quad (26)$$

wobei die Variable t ($0 \leq t \leq 1$) eine reine Pechengrösse darstellt. Die Zahl der Belegungen x_2 im Sekundärbündel ist hier als Parameter zu betrachten. Für diese erzeugenden Funktionen gelten folgende Beziehungen:

$$G\{c \cdot p(x_1, x_2)\} = c \cdot G\{p(x_1, x_2)\} \quad (27)$$

$$G\{p_1(x_1, x_2) + p_2(x_1, x_2)\} = G\{p_1(x_1, x_2)\} + G\{p_2(x_1, x_2)\} \quad (28)$$

$$G\{p(x_1 - 1, x_2)\} = t \cdot G\{p(x_1, x_2)\} + p(-1, x_2) \quad (29a)$$

$$G\{p(x_1-k, x_2)\} = t^k \cdot G\{p(x_1, x_2)\} + \sum_{v=0}^{k-1} p(-k+v, x_2) \cdot t^v, \quad (30a)$$

$k = 1, 2, \dots, x_1$

$$G\{x_1 \cdot p(x_1, x_2)\} = t \cdot \frac{d}{dt} G\{p(x_1, x_2)\} \quad (31a)$$

$$G\{(x_1+1) \cdot p(x_1+1, x_2)\} = \frac{d}{dt} G\{p(x_1, x_2)\} \quad (32a)$$

$$G\{(x_1-1) \cdot p(x_1-1, x_2)\} = t^2 \cdot \frac{d}{dt} G\{p(x_1, x_2)\} - p(-1, x_2) \quad (33a)$$

Berücksichtigt man, dass wegen Gleichung (24)

$$p(x_1, x_2) = 0 \quad \text{für} \quad x_1 < 0$$

ist, und schreibt man zur Abkürzung ausserdem G' statt $\frac{dG}{dt}$, so erhält man für die Gleichungen (29a) bis (33a)

$$G\{p(x_1-1, x_2)\} = t \cdot G\{p(x_1, x_2)\} \quad (29b)$$

$$G\{p(x_1-k, x_2)\} = t^k \cdot G\{p(x_1, x_2)\}, \quad (30b)$$

$k = 0, 1, \dots, x_1$

$$G\{x_1 \cdot p(x_1, x_2)\} = t \cdot G'\{p(x_1, x_2)\} \quad (31b)$$

$$G\{(x_1+1) \cdot p(x_1+1, x_2)\} = G'\{p(x_1, x_2)\} \quad (32b)$$

$$G\{(x_1-1) \cdot p(x_1-1, x_2)\} = t^2 \cdot G'\{p(x_1, x_2)\} \quad (33b)$$

Diese Beziehungen werden in den folgenden Abschnitten verwendet.

II.2.5. Berechnung der Werte $p(x_1, n_2)$ als Funktion des Werts $p(0, n_2)$

Setzt man in Gleichung (25a) $x_2 = n_2$, so erhält man mit Gleichung (24)

$$p(x_1, n_2) \cdot [\alpha \cdot (q - x_1 - n_2) + x_1 + n_2] = p(x_1-1, n_2) \cdot \alpha \cdot [q - (x_1-1) - n_2] + p(x_1+1, n_2) \cdot (x_1+1) \quad (34a)$$

oder umgeformt

$$(x_1+1) \cdot p(x_1+1, n_2) = [x_1 + n_2 + \alpha \cdot (q - x_1 - n_2)] \cdot p(x_1, n_2) - \alpha \cdot [q - n_2 - (x_1-1)] \cdot p(x_1-1, n_2) \quad (34b)$$

Diese Gleichung wird nun mit Hilfe der erzeugenden Funktionen (26) transformiert.

Die erzeugende Funktion für den Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung (34b) ist nach Gleichung (32b)

$$G'\{p(x_1, x_2)\}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (34b) hat wegen der Beziehungen (27), (28), (29b), (31b) und (33b) die erzeugende Funktion

$$\begin{aligned} & [n_2 + \alpha \cdot (q - n_2) \cdot G\{p(x_1, n_2)\} + (1 - \alpha) \cdot t \cdot G'\{p(x_1, n_2)\}] \\ & - \alpha \cdot (q - n_2) \cdot t \cdot G\{p(x_1, n_2)\} + \alpha \cdot t^2 \cdot G'\{p(x_1, n_2)\} \end{aligned}$$

Aus Gleichung (34b) folgt somit die für die erzeugende Funktion $G\{p(x_1, n_2)\}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} G'\{p(x_1, n_2)\} &= [n_2 + \alpha \cdot (q - n_2) \cdot G\{p(x_1, n_2)\}] \\ &+ (1 - \alpha) \cdot t \cdot G'\{p(x_1, n_2)\} \quad (35a) \\ &- \alpha \cdot (q - n_2) \cdot t \cdot G\{p(x_1, n_2)\} \\ &+ \alpha \cdot t^2 \cdot G'\{p(x_1, n_2)\} \end{aligned}$$

und weiter mit Gleichung (26)

$$\begin{aligned} F'(t) &= [n_2 + \alpha \cdot (q - n_2)] \cdot F(t) + (1 - \alpha) \cdot t \cdot F'(t) \quad (35b) \\ &- \alpha \cdot (q - n_2) \cdot t \cdot F(t) + \alpha \cdot t^2 \cdot F'(t) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{dF(t)}{dt} \cdot [1 - (1 - \alpha) \cdot t - \alpha \cdot t^2] = F(t) \cdot [n_2 + \alpha \cdot (q - n_2) - \alpha \cdot (q - n_2) \cdot t],$$

also

$$\frac{dF(t)}{dt} \cdot (1 - t) \cdot (1 + \alpha \cdot t) = F(t) \cdot [n_2 + \alpha \cdot (q - n_2) \cdot (1 - t)] \quad (36)$$

Dies ist eine lineare, homogene (und damit separierbare) Differentialgleichung erster Ordnung für die erzeugende Funktion $F(t)$.

Aus Gleichung (36) folgt

$$\frac{dF(t)}{F(t)} = \frac{n_2 + \alpha \cdot (q - n_2) \cdot (1 - t)}{(1 - t) \cdot (1 + \alpha \cdot t)} \cdot dt \quad (37)$$

und hieraus durch integrieren

$$\ln |F(t)| = n_2 \cdot \int \frac{dt}{(1 - t)(1 + \alpha t)} + \alpha \cdot (q - n_2) \cdot \int \frac{dt}{(1 + \alpha t)} \quad (38)$$

Zerlegt man den Ausdruck unter dem ersten Integral der Gleichung (38) in Partialbrüche, so lässt sich die Integration leicht durchführen. Nach einigen Umformungen ergibt sich

$$\ln |F(t)| = \ln \left| c_{n_2} \cdot \frac{(1 + \alpha \cdot t) \left(q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1 + \alpha} \right)}{(1 - t)^{\frac{n_2}{1 + \alpha}}} \right| \quad (39)$$

Da die Konstante c_{n_2} und damit ihr Vorzeichen noch unbestimmt ist, kann die Betragsbildung in Gleichung (37) unterbleiben. Die gesuchte erzeugende Funktion hat deshalb die Form

$$F(t) = G\{p(x_1, n_2)\} = c_{n_2} \cdot \frac{(1 + \alpha \cdot t) \left(q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1 + \alpha} \right)}{(1 - t)^{\frac{n_2}{1 + \alpha}}} \quad (40)$$

Damit ist nun die erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, n_2)$ bekannt. Nun ist der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, n_2)$ selbst zu berechnen, welcher zu der erzeugenden Funktion nach Gleichung (40) gehört (Rücktransformation).

Zu diesem Zweck wird die rechte Seite von Gleichung (40) in eine Reihe entwickelt (nach Potenzen von t). Nach dem binomischen Satz gilt

$$(1+\alpha t)^i = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{i}{x} \cdot \alpha^x \cdot t^x \quad (41)$$

und

$$\frac{1}{(1-t)^i} = (1-t)^{-i} = \sum_{x=0}^{\infty} (-1)^x \cdot \binom{-i}{x} \cdot t^x = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{i-1+x}{x} \cdot t^x \quad (42)$$

Aus Gleichung (41) folgt für $i = q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1+\alpha}$ die Beziehung

$$(1+\alpha t)^{\left(q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1+\alpha}\right)} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1+\alpha}}{x} \cdot \alpha^x \cdot t^x \quad (43)$$

Nach Gleichung (42) gilt für $i = \frac{n_2}{1+\alpha}$

$$(1-t)^{-\frac{n_2}{1+\alpha}} = \sum_{x=0}^{\infty} \binom{\frac{n_2}{1+\alpha} - 1 + x}{x} \cdot t^x \quad (44)$$

Setzt man die Gleichungen (43) und (44) in Gleichung (40) ein, so ergibt sich

$$G\{p(x_1, n_2)\} = c_{n_2} \cdot \left(\sum_{x=0}^{\infty} \binom{q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1+\alpha}}{x} \cdot \alpha^x \cdot t^x \right) \cdot \left(\sum_{x=0}^{\infty} \binom{\frac{n_2}{1+\alpha} - 1 + x}{x} \cdot t^x \right) \quad (45)$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a_x = \binom{q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1+\alpha}}{x} \cdot \alpha^x \quad (46a)$$

und

$$b_x = \binom{\frac{n_2}{1+\alpha} - 1 + x}{x} , \quad (46b)$$

so geht Gleichung (45) über in

$$G\{p(x_1, n_2)\} = c_{n_2} \cdot \left(\sum_{x=0}^{\infty} a_x \cdot t^x \right) \cdot \left(\sum_{x=0}^{\infty} b_x \cdot t^x \right) \quad (47)$$

oder, wenn man die Summen multipliziert,

$$G\{p(x_1, n_2)\} = c_{n_2} \cdot \left[a_0 b_0 \cdot t^0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) \cdot t^1 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \cdot t^2 + \dots \right]$$

oder

$$G\{p(x_1, n_2)\} = \sum_{x=0}^{\infty} \left(c_{n_2} \cdot \sum_{\xi=0}^x a_{x-\xi} \cdot b_{\xi} \right) \cdot t^x \quad (48)$$

Ändert man in Gleichung (48) den Summationsindex x ab in x_1 , so erhält man

$$G\{p(x_1, n_2)\} = \sum_{x_1=0}^{\infty} \left(c_{n_2} \cdot \sum_{\xi=0}^{x_1} a_{x_1-\xi} \cdot b_{\xi} \right) \cdot t^{x_1} \quad (49)$$

Andererseits ist nach Gleichung (26)

$$G\{p(x_1, n_2)\} = \sum_{x_1=0}^{\infty} p(x_1, n_2) \cdot t^{x_1} \quad (50)$$

Durch Vergleich der Gleichungen (49) und (50) folgt

$$p(x_1, n_2) = c_{n_2} \cdot \sum_{\xi=0}^{x_1} a_{x_1-\xi} \cdot b_{\xi}$$

und mit den Gleichungen (46a, b)

$$p(x_1, n_2) = c_{n_2} \cdot \sum_{\xi=0}^{x_1} \left(q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1+\alpha} \right) \cdot \alpha^{x_1-\xi} \cdot \left(\frac{n_2}{1+\alpha} - 1 + \xi \right) \quad (51)$$

Nun wird die Abkürzung

$$T_{r,m}(\alpha, q) = \sum_{\eta=0}^m \left(q - \frac{\alpha \cdot r}{1+\alpha} \right) \cdot \alpha^{m-\eta} \cdot \left(\frac{r}{1+\alpha} - 1 + \eta \right) \quad (52a)$$

eingeführt. Der Einfachheit halber wird im folgenden das Argument (α, q) weggelassen:

$$T_{r,m} = T_{r,m}(\alpha, q) \quad (52b)$$

Ausserdem sei definiert:

$$T_{r,m} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{für } m < 0 \\ \text{oder } r < 0 \end{array} \quad (53)$$

Für $m = 0$ folgt aus Gleichung (52a)

$$T_{r,0} = 1 \quad (54)$$

Mit Gleichung (52a) erhält man aus Gleichung (51)

$$p(x_1, n_2) = c_{n_2} \cdot T_{n_2, x_1} \quad (55)$$

Nun ist die Konstante c_{n_2} zu bestimmen. Dazu setzt man in Gleichung (55) $x_1 = 0$:

$$p(0, n_2) = c_{n_2} \cdot T_{n_2, 0}$$

Mit Gleichung (54) folgt hieraus

$$c_{n_2} = p(0, n_2) \quad (56)$$

Setzt man dies in Gleichung (55) ein, so erhält man

für die Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, n_2)$ den Ausdruck

$$p(x_1, n_2) = p(0, n_2) \cdot T_{n_2, x_1} \quad (57)$$

mit T_{n_2, x_1} nach Gleichung (52a).

Damit sind die Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, n_2)$ als Funktion des Werts $p(0, n_2)$ dargestellt.

Für die erzeugende Funktion folgt aus den Gleichungen (40) und (55)

$$G\{c_{n_2} \cdot T_{n_2, x_1}\} = c_{n_2} \cdot \frac{(1+\alpha \cdot t)^{q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{n_2}{1+\alpha}}} \quad (58a)$$

bzw. mit Gleichung (55)

$$G\{p(x_1, n_2)\} = p(0, n_2) \cdot \frac{(1+\alpha \cdot t)^{q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{n_2}{1+\alpha}}} \quad (58b)$$

oder allgemein

$$G\{T_{r, x_1}\} = \frac{(1+\alpha \cdot t)^{q - \frac{\alpha \cdot r}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{r}{1+\alpha}}} \quad (59)$$

Hieraus folgt mit der Beziehung (30b)

$$G\{T_{r, x_1-k}\} = t^k \cdot \frac{(1+\alpha \cdot t)^{q - \frac{\alpha \cdot r}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{r}{1+\alpha}}}, \quad (60)$$

$$k = 0, 1, \dots, x_1$$

Diese Beziehung wird später verwendet.

II.2.6. Berechnung der Werte $p(x_1, n_2 - 1)$ als Funktion der Werte $p(0, n_2 - 1)$ und $p(0, n_2)$

Setzt man in Gleichung (23a) $x_2 = n_2 - 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} p(x_1, n_2 - 1) \cdot [\alpha \cdot (q - x_1 - n_2 + 1) + x_1 + n_2 - 1] \\ = p(x_1 - 1, n_2 - 1) \cdot \alpha \cdot [q - (x_1 - 1) - (n_2 - 1)] \\ + p(x_1 + 1, n_2 - 1) \cdot (x_1 + 1) \\ + p(x_1, n_2) \cdot n_2 \end{aligned} \quad (61a)$$

oder umgeformt

$$\begin{aligned} (x_1 + 1) \cdot p(x_1 + 1, n_2 - 1) &= [x_1 + n_2 - 1 + \alpha \cdot (q - x_1 - n_2 + 1)] \cdot p(x_1, n_2 - 1) \\ &- \alpha \cdot [q - (x_1 - 1) - (n_2 - 1)] \cdot p(x_1 - 1, n_2 - 1) \\ &- n_2 \cdot p(x_1, n_2) \end{aligned} \quad (61b)$$

Geht man nun - wie im vorigen Abschnitt bei Gleichung (34b) - über zu den erzeugenden Funktionen, so erhält man entsprechend

$$G' \{p(x_1, n_2-1)\} = [(n_2-1) + \alpha \cdot (q - (n_2-1))] \cdot G \{p(x_1, n_2-1)\} + (1-\alpha) \cdot t \cdot G' \{p(x_1, n_2-1)\} - \alpha \cdot [q - (n_2-1)] \cdot t \cdot G \{p(x_1, n_2-1)\} + \alpha t^2 \cdot G' \{p(x_1, n_2-1)\} - n_2 \cdot G \{p(x_1, n_2)\} \quad (62a)$$

oder umgeformt

$$\frac{d}{dt} G \{p(x_1, n_2-1)\} \cdot [(1-t) \cdot (1+\alpha t)] = G \{p(x_1, n_2-1)\} \cdot [(n_2-1) + \alpha \cdot (q - (n_2-1)) - \alpha \cdot (q - (n_2-1)) \cdot t] - n_2 \cdot G \{p(x_1, n_2)\} \quad (62b)$$

wobei die erzeugende Funktion $G \{p(x_1, n_2)\}$, das heisst der letzte Term in Gleichung (62b) nach Gleichung (58b) bekannt ist. Gleichung (62b) stellt eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung in $G \{p(x_1, n_2-1)\}$ dar. Um diese Differentialgleichung zu lösen, integriert man zuerst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} G \{p(x_1, n_2-1)\} \cdot [(1-t) \cdot (1+\alpha t)] = G \{p(x_1, n_2-1)\} \cdot [(n_2-1) + \alpha \cdot (q - (n_2-1)) \cdot (1-t)] \quad (63)$$

(welche den Ausdruck $n_2 \cdot G \{p(x_1, x_2)\}$ nicht enthält).

Man erhält (analog zur Integration der Differentialgleichung (36))

$$G^* \{p(x_1, n_2-1)\} = C_{n_2-1}^* \cdot \frac{(1+\alpha t)^{q - \frac{\alpha \cdot (n_2-1)}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{n_2-1}{1+\alpha}}} \quad (64)$$

Durch Variation der Konstanten erhält man für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (62b)

$$G \{p(x_1, n_2-1)\} = C_{n_2-1}^* (t) \cdot \frac{(1+\alpha t)^{q - \frac{\alpha \cdot (n_2-1)}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{n_2-1}{1+\alpha}}} \quad (65)$$

Gleichung (65) wird nun in die Differentialgleichung (62b) eingesetzt. Dies führt nach einer Zwischenrechnung auf die Beziehung

$$\frac{d}{dt} C_{n_2-1}^* (t) \cdot \frac{(1+\alpha t)^{q - \frac{\alpha \cdot (n_2-1)}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{n_2-1}{1+\alpha}}} \cdot (1+\alpha t) \cdot (1-t) = -n_2 \cdot G \{p(x_1, n_2)\} \quad (66)$$

Mit Gleichung (58b) folgt hieraus

$$\frac{d}{dt} C_{n_2-1}^* (t) = -n_2 \cdot p(q, n_2) \cdot \frac{(1+\alpha t)^{\left[q - \frac{\alpha \cdot (n_2-1)}{1+\alpha} + 1 \right] + \left[q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1+\alpha} \right]}}{(1-t)^{\left[\frac{n_2}{1+\alpha} - \left(\frac{n_2-1}{1+\alpha} - 1 \right) \right]}} \quad (67a)$$

und nach Umformung

$$\frac{d}{dt} C_{n_2-1}^* (t) = -n_2 \cdot p(q, n_2) \cdot \frac{1}{(1-t)^{\left(2 - \frac{\alpha}{1+\alpha} \right)} \cdot (1+\alpha t)^{\left(1 + \frac{\alpha}{1+\alpha} \right)}} \quad (67b)$$

Durch Integration ergibt sich

$$C_{n_2-1}^*(t) = -n_2 \cdot p(0, n_2) \cdot \int \frac{1}{(1-t)^{2-\frac{\alpha}{1+\alpha}} \cdot (1+\alpha t)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} dt \quad (68)$$

Die Ausführung der Integration führt auf die Gleichung

$$C_{n_2-1}^*(t) = -n_2 \cdot p(0, n_2) \cdot \frac{t}{(1-t)^{\frac{1}{1+\alpha}} \cdot (1+\alpha t)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} + C_{n_2-1} \quad (69)$$

(Die Richtigkeit von Gleichung (69) lässt sich leicht durch Ableiten und Vergleich mit Gleichung (67b) zeigen.) Mit Gleichung (69) folgt für die erzeugende Funktion $G\{p(x_1, n_2 - 1)\}$ aus Gleichung (65)

$$G\{p(x_1, n_2-1)\} = C_{n_2-1} \cdot \frac{(1+\alpha t)^{q-\frac{\alpha(n_2-1)}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{n_2-1}{1+\alpha}}} - n_2 \cdot p(0, n_2) \cdot t \cdot \frac{(1+\alpha t)^{q-\frac{\alpha n_2}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{n_2}{1+\alpha}}} \quad (70)$$

Damit ist die erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, n_2 - 1)$ bekannt. Nun ist noch die Rücktransformation durchzuführen.

Setzt man in Gleichung (70) die Beziehungen (59) (für $r = n_2 - 1$) und (60) (für $k = 1, r = n_2$) ein, so erhält man

$$G\{p(x_1, n_2-1)\} = C_{n_2-1} \cdot G\{T_{n_2-1, x_1}\} - n_2 \cdot p(0, n_2) \cdot G\{T_{n_2, x_1-1}\} \quad (71a)$$

und weiter mit den Beziehungen (27) und (28)

$$G\{p(x_1, n_2-1)\} = G\{C_{n_2-1} \cdot T_{n_2-1, x_1} - n_2 \cdot p(0, n_2) \cdot T_{n_2, x_1-1}\} \quad (71b)$$

Hieraus folgt direkt

$$p(x_1, n_2-1) = C_{n_2-1} \cdot T_{n_2-1, x_1} - n_2 \cdot p(0, n_2) \cdot T_{n_2, x_1-1} \quad (72)$$

Zur Bestimmung der Konstanten C_{n_2-1} setzt man in Gleichung (72) $x_1 = 0$:

$$p(0, n_2-1) = C_{n_2-1} \cdot T_{n_2-1, 0} - n_2 \cdot p(0, n_2) \cdot T_{n_2, -1} \quad (73a)$$

Nach der Definition (53) ist

$$T_{n_2, -1} = 0$$

ferner ist nach Gleichung (54)

$$T_{n_2-1, 0} = 1$$

Damit wird nach Gleichung (71a)

$$c_{n_2-1} = p(0, n_2-1) \quad (73b)$$

Mit Gleichung (73b) ergibt sich aus Gleichung (72)

$$p(x_1, n_2-1) = p(0, n_2-1) \cdot T_{n_2-1, x_1} - n_2 \cdot p(0, n_2) \cdot T_{n_2, x_1-1} \quad (74)$$

Die Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, n_2 - 1)$ sind damit als Funktion der Werte $p(0, n_2 - 1)$ und $p(0, n_2)$ dargestellt. (Die Grössen T_{n_2-1, x_1} und T_{n_2, x_1-1} sind in Gleichung (52a) definiert.)

II.2.7. Berechnung der Werte $p(x_1, n_2 - 2)$ als Funktion der Werte $p(0, n_2 - 2)$, $p(0, n_2 - 1)$ und $p(0, n_2)$

Für $x_2 = n_2 - 2$ erhält man aus Gleichung (23a)

$$p(x_1, n_2-2) \cdot [\alpha \cdot (q - x_1 - n_2 + 2) + x_1 + n_2 - 2] = p(x_1-1, n_2-2) \cdot \alpha \cdot [q - (x_1-1) - (n_2-2)] + p(x_1+1, n_2-2) \cdot (x_1+1) + p(x_1, n_2-1) \cdot (n_2-1) \quad (75)$$

Geht man - wie oben (siehe Gleichung (62a) ff.) - zu erzeugenden Funktionen über, so erhält man entsprechend

$$\frac{d}{dt} G\{p(x_1, n_2-2)\} \cdot (1-t) \cdot (1+\alpha t) = G\{p(x_1, n_2-2)\} \cdot [(n_2-2) + \alpha \cdot (q - (n_2-2))] \cdot (1-t) - (n_2-1) \cdot G\{p(x_1, n_2-1)\} \quad (76)$$

Bei der Integration dieser inhomogenen Differentialgleichung bestimmt man - wie oben - zunächst die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und dann durch Variation der Konstanten die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (76). Die erzeugende Funktion $G\{p(x_1, n_2 - 1)\}$ in Gleichung (76) ist dabei nach den Gleichungen (71a) und (73b) bekannt. Man erhält dann die erzeugende Funktion

$$G\{p(x_1, n_2-2)\} = c_{n_2-2} \cdot \frac{(1+\alpha t)^{q - \frac{\alpha(n_2-2)}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{n_2-2}{1+\alpha}}} - (n_2-1) \cdot p(0, n_2-1) \cdot t \cdot \frac{(1+\alpha t)^{q - \frac{\alpha(n_2-1)}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{n_2-1}{1+\alpha}}} + \frac{n_2 \cdot (n_2-1)}{2} \cdot p(0, n_2) \cdot t^2 \cdot \frac{(1+\alpha t)^{q - \frac{\alpha \cdot n_2}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{n_2}{1+\alpha}}} \quad (77)$$

Die Rücktransformation mit Hilfe von Gleichung (60) ergibt

$$p(x_1, n_2-1) = c_{n_2-2} \cdot T_{n_2-2, x_1} - (n_2-1) \cdot p(0, n_2-1) \cdot T_{n_2-1, x_1-1} + \binom{n_2}{2} \cdot p(0, n_2) \cdot T_{n_2, x_1-2} \quad (78)$$

Hieraus folgt mit den Gleichungen (53) und (54) für $x_1 = 0$

$$c_{n_2-2} = p(0, n_2-2) \quad (79)$$

Aus Gleichung (78) ergibt sich hiermit

$$p(x_1, n_2-2) = p(0, n_2-2) \cdot T_{n_2-2, x_1} - \binom{n_2-1}{1} \cdot p(0, n_2-1) \cdot T_{n_2-1, x_1-1} + \binom{n_2}{2} \cdot p(0, n_2) \cdot T_{n_2, x_1-2} \quad (80)$$

Damit sind die Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, n_2 - 2)$ durch die Werte $p(0, n_2 - 2)$, $p(0, n_2 - 1)$ und $p(0, n_2)$ ausgedrückt.

II.2.8. Bestimmung der Werte $p(x_1, x_2)$ als Funktion der Werte $p(0, x_2)$

Betrachtet man die Gleichungen (57), (74) und (80), so stellt man fest, dass sich die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, n_2)$, $p(x_1, n_2 - 1)$ und $p(x_1, n_2 - 2)$ durch die Formel

$$p(x_1, x_2) = \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot T_{\xi, x_1+x_2-\xi} \cdot p(0, \xi) \quad (81)$$

darstellen lassen. Im folgenden wird nun bewiesen, dass Gleichung (81) für alle x_2 gilt ($0 \leq x_2 \leq n_2$).

Zunächst wird gezeigt: wenn Gleichung (81) für $(x_2 + 1)$ gilt, dann gilt Gleichung (81) auch für x_2 .

Nach Gleichung (59) und Gleichung (81) ist die zu $p(x_1, x_2)$ gehörende erzeugende Funktion

$$G\{p(x_1, x_2)\} = \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot p(0, \xi) \cdot t^{\xi-x_2} \cdot \frac{(1+\alpha t)^{q-\frac{\alpha \xi}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{\xi}{1+\alpha}}} \quad (82)$$

Nach Voraussetzung gilt Gleichung (81) für $(x_2 + 1)$; dann gilt für die zu $p(x_1, x_2 + 1)$ gehörende erzeugende Funktion nach Gleichung (82)

$$G\{p(x_1, x_2+1)\} = \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi-(x_2+1)} \cdot \binom{\xi}{x_2+1} \cdot p(0, \xi) \cdot t^{\xi-(x_2+1)} \cdot \frac{(1+\alpha t)^{q-\frac{\alpha \xi}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{\xi}{1+\alpha}}} \quad (83)$$

Die Zustandsgleichung für die Wahrscheinlichkeit $p(x_1, x_2)$ lautet nach Gleichung (25a)

$$p(x_1, x_2) \cdot [\alpha \cdot (q - x_1 - x_2) + x_1 + x_2] = p(x_1-1, x_2) \cdot \alpha \cdot [q - (x_1-1) - x_2] + p(x_1+1, x_2) \cdot (x_1+1) + p(x_1, x_2+1) \cdot (x_2+1) \quad (25a)$$

Führt man nun die erzeugenden Funktionen nach Gleichung (26) ein, so erhält man (nach Umformung) analog zu den Gleichungen (36), (63) und (76) die Beziehung

$$\frac{\alpha}{\alpha t} G\{p(x_1, x_2)\} \cdot (1-t) \cdot (1+\alpha t) = G\{p(x_1, x_2)\} \cdot [x_2 + \alpha \cdot (q - x_2) \cdot (1-t)] - (x_2+1) \cdot G\{p(x_1, x_2+1)\} \quad (84)$$

Als Lösung für die hierzu gehörende homogene Differentialgleichung erhält man entsprechend

$$G^* \{p(x_1, x_2)\} = C_{x_2}^* \cdot \frac{(1+\alpha t)^{9 - \frac{\alpha x_2}{1+\alpha}}}{(1-t) \frac{x_2}{1+\alpha}} \quad (85)$$

Durch Variation der Konstanten $c_{x_2}^*$ erhält man für die inhomogene Differentialgleichung (84) die Lösung

$$G \{p(x_1, x_2)\} = C_{x_2}^*(t) \cdot \frac{(1+\alpha t)^{9 - \frac{\alpha x_2}{1+\alpha}}}{(1-t) \frac{x_2}{1+\alpha}} \quad (86)$$

Mit Gleichung (84) ergibt sich hieraus

$$\frac{d}{dt} C_{x_2}^*(t) = -(x_2+1) \cdot \frac{(1-t)^{\frac{x_2}{1+\alpha} - 1}}{(1+\alpha t)^{9 - \frac{\alpha x_2}{1+\alpha} + 1}} \cdot G \{p(x_1, x_2+1)\} \quad (87)$$

Setzt man Gleichung (83) ein, so erhält man

$$\frac{d}{dt} C_{x_2}^*(t) = -(x_2+1) \cdot \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi - (x_2+1)} \cdot \binom{\xi}{x_2+1} \cdot p(0, \xi) \cdot t^{\xi - (x_2+1)} \cdot \frac{(1+\alpha t)^{9 - \frac{\alpha \xi}{1+\alpha} - 9 + \frac{\alpha x_2}{1+\alpha} - 1}}{(1-t)^{\frac{\xi}{1+\alpha} - \frac{x_2}{1+\alpha} + 1}} \quad (88)$$

oder

$$C_{x_2}^*(t) = -(x_2+1) \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi - (x_2+1)} \cdot \binom{\xi}{x_2+1} \cdot p(0, \xi) \cdot \int \frac{t^{\xi - (x_2+1)} \cdot dt}{(1+\alpha t)^{1 + \frac{\alpha(\xi - x_2)}{1+\alpha}} \cdot (1-t)^{1 + \frac{\xi - x_2}{1+\alpha}}} \quad (89)$$

Die Integration von Gleichung (89) ergibt

$$C_{x_2}^*(t) = C_{x_2} + \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi - x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot p(0, \xi) \cdot t^{\xi - x_2} \cdot \frac{(1+\alpha t)^{-\frac{\alpha(\xi - x_2)}{1+\alpha}}}{(1-t)^{\frac{\xi - x_2}{1+\alpha}}} \quad (90)$$

(Die Richtigkeit dieser Integration lässt sich leicht zeigen durch Ableiten der Gleichung (90).)

Aus den Gleichungen (86) und (90) erhält man für die erzeugende Funktion $G \{p(x_1, x_2)\}$ den Ausdruck

$$G \{p(x_1, x_2)\} = C_{x_2} \cdot \frac{(1+\alpha t)^{9 - \frac{\alpha x_2}{1+\alpha}}}{(1-t) \frac{x_2}{1+\alpha}} + \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi - x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot p(0, \xi) \cdot t^{\xi - x_2} \cdot \frac{(1+\alpha t)^{9 - \frac{\alpha \xi}{1+\alpha}}}{(1-t) \frac{\xi}{1+\alpha}} \quad (91)$$

Nach Gleichung (60) gehören zu dieser erzeugenden Funktion die Zustandswahrscheinlichkeiten

$$p(x_1, x_2) = C_{x_2} \cdot T_{x_2, x_1} + \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi - x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot p(0, \xi) \cdot T_{\xi, x_1 + x_2 - \xi} \quad (92)$$

Zur Bestimmung der Konstanten c_{x_2} setzt man $x_1 = 0$ und erhält mit den Gleichungen (53) und (54)

$$p(0, x_2) = C_{x_2} \cdot 1 + 0 \quad (93)$$

Damit geht Gleichung (92) über in

$$p(x_1, x_2) = \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \binom{\xi}{x_2} \cdot T_{\xi, x_1+x_2-\xi} \cdot p(0, \xi) \quad (94)$$

Dies stimmt überein mit Gleichung (81).

Damit ist gezeigt: wenn Gleichung (81) gilt für $(x_2 + 1)$, dann gilt Gleichung (81) auch für x_2 ; Gleichung (81) gilt aber für

$$\begin{aligned} x_2 &= n_2, \\ x_2 &= n_2 - 1, \\ x_2 &= n_2 - 2. \end{aligned}$$

Also gilt Gleichung (81) auch für

$$\begin{aligned} x_2 &= n_2 - 3, \\ x_2 &= n_2 - 4, \\ &\dots \end{aligned}$$

das heisst für alle x_2 ($0 \leq x_2 \leq n_2$).

Damit sind nun in Gleichung (81) bzw. in Gleichung (94) alle Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ als Funktion der Werte $p(0, x_2)$ dargestellt.

II.2.9. Darstellung der Werte $p(x_1, x_2)$ durch den Wert $p(0, n_2)$

Bis jetzt wurden nur die Gleichungen nach (25a) verwendet (Zustände mit $x_1 < n_1$). Die Gleichungen (25b) stehen noch zur Verfügung. Im folgenden wird gezeigt, dass sich die

Werte $p(0, x_2)$ - und damit nach Gleichung (81) alle Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ - mit Hilfe von Gleichung (25b) als Funktion von $p(0, n_2)$ ausdrücken lassen.

Nach Gleichung (25b) ist

$$\begin{aligned} [n_1+x_2+\alpha \cdot (q-n_1-x_2) \cdot \gamma] \cdot p(n_1, x_2) &= \alpha \cdot [q-(n_1-1)-x_2] \cdot p(n_1-1, x_2) \\ &+ \alpha \cdot [q-n_1-(x_2-1)] \cdot p(n_1, x_2-1) \\ &+ (x_2+1) \cdot p(n_1, x_2+1), \end{aligned}$$

$x_2 = 0, 1, \dots, n_2,$

wobei $\gamma = 1$, wenn $x_2 < n_2$, sonst $\gamma = 0$

oder

$$\begin{aligned} \alpha \cdot [q-n_1-(x_2-1)] \cdot p(n_1, x_2-1) &= [n_1+x_2+\alpha \cdot (q-n_1-x_2) \cdot \gamma] \cdot p(n_1, x_2) \\ &- \alpha \cdot [q-(n_1-1)-x_2] \cdot p(n_1-1, x_2) \\ &- (x_2+1) \cdot p(n_1, x_2+1), \end{aligned} \quad (95)$$

$x_2 = 0, 1, \dots, n_2.$

Mit Gleichung (94) erhält man hieraus

$$\begin{aligned} &\alpha \cdot (q-n_1-x_2+1) \cdot \sum_{\xi=x_2-1}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2+1} \binom{\xi}{x_2-1} \cdot T_{\xi, n_1+x_2-1-\xi} \cdot p(0, \xi) \\ &= [n_1+x_2+\alpha \cdot (q-n_1-x_2) \cdot \gamma] \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \binom{\xi}{x_2} \cdot T_{\xi, n_1+x_2-\xi} \cdot p(0, \xi) \\ &- \alpha \cdot (q-n_1-x_2+1) \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \binom{\xi}{x_2} \cdot T_{\xi, n_1-1+x_2-\xi} \cdot p(0, \xi) \\ &- (x_2+1) \cdot \sum_{\xi=x_2+1}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2-1} \binom{\xi}{x_2+1} \cdot T_{\xi, n_1+x_2+1-\xi} \cdot p(0, \xi), \end{aligned} \quad (96)$$

$x_2 = 0, 1, \dots, n_2$

Die letzte Summe in Gleichung (96) ändert sich nicht, wenn man ihre untere Grenze $x_2 + 1$ in x_2 abändert, da für $\xi = x_2$ der Faktor $\binom{\xi}{x_2+1} = \binom{x_2}{x_2+1} = 0$ wird. Wenn man von der Summe auf der linken Seite der Gleichung (96) das Glied für $\xi = (x_2 - 1)$ abspaltet und ferner alle vier Summen dieser Gleichung zusammenfasst, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 p(0, x_2 - 1) &= \frac{1}{\alpha \cdot (q - n_1 - x_2 + 1) \cdot T_{x_2 - 1, n_1}} \cdot \sum_{\xi = x_2}^{n_2} (-1)^{\xi - x_2} \cdot p(0, \xi) \cdot \\
 &\cdot \left(\alpha \cdot (q - n_1 - x_2 + 1) \cdot \left[\binom{\xi}{x_2 - 1} - \binom{\xi}{x_2} \right] \cdot T_{\xi, n_1 + x_2 - 1 - \xi} \right. \\
 &+ [n_1 + x_2 + \alpha \cdot (q - n_1 - x_2) \cdot \vartheta] \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot T_{\xi, n_1 + x_2 - \xi} \\
 &\left. + (x_2 + 1) \cdot \binom{\xi}{x_2 + 1} \cdot T_{\xi, n_1 + x_2 + 1 - \xi} \right), \\
 x_2 &= (0), 1, 2, \dots, n_2.
 \end{aligned} \tag{97a}$$

Da die Gleichungen (25a) und (25b) nicht linear unabhängig sind, kann eine beliebige von diesen Gleichungen unberücksichtigt bleiben. Es ist zweckmässig, die Gleichung (25b) bzw. (97a) für $x_2 = 0$ nicht zu benutzen. Die Beziehung (25b) bzw. (97a) wird also nur für $x_2 = 1, 2 \dots n_2$ verwendet. Diese Gleichung wird im folgenden nicht mehr aufgeführt.

Ersetzt man in Gleichung (97a) x_2 durch $(x_2 + 1)$, so erhält man

$$\begin{aligned}
 p(0, x_2) &= \frac{1}{\alpha \cdot (q - n_1 - x_2) \cdot T_{x_2, n_1}} \cdot \sum_{\xi = x_2 + 1}^{n_2} (-1)^{\xi - x_2 - 1} \cdot p(0, \xi) \cdot \\
 &\cdot \left(\alpha \cdot (q - n_1 - x_2) \cdot \left[\binom{\xi}{x_2} - \binom{\xi}{x_2 + 1} \right] \cdot T_{\xi, n_1 + x_2 - \xi} \right. \\
 &+ [n_1 + x_2 + 1 + \alpha \cdot (q - n_1 - x_2 - 1) \cdot \vartheta] \cdot \binom{\xi}{x_2 + 1} \cdot T_{\xi, n_1 + x_2 + 1 - \xi} \\
 &\left. + (x_2 + 2) \cdot \binom{\xi}{x_2 + 2} \cdot T_{\xi, n_1 + x_2 + 2 - \xi} \right), \\
 x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 - 1
 \end{aligned} \tag{97b}$$

wobei $\vartheta = 1$, falls $x_2 < n_2 - 1$, sonst $\vartheta = 0$.

Mit der Abkürzung

$$\begin{aligned}
 \alpha_{x, z} &= \frac{(-1)^{z - x - 1}}{\alpha \cdot (q - n_1 - x) \cdot T_{x, n_1}} \cdot \left(\alpha \cdot (q - n_1 - x) \cdot \left[\binom{z}{x} - \binom{z}{x + 1} \right] \cdot T_{z, n_1 + x - z} \right. \\
 &+ [n_1 + x + 1 + \alpha \cdot (q - n_1 - x - 1) \cdot \vartheta] \cdot \binom{z}{x + 1} \cdot T_{z, n_1 + x + 1 - z} \\
 &\left. + (x + 2) \cdot \binom{z}{x + 2} \cdot T_{z, n_1 + x + 2 - z} \right), \\
 &
 \end{aligned} \tag{98}$$

wobei $\vartheta = 1$, wenn $x < n_2 - 1$, sonst $\vartheta = 0$

kann man die Gleichung (97b) in vereinfachter Form darstellen:

$$\begin{aligned}
 p(0, x_2) &= \sum_{\xi = x_2 + 1}^{n_2} \alpha_{x_2, \xi} \cdot p(0, \xi), \\
 x_2 &= 0, 1, \dots, n_2 - 1
 \end{aligned} \tag{99a}$$

Ausgeschrieben hat das Gleichungssystem die Gestalt

$$\begin{aligned}
 p(0, n_2-1) &= a_{n_2-1, n_2} \cdot p(0, n_2) \\
 p(0, n_2-2) &= a_{n_2-2, n_2-1} \cdot p(0, n_2-1) + a_{n_2-2, n_2} \cdot p(0, n_2) \\
 p(0, n_2-3) &= a_{n_2-3, n_2-2} \cdot p(0, n_2-2) + a_{n_2-3, n_2-1} \cdot p(0, n_2-1) \\
 &\quad + a_{n_2-3, n_2} \cdot p(0, n_2) \\
 &\dots \qquad \dots \dots \\
 p(0, 0) &= a_{0,1} \cdot p(0,1) + a_{0,2} \cdot p(0,2) + \dots + a_{0, n_2} \cdot p(0, n_2)
 \end{aligned} \tag{99b}$$

Mit Hilfe dieses Gleichungssystems ist es nun einfach, die Werte $p(0, x_2)$ durch den Wert $p(0, n_2)$ auszudrücken: $p(0, n_2 - 1)$ kann mit Hilfe der ersten Gleichung von (99b) direkt angegeben werden. Mit diesem Wert ergibt sich $p(0, n_2 - 2)$ direkt aus der zweiten Gleichung von (99b) und so fort. Man erhält auf diese Weise

$$\begin{aligned}
 p(0, n_2-1) &= b_{n_2-1} \cdot p(0, n_2) \\
 p(0, n_2-2) &= b_{n_2-2} \cdot p(0, n_2) \\
 &\dots \qquad \dots \\
 p(0, 0) &= b_0 \cdot p(0, n_2)
 \end{aligned} \tag{100a}$$

Definiert man noch

$$b_{n_2} = 1$$

und nimmt zu (100a) noch die Gleichung

$$p(0, n_2) = b_{n_2} \cdot p(0, n_2)$$

hinzu, so gilt

$$\begin{aligned}
 p(0, x_2) &= b_{x_2} \cdot p(0, n_2), \\
 x_2 &= 0, 1, 2, \dots, n_2
 \end{aligned} \tag{100b}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 b_{n_2} &= 1, \\
 b_{n_2-1} &= a_{n_2-1, n_2}, \\
 b_{n_2-2} &= a_{n_2-2, n_2} + a_{n_2-2, n_2-1} \cdot a_{n_2-1, n_2}, \\
 b_{n_2-3} &= a_{n_2-3, n_2} + a_{n_2-3, n_2-1} \cdot a_{n_2-1, n_2} \\
 &\quad + a_{n_2-3, n_2-2} \cdot (a_{n_2-2, n_2} + a_{n_2-2, n_2-1} \cdot a_{n_2-1, n_2}), \\
 &\dots \qquad \dots
 \end{aligned} \tag{101a}$$

oder allgemein

$$\begin{aligned}
 b_{x_2} &= \sum_{z_1=x_2+1}^{n_2} a_{x_2, z_1} \cdot \sum_{z_2=z_1+1}^{n_2} a_{z_1, z_2} \cdot \sum_{z_3=z_2+1}^{n_2} a_{z_2, z_3} \cdot \dots \cdot \sum_{z_w=z_{w-1}+1}^{n_2} a_{z_{w-1}, z_w} \\
 &\text{für } x_2 = 0, 1, \dots, n_2-1 \\
 &\text{mit } w = n_2 - x_2
 \end{aligned} \tag{101b}$$

In Gleichung (101b) sind all jene Summen, bei denen die untere Grenze den Wert n_2 übersteigt, gleich eins zu setzen. Mit Hilfe der Gleichungen (81) und (100b) lassen sich nun alle Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ durch den Wert $p(0, n_2)$ ausdrücken:

$$p(x_1, x_2) = p(0, n_2) \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot b_{\xi} \cdot T_{\xi, x_1+x_2-\xi} \quad (102)$$

$$x_1 = 0, 1, \dots, n_1,$$

$$x_2 = 0, 1, \dots, n_2$$

Damit sind die Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ ausgedrückt allein als Funktion der bekannten Parameter $x_1, x_2, n_1, n_2, q, \alpha$ und der vorläufig noch unbekanntem Wahrscheinlichkeit $p(0, n_2)$.

II.2.10. Geschlossene Lösung für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$

Mit der Beziehung (102) sind die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ bis auf den Faktor $p(0, n_2)$ festgelegt. Nachdem hierzu die Gleichungen (25a) und (25b) bzw. (23a) und (23b) bereits ausgenutzt wurden, bleibt zur Bestimmung dieses Faktors $p(0, n_2)$ noch die Summenbedingung (23c), die besagt, dass die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ den Wert eins ergibt. Man kann also nach Gleichung (102) alle Werte $p(x_1, x_2)$ bis auf den Faktor $p(0, n_2)$ berechnen und diesen selbst aus Gleichung (23c).

Der Wert $p(0, n_2)$ lässt sich jedoch noch einfacher bestimmen, wenn man berücksichtigt, dass Primärbündel und Sekundärbündel zusammen wieder ein vollkommen erreichbares Bündel darstellen. In diesem Gesamtbündel kann nach Gleichung (19) die Wahrscheinlichkeit $p(n_1, n_2)$ direkt berechnet werden:

$$p(n_1, n_2) = \frac{\binom{q}{n_1+n_2} \cdot \alpha^{n_1+n_2}}{\sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \binom{q}{\eta} \cdot \alpha^{\eta}} \quad (103)$$

Andererseits ist nach Gleichung (57)

$$p(n_1, n_2) = p(0, n_2) \cdot T_{n_2, n_1} \quad (104)$$

oder

$$p(0, n_2) = \frac{p(n_1, n_2)}{T_{n_2, n_1}}$$

und mit Gleichung (103)

$$p(0, n_2) = \frac{\binom{q}{n_1+n_2} \cdot \alpha^{n_1+n_2}}{T_{n_2, n_1} \cdot \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \binom{q}{\eta} \cdot \alpha^{\eta}} \quad (105)$$

Damit ist das Gleichungssystem (25a, 25b, 23c) gelöst.

Für die Zustandswahrscheinlichkeit $p(x_1, x_2)$ ergibt sich also, kurz zusammengefasst, nach Gleichung (102) und Gleichung (105)

$$p(x_1, x_2) = \frac{\binom{q}{n_1+n_2} \cdot \alpha^{n_1+n_2}}{T_{n_2, n_1} \cdot \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \binom{q}{\eta} \cdot \alpha^{\eta}} \cdot \sum_{\xi=x_2}^{n_2} (-1)^{\xi-x_2} \cdot \binom{\xi}{x_2} \cdot b_{\xi} \cdot T_{\xi, x_1+x_2-\xi} \quad (106)$$

Dabei ist

$$T_{r,m} = \sum_{\eta=0}^m \left(q - \frac{\alpha \cdot r}{1+\alpha} \right)^{m-\eta} \cdot \alpha^{m-\eta} \cdot \left(\frac{r}{1+\alpha} - 1 + \eta \right) \quad (52a)$$

und

$$b_{\xi} = \sum_{z_1=\xi+1}^{n_2} \alpha_{\xi, z_1} \cdot \sum_{z_2=z_1+1}^{n_2} \alpha_{z_1, z_2} \cdot \sum_{z_3=z_2+1}^{n_2} \alpha_{z_2, z_3} \cdot \dots \cdot \sum_{z_w=z_{w-1}+1}^{n_2} \alpha_{z_{w-1}, z_w} \quad (107)$$

$$\text{mit } w = n_2 - \xi$$

(In Gleichung (107) sind alle jene Summen gleich eins zu setzen, bei welchen die untere Grenze grösser ist als der Wert n_2 .) Hierbei ist

$$\begin{aligned} \alpha_{x,z} = & \frac{(-1)^{z-x-1}}{\alpha \cdot (q - n_1 - x) \cdot T_{x, n_1}} \cdot \left(\alpha \cdot (q - n_1 - x) \cdot \left[\binom{z}{x} - \binom{z}{x+1} \right] \cdot T_{z, n_1+x-2} \right. \\ & + [n_1+x+1 + \alpha \cdot (q - n_1 - x - 1) \cdot \alpha] \cdot \binom{z}{x+1} \cdot T_{z, n_1+x+1-z} \\ & \left. + (x+2) \cdot \binom{z}{x+2} \cdot T_{z, n_1+x+2-z} \right) \end{aligned} \quad (98)$$

II.2.11. Verluste und Verkehrsreste

Aus den Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ lässt sich auf einfache Weise die Gleichzeitigkeitsverteilung im Primärbündel

$$p_1(x_1) = \sum_{x_2=0}^{n_2} p(x_1, x_2) \quad (108)$$

und die Gleichzeitigkeitsverteilung im Sekundärbündel

$$p_2(x_2) = \sum_{x_1=0}^{n_1} p(x_1, x_2) \quad (109)$$

berechnen.

Für den Verkehr Y_1 im Primärbündel ergibt sich

$$Y_1 = \sum_{x_1=0}^{n_1} x_1 \cdot p_1(x_1) \quad (110)$$

Aus den Gleichungen (20) und (21) ist das Angebot A sowie der Verkehrsrest R_2 bekannt. Damit erhält man den gesuchten Verkehrsrest

$$R_1 = A - Y_1 \quad (111)$$

und den Verkehr im Sekundärbündel

$$Y_2 = R_2 - R_1 \quad (112)$$

Die Verlustwahrscheinlichkeit B_1 im Primärbündel und die Verlustwahrscheinlichkeit B_2 im Sekundärbündel ergeben sich dann mit den Gleichungen (16) und (17)

$$B_1 = \frac{R_1}{A} \quad (16)$$

$$B_2 = \frac{R_2}{R_1} \quad (17)$$

während der Gesamtverlust B_{ges} schon aus den Beziehungen (18), (19), (20) und (21) bekannt ist:

$$B_{ges} = \frac{R_2}{A} \quad (18)$$

II.2.12. Der Verkehrsrest und dessen Varianz hinter einem Primärbündel beim Modell LCH

Bisher wurde in dieser Arbeit für den Anrufprozess das "Modell LCC" (lost calls cleared) zugrundegelegt. Bei diesem Modell nimmt man an, dass ein Ruf, der nicht durchgeschaltet werden kann, ohne Einfluss auf das System ist, das heisst, die rufende Quelle wird in diesem Fall sofort wieder frei.

Dagegen nimmt man bei Modell LCH (lost calls held) an, dass Rufe, die in dem betrachteten Primärbündel keine freie Leitung belegen können, in einem nachfolgenden Sekundärbündel mit Sicherheit durchgeschaltet werden. Für diese Modellvorstellung ist bisher keine exakte Lösung bekannt.

Im folgenden wird ein vollkommen erreichbares Primärbündel mit n_1 Leitungen betrachtet, dem ZV2 angeboten wird, wobei überlaufende Rufe dem Modell LCH entsprechend in einem Sekundärbündel eine Leitung belegen. Dies entspricht der in Bild 4 gezeigten Anordnung:

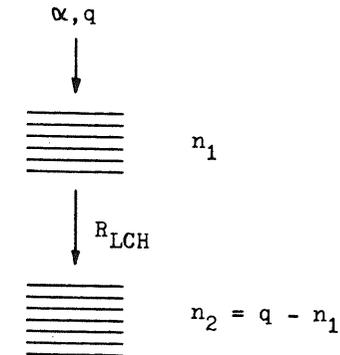


Bild 4: Verkehrsangebot nach dem Modell LCH

Dabei ist das Sekundärbündel so gross, dass kein Ruf verlor geht ($n_2 = q - n_1$ Leitungen).

Der Verkehrsrest R_{LCH} in der Gruppierung nach Bild 4 lässt sich nach dem in den Abschnitten II.2.1. bis II.2.11. hergeleiteten Verfahren berechnen. Er kann sich unter Umständen sehr stark von jenem Verkehrsrest R_1 unterscheiden, der im Fall $n_2 = 0$ (Modell LCC) entstehen würde.

Die Varianz des Verkehrsrests R_{LCH} ist demnach das zweite Moment der Gleichzeitigkeitsverteilung im nachfolgenden Sekundärbündel mit $n_2 = q - n_1$ Leitungen. Da sich diese Verteilung ebenfalls nach dem in den Abschnitten II.2.1. bis II.2.11. hergeleiteten Verfahren berechnen lässt, kann damit auch die gesuchte Varianz

$$V = \sum_{x_2=0}^{q-n_1} (x_2 - \frac{1}{2})^2 \cdot p_2(x_2) \quad (113)$$

berechnet werden.

II.2.13. Numerische Auswertung und Ergebnisse

Die Gleichung (106) stellt eine explizite Formel für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ dar. Sie ist numerisch leicht auszuwerten, wenn die Polynome $T_{r, m}$ ($0 \leq r \leq n_2, 0 \leq m \leq n_1$) und die Werte b_{ξ} ($0 \leq \xi \leq n_2$) bekannt sind.

Die Polynome $T_{r, m}$ könnte man nach der Definition (52a) berechnen. Günstiger ist es jedoch, wenn man die Gleichungen (34b) und (57) verwendet.

Nach Gleichung (57) gilt für die Werte $p(x_1, n_2)$ die Beziehung

$$p(x_1, n_2) = p(q, n_2) \cdot T_{n_2, x_1} \quad (57)$$

Andererseits erfüllen diese Werte $p(x_1, n_2)$ die Gleichung (34b):

$$(x_1+1) \cdot p(x_1+1, n_2) = [x_1+n_2+\alpha \cdot (q-n_2-x_1)] \cdot p(x_1, n_2) - \alpha \cdot [q-n_2-(x_1-1)] \cdot p(x_1-1, n_2) \quad (114)$$

Mit Gleichung (57) erhält man hieraus

$$(x_1+1) \cdot p(q, n_2) \cdot T_{n_2, x_1+1} = [x_1+n_2+\alpha \cdot (q-n_2-x_1)] \cdot p(q, n_2) \cdot T_{n_2, x_1} - \alpha \cdot [q-n_2-(x_1-1)] \cdot p(q, n_2) \cdot T_{n_2, x_1-1}$$

oder

$$(x_1+1) \cdot T_{n_2, x_1+1} = [x_1+n_2+\alpha \cdot (q-n_2-x_1)] \cdot T_{n_2, x_1} - \alpha \cdot [q-n_2-(x_1-1)] \cdot T_{n_2, x_1-1} \quad (115)$$

Dies gilt für beliebige Werte x_1, n_2, α, q . Also ist allgemein ($n_2 \rightarrow r, x_1 \rightarrow m$)

$$(m+1) \cdot T_{r, m+1} = [m+r+\alpha \cdot (q-m-r)] \cdot T_{r, m} - \alpha \cdot [q-r-(m-1)] \cdot T_{r, m-1} \quad (116)$$

Nach Gleichung (54) ist für $m = 0$

$$T_{r, 0} = 1$$

Ausserdem ist nach Gleichung (53)

$$T_{r, -1} = 0$$

Mit diesen Anfangswerten und der Rekursionsformel (116) lassen sich alle benötigten Werte $T_{r, m}$ auf sehr einfache Weise berechnen, zum Beispiel der Reihe nach

$$\begin{array}{l}
T_{1,1} , T_{1,2} , \dots , T_{1,n_1} , \\
T_{2,1} , T_{2,2} , \dots , T_{2,n_1} , \\
\dots \quad \dots \\
T_{n_2,1} , T_{n_2,2} , \dots , T_{n_2,n_1}
\end{array}$$

Für die Berechnung der Grössen b_{ξ} verwendet man zweckmässig anstelle der expliziten Darstellung (101b) die Gleichungen (99b) und (100a). Es lassen sich dann mit Hilfe der Beziehung (99b) alle Werte b_{ξ} der Reihe nach direkt berechnen, da die jeweils benötigten Werte alle schon vorher bestimmt wurden.

Für dieses Berechnungsverfahren wurde ein ALGOL-Programm erstellt.

Beispiel 1:

Als Beispiel wird ein Überlaufsystem nach Art von Bild 3 (Seite 16) untersucht. An ein vollkommen erreichbares Primärbündel mit $n_1 = 10$ Leitungen wird von $q = 30$ Quellen, die jeweils die Anrufrichte $\alpha = 0,6$ haben, ZV2 angeboten. Der Verkehrsrest R_1 , der von diesem Primärbündel nicht verarbeitet werden kann, läuft über auf ein vollkommen erreichbares Sekundärbündel mit $n_2 = 10$ Leitungen.

Mit diesen Werten ergibt sich nach Gleichung (20) der vom Sekundärbündel nicht verarbeitete Verkehrsrest

$$R_2 = 0,004960 \text{ Erlang.}$$

Ausserdem erhält man nach Gleichung (21) für das Angebot den Wert

$$A = 11,2519 \text{ Erlang.}$$

Nun werden die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ mit Hilfe der Gleichungen (106), (107), (52a) und (98) berechnet. Dann wird nach Gleichung (108) die Gleichzeitigkeitsverteilung $p_1(x_1)$ bestimmt. Hieraus ergibt sich nach Gleichung (110) der Verkehr im Primärbündel

$$Y_1 = 8,4056 \text{ Erlang.}$$

Damit erhält man mit Gleichung (111) den auf das Sekundärbündel überlaufenden Verkehrsrest

$$R_1 = 2,8463 \text{ Erlang}$$

und weiter den Verkehr im Sekundärbündel

$$Y_2 = 2,8413 \text{ Erlang.}$$

Nach den Gleichungen (16) und (17) ergibt sich der Verlust im Primärbündel

$$B_1 = 0,2530$$

und der Verlust im Sekundärbündel

$$B_2 = 0,001743.$$

Für den Gesamtverlust erhält man schliesslich nach Gleichung (18) den Wert

$$B_{\text{ges}} = 0,0004408.$$

Damit sind alle interessierenden Verkehrsgrössen berechnet.

Beispiel 2:

In einem zweiten Beispiel wird der Verkehrsrest R_{LCH} nach dem Modell LCH (siehe Abschnitt II.2.12.) berechnet, welcher hinter einem Primärbündel von $n_1 = 10$ Leitungen entsteht, wenn diesem von $q = 20$ Quellen der Anrufdichte $\alpha = 0,6$ ZV2 angeboten wird.

Nach dem Modell LCH belegen die hinter dem Primärbündel überlaufenden Rufe eine Leitung in einem (verlustlosen) Sekundärbündel mit $n_2 = q - n_1 = 10$ Leitungen (siehe Bild 4).

Entsprechend wie im Beispiel 1 erhält man das Angebot

$$A = 7,5000 \text{ Erlang,}$$

den Verkehr im Primärbündel

$$Y_1 = 7,0181 \text{ Erlang}$$

und den gesuchten Verkehrsrest (wegen $n_2 = q - n_1$) zu

$$R_{LCH} = Y_2 = 0,4819 \text{ Erlang.}$$

Ausserdem erhält man mit den Gleichungen (109) und (113) für die Varianz dieses Verkehrsrests R_{LCH} den Wert

$$V = 0,6740.$$

II.3. Überlaufsysteme mit zwei vollkommen erreichbaren Primärbündeln

In der Praxis kommt es oft vor, dass mehrere Primärbündel ein gemeinsames Sekundärbündel haben. Bild 5 zeigt ein

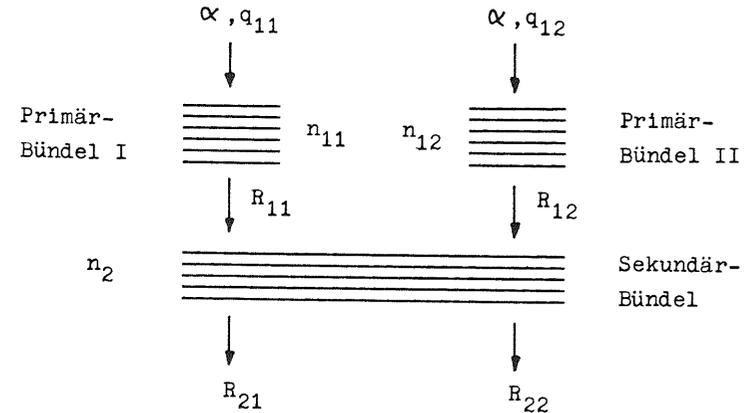


Bild 5: Überlaufsystem mit zwei Primärbündeln

solches Überlaufsystem mit zwei vollkommen erreichbaren Primärbündeln. Diesen Primärbündeln mit n_{11} bzw. n_{12} Leitungen wird von q_{11} bzw. q_{12} Quellen ZV2 angeboten. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Anrufdichte α_{11} der Quellengruppe q_{11} und die Anrufdichte α_{12} der Quellengruppe q_{12} denselben Wert $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha$ haben. (Der Fall $\alpha_{11} \neq \alpha_{12}$ würde nur eine kompliziertere Rechnung, aber keine grundsätzliche Erschwernis bedeuten.) Die Verkehrsreste R_{11} und R_{12} dieser Primärbündel laufen auf das gemeinsame Sekundärbündel über.

Die Zahl der momentan belegten Leitungen im Primärbündel I sei mit x_{11} bezeichnet ($0 \leq x_{11} \leq n_{11}$), die Zahl der Belegungen im Primärbündel II sei x_{12} . Ausserdem seien im Sekundärbündel gerade x_2 Leitungen belegt. Diese Zahl von x_2 Belegungen im Sekundärbündel setzt sich zusammen aus x_{21} Belegungen von der Quellengruppe q_{11} und x_{22} Belegungen von der Quellengruppe q_{12} ; es ist also

$$x_2 = x_{21} + x_{22} \quad (117)$$

Dieser Belegungszustand sei mit $\{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$ bezeichnet.

Wegen $x_2 \leq n_2$ ist nach Gleichung (117)

$$x_{21} + x_{22} \leq n_2 \quad (118)$$

Bei einer beliebigen Anzahl von Belegungen x_{21} kann also x_{22} nur die Werte

$$x_{22} = 0, 1, \dots, n_2 - x_{21}$$

annehmen, also $(n_2 - x_{21} + 1)$ verschiedene Werte. Die Gesamtzahl der möglichen Belegungszustände im Sekundärbündel ist deshalb

$$\sum_{x_{21}=0}^{n_2} (n_2 - x_{21} + 1) = \frac{(n_2 + 1) \cdot (n_2 + 2)}{2}$$

In jedem dieser $(n_2 + 1) \cdot (n_2 + 2)/2$ Belegungszustände des Sekundärbündels können ausserdem im Primärbündel I $0 \leq x_{11} = n_{11}$ Leitungen und im Primärbündel II $0 \leq x_{12} \leq n_{12}$

Leitungen belegt sein. Insgesamt sind also bei der Berechnung eines solchen Überlaufsystems $(n_{11} + 1) \cdot (n_{12} + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot (n_2 + 2)/2$ verschiedene Belegungszustände zu unterscheiden.

Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der Zustand $\{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$ auftritt, heisse $p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$. Nach dem Prinzip des statistischen Gleichgewichts erhält man für diese Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ ein System von $(n_{11} + 1) \cdot (n_{12} + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot (n_2 + 2)/2$ linearen Gleichungen folgender Form:

$$\begin{aligned} & [x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + \alpha \cdot \beta \cdot (q_{11} - x_{11} - x_{21}) + \alpha \cdot \gamma \cdot (q_{12} - x_{12} - x_{22})] \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \\ & = \delta \cdot (x_{11} + 1) \cdot p(x_{11} + 1, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \\ & \quad + \epsilon \cdot (x_{12} + 1) \cdot p(x_{11}, x_{12} + 1, x_{21}, x_{22}) \\ & \quad + \zeta \cdot (x_{21} + 1) \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_{21} + 1, x_{22}) \\ & \quad + \xi \cdot (x_{22} + 1) \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} + 1) \\ & \quad + \alpha \cdot \eta \cdot [q_{11} - (x_{11} - 1) - x_{21}] \cdot p(x_{11} - 1, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \\ & \quad + \alpha \cdot \theta \cdot [q_{12} - (x_{12} - 1) - x_{22}] \cdot p(x_{11}, x_{12} - 1, x_{21}, x_{22}) \\ & \quad + \alpha \cdot \kappa \cdot [q_{11} - x_{11} - (x_{21} - 1)] \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_{21} - 1, x_{22}) \\ & \quad + \alpha \cdot \lambda \cdot [q_{12} - x_{12} - (x_{22} - 1)] \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} - 1) \end{aligned} \quad (119)$$

$$x_{11} = 0, 1, \dots, n_{11} \quad ,$$

$$x_{12} = 0, 1, \dots, n_{12} \quad ,$$

$$x_{21} = 0, 1, \dots, n_2 \quad ,$$

$$x_{22} = 0, 1, \dots, n_2 - x_{21} \quad ,$$

wobei

$$\begin{aligned}
 \beta &= 1, \text{ wenn } x_{11} + x_{21} + x_{22} < n_{11} + n_2, \text{ sonst } \beta = 0 \\
 \gamma &= 1, \text{ " } x_{12} + x_{21} + x_{22} < n_{12} + n_2, \text{ " } \gamma = 0 \\
 \delta &= 1, \text{ " } x_{11} < n_{11}, \text{ " } \delta = 0 \\
 \varepsilon &= 1, \text{ " } x_{12} < n_{12}, \text{ " } \varepsilon = 0 \\
 \zeta &= 1, \text{ " } x_{21} + x_{22} < n_2, \text{ " } \zeta = 0 \\
 \eta &= 1, \text{ " } x_{11} > 0, \text{ " } \eta = 0 \\
 \vartheta &= 1, \text{ " } x_{12} > 0, \text{ " } \vartheta = 0 \\
 \chi &= 1, \text{ " } x_{11} = n_{11} \text{ und } x_{21} > 0, \text{ " } \chi = 0 \\
 \lambda &= 1, \text{ " } x_{12} = n_{12} \text{ und } x_{22} > 0, \text{ " } \lambda = 0
 \end{aligned}$$

(Falls $q_{11} < n_{11} + n_2$ bzw. $q_{12} < n_{12} + n_2$ ist, kommen diejenigen Zustände $\{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}\}$ mit

$$x_{11} + x_{21} > q_{11}$$

oder

$$x_{12} + x_{22} > q_{12}$$

nicht vor; die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ für diese nicht auftretenden Zustände sind dann gleich null.)

Für die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten gilt ausserdem

$$\sum_{x_{11}=0}^{n_{11}} \sum_{x_{12}=0}^{n_{12}} \sum_{x_{21}=0}^{n_2} \sum_{x_{22}=0}^{n_2-x_{21}} p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = 1 \quad (120)$$

Zur numerischen Berechnung derartiger Gleichungssysteme mit hohem Rang verwendet man zweckmässig iterative Methoden. Besonders geeignet ist das sogenannte Überrelaxationsverfahren /13, 25/. Bei diesem Verfahren braucht man nicht die ganze Matrix des Gleichungssystems zu speichern, sondern nur die Näherungswerte für die Unbekannten. Allerdings müssen dann die einzelnen Elemente der Matrix jedesmal neu berechnet werden, wenn sie im Lauf der Rechnung benötigt werden. Da die Zahl der Speicherplätze eines Digitalrechners begrenzt ist, kann man mit dem Überrelaxationsverfahren wesentlich umfangreichere Systeme lösen als mit Eliminationsverfahren.

Aus den Wahrscheinlichkeiten $p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ lässt sich leicht der Verkehr Y_{11} im Primärbündel I und der Verkehr Y_{12} im Primärbündel II berechnen:

$$Y_{11} = \sum_{x_{11}=0}^{n_{11}} \sum_{x_{12}=0}^{n_{12}} \sum_{x_{21}=0}^{n_2} \sum_{x_{22}=0}^{n_2-x_{21}} x_{11} \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \quad (121)$$

$$Y_{12} = \sum_{x_{11}=0}^{n_{11}} \sum_{x_{12}=0}^{n_{12}} \sum_{x_{21}=0}^{n_2} \sum_{x_{22}=0}^{n_2-x_{21}} x_{12} \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \quad (122)$$

Entsprechend erhält man für den von der Quellengruppe q_{11} herrührenden Verkehrsanteil Y_{21} im Sekundärbündel

$$Y_{21} = \sum_{x_{11}=0}^{n_{11}} \sum_{x_{12}=0}^{n_{12}} \sum_{x_{21}=0}^{n_2} \sum_{x_{22}=0}^{n_2-x_{21}} x_{21} \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \quad (123)$$

und für den von der Quellengruppe q_{12} herrührenden Verkehrsanteil Y_{22} im Sekundärbündel

$$Y_{22} = \sum_{x_{11}=0}^{n_{11}} \sum_{x_{12}=0}^{n_{12}} \sum_{x_{21}=0}^{n_2} \sum_{x_{22}=0}^{n_2-x_{21}} x_{22} \cdot p(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \quad (124)$$

Der gesamte Verkehr im Sekundärbündel ist

$$Y_2 = Y_{21} + Y_{22} \quad (125)$$

Für das Angebot A_{11} an das Primärbündel I ergibt sich

$$A_{11} = \alpha \cdot (q_{11} - Y_{11} - Y_{21}) \quad (126)$$

und entsprechend für das Angebot A_{12} an das Primärbündel II

$$A_{12} = \alpha \cdot (q_{12} - Y_{12} - Y_{22}) \quad (127)$$

Für die einzelnen Verkehrsreste (siehe Bild 5) erhält man

$$R_{11} = A_{11} - Y_{11} \quad (128)$$

$$R_{12} = A_{12} - Y_{12} \quad (129)$$

$$R_{21} = R_{11} - Y_{21} \quad (130)$$

$$R_{22} = R_{12} - Y_{22} \quad (131)$$

Hieraus lassen sich die Verlustwahrscheinlichkeiten

$$B_{11} = \frac{R_{11}}{A_{11}}$$

im Primärbündel I und

$$B_{12} = \frac{R_{12}}{A_{12}}$$

im Primärbündel II berechnen, ausserdem die Verlustwahrscheinlichkeit B_{21} des Sekundärbündels bezüglich des Überlaufverkehrs R_{11}

$$B_{21} = \frac{R_{21}}{R_{11}} \quad (132)$$

und die Verlustwahrscheinlichkeit B_{22} bezüglich des Überlaufverkehrs R_{12}

$$B_{22} = \frac{R_{22}}{R_{12}} \quad (133)$$

Für den pauschalen Verlust B_2 im Sekundärbündel ergibt sich

$$B_2 = \frac{R_{21} + R_{22}}{R_{11} + R_{12}} \quad (134)$$

Für dieses Berechnungsverfahren wurde ein ALGOL-Programm erstellt.

Beispiel 3:

Für ein Überlaufsystem nach Art von Bild 5 (Seite 60) mit zwei Primärbündeln von $n_{11} = n_{12} = 10$ Leitungen, einem Sekundärbündel von $n_2 = 4$ Leitungen und mit $q_{11} = q_{12} = 20$ Quellen der Anruhdichte $\alpha = 0,6$ erhält man

die Angebote

$$A_{11} = A_{12} = 7,5112 \text{ Erlang,}$$

die Verkehrswerte

$$Y_{11} = Y_{12} = 7,0240 \text{ Erlang,}$$

$$Y_{21} = Y_{22} = 0,4575 \text{ Erlang,}$$

$$Y_2 = 0,9151 \text{ Erlang,}$$

die Verkehrsreste

$$R_{11} = R_{12} = 0,4874 \text{ Erlang,}$$

$$R_{21} = R_{22} = 0,02986 \text{ Erlang und}$$

die Verluste

$$B_{11} = B_{12} = 6,489 \%,$$

$$B_{21} = B_{22} = B_2 = 6,126 \%.$$

III. Simulationsprogramme

III.1. Varianz von Überlaufverkehr

Für die Berechnung der Varianz von Überlaufverkehr hinter vollkommen erreichbaren Bündeln bei endlicher Quellenzahl wurde in Abschnitt II.2.12. eine exakte, geschlossene Lösung hergeleitet. Dieses Verfahren ist besonders geeignet für die Berechnung kleiner Systeme.

Für die Näherungsberechnung grösserer Systeme muss das in Kapitel I bzw. Kapitel IV beschriebene Zwei-Momenten-Verfahren verwendet werden. Dazu ist es nötig, auch für grosse Systeme eine Näherung für den Überlaufverkehr R und seine Varianz V zu finden. Zur Kontrolle dieser in Kapitel IV behandelten Näherungen wurde ein Simulationsprogramm für die Bestimmung der Varianz erstellt.

Die Varianz V eines Verkehrsrests R, der hinter einem (Primär-) Bündel von n_1 Leitungen überläuft (siehe Bild 6), ist definiert als das zweite Moment der Gleichzeitigkeitsverteilung in einem verlustlosen Sekundärbündel, dem dieser Überlaufverkehr angeboten wird. Das Sekundärbündel muss also $n_2 = q - n_1$ Leitungen haben.

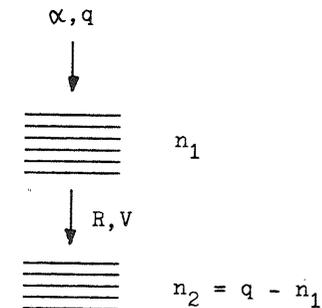


Bild 6: Gruppierung für die Bestimmung der Varianz

In dem Simulationsprogramm wird zunächst die Gleichzeitigkeitsverteilung im Sekundärbündel, das heisst die Wahrscheinlichkeiten $p_2(x_2)$, bestimmt. Hieraus wird dann der Verkehrsrest

$$R = \sum_{x_2=0}^{n_2} x_2 \cdot p_2(x_2)$$

sowie die gesuchte Varianz

$$V = \sum_{x_2=0}^{n_2} (x_2 - R)^2 \cdot p_2(x_2)$$

berechnet.

Anmerkung:

Mit diesem Simulationsprogramm Nr. 1 lässt sich auch die Varianz von Überlaufverkehr hinter u n v o l l k o m m e n erreichbaren Primärbündeln bestimmen (siehe Abschnitt V.2.).

III.2. Überlaufsysteme mit mehreren Primärbündeln und einem Sekundärbündel

In Abschnitt II.3. wurde ein exaktes Berechnungsverfahren für Überlaufsysteme mit zwei Primärbündeln und einem gemeinsamen Sekundärbündel hergeleitet (siehe Bild 5, Seite 60). Die numerische Auswertung dieser exakten Methode ist jedoch nur bei kleinen Systemen möglich.

Für Überlaufsysteme mit grösseren Bündeln wurde deshalb ein weiteres Simulationsprogramm Nr. 2 erstellt.

Mit diesem Programm lassen sich nicht nur Überlaufsysteme mit zwei Primärbündeln und einem Sekundärbündel untersuchen, sondern auch solche mit mehreren Primärbündeln.

Anmerkung:

Dieses Simulationsprogramm Nr. 2 lässt sich auch für Überlaufsysteme mit mehreren u n v o l l k o m m e n erreichbaren Primärbündeln und einem u n v o l l k o m m e n erreichbaren Sekundärbündel verwenden (siehe Abschnitt V.2.).

IV. Näherungsverfahren

IV.1. Berechnung von Überlaufsystemen mit Berücksichtigung des ersten und zweiten Moments des angebotenen Überlaufverkehrs und Vergleich mit exakten Werten

Im folgenden wird ein Zwei-Momenten-Verfahren zur Berechnung der Verluste $B_{11}, B_{12}, \dots, B_{1i}$ und B_2 sowie der Belastungen $Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1i}$ und Y_2 von Überlaufsystemen mit mehreren Primärbündeln hergeleitet. Dabei werden die Überlaufverkehre durch ihre ersten Momente (Mittelwerte) und durch ihre zweiten Momente (Varianzen) charakterisiert; höhere Momente werden nicht betrachtet.

Bei diesem Verfahren werden die verschiedenen, in Wirklichkeit vorhandenen Primärbündel durch ein fiktives Ersatz-Primärbündel ersetzt, welches einen Überlaufverkehr gleichen Mittelwerts und gleicher Varianz liefert wie die tatsächlich vorhandenen Primärbündel zusammen. Damit wird das Problem auf ein Überlaufsystem mit nur einem Primärbündel zurückgeführt, das sich nach dem in Abschnitt II.2. hergeleiteten Verfahren exakt berechnen lässt.

Die verschiedenen Rechenschritte des Verfahrens werden nun im einzelnen beschrieben, und zwar der Übersichtlichkeit halber anhand eines Überlaufsystems mit nur zwei Primärbündeln (siehe Bild 7).

Das Verfahren ist jedoch allgemein bei Systemen mit beliebig vielen Primärbündeln anwendbar.

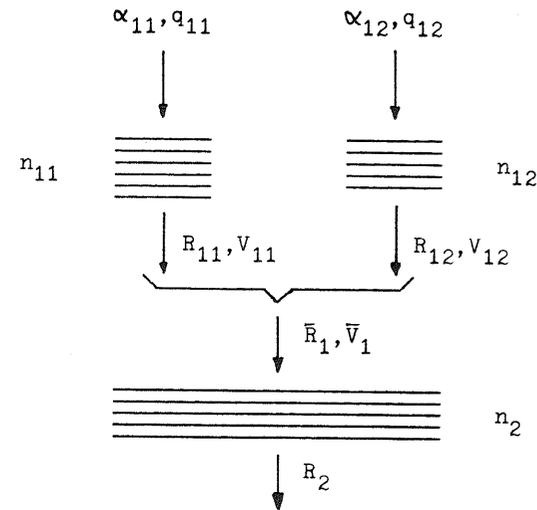


Bild 7: Überlaufsystem mit zwei Primärbündeln

Schritt 1: Mittelwert und Varianz der überlaufenden Verkehrsreste

Zuerst sind die überlaufenden Verkehrsreste bei ZV2 sowie deren Varianzen zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass der Mittelwert A_{1i} des an Primärbündel Nr. i angebotenen Verkehrs und damit auch der Verkehrsrest R_{1i} von dem (zunächst unbekanntem) Verlust B_2 des Sekundärbündels abhängt. Deswegen ist diese Berechnung von Überlaufsystemen von e n d l i c h e r Quellenzahl erheblich aufwendiger als im Fall unendlicher Quellenzahl (ZV1), wo sich die überlaufenden Verkehrsreste sehr leicht berechnen lassen (siehe auch Kapitel I.).

Die Varianz eines Verkehrsrests ist nur definiert, wenn dieser Verkehrsrest auf ein verlustloses Sekundärbündel überläuft.

Es ist also zunächst jener Verkehrsrest \tilde{R}_{11} zu bestimmen, der auf ein eigenes, verlustloses Sekundärbündel mit $\tilde{n}_{21} = q_{11} - n_{11}$ Leitungen überlaufen würde (siehe Bild 8)

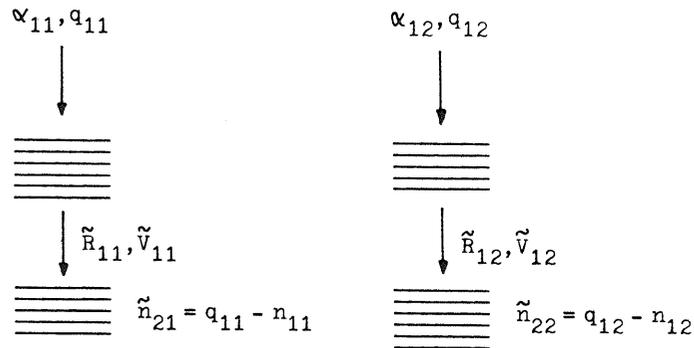


Bild 8: Mittelwert und Varianz der überlaufenden Verkehrsreste

sowie die zu diesem Überlaufrest gehörende Varianz \tilde{V}_{11} (alle mit dem Zeichen \sim versehenen Größen beziehen sich auf den Fall des verlustlosen Sekundärbündels). Dies ist leicht möglich mit dem in Abschnitt II.2., insbesondere in Abschnitt II.2.12. beschriebenen exakten Verfahren.

Entsprechend berechnet man den Mittelwert \tilde{R}_{12} und die Varianz \tilde{V}_{12} jenes Verkehrsrests, der vom Primärbündel II auf ein eigenes, verlustloses Sekundärbündel mit $\tilde{n}_{22} = q_{12} - n_{12}$ überlaufen würde (siehe Bild 8).

Schritt 2: Berechnung des Gesamt-Überlaufverkehrs

In einem zweiten Schritt wird der Fall betrachtet, dass die beiden Überlaufverkehre \tilde{R}_{11} und \tilde{R}_{12} auf ein gemeinsames, verlustloses Sekundärbündel mit $\tilde{n}_2 = \tilde{n}_{21} + \tilde{n}_{22}$ Leitungen, das heisst mit $\tilde{n}_2 = q_{11} + q_{12} - n_{11} - n_{12}$ Leitungen überlaufen (siehe Bild 9).

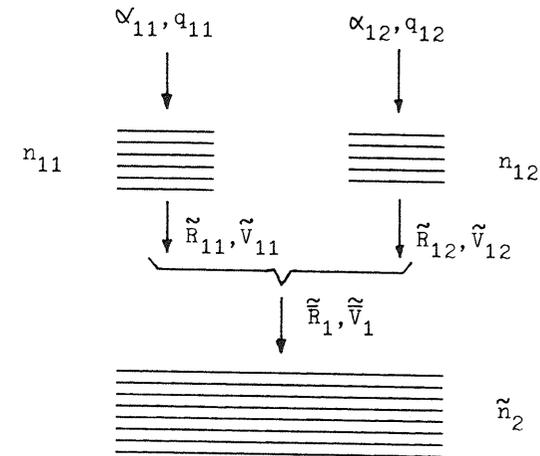


Bild 9: Der Summen-Überlaufverkehr

Da in diesem gemeinsamen Sekundärbündel keine Verluste auftreten, beeinflussen sich die Gleichzeitigkeitsverteilungen der Verkehrsreste \tilde{R}_{11} und \tilde{R}_{12} im Sekundärbündel nicht: sie sind voneinander unabhängig (wie bei der Anordnung nach Bild 8 mit getrennten Sekundärbündeln). Mittelwert und Varianz dieser Verteilungen (die in Schritt 1 berechnet

wurden) dürfen deshalb je für sich addiert werden. Somit ergibt sich für den Summen-Überlaufverkehr \tilde{R}_1 , der auf das gemeinsame, verlustlose Sekundärbündel überläuft

$$\tilde{R}_1 = \tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{12}$$

und für die Varianz \tilde{V}_1 dieses Summen-Überlaufverkehrs

$$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_{11} + \tilde{V}_{12}$$

Schritt 3: Das Ersatz-Primärbündel

Nachdem nun der Summen-Überlaufverkehr (\tilde{R}_1, \tilde{V}_1) nach Schritt 2 bekannt ist, sucht man ein Ersatz-Primärbündel (mit n^* Leitungen und q^* Quellen mit der Anruhdichte α^*), von dem ebenfalls der Verkehrsrest (\tilde{R}_1, \tilde{V}_1) auf ein verlustloses Sekundärbündel mit $\tilde{n}_2 = q_{11} + q_{12} - n_{11} - n_{12}$ Leitungen überläuft (siehe Bild 10).

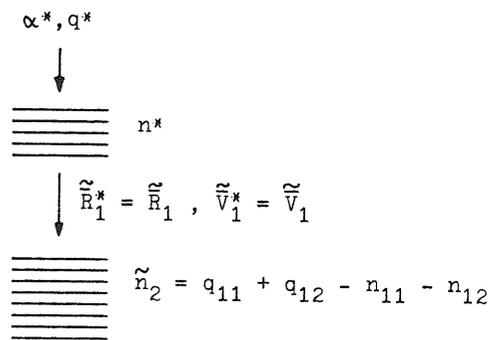


Bild 10: Das Ersatz-Primärbündel

Das Wertetripel (n^*, q^*, α^*) bestimmt man auf folgende Weise:

Da das Sekundärbündel mit \tilde{n}_2 Leitungen verlustlos sein soll, gilt

$$q^* = n^* + \tilde{n}_2 = q_{11} + q_{12} + n^* - n_{11} - n_{12} \quad (135)$$

Ist die Leitungszahl n^* des Ersatzbündels gegeben, so lässt sich die Ersatz-Quellenzahl q^* nach Gleichung (135) berechnen.

Man geht nun von einem Schätzwert für die Leitungszahl n^* und einem Schätzwert für die Anruhdichte α^* aus. Damit lässt sich nach dem in Abschnitt II.2. beschriebenen Verfahren der zugehörige Überlaufverkehr \tilde{R}_1^* berechnen. Man variiert nun die Anruhdichte α^* so, dass dieser Überlaufverkehr \tilde{R}_1^* gerade den vorgeschriebenen Wert \tilde{R}_1 annimmt. Die Varianz \tilde{V}_1^* , die sich zu diesem Wert $\tilde{R}_1^* = \tilde{R}_1$ ergibt, wird jedoch im allgemeinen nicht mit \tilde{V}_1 übereinstimmen.

Deshalb wird in einer weiteren Iterationsschleife die Leitungszahl n^* so variiert, dass die Varianz \tilde{V}_1^* den Wert \tilde{V}_1 annimmt (eventuell ist dabei zwischen zwei ganzzahligen Werten von n^* zu interpolieren).

Damit ist nun das Wertetripel (n^*, q^*, α^*) so bestimmt, dass von diesem Ersatz-Primärbündel der gleiche Verkehrsrest ($\tilde{R}_1^* = \tilde{R}_1, \tilde{V}_1^* = \tilde{V}_1$) auf ein verlustloses Sekundärbündel mit n_2 Leitungen überläuft wie von den beiden tatsächlich vorhandenen Primärbündeln zusammen (siehe Bild 10).

Schritt 4: Der Verlust im (tatsächlich vorhandenen) Sekundärbündel

Sowohl bei der Gruppierung mit zwei Primärbündeln nach Bild 9 als auch bei der Gruppierung mit nur einem Ersatz-Primärbündel nach Bild 10 läuft ein Überlaufverkehr auf ein verlustloses Sekundärbündel von \tilde{n}_2 Leitungen über. Die Mittelwerte \tilde{R}_1 bzw. \tilde{R}_1^* und die Varianzen \tilde{V}_1 bzw. \tilde{V}_1^* der Gleichzeitigkeitsverteilung im Sekundärbündel sind in beiden Fällen jeweils gleich. Denkt man sich die (fiktive) Leitungszahl \tilde{n}_2 auf die tatsächliche Leitungszahl n_2 des Sekundärbündels verkleinert (siehe Bild 7 bzw. Bild 11), so ist

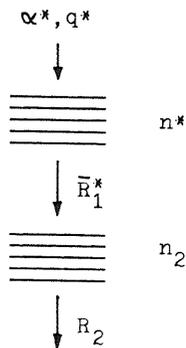


Bild 11: Bestimmung des Verlusts im Sekundärbündel

dieses nicht mehr verlustlos: In der Ersatzanordnung nach Bild 11 entsteht ein Verkehrsrest R_2^* . Dieser Rest R_2^* kann als Näherungswert für den tatsächlich entstehenden Verkehrsrest R_2 (siehe Bild 7) verwendet werden.

Der Verkehrsrest \tilde{R}_1^* ist ein Näherungswert für den bei der tatsächlichen Anordnung (siehe Bild 7) überlaufenden Verkehrsrest \tilde{R}_1 , der dem Sekundärbündel angeboten wird. Damit erhält man für den Verlust B_2 im Sekundärbündel den Wert

$$B_2 \approx B_2^* = \frac{R_2^*}{R_1^*}$$

Schritt 5: Bestimmung der Angebote und Verkehrswerte

In einem fünften Schritt sind nun noch die Angebote an die Primärbündel sowie die Verkehre in den Primärbündeln zu bestimmen, die ja bei ZV2 vom Verlust im Sekundärbündel abhängen. Um jedoch zum Beispiel das Angebot A_{11} des Primärbündels I zu berechnen, benötigt man nicht nur den pauschalen Verlustwert B_2 bzw. B_2^* des Sekundärbündels, sondern auch den Verlust B_{21} , den der Verkehrsrest R_{11} im Sekundärbündel erfährt. Über diesen Teilverlust B_{21} sagt das Zwei-Momenten-Verfahren nichts aus. (Dies gilt auch für das bekannte Streuwertverfahren (ERT-Verfahren) bei ZV1.)

Die Angebote an die Primärbündel lassen sich jedoch bestimmen, wenn man annimmt, dass

$$B_{21} = B_{22} = B_2$$

ist, und dass ausserdem die Aufteilung des tatsächlichen Verkehrsrestes \tilde{R}_1 in die Einzelreste R_{11} und R_{12} gleich ist wie im Fall des verlustlosen Sekundärbündels, das heisst

$$\frac{R_{11}}{\bar{R}_1} = \frac{\tilde{R}_{11}}{\tilde{R}_1} \quad , \quad (135a)$$

$$\frac{R_{12}}{\bar{R}_1} = \frac{\tilde{R}_{12}}{\tilde{R}_1} \quad (135b)$$

oder

$$R_{11} = \frac{\tilde{R}_{11}}{\tilde{R}_1} \cdot \bar{R}_1 \quad , \quad (136a)$$

$$R_{12} = \frac{\tilde{R}_{12}}{\tilde{R}_1} \cdot \bar{R}_1 \quad (136b)$$

Man erhält dann für die vom Sekundärbündel nicht verarbeiteten Verkehrsreste

$$R_{21} = B_2 \cdot R_{11} = R_2 \cdot \frac{\tilde{R}_{11}}{\tilde{R}_1} \quad (137a)$$

$$R_{22} = B_2 \cdot R_{12} = R_2 \cdot \frac{\tilde{R}_{12}}{\tilde{R}_1} \quad (137b)$$

Für das Angebot A_{11} gilt

$$A_{11} = \alpha_{11} \cdot (q_{11} - Y_{11} - Y_{12}) \quad , \quad (138)$$

und ausserdem ist

$$R_{21} = A_{11} - Y_{11} - Y_{21} \quad (139)$$

Setzt man Gleichung (139) in Gleichung (138) ein, so erhält man

$$A_{11} = \alpha_{11} \cdot (q_{11} - A_{11} + R_{21})$$

und hieraus analog zu Gleichung (14)

$$A_{11} = \frac{\alpha_{11}}{1 + \alpha_{11}} \cdot (q_{11} + R_{21})$$

Für das Angebot A_{12} ergibt sich entsprechend

$$A_{12} = \frac{\alpha_{12}}{1 + \alpha_{12}} \cdot (q_{12} + R_{22})$$

Damit lässt sich nun auch der Verkehr in den Primärbündeln berechnen:

$$Y_{11} = A_{11} - R_{11}$$

$$Y_{12} = A_{12} - R_{12}$$

Der Verkehr im Sekundärbündel ist

$$Y_2 = \bar{R}_1 - R_2$$

Damit sind die Angebote A_{11} und A_{12} , die Verkehrswerte Y_{11} , Y_{12} und Y_2 sowie der Verlust B_2 im Sekundärbündel bestimmt. Die gute Übereinstimmung zwischen diesen Näherungswerten und den Ergebnissen der exakten Berechnung zeigt das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 4:

Um die Ergebnisse nach obigem Zwei-Momenten-Verfahren mit exakten Werten vergleichen zu können, wird nun das in Beispiel 3 (Seite 67) exakt berechnete Überlaufsystem (mit $n_{11} = n_{12} = 10$, $n_2 = 4$, $q_{11} = q_{12} = 20$ und $\alpha = 0,6$) mit Hilfe des Zwei-Momenten-Verfahrens berechnet.

Für dieses System erhält man nach dem Zwei-Momenten-Verfahren die Verkehrsreste

$$\bar{R}_1 \approx \bar{R}_1^* = 0,970$$

und

$$R_2 \approx R_2^* = 0,0537$$

Damit ergibt sich für den Verlust B_2 im Sekundärbündel der Wert

$$B_2 \approx B_2^* = 5,54 \%$$

Die Rechnung in Beispiel 3 ergab den exakten Verlustwert

$$B_2 = 6,13 \%$$

Die Näherung B_2^* stimmt also gut mit dem tatsächlichen Verlust B_2 überein. Die relative Abweichung beträgt 9,7 %. Sie kommt daher, dass beim Zwei-Momenten-Verfahren nur die ersten beiden Momente (Mittelwert und Varianz) des Überlaufverkehrs berücksichtigt werden, die höheren Momente (drittes, viertes Moment usw.) jedoch vernachlässigt werden. Diese Abweichung ist etwa von gleicher Grösse wie beim Streuwertverfahren (ERT-Methode) für unendliche Quellenzahl.

Aus diesem Beispiel und weiteren Kontrollrechnungen ist ersichtlich, dass die Genauigkeit des hergeleiteten Zwei-Momenten-Verfahrens für endliche Quellenzahl etwa gleich gut ist wie die des bekannten und in der Praxis oft angewandten

Streuwertverfahrens für unendliche Quellenzahl. Mit dem beschriebenen Zwei-Momenten-Verfahren lassen sich also Überlaufsysteme mit endlicher Quellenzahl und vollkommen erreichbaren Bündeln mit einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit berechnen.

Für die übrigen Verkehrsgrössen erhält man mit den in Schritt 5 angegebenen Formeln folgende Ergebnisse (vergleiche Seite 78 ff):

B_{21}	$=$	B_{22}	$=$	B_2	$=$	5,54 %
R_{11}	$=$	R_{12}	$=$	0,485	Erlang	
R_{21}	$=$	R_{22}	$=$	0,0268	Erlang	
A_{11}	$=$	A_{12}	$=$	7,51	Erlang	
Y_{11}	$=$	Y_{12}	$=$	7,02	Erlang	
Y_2	$=$		$=$	0,916	Erlang	

Diese Näherungswerte werden in Beispiel 5 (Seite 89) mit exakten Werten verglichen.

IV.2. Näherungsweise Berechnung des Verkehrsrests R_1
bei vorhandenem Sekundärbündel ($n_2 \leq q_1 - n_1$)

Bei dem in Abschnitt IV.1. beschriebenen Zwei-Momenten-Verfahren für endliche Quellenzahl muss mehrmals - als Teilaufgabe - der von einem Primärbündel auf ein Sekundärbündel überlaufende Verkehrsrest R_1 (siehe Bild 12a) berechnet werden.

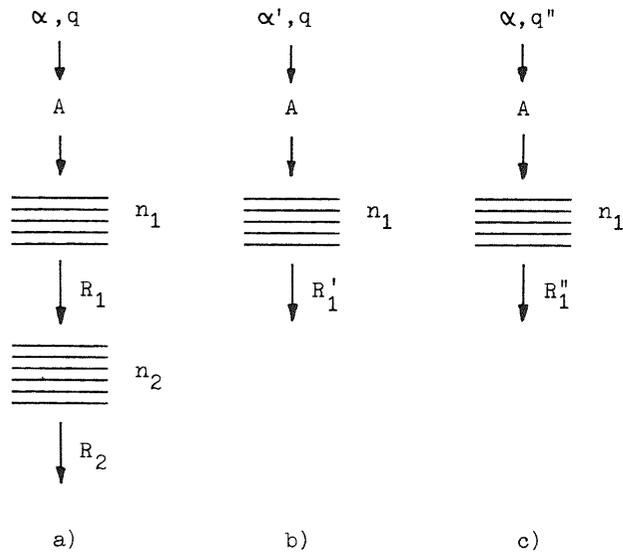


Bild 12: Näherungen für den Verkehrsrest R_1 :

- a) Der tatsächliche Verkehrsrest R_1
- b) Näherungsverfahren mit reduzierter Anrufdichte α'
- c) Näherungsverfahren mit reduzierter Quellenzahl q''

Dies ist möglich mit dem in Abschnitt II.2. hergeleiteten exakten Verfahren. Für die praktische Anwendung des Zwei-Momenten-Verfahrens ist diese exakte Berechnung von R_1 jedoch im allgemeinen zu aufwendig. Deshalb wird im folgenden ein Näherungsverfahren zur Bestimmung dieses Überlaufverkehrs R_1 hergeleitet. (Eine entsprechende Näherung für die Varianz enthält Abschnitt IV.3.)

Bei dem in Bild 12a dargestellten Überlaufsystem bieten q Quellen, je mit der Anrufdichte α , ihre Rufe einem Primärbündel von n_1 Leitungen an. Der Mittelwert A dieses angebotenen Verkehrs ist nach Gleichung (21)

$$A = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot (q + R_2) \quad (21a)$$

(Der Verkehrsrest R_2 lässt sich leicht nach Gleichung (20) bestimmen.) Für die näherungsweise Berechnung von R_1 wird nun ein einzelnes Bündel betrachtet, welches ebenfalls n_1 Leitungen und q Quellen hat. Die Anrufdichte α' dieser Quellen sei jedoch gerade so gross, dass das Angebot denselben Wert A hat wie bei dem Überlaufsystem nach Bild 12a:

$$A = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot (q + R_2) = \frac{\alpha'}{1+\alpha'} \cdot (q + R_1') \quad (21b)$$

Die Anrufprozesse bei den beiden betrachteten Bündeln in Bild 12a und Bild 12b sind zwar nicht gleich, aber sehr ähnlich: in beiden Fällen wird einem Bündel mit n_1 Leitungen von q Quellen ein Verkehr mit dem Mittelwert A angeboten. Eine Untersuchung zeigt, dass auch die Verkehrsreste gut miteinander übereinstimmen (siehe Bild 13). Der Verkehrsrest R_1' (nach Bild 12b) ist also ein guter Näherungswert für den gesuchten Verkehrsrest R_1 .

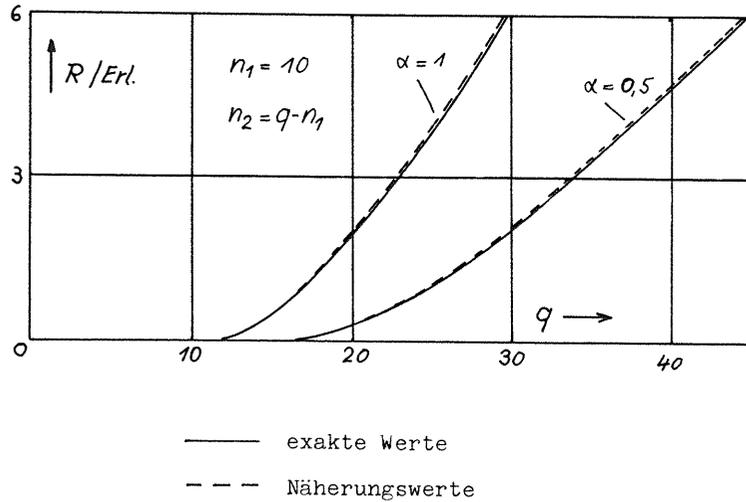


Bild 13: Näherungswerte für R_1

Bei einem weiteren Näherungsverfahren geht man auch von einem einzelnen Bündel mit n_1 Leitungen aus (siehe Bild 12c), welchem ebenfalls ein Verkehr mit dem Mittelwert A angeboten wird. Dieses Angebot A wird durch q'' Quellen mit der Anruhdichte α erzeugt. Dieses Verfahren arbeitet also mit einer reduzierten Quellenzahl q'' , während das Verfahren nach Bild 12b auf einer reduzierten Anruhdichte α' beruht.

Bei diesem Verfahren nach Bild 12c erhält man einen Verkehrsrest R_1' , der ebenfalls einen sehr guten Näherungswert für R_1 (siehe Bild 12a) darstellt. In vielen Fällen ist dieses Verfahren sogar noch genauer als das Verfahren nach

Bild 12b. Da jedoch bei dem Verfahren nach Bild 12c im allgemeinen zwischen ganzzahligen Werten q'' interpoliert werden muss, wird hier im folgenden das Verfahren mit reduzierter Anruhdichte nach Bild 12b angewandt. Für dieses Verfahren wurde ein ALGOL-Programm erstellt.

IV.3. Näherungsweise Berechnung der Varianz

In Abschnitt II.2. wurde ein exaktes Verfahren für die Berechnung der Varianz hergeleitet. Da dieses Verfahren für die praktische Anwendung des Zwei-Momenten-Verfahrens oft zu aufwendig ist, wird in diesem Abschnitt eine Näherungsformel für die Varianz aufgestellt.

Die Bestimmung der Varianz setzt nach Abschnitt II.2.12. ein verlustloses Sekundärbündel voraus (siehe Bild 4). Das Angebot A lässt sich deshalb nach Gleichung (140) berechnen:

$$A = \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot q \quad (140)$$

Nun bestimmt man nach Gleichung (1a) den Streuwert D_∞ hinter einem Bündel mit n_1 Leitungen, dem ZV1 mit dem gleichen Mittelwert A angeboten wird. Einen (empirischen) Näherungswert $V_1^{(1)}$ für die Varianz bei ZV2 erhält man dann nach der Beziehung

$$V_1^{(1)} = (D_\infty + R_1) \cdot \frac{q-A}{q} \quad (141)$$

Umfangreiche Kontrollrechnungen haben gezeigt, dass Gleichung (141) einen guten Näherungswert liefert, wenn $n_1 \leq \tilde{n}_2$ ist, das heisst, wenn die Leitungszahl n_1 höchstens die Hälfte der Quellenzahl q beträgt. Andererseits stellte sich

heraus, dass im restlichen Bereich $n_1 > \tilde{n}_2$ die folgende, von Prof. Lotze vorgeschlagene Formel gute Näherungswerte liefert:

$$V_1^{(2)} = R_1 - \frac{R_1^2}{q - n_1} \quad (142)$$

(Diese Formel entspricht der Varianz eines ohne Primärbündel direkt an das Sekundärbündel angebotenen ZV2 mit dem Mittelwert R_1 und $q - n_1$ Verkehrsquellen.)

Durch Interpolation zwischen den Formeln (141) und (142) erhält man für den Gesamtbereich $0 \leq n_1 \leq q$ folgende Näherungsformel für die Varianz V_1

$$V_1 = \frac{q - n_1}{q} \cdot V_1^{(1)} + \frac{n_1}{q} \cdot V_1^{(2)} \quad (143)$$

Diese Beziehung geht für $n_1 = 0$ in Gleichung (141) über, für $n_1 = q$ dagegen in Gleichung (142). Mit den Gleichungen (141) und (142) ergibt sich aus Gleichung (143)

$$V_1 = \frac{q - n_1}{q} \cdot (D_\infty + R_1) \cdot \frac{q - A}{q} + \frac{n_1}{q} \cdot \left(R_1 - \frac{R_1^2}{q - n_1} \right)$$

Mit Gleichung (140) erhält man weiter

$$V_1 = \frac{q - n_1}{q} \cdot (D_\infty + R_1) \cdot \frac{1}{1 + \alpha} + \frac{n_1}{q} \cdot \left(R_1 - \frac{R_1^2}{q - n_1} \right) \quad (144)$$

oder

$$V_1 = \frac{R_1}{q} \cdot \left[(q - n_1) \cdot \left(\frac{D_\infty}{R_1} + 1 \right) \cdot \frac{1}{1 + \alpha} + n_1 \cdot \left(1 - \frac{R_1}{q - n_1} \right) \right] \quad (145)$$

Zur Berechnung der Varianz nach Gleichung (145) wurde eine ALGOL-Prozedur aufgestellt.

Anstelle des Werts $D_\infty = f(n_1, A)$ in Gleichung (141) könnte auch $D_\infty^* = f(n_1, R_1)$ verwendet werden, das heisst jener Streuwert, der sich bei ZV1 ergibt, wenn nicht A und n_1 gleich sind wie bei ZV2, sondern R_1 und n_1 . Diese Näherung ist insofern plausibler, als der Streuwert D_∞^* in diesem Fall für den tatsächlich auch bei ZV2 auftretenden Verkehrsrest R_1 gilt. Bisherige Kontrollrechnungen zeigen, dass in diesem Fall V_1 nach Gleichung (145) praktisch gleiche Zahlenwerte liefert.

Eine Nachprüfung für *v i e l e* Überlaufanordnungen steht bisher wegen Mangel an Rechenzeit noch aus. Da bereits mit $D_\infty = f(n_1, A)$ sehr gute Näherungswerte für V_1 erhalten werden, ist eine signifikante Verbesserung jedoch nicht zu erwarten.

IV.4. Vereinfachtes Zwei-Momenten-Verfahren

Mit Hilfe der in Abschnitt IV.2. und Abschnitt IV.3. beschriebenen Näherungsverfahren lässt sich nun ein vereinfachtes Zwei-Momenten-Verfahren durchführen. Der Rechnungsgang bei diesem vereinfachten Zwei-Momenten-Verfahren verläuft gleich wie bei dem in Abschnitt IV.1. beschriebenen (nicht vereinfachten) Zwei-Momenten-Verfahren; jedoch werden Überlaufreste jeweils nach dem in Abschnitt IV.2., Bild 12b bezeichneten Näherungsverfahren berechnet, und zur Bestimmung der Varianz wird jeweils die Näherungsformel (145) benutzt.

Für die Anwendung dieses vereinfachten Zwei-Momenten-Verfahrens wurde ein ALGOL-Programm erstellt.

Beispiel 5:

Das in Beispiel 3 und Beispiel 4 behandelte Überlaufsystem (mit $n_{11} = n_{12} = 10$, $n_2 = 4$, $q_{11} = q_{12} = 20$ und $\alpha = 0,6$) wird nun mit Hilfe des obigen "vereinfachten Zwei-Momenten-Verfahrens" berechnet. Um die Ergebnisse dieses "vereinfachten Zwei-Momenten-Verfahrens" leichter mit den exakten Werten (nach Abschnitt II.3.) und mit den Ergebnissen nach dem nicht vereinfachten Zwei-Momenten-Verfahren vergleichen zu können, sind die Ergebnisse nach diesen drei Verfahren in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	Exaktes Verfahren (Abschn.II.3.)	Zwei-Momenten- Verfahren (Abschn.IV.1.)	Vereinfachtes Zwei-Momenten- Verfahren (Abschn.IV.4.)
$B_2 = B_{21} = B_{22}$	6,13 %	5,54 %	4,80 %
R_2	0,0597 Erl.	0,0537 Erl.	0,0499 Erl.
$R_{21} = R_{22}$	0,0299 Erl.	0,0268 Erl.	0,0250 Erl.
$R_{11} = R_{12}$	0,487 Erl.	0,485 Erl.	0,519 Erl.
$A_{11} = A_{12}$	7,51 Erl.	7,51 Erl.	7,51 Erl.
$Y_{11} = Y_{12}$	7,02 Erl.	7,02 Erl.	7,00 Erl.
Y_2	0,915 Erl.	0,916 Erl.	0,987 Erl.

Die Ergebnisse nach dem vereinfachten Zwei-Momenten-Verfahren weichen zum Teil mehr von den exakten Werten ab als beim nicht vereinfachten Zwei-Momenten-Verfahren. Dies rührt daher, dass beim vereinfachten Zwei-Momenten-Verfahren für die Berechnung des hinter einem Primärbündel überlaufenden Verkehrsrests und dessen Varianz anstelle der exakten Formeln nach Abschnitt II.3. die Näherungsformeln nach Abschnitt IV.2. und IV.3. verwendet werden.

Beispiel 6:

Während in den Beispielen 1 bis 5 verhältnismässig kleine Überlaufsysteme betrachtet wurden, wird nun in diesem Beispiel ein grösseres Überlaufsystem mit 4 Primärbündeln (siehe Bild 14) untersucht.

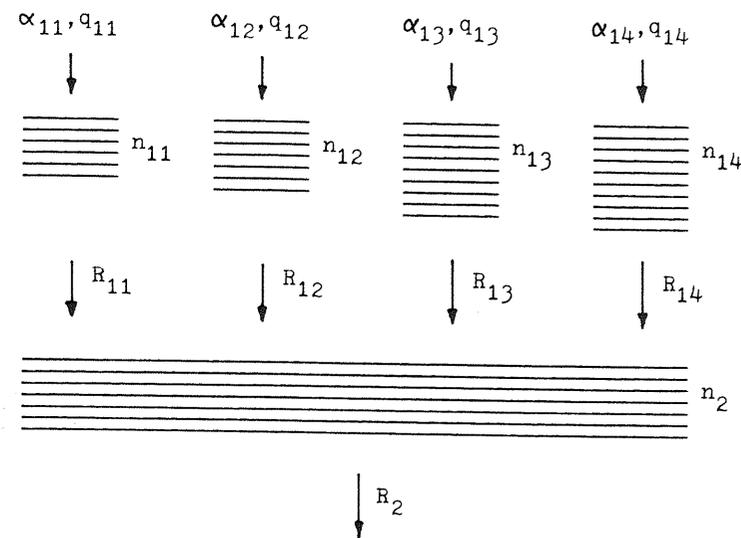


Bild 14: Überlaufsystem mit 4 Primärbündeln

Die Leitungszahlen der Primärbündel sind

$$\begin{aligned}
n_{11} &= 10 \\
n_{12} &= 12 \\
n_{13} &= 16 \\
n_{14} &= 20
\end{aligned}$$

Das Sekundärbündel hat

$$n_2 = 25$$

Leitungen.

Die Quellenzahlen sind

$$\begin{aligned}
q_{11} &= 30 \\
q_{12} &= 20 \\
q_{13} &= 80 \\
q_{14} &= 40
\end{aligned}$$

Die einzelnen Quellengruppen haben folgende Anrufrichten:

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= \alpha_{12} = 1,0 \\
\alpha_{13} &= \alpha_{14} = 0,5
\end{aligned}$$

Eine Simulation ergab für den Verlust im Sekundärbündel den Wert

$$B_2 = 4,6 \%$$

(mit einem Vertrauensintervall von $\pm 8 \%$ relativ bzw. $0,4 \%$ absolut bei einer statistischen Sicherheit von 95%).

Das Zwei-Momenten-Verfahren nach Abschnitt IV.1. liefert den Näherungswert

$$B_2^* = 4,5 \%$$

Dieser Wert B_2^* weicht vom Testwert B_2 nur um $- 2,2 \%$ (relativ) ab.

Mit dem vereinfachten Zwei-Momenten-Verfahren erhält man den Wert

$$B_2^{**} = 4,3 \%$$

mit einer relativen Abweichung von $- 6,4 \%$ vom Testwert.

Die beiden Näherungswerte B_2^* und B_2^{**} liegen also innerhalb des Vertrauensintervalls und stimmen sehr gut mit dem Simulationsergebnis überein.

V. Vorarbeiten für die Berechnung von Überlaufsystemen mit unvollkommen erreichbaren Bündeln bei endlicher Quellenzahl

V.1. Allgemeines

Nachdem in Kapitel II exakte Verfahren und in Kapitel IV Näherungsverfahren zur Berechnung von Überlaufsystemen mit vollkommen erreichbaren Bündeln bei endlicher Quellenzahl hergeleitet wurden, liegt es nahe, diese Verfahren auf Überlaufsysteme mit unvollkommen erreichbaren Bündeln auszuweiten.

Die vollständige Ausarbeitung der Verfahren für Systeme mit unvollkommen erreichbaren Bündeln wäre sehr umfangreich und bleibt daher einer späteren Arbeit vorbehalten. Im Rahmen dieser Arbeit wurden jedoch einige Vorarbeiten für eine derartige Erweiterung geleistet, die in den folgenden Abschnitten beschrieben werden.

Eine exakte Berechnung von Überlaufsystemen mit unvollkommen erreichbaren Bündeln und endlicher Quellenzahl ist praktisch nicht durchführbar (siehe auch Kapitel I), da die numerische Auswertung der entsprechenden sehr umfangreichen Gleichungssysteme auch auf sehr grossen Digitalrechnern nicht möglich ist. Man ist deshalb auf Simulationsverfahren angewiesen (siehe Abschnitt V.2.).

Abschnitt V.3. enthält Vorarbeiten zur Entwicklung von Näherungsformeln für den auf ein verlustloses Sekundär-bündel überlaufenden Verkehrsrest und seine Varianz.

In Abschnitt V.4. wird ein Zwei-Momenten-Verfahren zur Berechnung von Überlaufsystemen mit unvollkommen erreichbaren Bündeln bei endlicher Quellenzahl vorgeschlagen. Dieses Verfahren stellt eine Verallgemeinerung des in Abschnitt IV.1. beschriebenen Zwei-Momenten-Verfahrens für Überlaufsysteme mit vollkommen erreichbaren Bündeln dar.

V.2. Simulationsprogramme

V.2.1. Mittelwert und Varianz von Überlaufverkehr

Für die Bestimmung von Mittelwert und Varianz eines Verkehrsrests muss vorausgesetzt werden, dass dieser Verkehrsrest auf ein verlustloses Sekundärbündel überläuft (andernfalls ist die Varianz nicht definiert). Dies führt auf die in Bild 15 gezeigte Gruppierung.

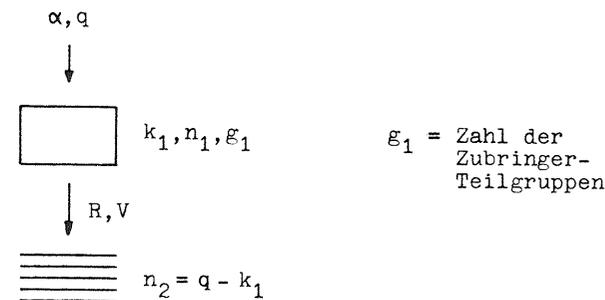


Bild 15: Mittelwert und Varianz von Überlaufverkehr

Bei einem vollkommen erreichbaren Primärbündel (siehe Bild 6) wären für das verlustlose Sekundärbündel $n_2 = q - n_1$ Leitungen nötig; bei einem unvollkommen erreichbaren Primärbündel sind jedoch $n_2 = q - n_1$ Leitungen nicht ausreichend für ein verlustloses Sekundärbündel. Die erforderliche Leitungszahl n_2 ist unter anderem auch abhängig von der Mischung des Primärbündels. Stets sind jedoch

$$n_2 = q - k_1$$

Leitungen für ein verlustloses Sekundärbündel ausreichend.

Das in Abschnitt III.1. beschriebene Simulationsprogramm ist auch für Systeme mit einem unvollkommen erreichbaren Primärbündel anwendbar. Mit diesem Programm kann also Mittelwert und Varianz des Überlaufverkehrs hinter einem unvollkommen erreichbaren Primärbündel nach Art von Bild 15 bestimmt werden.

V.2.2. Überlaufsysteme mit mehreren Primärbündeln

In Abschnitt III.2. wurde ein Simulationsprogramm beschrieben, mit dem Überlaufsysteme mit mehreren Primärbündeln und einem gemeinsamen Sekundärbündel untersucht werden können. Dieses Programm lässt sich auch bei Systemen mit unvollkommen erreichbaren Bündeln anwenden. Ein solches Überlaufsystem mit zwei unvollkommen erreichbaren Primärbündeln und einem unvollkommen erreichbaren Sekundärbündel ist in Bild 16 dargestellt. Mit dem Programm können jedoch auch Überlaufsysteme mit mehr als zwei Primärbündeln untersucht werden.

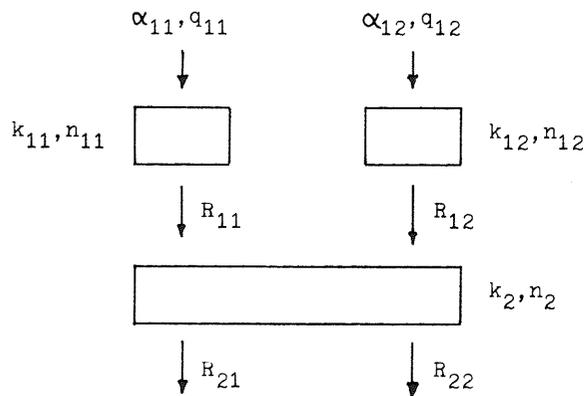


Bild 16: Überlaufsystem mit zwei unvollkommen erreichbaren Primärbündeln

V.3. Näherungsweise Berechnung des Verkehrsrests R_1 und der Varianz V_1 bei verlustlosem Sekundärbündel

Es lag nahe, das in Abschnitt IV.2. entwickelte Näherungsverfahren zur Bestimmung des Überlaufverkehrs hinter vollkommen erreichbaren Primärbündeln auch bei unvollkommen erreichbaren Primärbündeln anzuwenden. Es zeigte sich jedoch, dass sich hierbei im Fall unvollkommen erreichbarer Bündel keine guten Näherungswerte ergeben.

Deshalb wurden zunächst Simulationen durchgeführt. Aufgrund dieser Simulationsergebnisse wird versucht werden, eine Näherung für den auf ein verlustloses Sekundärbündel überlaufenden Verkehrsrest R_1 (siehe Bild 15) und seine Varianz V_1 zu entwickeln.

Die Entwicklung einer derartigen Näherungsformel wird schwierig sein, da sie für beliebige Mischungstypen und Werte (n_1, k_1, q, α) gute Näherungswerte für den Verkehrsrest R_1 und seine Varianz V_1 liefern soll. Ausserdem erfordert die Kontrolle einer solchen von mehreren Parametern abhängigen Näherungsformel eine grosse Anzahl von Verkehrstests.

V.4. Zwei-Momenten-Verfahren für Überlaufsysteme mit unvollkommen erreichbaren Bündeln

Für die näherungsweise Berechnung von Überlaufsystemen mit unvollkommen erreichbaren Bündeln wird ein Zwei-Momenten-Verfahren in Aussicht genommen, welches - analog zu dem in Abschnitt IV.1. beschriebenen Verfahren für Systeme mit vollkommen erreichbaren Bündeln - aus mehreren Schritten besteht.

Schritt 1: Mittelwert und Varianz der überlaufenden Verkehrsreste

In einem ersten Schritt sind die überlaufenden Verkehrsreste \tilde{R}_{11} und \tilde{R}_{12} sowie deren Varianzen \tilde{V}_{11} und \tilde{V}_{12} zu bestimmen (siehe Bild 17). Hierbei sind die Sekundärbündel

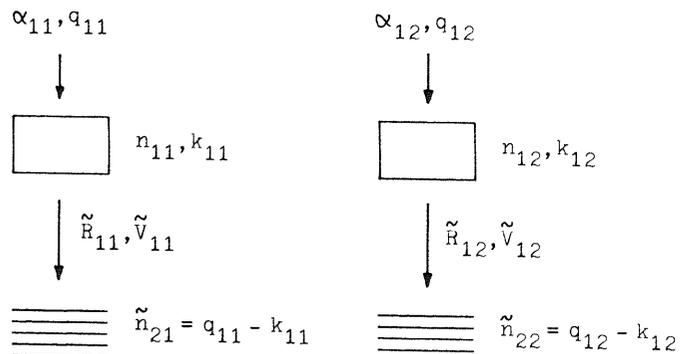


Bild 17: Mittelwert und Varianz des Überlaufverkehrs

als verlustlos anzunehmen, da die Varianzen andernfalls nicht definiert sind. Die Leitungszahlen der Sekundärbündel sind deshalb

$$\tilde{n}_{21} = q_{11} - k_{11} ,$$

$$\tilde{n}_{22} = q_{12} - k_{12}$$

Schritt 2: Berechnung des Gesamt-Überlaufverkehrs

Mittelwert \tilde{R}_1 und Varianz \tilde{V}_1 für den Summen-Überlaufverkehr, welcher an ein gemeinsames, verlustloses Sekundärbündel mit $\tilde{n}_2 = \tilde{n}_{21} + \tilde{n}_{22}$ Leitungen angeboten wird (siehe Bild 18)

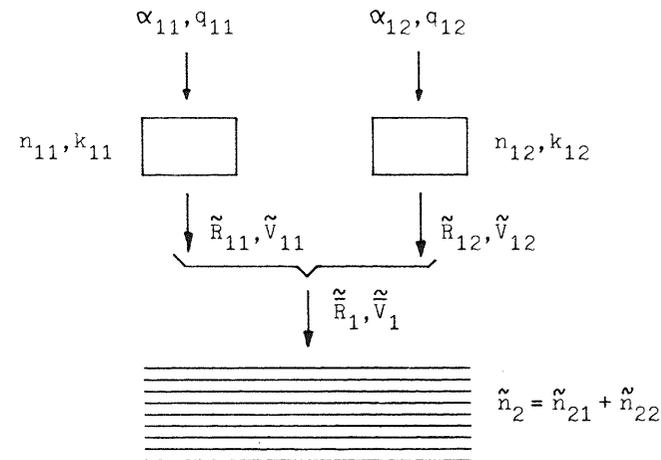


Bild 18: Der Summen-Überlaufverkehr

erhält man durch Addition der Teil-Verkehrsreste bzw. ihrer Varianzen

$$\tilde{R}_1 = \tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{12}$$

$$\tilde{V}_1 = \tilde{V}_{11} + \tilde{V}_{12}$$

Schritt 3: Das Ersatz-Primärbündel

Nun wird ein Ersatz-Primärbündel (mit n^* Leitungen, der Erreichbarkeit k^* und q^* Quellen mit der Anruhdichte α^*) gesucht, von dem ebenfalls der Verkehrsrest $(\tilde{R}_1, \tilde{V}_1)$ auf ein verlustloses Sekundärbündel mit \tilde{n}_2 Leitungen überläuft (siehe Bild 19). Dieses Ersatz-Primärbündel ist derart

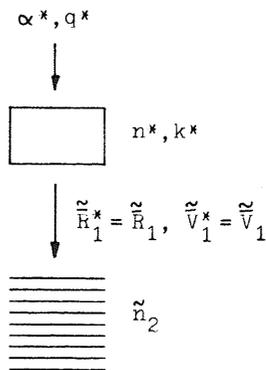


Bild 19: Das Ersatz-Primärbündel

zu bestimmen, dass es - später - zusammen mit einem Sekundärbündel von n_2 Leitungen und der Erreichbarkeit k_2 als ein Gesamtbündel mit einer Mischung betrachtet werden kann. Hierzu muss dieses Ersatz-Primärbündel ein geeignetes Mischungsverhältnis haben. Eine Methode zur Bestimmung dieses Mischungsverhältnisses ist aus der Theorie der Überlaufsysteme bei ZV1 bekannt /9, 16/.

Die Werte $(n^*, k^*, q^*, \alpha^*)$ des Ersatz-Primärbündels können folgendermassen gefunden werden:

Man geht zunächst von einem Schätzwert der Erreichbarkeit k^* aus. Das Mischungsverhältnis und damit auch die Leitungszahl n^* des Ersatz-Primärbündels werden dann so bestimmt, dass das Ersatz-Primärbündel später zusammen mit dem tatsächlich vorhandenen Sekundärbündel ein Gesamtbündel mit "guter" Mischung ergibt /9, 16/. Da jedoch dieses Ersatz-Primärbündel zunächst in Verbindung mit einem verlustlosen Sekundärbündel betrieben wird, gilt für die Quellenzahl q^* die Beziehung

$$q^* = k^* + \tilde{n}_2$$

Die Anruhdichte α^* wird nun (iterativ) so bestimmt, dass sich der Verkehrsrest

$$\tilde{R}_1^* = \tilde{R}_1$$

ergibt. Die Varianz \tilde{V}_1^* dieses Verkehrsrests wird jedoch im allgemeinen noch nicht mit dem Wert \tilde{V}_1 übereinstimmen. Deshalb ist in einer weiteren Iterationsschleife die Erreichbarkeit k^* so zu bestimmen, dass die Varianz des überlaufenden Verkehrsrests den Wert

$$\tilde{V}_1^* = \tilde{V}_1$$

annimmt.

Damit sind die Werte $(n^*, k^*, q^*, \alpha^*)$ des Ersatz-Primärbündels so bestimmt, dass von diesem der gleiche Verkehrsrest $(\tilde{R}_1, \tilde{V}_1)$ auf ein verlustloses Sekundärbündel überläuft wie von den beiden Primärbündeln (siehe Bild 18) zusammen. Dabei ist ausserdem sichergestellt, dass das Ersatz-Primärbündel später (in Schritt 4) mit dem tatsächlich vorhandenen Sekundärbündel zusammen ein Gesamtbündel mit sinnvoller Mischung ergibt.

Schritt 4: Der Verlust im (tatsächlich vorhandenen) Sekundärbündel

Nun wird eine Gruppierung betrachtet, die aus dem Ersatz-Primärbündel und dem tatsächlich vorhandenen Sekundärbündel besteht (siehe Bild 20).

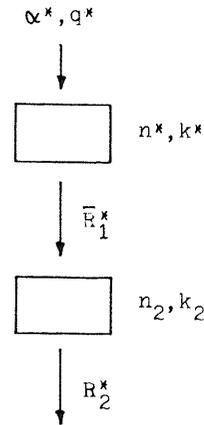


Bild 20: Bestimmung des Verlusts im Sekundärbündel

Da hier das Sekundärbündel nicht verlustlos ist, läuft hinter dem Sekundärbündel ein Verkehrsrest R_2^* über. Dieser Verkehrsrest R_2^* kann als Näherungswert für den tatsächlichen Verkehrsrest R_2 verwendet werden. Bei der Berechnung des Verkehrsrests R_2^* können (siehe oben) Primärbündel und Sekundärbündel zusammen als ein unvollkommen erreichbares Bündel mit der Erreichbarkeit $k^* + k_2$, der Leitungszahl $n^* + n_2$ und mit q^* Quellen der Anrufdichte α^* betrachtet werden.

Ausserdem stellt der Verkehrsrest \bar{R}_1^* einen Näherungswert für den tatsächlich überlaufenden Rest \bar{R}_1 dar. (Für die Bestimmung dieses Verkehrsrests \bar{R}_1^* wurde noch keine Näherungsformel aufgestellt.) Damit erhält man für den Verlust im Sekundärbündel

$$B_2 \approx B_2^* = \frac{R_2^*}{\bar{R}_1^*}$$

Schritt 5: Bestimmung der Angebote und Verkehrswerte

Die Angebote A_{11} und A_{12} sowie die Verkehrswerte Y_{11} und Y_{12} (in den Primärbündeln) und Y_2 (im Sekundärbündel) lassen sich nach den in Abschnitt IV.1., Schritt 5, angegebenen Formeln bestimmen.

Schrifttumsverzeichnis

- / 1/ Bretschneider, G.: Die Berechnung von Leitungsgruppen für überfließenden Verkehr in Fernsprechwählanlagen.
NTZ 9 (1956), S. 533 - 540
- / 2/ Bretschneider, G.: Ein verallgemeinertes Verfahren zur Näherungsberechnung der Leistungsfähigkeit von Überlaufanordnungen.
NTZ 15 (1962), S. 639 - 643
- / 3/ Brockmeyer, E., Halstrøm, H., Jensen, A.: The Life and Works of A. K. Erlang.
Acta Polytechnica Scandinavica (1960), Nr. 287
- / 4/ Brockmeyer, E.: The simple Overflow Problem in the Theory of Telephone Traffic.
Teletechnik 5 (1954), S. 361 - 374
- / 5/ Chastang, J.: Ein Beitrag zur Untersuchung von Überlaufverkehr.
El. Nachr.-wesen 38 (1963), S. 88 - 95
- / 6/ Fisz, M.: Wahrscheinlichkeit und Mathematische Statistik.
Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1958)
- / 7/ Herzog, U.: Näherungsverfahren zur Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr hinter Mischungen.
Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der TH Stuttgart (1964)

- / 8/ Herzog, U.: Die exakte Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr hinter Koppelanordnungen beliebiger Stufenzahl mit vollkommener bzw. unvollkommener Erreichbarkeit.
AEÜ 20 (1966), S. 180 - 184
- / 9/ Herzog, U., Lotze, A.: Das RDA-Verfahren, ein Streuwertverfahren für unvollkommene Bündel.
NTZ 19 (1966), S. 640 - 646
- /10/ Herzog, U.: Adaptation of the MPJ Loss Formula to Gradings of Various Type.
Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1967)
- /11/ Herzog, U.: Die Bemessung ein- und mehrstufiger Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik für angebotenen Überlaufverkehr.
Dissertation an der Universität Stuttgart (1968)
- /12/ Jordan, C.: Calculus of Finite Differences.
Chelsea Publishing Company, New York (1965)
- /13/ Kjellberg, G.: On the Convergence of Successive Overrelaxation Applied to a Class of Linear Systems of Equations with Complex Eigen-Values.
Ericsson Techn. 14 (1958), S. 245 - 258
- /14/ Lotze, A., Wagner, W.: Table of the Modified Palm-Jacobaeus-Loss-Formula.
Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1962)

- /15/ Lotze, A.: A Traffic Variance Method for Gradings of Arbitrary Type.
ITC London (1964), Dok. 80
- /16/ Lotze, A.: Tabellen für Streuwert und Verlust von einstufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener und vollkommener Erreichbarkeit.
Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1964)
(2. Auflage 1966)
- /17/ Lotze, A.: Tafeln für Streuwert D und Überlaufverkehr R von einstufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit. Berechnung von Sekundärbündeln für angebotenen Überlaufverkehr (R, D).
Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1965)
- /18/ Lotze, A., Schehrer, R.: a) Die streuwertgerechte Bemessung von Leitungsbündeln in Wähl-netzen mit Leitweglenkung.
NTZ 19 (1966), S. 719 - 724
b) The Design of Alternate Routing Systems with Regard to the Variance Coefficient.
NTZ Communication Journal 7 (1968),
S. 52 - 56
- /19/ Mack, R.: Untersuchungen über ein vereinfachtes Zwei-Momenten-Verfahren für Überlaufsysteme mit endlicher Verkehrsquellenzahl.
Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung,
Universität Stuttgart (1970)
- /20/ Palm, C.: Table of the Erlang Loss Formula.
Kunigl. Telestyrelsen, Stockholm (1954)

- /21/ Schehrer, R.: Die Berücksichtigung des Streuwerts bei der Bemessung von Querwegen und Kennzahlwegen in der Landesfernwahl.
Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung,
TH Stuttgart (1964)
- /22/ Schehrer, R.: Optimal Design of Alternate Routing Systems.
ITC New York (1967), Prebook S. 378 - 389
- /23/ Schehrer, R.: Über die exakte Berechnung von Überlaufsystemen der Wählvermittlungstechnik.
Dissertation an der Universität Stuttgart (1969)
- /24/ Wilkinson, R. I., (Riordan, J.): Theories for Toll Traffic Engineering in the USA.
BSTJ 35 (1956), S. 421 - 514 und
ITC Copenhagen (1955), Dok. 43
- /25/ Young, D. M.: Iterative Methods for Solving Partial Difference Equations of Elliptic Type.
Trans. Amer. Math. Soc. 76 (1954),
S. 92 - 111

