IV/2

Wartezeitprobleme im Fernsprechverkehr

(Erwiderung zur Stellungnahme von *J. W. Cohen*)

Von **A. Lotze** und **E. Schwiderski**, Stuttgart

Mit 1 Bild

DK 621.395.74 : 621.395.635.4

1. Einleitung

Über Wartezeitprobleme in der Fernsprechverkehrstheorie sind u. a. die nachstehenden Theorien für vollkommene Bündel entwickelt worden. Zur Unterscheidung sollen sie hier nach ihren Urhebern bezeichnet werden.

(I) Theorie von *Erlang, Molina* und *Palm* [1, 2, 3]
(II) Theorie von *Bauer-Störmer* bzw. von *Cohen* [4, 5, 6]
(III) Theorie von *Lotze* (Abwandlung der Theorie IV) [7]
(IV) Theorie von *Lotze* [8]

Die Theorie (I) von *Erlang, Molina* und *Palm* wird zum Vergleich herangezogen, soll aber hier nicht diskutiert werden, da sie als einzige von dem Grenzfall unendlicher Quellenzahl ausgeht. Die Theorien (II), (III) und (IV) gehen für diesen Grenzfall in Theorie (I) über.

Durch die Kritik von *J. W. Cohen* an den Arbeiten von *A. Lotze* ist es notwendig geworden, die Theorien (II), (III) und (IV) einer ausführlichen Betrachtung zu unterziehen. Aus diesem Grunde werden in der Folge zunächst die Voraussetzungen und Ergebnisse der Theorien (II), (III) und IV) zusammengestellt. Im Anschluß daran erfolgt eine gedankliche kritische Prüfung der Voraussetzungen, denn allein in ihnen ist der Grund der verschiedenen Ergebnisse von (II), (III) und (IV) zu suchen.

2. Die Theorie von Bauer-Störmer bzw. von Cohen

Die vollständige Liste der Voraussetzungen der Theorie von *Bauer-Störmer* bzw. von *Cohen* findet man in der Arbeit von *J. W. Cohen* [6]. Es genügt daher, hier nur jene Voraussetzungen herauszugreifen, die verschieden von denen der Theorien (III) bzw. (IV) sind. Diese lauten:

(II, a) Das Wartesystem ist zu jedem beliebigen Zeitpunkt einer Zeiteinheit im statistischen Gleichgewicht.

(II, b) Die Verteilung der *Pausendauern* (Zeit der Untätigkeit, „weder sprechen noch warten“) ist für jede Quelle gleich und über die ganze Zeiteinheit regellos, woraus sich ein *einheitlicher* Mittelwert

$$p_m = \frac{q - A - \Omega}{c_A} \tag{2.1}$$

ergibt. Daraus resultieren die Größen

$$\beta' = \frac{t_m}{p_m} = \frac{A}{q - A - \Omega} \tag{2.2}$$

als „Verkehrskoeffizient“ pro Quelle und

$$\frac{\Delta t}{p_m} \tag{2.3}$$

als Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine pausierende (nicht-tätige) Quelle während eines Zeitelementes Δt einen Belegungsversuch macht. In Gl. (2.1) und (2.2) erscheint

$$\Omega = c_w \cdot t_w = c_A \cdot t_{wa} \tag{2.4}$$

als *unbekannte* Warteleistung; sie ist bei gegebenen Werten q, v und A aus der nachfolgenden Bestimmungsgleichung (2.6) zu ermitteln.

Th24

Aus diesen Annahmen folgen die „Zustandswahrscheinlichkeiten“ dafür, daß genau x Quellen tätig sind:

$$p(x)_w \begin{cases} = \dfrac{\binom{q}{x}\cdot\beta'^x}{\sum\limits_{n=0}^{v-1}\binom{q}{n}\cdot\beta'^n+\sum\limits_{n=v}^{q}\frac{q!}{v!}\cdot v^v\cdot\frac{(\beta'/v)^n}{(q-n)!}} \\ = \dfrac{\binom{q}{x}\cdot\beta'^x}{\sum\limits_{n=0}^{v-1}\binom{q}{n}\cdot\beta'^n+\binom{q}{v}\cdot\frac{\beta'^v}{E_{q-v}(v/\beta')}} \end{cases} \text{für } 0\leqq x\leqq v$$

$$\qquad = \dfrac{\frac{q!}{v!}\cdot v^v\cdot\frac{(\beta'/v)^x}{(q-x)!}}{\sum\limits_{n=0}^{v-1}\binom{q}{n}\cdot\beta'^n+\binom{q}{v}\cdot\frac{\beta'^v}{E_{q-v}(v/\beta')}} \quad \text{für } v\leqq x\leqq b \tag{2.5}$$

Als „Bestimmungsgleichung“ für β' und damit für Ω erhält man

$$A \begin{cases} = \dfrac{\sum\limits_{x=0}^{v-1}x\cdot\binom{q}{x}\cdot\beta'^x+v\cdot\sum\limits_{x=v}^{q}\frac{q!}{v!}\cdot v^v\cdot\frac{(\beta'/v)^x}{(q-x)!}}{\sum\limits_{x=0}^{v-1}\binom{q}{x}\cdot\beta'^x+\sum\limits_{x=v}^{q}\frac{q!}{v!}\cdot v^v\cdot\frac{(\beta'/v)^x}{(q-x)!}} \\ = \dfrac{E_{q-v}(v/\beta')\cdot\sum\limits_{x=0}^{v-1}x\cdot\binom{q}{v}\cdot\beta'^x+v\cdot\binom{q}{v}\cdot\beta'^v}{E_{q-v}(v/\beta')\cdot\sum\limits_{x=0}^{v-1}\binom{q}{x}\cdot\beta'^x+\binom{q}{v}\cdot\beta'^v}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Schließlich ergibt sich die relative Wartezeit zu

$$\tau_w=\frac{t_w}{t_m}=\frac{\frac{q-v}{v}}{1-\dfrac{\frac{(v/\beta')^{(q-v)}}{(q-v)!}}{\sum\limits_{i=0}^{i=(q-v)}\frac{(v/\beta')^i}{i!}}}-\frac{1}{\beta'} \tag{2.7}$$

$$=\frac{q-v}{v\cdot\{1-E_{q-v}(v/\beta')\}}-\frac{1}{\beta'}.$$

Der Rechnungsgang nach *Cohen* ist folgender:

Bei vorgegebenem Wertetripel q, v ($\neq 1$) und A hat man in der Bestimmungsgleichung (2.6) für β' eine algebraische Gleichung vom Grade q zu lösen. Es ist dabei nicht klar, welche Bedingung den zu A passenden Wert β' aus den nach dem Fundamentalsatz der Algebra garantierten q Lösungen ($\beta'_1, \beta'_2 \ldots \beta'_q$) von Gl. (2.6) festlegt. Bei $q = 200$ gibt es z. B. 200 Lösungen der Gl. (2.6) und nur eine kommt davon in Betracht. Gewiß darf vermutet werden, daß die Gl. (2.6) nur eine positive Wurzel β' zuläßt; dafür ist aber bisher noch kein Existenzbeweis erbracht. Danach ist der von *Cohen* vorgeschlagene Rechnungsgang theoretisch nur unvollständig angegeben und zudem praktisch undurchführbar.

Im Falle $v = 1$ — und *nur* in diesem Falle — kann Gl. (2.6) in die von *Cohen* [6] angegebene Form

$$1 - A = E_q(1/\beta') \tag{2.8}$$

gebracht werden. Diese Gleichung ist dann mit Hilfe der Tafeln der *Erlang*schen Funktion leicht auswertbar.

Nach dem Vorschlag von *Bauer-Störmer* [4] verläuft die Rechnung folgendermaßen:

Unter denselben Vorgaben wie oben berechnet man bei festen Werten für q und v sowie variablem β' eine Tabelle für A. In dieser kann man dann den vorgegebenen A-Wert interpolieren. Dieser Weg ist theoretisch eindeutig festgelegt. Solange man aber auf die erforderlichen A-Tafeln nicht zurückgreifen kann, ist auch dieser Rechnungsgang noch sehr umständlich.

3. Die Theorie (III) von Lotze [8]

Die Annahmen zur Theorie (III) lauten entsprechend der Theorie (II):

(III, a) Wie (II, a).

(III, b) Die Verteilung der *Freizeitdauern* (Zeit der Untätigkeit plus evtl. Warten) ist über die ganze Zeiteinheit für jede Quelle gleich und regellos, woraus ein einheitlicher Mittelwert

$$f_m = \frac{q-A}{c_A} \tag{3.1}$$

resultiert. Der Mittelwert der Freizeit ist gleich dem Mittelwert der Pausendauer, solange das System außerhalb der Gefahrzeit steht, so daß also

$$p_{m1} = f_m \tag{3.2}$$

gilt. Während der Gefahrzeit ist jedoch

$$p_{m2} = f_m - t_w = \frac{q - A - c_A\cdot t_w}{c_A}, \tag{3.3}$$

worin t_w die noch unbekannte mittlere Wartezeit ist. Daraus folgert man die Verkehrskoeffizienten pro Quelle

$$\beta = \frac{t_m}{p_{m1}} = \frac{A}{q-A} \tag{3.4}$$

und

$$\alpha = \frac{t_m}{p_{m2}} = \frac{A}{q - A - c_A\cdot t_w}. \tag{3.5}$$

Als Einfallswahrscheinlichkeit ins Bündel für ein Zeitelement Δt hat man dann

$$\frac{\Delta t}{f_m} = \frac{\Delta t}{p_{m1}}. \tag{3.6}$$

Außerdem erhält man dann als Einfallswahrscheinlichkeit in den Speicher während der Gefahrzeit für ein Zeitelement Δt

$$\frac{\Delta t}{p_{m2}}. \tag{3.7}$$

Hierzu sei bemerkt:

Da in jedem Wahrscheinlichkeitskollektiv die Existenz eines Mittelwertes bekanntlich aus der Definition folgt, ist — im Gegensatz zur Ansicht von *Cohen* — in Gl. (3.3) keine zusätzliche Forderung über das Verhalten der Quellen zu sehen.

Unter diesen Annahmen leitet man formal ähnlich gebaute Gleichungen wie (2.5), (2.6) und (2.7) ab. Man hat nur β' sinngemäß durch β bzw. α zu ersetzen. Dank der analogen Gleichung zu (2.7) und der Beziehung (3.5) folgt hier die einfache Bestimmungsgleichung für α

$$E_{q-v}(v/\alpha) = \frac{q\cdot(v-A)}{v\cdot(q-A)} \tag{3.8}$$

und damit nach Gl. (3.5)

$$\frac{t_w}{t_m} = \frac{q}{A} - 1 - \frac{1}{\alpha}. \tag{3.9}$$

Der Rechnungsgang ist hier der folgende:

Mit den vorgegebenen Werten für q, v und A bestimmt man über Gl. (3.8) mit Hilfe der *Erlang*schen Funktions-

tafeln [9] den Wert v/α und über Gl. (3.9) t_w/t_m. Die gestellte Aufgabe ist hier also im Gegensatz zu (II) *direkt* lösbar. Wie in [7] dargelegt wurde, können ferner die Werte $p(x)_w$, g_w, g_s, γ_w durch einfache Umrechnung gewonnen werden, wenn in einem Verlustsystem gleicher Vorgabewerte q, v, A einer der Werte $p(x)$, g, y, V_L oder V_A schon bekannt ist. Auch ein einfacher Vergleich mit den Größen dieses Verlustsystems ist dann möglich.
Es sei noch bemerkt, daß die Beziehung (3.8) von *Cohen* in seiner Stellungnahme [6] nur für den Sonderfall $v = 1$ angegeben wird.

4. Die Theorie (IV) von Lotze [7]

Zur Theorie (IV) kann man durch folgende Abänderung der Annahmen in (III) gelangen:

(IV, a) Das Wartesystem ist zu jedem beliebigen Zeitpunkt *außerhalb* der Gefahrzeit im statistischen Gleichgewicht. Darüber, ob das System auch *während* der Gefahrzeit im statistischen Gleichgewicht ist, wird keine Annahme getroffen.

(IV, b) Die Annahme (III, b) wird unabgeändert übernommen, ausgenommen $\Delta t/p_{m2}$ als Einfallswahrscheinlichkeit einer pausierenden Quelle während der Gefahrzeit g_w. Damit wird die Annahme einer exponentiellen Verteilung der Pausendauern um ihren Mittelwert während g_w fallengelassen.
An Stelle der beiden fallengelassenen Voraussetzungen tritt jetzt die folgende:

(IV, c) Während der Gefahrzeit g_w befindet sich das Wartesystem in einem solchen Zustand, daß jede der (q — v) nichtsprechenden Quellen an der Anzahl der *im Mittel gleichzeitig wartenden* Quellen mit gleichen Anteilen mitwirkt. Diese Voraussetzung bedingt, daß

$$m = \frac{\Omega}{g_w} \cdot \frac{q-v-1}{q-v} \tag{4.1}$$

die Anzahl der im Mittel gleichzeitig wartenden Quellen ist, die eine pausierende Quelle bei einem Belegungsversuch während g_w antrifft.
Auf diesen Annahmen basieren die in der Arbeit von *Lotze* [7] hergeleiteten Formeln. Es wurden danach nur die Wahrscheinlichkeiten $p(x)_w$ für $0 \leq x \leq v$ und g_w explizit entwickelt. Die Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x)_w = s(z)$ für $(v+1) \leq x \leq q$ bzw. $1 \leq z \leq (q-v)$ wurde unter diesen Annahmen nicht durchgeführt. Sie erwies sich aber auch als unnötig. Insbesondere schließt man aus Gl. (4.1) auf

$$t_w = (m+1) \cdot \frac{t_m}{v} \tag{4.2}$$

und mit Hilfe von (Formel (27) in [7])

$$c_w = \frac{g_w}{t_m} \cdot (q-v) \tag{4.3}$$

auf die in [7] angegebene äußerst handliche und übersichtliche Formel

$$\frac{t_w}{t_m} = \frac{q-A}{q \cdot (v-A) + A}. \tag{4.4}$$

5. Rechenbeispiele

Die Folgen der unterschiedlichen Annahmen bei (II), (III) und (IV) sollen nun an einigen Rechenbeispielen zahlenmäßig sichtbar gemacht werden.
Bei der Berechnung wurde gemäß dem Vorschlag von ***Bauer-Störmer*** [4] q, v und β' vorgegeben und nach Gl. (2.6) das passende A ermittelt. Nur im Beispiel 3 wurde auf die Berechnung von $(t_w/t_m)_{II}$ nach der Theorie (II) wegen der äußerst umfangreichen Rechnung verzichtet. Weiter wurden die Werte $(t_w/t_m)_I$ nach der Theorie von *Erlang* ($q = \infty$) zum Vergleich herangezogen. Die graphische Darstellung der Ergebnisse von Beispiel 1 zeigt Bild 1.

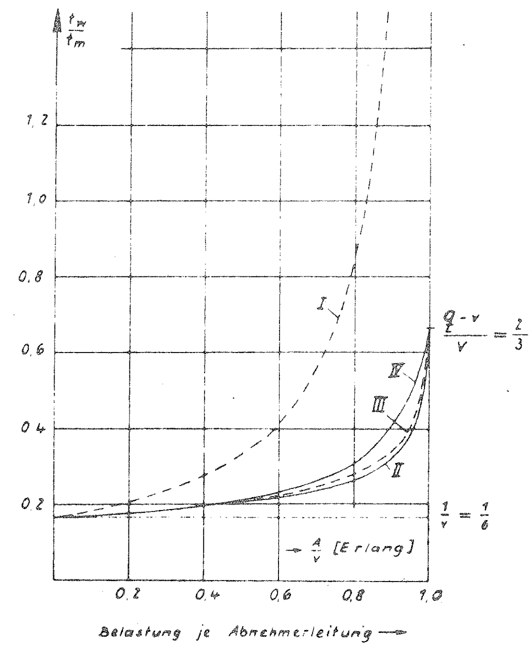

Bild 1. Relative Wartezeit $\tau = \frac{t_w}{t_m}$ in Abhängigkeit von der Belastung $\frac{A}{v}$ eines Abnehmerbündels mit $v = 6$ Leitungen. Nach Theorie I mit $q = \infty$ Verkehrsquellen und nach Theorie II, III, IV mit $q = 10$ Verkehrsquellen

Beispiel 1: $v = 6$

β'	A	$(t_w/t_m)_I$ ($q = \infty$)	$(t_w/t_m)_{II}$ $q = 10$	$(t_w/t_m)_{III}$ $q = 10$	$(t_w/t_m)_{IV}$ $q = 10$
0	0	0,16666...	0,16666...	0,16666...	0,16666...
1/16	0,58823	0,18478	0,17178	0,16689	0,17186
1/4	1,99976	0,24999	0,18826	0,18917	0,19047
2/3	3,96249	0,49079	0,22626	0,23267	0.24807
∞	6,0	∞	0,66666...	0,66666...	0,66666...

Beispiel 2: $v = 10$

β'	A	$(t_w/t_m)_I$ ($q = \infty$)	$(t_w/t_m)_{II}$ $q = 50$	$(t_w/t_m)_{III}$ $q = 50$	$(t_w/t_m)_{IV}$ $q = 50$
0	0	0,1	0,1	0,1	0,1
0,086958	3,99984	0,16666...	0,14941	0,14672	0,15131
0,19480	7,83599	0.46211	0,30439	0,32469	0,36337
∞	10.0	∞	4,0	4,0	4.0

Beispiel 3: $v = 20$

A	$(t_w/t_m)_I$ ($q = \infty$)	$(t_w/t_m)_{III}$ $q = 200$	$(t_w/t_m)_{IV}$ $q = 200$
0	0,05	0,05	0,05
17.659	0,4271	0,3256	0,3750
20,0	∞	9,0	9,0

6. Gegenüberstellung der Voraussetzungen

Die Voraussetzung (II, b) zur Theorie von *Bauer-Störmer* bzw. von *Cohen* hat zur Folge, daß jede Verkehrsquelle zwischen Ende und Anfang einer Tätigkeit den einheitlichen Mittelwert p_m für ihre Pausendauern hat.

Diese Annahme ist durchaus nicht *plausibel*, da sie nicht der Wirklichkeit entspricht. Zur Vereinfachung des Problems erscheint es aber *vernünftig*, mit einer einheitlichen mittleren Pausendauer zu rechnen.

Die Voraussetzung (III, b) zur Theorie (III) von *Lotze* führt auf zwei mittlere Pausendauern p_{m1} und p_{m2} ($p_{m2} \leq p_m \leq p_{m1}$). Gegen diesen Ansatz glaubt *Cohen* ernsthafte Einwände machen zu müssen, da man damit — nach seiner Meinung — einen Einfluß des Belegungszustandes auf das Verhalten der Verkehrsquellen im Wartesystem unterstellt. Das ist gewiß ein zulässiger Schluß, der aber dem Ansatz *nicht* die *sinnvolle Grundlage* nimmt. Um dies einzusehen, bedenke man, daß in Wirklichkeit jeder Verkehrsquelle ein *individueller* Mittelwert p_m zukommt und daß gerade zeitweilige *Verkehrsballungen* hohe Verkehrsspitzen (Gefahrzeiten) hervorrufen. Diese Verkehrsballungen entstehen durch einen, den einheitlichen Mittelwert p_m unterschreitenden, starken Andrang der Verkehrsquellen. Dabei ist es gleichgültig, ob die Quellen diesen Effekt beeinflußt oder unbeeinflußt vom Belegungszustand des Systems erzeugen. Wichtig ist allein die Tatsache als solche. Diesem Effekt wird in Theorie (III) insoweit Rechnung getragen, als die einheitliche mittlere *Freizeit*dauer $f_m = p_{m1}$ über die ganze Zeiteinheit konstant bleibt. Danach ist die Voraussetzung (III, b) nicht weniger vernünftig als die entsprechende von (II, b) und somit ebenso berechtigt.

Wie treten nun die unterschiedlichen Voraussetzungen der Theorien (II) und (III) zahlenmäßig hervor? Die Beispiele 1 und 2 zeigen, daß die Abweichungen erst oberhalb von üblichen Belastungen A/v nennenswert werden, jedoch bei $A/v \to 1$ wieder verschwinden. In diesen Fällen sind aber wegen der angenommenen *einheitlichen* mittleren Pausendauern vermutlich beide Theorien wenig wirklichkeitstreu.

Die ursprüngliche Theorie (IV) von *Lotze* vermeidet daher alle vagen Voraussetzungen während der Gefahrzeit und versucht durch die Annahme (4.1) zum Ergebnis zu gelangen. Sie führt zu einer verblüffend einfachen Formel für t_w/t_m, die die Werte für t_w/t_m in allen praktischen Fällen nahezu gleich wiedergibt, wie die entsprechenden komplizierten Formeln der Theorien (II) und (III). Nur bei unzulässig hohen Belastungen werden die Abweichungen nennenswert.

Schließlich sei noch bemerkt, daß in der Erwiderung [8] zu *Cohens* erster Stellungnahme [5] auf die unterschiedlichen Voraussetzungen nach (III) bzw. nach (IV) für den Einfall von Belegungsversuchen während der Gefahrzeit nicht weiter eingegangen wurde. Auch in [7] mußten die theoretischen Voraussetzungen zugunsten praktischer Beispiele stark gekürzt werden, um mit dem beschränkten, von der Schriftleitung zur Verfügung gestellten Raum auszukommen.

Darin ist wohl die Ursache des nachstehenden Mißverständnisses zu suchen. *Cohen* stellt in [6] am Beispiel eines extrem überlasteten Bündels eine Nichtidentität der Gl. (5.6) fest. Es ist selbstverständlich, daß bei Einsetzen von t_w-Werten nach (IV) in die für (III) zuständige Gl. (5.6) eine volle Identität nicht erreicht werden kann.

Für ein Verlustsystem mit $v = 1$ und gleicher Leistung wie in *Cohens* Beispiel ($y = 0{,}9$ *Erlang*) ergibt die Rechnung allerdings für $q = 50$ schon einen Verlust $V_L = 747\,\%$ und für $q = 3$ einen Verlust $V_L = 150\,\%$. Senkt man die Belastung auf $y = 0{,}5$ *Erlang*, was im Verlustsystem bei $q = 3$ immer noch $V_L = 50\,\%$ entspräche, so ergibt sich in *Cohens* Gleichung (5.6) schon nahezu volle Identität ($0{,}5 \approx 0{,}5009$ *Erlang*). In fast allen praktisch vorkommenden Fällen wird es deshalb, wo überhaupt nötig, erlaubt sein, die Gleichzeitigkeiten $s(z)$ im Wartespeicher auch dann hinreichend genau nach (III) zu berechnen, wenn t_w nach der einfachen Formel (4.4) der Theorie (IV) ermittelt wurde.

7. Zusammenfassung

Bei allen drei Theorien sind vereinfachende Voraussetzungen über das Verhalten der Verkehrsquellen getroffen worden, um das vorliegende Wartezeitproblem bei endlicher Quellenzahl einer mathematischen Behandlung zugänglich zu machen.

Die Untersuchung hat ergeben, daß die vereinfachenden Annahmen aller drei Theorien gleich vernünftig und damit auch gleichberechtigt sind. Der Rechenaufwand zur Lösung der in der Praxis des Fernsprechverkehrs anfallenden Aufgaben ist jedoch bei den drei Theorien außerordentlich verschieden. Wenn man daher schon — berechtigterweise — vereinfachende Annahmen der Rechnung voranstellt, so gebührt jenen der Vorzug, welche das Problem mit dem geringsten Aufwand zu lösen gestatten. Dies gilt im vorliegenden Fall um so mehr, als bei wohl allen praktisch vorkommenden Aufgaben jede der drei Theorien nahezu gleiche Werte liefert.

Schrifttumsverzeichnis

[1] *A. K. Erlang*, The Life and Works of *A. K. Erlang*. Herausgegeben von *E. Brockmeyer*, *H. L. Halström* und *Arne Jensen*, Kopenhagen 1948.

[2] *E. C. Molina*, Zur Theorie der Wartezeiten. Zeitschrift für die Fernmeldetechnik, Werk- und Gerätebau 1928, H. 1 und 2.

[3] C. *Palm*, Etude des délais d'attente. Ericsson Technics 1937, Nr. 2, S. 39.

[4] *F. L. Bauer* und *H. Störmer*, Berechnung von Wartezeiten in Vermittlungseinrichtungen mit kleinen Zubringerbündeln. Archiv für Elektrische Übertragung 9 (1955), S. 69—73.

[5] *J. W. Cohen*, Berechnung der Verkehrsgrößen im Wartezeitsystem aus den Verkehrsgrößen eines Verlustsystems (Bemerkungen zum Aufsatz von *A. Lotze*). FTZ 8 (1955), S. 139.

[6] *J. W. Cohen*, Das Warteproblem für das vollkommene Bündel mit einer endlichen Quellenzahl. FTZ 8 (1955), H. 12, S. 641.

[7] *A. Lotze*, Berechnung der Verkehrsgrößen im Wartezeitsystem aus den Verkehrsgrößen eines Verlustsystems. FTZ 7 (1954), S. 443.

[8] A. Lotze, Erwiderung zur Stellungnahme von *J. W. Cohen*. FTZ 8 (1955), S. 139.

[9] *C. Palm*, Table of the Erlang Loss Formula. Sec. Edition, Stockholm 1954, Distribution Telefonaktiebolaget L. M. Ericsson.

(Eingeg. 1. Oktober 1955)