Über die statistische Sicherheit von Verkehrsmessungen

Von **A. Lotze**, Stuttgart

Mit 3 Bildern

DK 654.15 : 519.2

Allgemeines

Die Personalbemessung im Ferndienst, der Fernplatzbedarf, die benötigte Zahl von Fernleitungen, ferner die Bemessung der Wähler und aller sonstigen Schaltglieder in VStW und in Fernwählämtern beruhen auf Zählungen oder Messungen des Verkehrswertes y, gemessen in Erlang, und der Verkehrsmenge, gemessen in Erlangstunden. In allen Fällen wird nur eine begrenzte Zeitlang registriert. Die mit einer solchen „Stichprobe" gewonnene Aussage, z. B. über die mittlere Gesprächszahl je Hauptverkehrsstunde (HVSt), den Verkehrswert y eines Bündels in der HVSt u. dgl. bildet die Basis für technische oder personelle Entscheidungen.

In der Praxis wird aber bei derartigen statistischen Erhebungen meist nicht geprüft, ob die Vertrauenswürdigkeit einer Messung für solche Entscheidungen ausreicht oder ob die fragliche Stichprobe für eine hinreichend genaue Mittelwertsbildung zu klein war. Dies kann u. U. zu unerwünschten Fehlschlüssen führen.

Nachstehend wird gezeigt, daß es, insbesondere auf Grund einer neueren Arbeit von *H. Störmer* [1], möglich ist, das Ergebnis einer Messung oder Zählung des Fernsprechverkehrs sehr einfach auf seine ausreichende statistische Vertrauenswürdigkeit hin zu prüfen oder die Messung sogleich in geeigneter Weise durchzuführen.

Theorie

Es gibt eine Vielzahl technischer Probleme, bei denen eine bestimmte Messung (unter gleichbleibenden Meßbedingungen) stets unterschiedliche Ergebnisse zeitigt, die jedoch um einen gemeinsamen Mittelwert streuen. Insbesondere dann, wenn die Streuung einer solchen Meßreihe die Folge vieler und voneinander unabhängiger Zufallseinflüsse ist, nähert sich mit steigender Zahl von Meßwerten das Diagramm von deren Häufigkeitsverteilung immer mehr der Form einer der bekannten *Gaußschen* Glockenkurven. Man spricht dann von der „Normalverteilung" einer „Grundgesamtheit" um ihren Mittelwert.

In der Technik kommen des öfteren große Grundgesamtheiten vor, von denen man zu Recht annehmen darf, daß sie „normal verteilt" sind. Man entnimmt dann der Grundgesamtheit eine Anzahl von „Stichproben" und mißt daran die zu kontrollierende Größe (z. B. den Durchmesser des gedrehten Maschinenteils einer Massenfertigung). Aus den Einzelmeßwerten x_i von N Stichproben erhält man als arithmetisches Mittel den Wert x. Aus N, x_i und x kann man zunächst die sogenannte „mittlere quadratische Abweichung" σ (auch Streuung oder Standardabweichung genannt) berechnen.

Mittelwert und Streuung bestimmen die Glockenkurve für die spezielle Normalverteilung einer untersuchten Grundgesamtheit. Je größer die Zahl N der Stichproben ist, desto genauer wird der Wert x dem „wahren" Mittelwert der Grundgesamtheit entsprechen, und desto zuverlässiger erhält man die Streuung σ aus der Gleichung:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{i=N} (x_i - x)^2 . \qquad (1)$$

Anhand allgemeingültiger Diagramme und Tabellen der Stichprobentheorie kann man aus N, x und σ zahlreiche Schlüsse auf die Eigenschaften der Grundgesamtheit ziehen. Insbesondere lassen sich auch Aussagen darüber machen, mit welcher Urteilssicherheit S der „wahre" Mittelwert der Grundgesamtheit innerhalb eine bestimmten „Vertrauensintervalls M" beiderseits des Stichprobenmittelwerts x liegt.

Wenn man von der Vertrauenswürdigkeit eines gemessenen Mittelwertes spricht, so muß man demnach zwei Begriffe unterscheiden:

a) Das „Vertrauensintervall" M einer Messung, auch Vertrauensbreite oder Konfidenzintervall genannt.

Ist z. B. $M = \pm 30\,\%$, so bedeutet dies, daß der „wahre Mittelwert" nicht weiter als $\pm 30\,\%$ von dem gemessenen Mittelwert seitab liegt.

b) Die statistische Sicherheit S, auch Aussagesicherheit oder Urteilssicherheit genannt. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das unter a) behauptete Vertrauensintervall M zutrifft. Eine Sicherheit $S = 95\,\%$ bedeutet demnach, daß das angegebene Vertrauensintervall $M = \pm 30\,\%$ nur in 95 % der Fälle zutrifft, daß aber mit 5 %iger Wahrscheinlichkeit die vorliegende Meßreihe einen „Ausreißer" darstellt und der „wahre" Mittelwert noch weiter als + oder − 30 % vom gemessenen Mittelwert seitab liegt.

Auch jede Messung und Zählung im Fernsprechverkehr stellt letzten Endes eine Stichprobe dar, welche während einer begrenzten Zeitdauer, z. B. während der Hauptverkehrsstunde eines geeignet gewählten Werktags, der großen Grundgesamtheit sehr vieler HVSt an gleichartigen Werktagen entnommen wird.

Im allgemeinen mißt man den Verkehrswert der HVSt an mehreren Werktagen und bestimmt daraus den Mittelwert der HVSt. Wollte man in Anlehnung an die Stichprobenverfahren der Massenfertigung die Vertrauenswürdigkeit dieses Mittelwerts feststellen, so müßte man eine größere Zahl von „HVSt-Stichproben" machen und daraus deren Streuung σ bestimmen.

Dies ist aber in diesem Sonderfall nicht erforderlich, weil für einen Fernsprechverkehr, der sich aus regellos einfallenden Belegungen zusammensetzt, bereits die Verteilungsfunktion bekannt ist, nach der die momentane Gleichzeitigkeitsbelegung eines Bündels um ihren Mittelwert y schwankt. *H. Störmer* hat in [1] diese Verteilungsfunktion untersucht und nachgewiesen, daß die gemessenen Verkehrswerte in guter Näherung „normal" um den „wahren" Mittelwert verteilt sind und daß die Streuung dieser Verteilung

$$\sigma = t_m \cdot \sqrt{2c} \tag{2}$$

ist. Dabei bedeutet c die Anzahl der Belegungen des gemessenen Bündels, die in allen Stichproben (in allen gemessenen HVSt) zusammen enthalten ist.

Das Vertrauensintervall M, innerhalb dessen der „wahre" Mittelwert der HVSt-Belastung seitab vom gemessenen mittleren Verkehrswert liegt, erhält man nach *Störmer* zu

$$M = \pm \frac{\lambda \cdot \sigma \cdot 100}{c \cdot t_m}\,\% = \pm \frac{\lambda \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{c}} \cdot 100\,\%. \tag{3}$$

Dabei ist

$\lambda = 1{,}645$ für $S = 0{,}9$ bzw. 90 %,
$\lambda = 1{,}960$ für $S = 0{,}95$ bzw. 95 %,
$\lambda = 2{,}576$ für $S = 0{,}99$ bzw. 99 %.

Für eine Urteilssicherheit von $S = 95\,\%$ oder 99 % erhält man damit aus Gl. (3) die einfachen Formeln:

$$M_{95} = \pm \frac{276}{\sqrt{c}}\,\%, \tag{4}$$

$$M_{99} = \pm \frac{364}{\sqrt{c}}\,\%. \tag{5}$$

Aus Gln. (3), (4) und (5) kann man entnehmen:

a) Je größer die Anzahl c der Belegungen ist, welche in einer Meßreihe insgesamt enthalten sind, desto enger wird — bei gleichbleibender Sicherheit S — das Vertrauensintervall M. Je größer die mittlere Belegungsdauer t_m ist, desto größer muß deshalb für bestimmte Werte S und M die zu messende Verkehrsmenge $c \cdot t_m$ [Erlh] werden.

b) Eine Einengung des Vertrauensintervalls M auf die Hälfte erfordert bereits die vierfache Belegungszahl, im allgemeinen also viermal mehr Meßtage.

c) Eine Steigerung der Urteilssicherheit S von 95 % auf 99 % muß — bei gleichbleibenden Werten t_m und M — mit einer um rund 70 % größeren Verkehrsmenge erkauft werden.

d) Für eine vorhandene Messung gegebenen Umfangs $c \cdot t_m$ [Erlh] erhält man eine um so größere Urteilssicherheit S, je breiter das Vertrauensintervall M gewählt wird.

M. a. W.: Behauptet man, daß der „wahre" Mittelwert relativ nahe beim gemessenen Wert liege, dann ist die Gefahr einer Fehlaussage höher, als wenn man vorsichtigerweise eine größere Seitablage des wahren Mittelwerts, also ein größeres Vertrauensintervall M, in die weitere Verwertung des Meßergebnisses einkalkuliert.

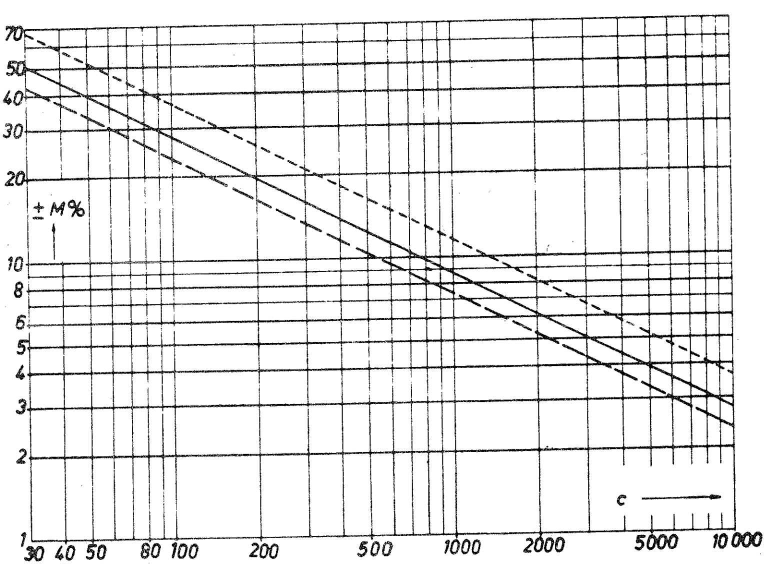

Bild 1. Vertrauensintervall M von Verkehrsmessungen in Abhängigkeit von der Anzahl c der in der Messung enthaltenen Belegungen bei verschiedenen Werten der Aussagesicherheit (statistischen Sicherheit) S.

— — — — — — $S = 99\,\%$
– — – — – — $S = 95\,\%$
———————— $S = 90\,\%$

Diagramme für die Praxis

In Bild 1 ist das Vertrauensintervall M nach Gl. (3) für $S = 90$, 95 und 99 % in Abhängigkeit von der Zahl der in der Meßreihe erfaßten Belegungen (oder Gespräche) aufgetragen. Diese Darstellung eignet sich besonders für Statistiken im handvermittelten Orts- oder Ferndienst, wo in der Regel keine Verkehrsmengen gemessen, sondern hergestellte Verbindungen gezählt werden.

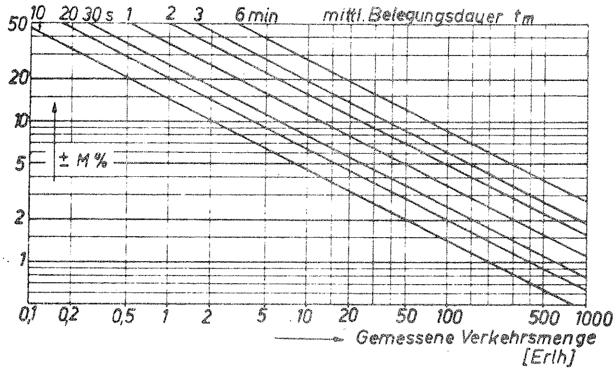

Bild 2. Vertrauensintervall M von Verkehrsmessungen in Abhängigkeit von der Verkehrsmenge bei einer Aussagesicherheit $S = 95$ % und für verschiedene Werte der mittleren Belegungsdauer t_m

In Bild 2 ist für die in der Praxis meist ausreichende Urteilssicherheit von $S = 95$ % das Diagramm von Bild 1 auf Verkehrsmengen umgerechnet worden. Z. B. entsprechen $c = 180$ Belegungen bei $t_m = 3$ min $= \frac{1}{20}$ h einer Verkehrsmenge von 9 Erlh, dagegen bei $t_m = 20$ s $= \frac{1}{180}$ h nur einer Verkehrsmenge von 1 Erlh. Wo die betrieblichen Belange dies zulassen, z. B. bei regelmäßigen Überwachungsmessungen von Leitungsbündeln oder Schaltgliedergruppen im Selbstwählferndienst, wird man einen festen Wert für S und einen Grenzwert für M vorschreiben und damit den Umfang der Messung oder die ungefähre Anzahl der Meßtage von vornherein festlegen. *Störmer* bezeichnet dieses Verfahren als „Festmengenmessung".

Beispiel: Für $S = 95$ % und $M \leq \pm 10$ % müßten nach Bild 1 $c \geq 760$ Belegungen vorgeschrieben werden. Bei $t_m = 1{,}5$ min entspräche dies einer Festmenge von ≤ 19 [Erlh].

Für Messungen der Verkehrsmenge und für eine Urteilssicherheit von $S = 95$ % kann eine Vorschrift für Festmengenmessungen besonders einfach aus Bild 3 entnommen werden.

Beispiel: Im Wählbetrieb liegt der Wert t_m meist bei etwa 2 min. Verlangt man eine Urteilssicherheit von $S = 95$ % und wünscht ein Vertrauensintervall von $M \leq \pm 20$ %, so beträgt

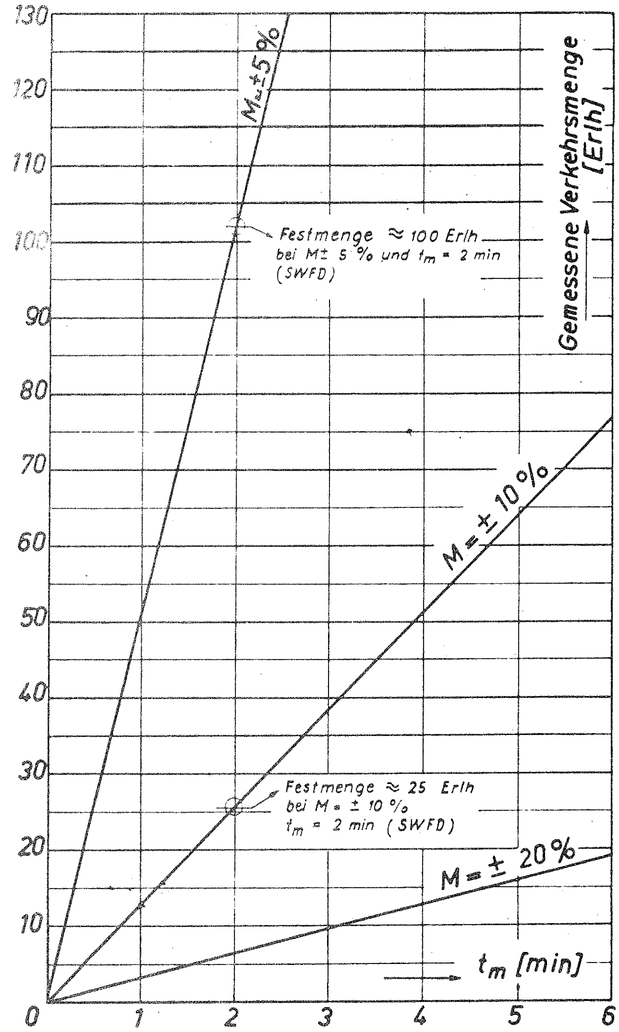

Bild 3. Zu messende Festmenge des Verkehrs in Abhängigkeit von der mittleren Belegungsdauer t_m für verschiedene Vertrauensintervalle M bei einer vorgegebenen Aussagesicherheit $S = 95$ %

die zu messende Festmenge nach Bild 3 $\geq 6{,}3$ Erlh.

Weiß man ferner, daß der HVSt-Verkehrswert des zu messenden Bündels z. B. bei etwa 2,5 Erl liegt, so wird man eine dreitägige Messung vorschreiben. Wünscht man dagegen einen noch zuverlässigeren Wert, z. B. für Zwecke neuer Planungen, so wird man $M \leq \pm 10$ % verlangen. Dann ist gemäß Bild 3 die notwendige Festmenge rd. 25 Erlh. Man wird also eine zehntägige Messung der HVSt vorschreiben müssen.

Schrifttumsverzeichnis

[1] *H. Störmer*, Anwendung des Stichprobenverfahrens beim Beurteilen von Fernsprechverkehrsmessungen. Arch. der el. Übertragung 8 (1954), S. 439.

(Eingeg.: 13. August 1957)