

Berechnung der Verkehrsgrößen im Wartezeitsystem aus den Verkehrsgrößen eines Verlustsystems

Von A. Lotze, Stuttgart

DK 621.395.1

Mit 15 Bildern

Die Wartezeittheorien von Erlang und Palm gestatten die Berechnung der Verkehrsgrößen in Wartezeitsystemen für den Sonderfall einer unendlich großen Zahl von Verkehrsquellen. Nachstehend wird eine neue Theorie hergeleitet, welche für beliebige Quellenzahlen anwendbar ist. Die mittlere Wartezeit verzögerter Belegungen kann unmittelbar berechnet werden. Die übrigen Verkehrsgrößen des Wartezeitsystems erhält man durch eine Umrechnung aus den als bekannt angenommenen Verkehrsgrößen eines Verlustsystems gleicher Leitungszahl und Quellenzahl.

Diagramme und Beispiele erläutern die Anwendung der Theorie auf die Praxis.

By applying the waiting time theory developed by Erlang and Palm it is possible to calculate the quantities of traffic in delay working systems for the special case if an infinite number of traffic sources is supposed. In the following a new theory is derived which is applicable to any number of sources. The average waiting time of delayed engagements can directly be calculated. The other traffic quantities of the delay working system are calculated by a simple conversion on the basis of traffic quantities supposed as given in a loss system with the same number of circuits and sources.

The practical application of the theory is explained by diagrams and examples.

Les théories de délais d'attente d'Erlang et de Palm permettent le calcul des quantités de trafic en systèmes de délais d'attente en cas particulier d'un nombre infini de sources de trafic. A la suite on développe une nouvelle théorie qui peut être utilisée pour des nombres de sources quelconques. La durée d'attente moyenne d'occupations retardées peut être calculée directement. Le reste des quantités de trafic du système des délais d'attente est obtenu par une simple conversion basant sur les quantités de trafic supposées comme connues d'un système avec des pertes, système de même nombre de circuits et de sources.

Des diagrammes et des exemples expliquent l'emploi de la théorie pour la pratique.

1. Vorbemerkungen

Die in Deutschland für den Ortsverkehr benutzten Wählsysteme mit Vorwählern sind reine Verlustsysteme, bei denen im allgemeinen keine Wartezeitprobleme auftreten. Dagegen können in Systemen mit Anrufsuchern (AS) vor der I. Gruppenwahlstufe echte Wartezeiten vom Anruf des Teilnehmers bis zu seiner Verbindung mit einem I. GW entstehen, sobald alle AS belegt sind. Die Verkehrsabwicklung des handvermittelten Ferndienstes hat ebenfalls Wartezeitcharakter. Auch bei der künftigen Technik der Landesfernwahl werden Wartezeitprobleme überall dort auftreten, wo zur Verzweigung und Leitweglenkung zentrale Glieder vorhanden sind, welche der abgehenden Fernleitung während des Verbindungsaufbaues zugeschaltet werden.

Um die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden zu können, wird vorausgesetzt, daß der Verkehr jeder einzelnen Quelle und den Verkehrsquellen in ihrer Gesamtheit als eine regellose Folge von Belegungen und dazwischenliegenden Freizeitabschnitten entspringt. Die Dauer einer Belegung sei ferner unabhängig von dem Zeitpunkt, in dem sie auftritt und die Wahrscheinlichkeit, daß sie endigt, unabhängig von dem Zeitpunkt, an dem die Beobachtung nach ihrem Beginn einsetzt.

Es werden nur solche Wartezeiten betrachtet, die durch Besetztsein aller Schaltglieder des betrachteten Bündels entstehen. Systembedingte Wartezeiten, wie sie in ausländischen Wählsystemen, z. B. für Umrechnung der Rufnummer, beim Aufbau jeder Verbindung auftreten, bleiben außer Betracht.

Es wird ferner angenommen, daß alle während der Gefahrzeit des Bündels eintreffenden Versuche in einem Überlaufspeicher, oder statt dessen nur in den Zubringerschaltgliedern selbst, uneingeschränkt gleichzeitig warten können.

Sind alle Leitungen v des Bündels belegt und sind q Zubringerschaltglieder als Quellen des Verkehrs vor-

handen, so muß der Überlaufspeicher ($q - v$) Speicherglieder besitzen. Die Betrachtung der Zubringerschaltglieder als Verkehrsquellen ist zulässig, wenn die Forderung des regellosen Einfalls erfüllt wird. Ausführliche Untersuchungen darüber hat K. Rohde [1] angestellt.

Nachstehend werden die Verkehrsgrößen vollkommener Bündel im Wartezeitsystem aus denjenigen eines Verlustsystems abgeleitet.

Die Formeln für Verlustsysteme wurden an anderer Stelle [2] angegeben. In Tafel 1 sind die verwendeten Abkürzungen zusammengestellt.

2. Berechnung der Gefahrzeit und der wartenden Versuche

Im Wartezeitsystem gehen Belegungsversuche, welche den Quellen während der Gefahrzeit des Bündels entspringen, nicht verloren. Sie werden vom Überlaufspeicher aufgenommen und nacheinander ins Bündel überführt, sobald dort eine Belegung endigt, d. h. eine Leitung frei wird. Auf diese Weise wird das ganze Angebot A durchgesetzt, d. h. vom Bündel auch geleistet. Es entstehen keine Verluste. Die Annahme eines Angebots $A > v$ ist jedoch abwegig, weil $A = v$ notwendig die maximale Bündelleistung darstellt. Für die Rechnung wird ferner vorausgesetzt, daß Verzichte wegen zu langer Wartezeiten nicht auftreten.

Die Wahrscheinlichkeit, innerhalb einer beliebigen Zeiteinheit als Beobachtungszeitraum, z. B. wie üblich 1 Stunde, und in einem beliebigen Beobachtungszeitpunkt eine Quelle belegt, d. h. zu einer Leitung des Bündels durchgeschaltet, anzutreffen, ist somit

$$t = \frac{A}{q} \quad (1)$$

In der Zeiteinheit 1 ist t dann auch betragsgleich der Belegungszeit einer Quelle. Die restliche Zeit je Quelle und Zeiteinheit ist danach

$$f = (1 - t) \quad (2)$$

Tafel 1. Abkürzungen und Definitionen

v	= Zahl der Leitungen des Bündels
q	= Zahl der Verkehrsquellen
t_m	= mittlere Dauer einer Belegung in [h] oder [min]
c_A	= Zahl der je Zeiteinheit (z. B. stündlich) von den Verkehrsquellen angebotenen Belegungsversuche
c_L	= Zahl der je Zeiteinheit erfolgreichen (vom Bündel geleisteten) Belegungsversuche
A	= $c_A \cdot t_m$ Verkehrsangebot je Zeiteinheit (z. B. je Stunde) [Erlang], im Wartezeitsystem ohne Verzichte auch identisch mit Verkehrsleistung des Bündels je Zeiteinheit (Verkehrsdichte). Also hier $c_A = c_L$
y	= $c_L \cdot t_m$ Verkehrsleistung eines Bündels im Verlustsystem je Zeiteinheit (Verkehrsdichte) [Erlang]
t	= $\frac{A}{q}$ Belegungswahrscheinlichkeit einer Verkehrsquelle
f	= $(1-t)$ Freiwahrscheinlichkeit einer Verkehrsquelle
m_e	= Mathematische Erwartungszahl für die je Verkehrsquelle und Zeiteinheit entspringenden Belegungsversuche
b	= $c_A - c_L$ Zahl der im Verlustsystem je Zeiteinheit erfolglosen Belegungsversuche
V_A	= $\frac{b}{c_A}$ Angebotsverlust
V_L	= $\frac{b}{c_L}$ Leistungsverlust
g	= Gefahrzeit im Verlustsystem je Zeiteinheit
g_w	= Gefahrzeit im Wartezeitsystem je Zeiteinheit
g_s	= Anteil von g_w , während dessen Belegungsversuche im Speicher warten
$s(0)$	= Anteil von g_w , während dessen keine Belegungsversuche im Speicher warten
c_w	= Zahl der im Wartezeitsystem je Zeiteinheit wartenden Belegungen
γ_w	= $\frac{c_w}{c_A}$ Wartehäufigkeit
β_g	= $\frac{t_m}{v}$ mittlere Breite (Dauer) der Gefahrzeitspitzen im Verlustsystem
m_s	= Mathematische Erwartungszahl für die während g_w je Verkehrsquelle und Zeiteinheit in den Speicher einfallenden Belegungsversuche
Ω	= $c_w \cdot t_m$ Wartegebühr, Speicherleistung je Zeiteinheit [Erlang]
z_s	= Zahl der Wartespitzen je Zeiteinheit, während derer Versuche im Speicher warten
B_m	= mittlere Breite der Wartespitzen
t_w	= B_m mittlere Wartezeit einer der c_w Belegungen
τ_w	= $\frac{t_w}{t_m}$ relative (mittlere) Wartezeit einer der c_w Belegungen
δ_w	= $\frac{1}{\tau_w}$

t_{wa} = mittlere Wartezeit, bezogen auf alle c_A Belegungen je Zeiteinheit

ℓ_w = $\frac{\Omega}{A}$ relative (mittlere) Warteleistung

$P_w(>T)$ = Anteil der c_w wartenden Belegungen, die „T und länger“ warten

$P_A(>T)$ = Anteil aller c_A Belegungen, die „T und länger“ warten

Diese belegungsfreie „Freizeit“ einer Quelle stellt im Verlustsystem eine reine Pause dar. Im Wartezeitsystem liegen innerhalb dieser Zeit $(1-t)$ sowohl die Pausen der Quelle als auch ein eventuelles Warten im Speicher.

Für Verlustsysteme ist von Rohde [1] die mathematische Erwartungszahl der je Zeiteinheit aus einer Quelle entspringenden Belegungsversuche hergeleitet worden zu

$$m_e = \frac{t}{t_m \cdot (1-t)} = \frac{c_A}{q-A} \quad (3)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß x von insgesamt v Leitungen eines vollkommenen Bündels im Verlustsystem gleichzeitig belegt sind, ergibt sich daraus zu

$$p(x) = p(0) \cdot \binom{q}{x} \cdot \left(\frac{t}{1-t}\right)^x = p(0) \cdot \binom{q}{x} \cdot \left(\frac{A}{q-A}\right)^x \quad (4)$$

Die Gefahrzeit des Bündels je Zeiteinheit, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß alle v Leitungen gleichzeitig belegt sind, wird dann im Verlustsystem

$$g = p(v) = p(0) \cdot \binom{q}{v} \cdot \left(\frac{A}{q-A}\right)^v \quad (5)$$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle im System überhaupt auftretenden Zustände muß gleich 1 sein. Im Verlustsystem wird daher

$$\sum_{x=0}^{x=v} p(x) = p(0) \cdot \sum_{x=0}^{x=v} \binom{q}{x} \cdot \left(\frac{A}{q-A}\right)^x = 1 \quad (6)$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß keine Leitung belegt ist,

$$p(0) = \frac{1}{\sum_{x=0}^{x=v} \binom{q}{x} \cdot \left(\frac{A}{q-A}\right)^x} \quad (7)$$

Im Wartezeitsystem geht kein Belegungsversuch verloren. Die Gl. (3) bedeutet deshalb hier auch die mittlere Zahl der je Zeiteinheit aus einer Quelle ins Bündel gelangenden Belegungen. Auch im Wartezeitsystem kann man daher mit dieser Gleichung die Wahrscheinlichkeiten $p(x)_w$ der Gleichzeitigsbelegung eines vollkommenen Bündels aufstellen. Über die Wahrscheinlichkeit $p(v)_w$ hinaus, „gerade alle v Leitungen des Bündels belegt“, gibt es aber im Wartezeitsystem noch die Wahrscheinlichkeiten $s(1), \dots, s(z), \dots, s(q-v)$. Sie geben an, wie häufig außer den v Leitungen des Bündels gleichzeitig noch $1 \dots z \dots (q-v)$ Speicherglieder mit wartenden Versuchen belegt sind. Ihre Summe ist der mit Speicherbelegungen behaftete Anteil g_s der ganzen Gefahrzeit g_w .

$$g_s = \sum_{z=1}^{z=(q-v)} s(z) \quad (8)$$

Analog Gl. (4) und (6) ist dann im Wartezeitsystem

$$p(x)_w = p(0)_w \cdot \binom{q}{x} \cdot \left(\frac{A}{q-A}\right)^x, \quad (9)$$

$$p(0)_w \sum_{x=0}^v \binom{q}{x} \cdot \left(\frac{A}{q-A}\right)^x + g_s = 1, \quad (10)$$

$$p(0)_w = \frac{1-g_s}{\sum_{x=0}^v \binom{q}{x} \cdot \left(\frac{A}{q-A}\right)^x} = p(0) \cdot (1-g_s). \quad (11)$$

Mit Gl. (4), (9) und (11) ist dann

$$p(x)_w = p(x) \cdot (1-g_s) \quad (12)$$

die Wahrscheinlichkeit, daß x Leitungen eines vollkommenen Bündels im Wartezeitsystem gleichzeitig belegt sind.

Die Wahrscheinlichkeit, daß gerade v Leitungen belegt sind, der Speicher jedoch frei ist, wird dann mit Gl. (5) und (12)

$$s(0) = p(v)_w = g \cdot (1-g_s). \quad (13)$$

Dabei ist g die Gefahrzeit eines Verlustsystems mit gleichen Daten q , v und A , aber einer Leistung $y < A$.

Die gesamte Gefahrzeit im Wartezeitsystem ist also

$$g_w = s(0) + g_s = g \cdot (1-g_s) + g_s. \quad (14)$$

Im Verlustsystem ist die Leistung eines vollkommenen Bündels [2]:

$$y = \sum_{x=0}^{x=v} x \cdot p(x). \quad (15)$$

Im Wartezeitsystem ist die Leistung des Bündels gleich dem Angebot

$$\begin{aligned} A &= \sum_{x=0}^{x=v} x \cdot p(x)_w + v \cdot g_s \\ &= (1-g_s) \cdot \sum_{x=0}^{x=v} x \cdot p(x) + v \cdot g_s \\ &= (1-g_s) \cdot y + v \cdot g_s. \end{aligned} \quad (16)$$

Der erste Summand in Gl. (16) gibt die Bündelleistung außerhalb g_s , der zweite die Leistung der vollbelegten v Leitungen des Bündels während g_s an. Hierbei ist y die Leistung eines Verlustsystems mit gleichen Daten q , v , A .

Aus Gl. (16) erhält man

$$g_s = \frac{A-y}{v-y} \quad (17)$$

und damit aus Gl. (14)

$$g_w = \frac{v \cdot g + A \cdot (1-g) - y}{v-y} \quad (18)$$

und aus Gl. (12)

$$p(x)_w = p(x) \cdot \frac{v-A}{v-y}. \quad (19)$$

Von v gleichzeitig bestehenden Belegungen der mittleren Dauer t_m endigt im Mittel jeweils eine nach der Zeit $\frac{t_m}{v}$.

Der Wert

$$\beta_g = \frac{t_m}{v} \quad (20)$$

bedeutet deshalb im Verlustsystem die mittlere Breite der Gefahrzeitsspitzen [3].

Während der Zeit g_s wird im Wartezeitsystem sofort bei Endigen einer Belegung im Bündel einer der wartenden Versuche aus dem Speicher nachgeführt und die freigewordene Leitung wieder belegt.

Der Teil c_w aller c_A Belegungen, die über den Warte-speicher ins Bündel gelangen, den Speicher also während g_s wieder verlassen, ist danach

$$c_w = \frac{g_s}{v} = \frac{(A-y)}{(v-y)} \cdot \frac{v}{t_m} \quad (21)$$

also $g_s = c_w \cdot \frac{t_m}{v}$. (22)

Aus den Gl. (2), (12) bis (22) und den in [2] angegebenen Formeln für Verlustsysteme lassen sich für g_w , g_s , c_w , $p(x)_w$ noch zahlreiche gleichwertige Ausdrücke herleiten; z. B.

$$\begin{aligned} g_w &= \frac{v \cdot g \cdot (q-A)}{q \cdot (v-A) + A \cdot g \cdot (q-v)} = \frac{v \cdot g \cdot (1-t)}{v \cdot (1-g \cdot t) - A \cdot (1-g)} \\ &= \frac{v \cdot V_A \cdot (q-A)}{(v-y) \cdot (q-v)} = \frac{v \cdot V_L \cdot (1-t)}{(v-y) \cdot \left(1 + V_L - \frac{v \cdot t}{y}\right)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Für den Sonderfall $q = \infty$, $t = 0$ erhält man aus Gl. (18) oder (23)

$$g_w = \frac{v \cdot g}{v-y}. \quad (24)$$

Es läßt sich zeigen, daß Gl. (24) identisch ist mit der von A. K. Erlang [4] und C. Palm [5] hergeleiteten Formel

$$g_w = \frac{A^v \cdot v}{x! \cdot v - A} \cdot \frac{v}{\sum_{x=0}^{x=v-1} \frac{A^x}{x!} + \frac{A^v}{v!} \cdot \frac{v}{v-A}} \quad (25)$$

Ferner erhält man durch Umformung aus Gl. (13) und (21)

$$p(v)_w = s(0) \cdot g_s \cdot \frac{q}{(q-v)} \cdot \frac{(v-A)}{A} \quad (26)$$

und

$$c_w = g_w \cdot c_A \cdot \frac{(q-v)}{(q-A)}. \quad (27)$$

Als Wartehäufigkeit wird definiert

$$\gamma_w = \frac{c_w}{c_A} = g_w \cdot \frac{(q-v)}{(q-A)} = \frac{v}{A} \cdot \frac{(A-y)}{(v-y)} = \frac{v \cdot V_L}{(1+V_L) \cdot (v-y)} \quad (28)$$

Beispiele für den Verlauf der Gefahrzeiten g und g_w über der Bündelleistung wurden an anderer Stelle [2, 3] bereits angegeben. In Bild 1 ist der Verlauf der Wartehäufigkeit γ_w über der Bündelleistung aufgetragen. Bild 2 zeigt die Beziehung zwischen γ_w im Wartezeitsystem und V_L bzw. g im Verlustsystem gleicher Leistung am Beispiel eines Zehnerbündels.

3. Die Berechnung der mittleren Wartezeit und der Leistung des Wartegebirges

Im Wartezeitsystem interessiert besonders noch die mittlere Wartezeit t_w der über den Speicher verzögert ins Bündel gelangenden Versuche.

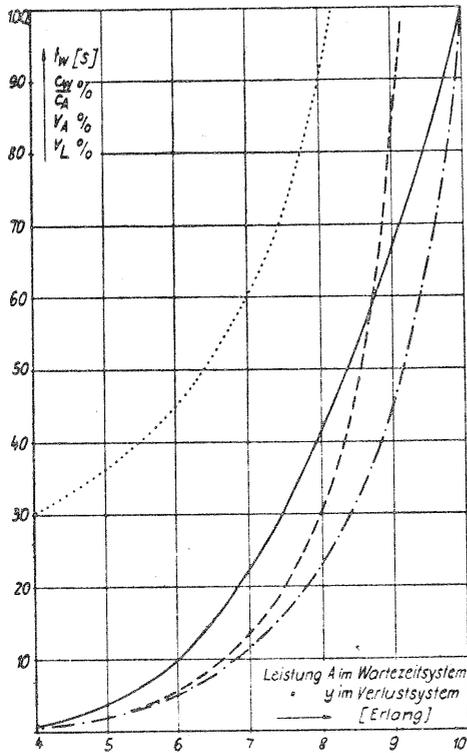


Bild 1. Wartehäufigkeit $\gamma_w = \frac{c_w}{c_A}$ als Funktion der Bündelleistung A eines Wartezeitsystems mit $q = \infty$ und $v = 10$. Zum Vergleich mittlere Wartezeit $t_w = f(A)$ bei $t_m = 3$ min, sowie Angebotsverlust V_A und Leistungsverlust V_L eines gleichgroßen Verlustsystems gleicher Bündelleistung y .

c_w t_w
 c_A
 V_A V_L

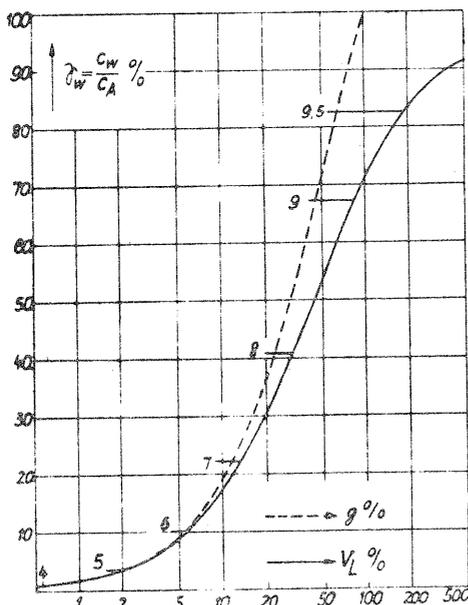


Bild 2. Die Wartehäufigkeit $\gamma_w = \frac{c_w}{c_A}$ eines Wartezeitsystems als Funktion des Leistungsverlustes $V_L = \frac{c_L}{c_A}$ und der Gefahrzeit g eines Verlustsystems gleicher Quellenzahl ($q = \infty$), Leitungszahl ($v = 10$) und Bündelleistung. Der Maßstab auf der Kurve gibt die Bündelleistung in Erlang an

Das Produkt aus mittlerer Wartezeit t_w und der Zahl der je Zeiteinheit wartenden Versuche c_w wird als „Wartegebirge“ oder als „Warteleistung“ Ω des Speichers bezeichnet.

$$\Omega = c_w \cdot t_w \quad (29)$$

Die Belegungen der Speicherglieder entstehen durch Schwankungen der Verkehrsdichte A um ihren Mittelwert so weit nach oben, daß die einfallenden Versuche vom Bündel nicht mehr sofort aufgenommen werden können. Es entsteht deshalb kein zusammenhängendes Wartegebirge, sondern eine Anzahl von „Teilgebirgen“ oder „Wartespitzen“ je Zeiteinheit. Die Breite dieser Wartespitzen ist nicht gleich der mittleren Breite β_g der Gefahrzeitsspitzen im Verlustsystem, sondern setzt sich aus einer Mehrzahl solcher Spitzen zusammen, je nachdem, wieviel wartende Versuche ein Teilgebirge bilden. Daneben können auch Spitzen der mittleren Breite β_g auftreten, in die kein Versuch einfällt, die also nur zum Wert $s(0)$ beitragen. Die gesamte Basisbreite aller Wartespitzen je Zeiteinheit ist der mit Speicherbelegungen behaftete Anteil g_s der Gefahrzeit [vgl. Bild 3 und Gl. (22)].

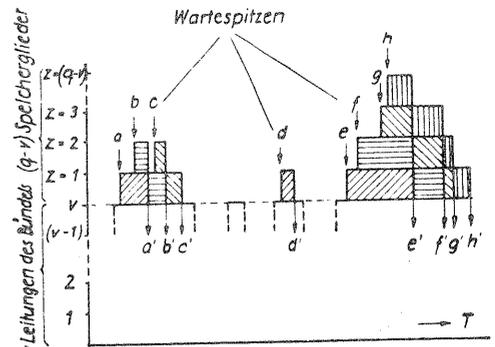


Bild 3. Skizze des Aufbaus der Wartespitzen während der Gefahrzeitschnitte

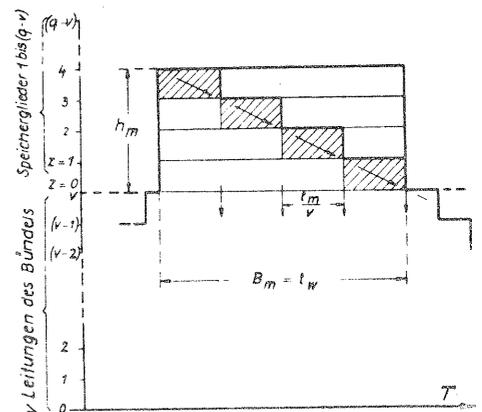


Bild 4. Skizze zur Berechnung der mittleren Wartezeit t_w . Abstieg eines im Speicher wartenden Versuchs aus mittlerer Höhe (Gleichzeitigkeit) h_m ins Bündel

Die Zahl der Wartespitzen je Zeiteinheit werde mit z_s bezeichnet. Dann ist die mittlere Breite (Dauer) einer Wartespitze

$$B_m = \frac{g_s}{z_s} \quad (30)$$

Die mittlere Höhe h_m der Wartespitzen erhält man als Höhe eines Rechtecks der Fläche Ω über der Basis g_s oder eines Rechtecks der Fläche Ω über der Basis B_m (vgl. Bild 4). Der Wert h_m gibt dann außerdem an,

wieviel Versuche während g_s im Mittel gleichzeitig im Speicher warten. Aus Bild 4 geht hervor, daß B_m auch betragsgleich der mittleren Wartezeit t_w ist, welche ein im Speicher wartender Versuch benötigt, um aus mittlerer Gleichzeitigkeit h_m ins Bündel abzustiegen.

$$t_w = B_m = \frac{g_s}{z_s} \quad (31)$$

g_s ist aus Gl. (17) bekannt. Es muß noch z_s berechnet werden.

Während der Gefahrzeit g_w speisen v Quellen das Leitungsbündel und sind im Mittel $\frac{\Omega}{g_w}$ Quellen gleichzeitig mit Speichergliedern verbunden. Also sind während g_w im Mittel $(q - v - \frac{\Omega}{g_w})$ Quellen ganz frei, d. h. weder wartend noch sprechend.

Die mathematische Erwartungszahl der je Zeiteinheit und freie Quelle während g_w in den Speicher — nicht ins Bündel! — einfallenden Versuche heiße m_s . Insgesamt fallen in dieser Zeit c_w Versuche in den Speicher ein. Es ist also

$$c_w = m_s \cdot g_w \cdot \left(q - v - \frac{\Omega}{g_w} \right) \quad (32)$$

oder mit dem Gl. (27, 29)

$$m_s = \frac{c_w}{g_w \cdot (q - v) - c_w \cdot t_w} = \frac{c_A}{q \cdot A - c_A \cdot t_w} \quad (33)$$

Auch andersartige und ausführlichere Herleitungen führen zu demselben Ergebnis.

Eine Wartespitze beginnt in der Zeiteinheit ebensooft, als in den Zustand $s(0)$ „gerade v Leitungen belegt, Speicher noch leer“, ein Versuch aus den $(q - v)$ Quellen einfällt, die zu diesem Zeitpunkt weder sprechen noch warten. Die Zahl der Wartespitzen ist also

$$z_s = m_s \cdot s(0) \cdot (q - v) \quad (34)$$

und mit Gl. (31)

$$t_w = \frac{g_s}{z_s} = \frac{g_s}{s(0) \cdot m_s \cdot (q - v)} \quad (35)$$

Mit den Gl. (26) und (27) für $s(0)$ und c_w erhält man aus Gl. (35) die mittlere Wartezeit

$$t_w = \frac{t_m \cdot (q - A)}{q \cdot (v - A) + A} = \frac{t_m \cdot (1 - t)}{v - A + t} \quad (36)$$

Erlang [4] und Palm [5] haben t_w für den Sonderfall unendlich großer Quellenzahl ($q = \infty, t = 0$) berechnet. Setzt man diese Werte in Gl. (36) ein, so erhält man ebenfalls die Erlang-Palmsche Gleichung

$$t_w = \frac{t_m}{v - A} \quad (37)$$

Für die maximale Bündelleistung $A = v$ errechnet sich die maximale Wartezeit aus Gl. (36)

$$t_w(\max) = (q - v) \cdot \frac{t_m}{v} = t_m \cdot \frac{1 - t}{t} \quad (38)$$

und aus Gl. (37)

$$t_w(\max) = \infty \quad (39)$$

Für $q = (v + 1)$ kann nie mehr als ein Versuch gleichzeitig warten, es muß also unabhängig von der Bündelleistung A die mittlere Wartezeit stets gleich der mittleren Dauer β_g bis zum Endigen einer Belegung

des vollbesetzten Bündels sein. Die Gl. (36) erfüllt diese Forderung. Es wird mit $q = (v + 1)$

$$t_w = \frac{t_m \cdot (v + 1 - A)}{(v + 1) \cdot (v - A) + A} = \frac{t_m}{v} = \beta_g \quad (40)$$

Für $A = 0$ wird aus Gl. (40) ebenfalls

$$t_w(\min) = \frac{t_m}{v} = \beta_g \quad (41)$$

Der kleinste Mittelwert, den t_w in einem Wartezeitsystem annehmen kann, ist also $\frac{t_m}{v}$.

Für die Leistung des Wartegebirges erhält man aus den Gl. (27) und (36)

$$\Omega = c_w \cdot t_w = g_w \cdot \frac{A \cdot (q - v)}{q \cdot (v - A) + A} \quad (42)$$

Für $q = \infty$ und $t = 0$ ergibt sich wieder die Formel von Palm und Erlang

$$\Omega = g_w \cdot \frac{A}{v - A} \quad (43)$$

Für maximale Bündelleistung $A = v$ wird aus Gl. (42)

$$\Omega_{\max} = (q - v) \quad (44)$$

und aus Gl. (43)

$$\Omega_{\max} = \infty \quad (45)$$

Für $A = 0$ wird $\Omega = 0$.

Wie für g_w und c_w können auch für Ω weitere gleichwertige Formeln aus Gl. (2), (12) bis (22) und den Gleichungen in [2] gewonnen werden.

Man kann die mittlere Wartezeit auch auf alle c_A , nicht nur auf die c_w verzögerten Belegungen beziehen. Dieser Wert ergibt sich dann zu

$$t_{wa} = \frac{\Omega}{c_A} \quad (47)$$

Für $q = \infty$ ist mit Gl. (43), wie bei Erlang und Palm,

$$t_{wa} = g_w \cdot \frac{t_m}{v - A} = g_w \cdot t_w \quad (48)$$

Die Verkehrsgrößen $g_w, g_s, \gamma_w, \Omega$ sind unabhängig von der mittleren Belegungsdauer t_m . Dagegen ist die mittlere Wartezeit t_w linear von t_m abhängig. Für Berechnungsunterlagen und Diagramme ist es erwünscht, auch die mittlere Wartezeit aus einer von t_m unabhängigen Größe einfach zu berechnen.

Es werden deshalb noch die folgenden Größen eingeführt:

$$\frac{t_w}{t_m} = \tau_w \quad \text{relative (mittlere) Wartezeit.} \quad (49)$$

$$\frac{t_m}{t_w} = \frac{1}{\tau_w} = \delta_w \quad (50)$$

Je größer γ_w und τ_w , desto geringer ist die Verkehrsgüte eines Wartezeitsystems. Man kann deshalb als weiteres Maß für die Verkehrsgüte eines Wartezeitsystems die relative (mittlere) Warteleistung

$$\rho_w = \frac{c_w}{c_A} \cdot \frac{t_w}{t_m} = \gamma_w \cdot \tau_w = \frac{\Omega}{A} \quad (51)$$

eingeführen.

Zu dem Unbehagen, welches ein Teilnehmer bei unzureichender Verkehrsgüte empfindet, dürfte allerdings die relative Wartezeit τ_w mehr beitragen als die Wartezeit t_w .

τ_w bzw. dessen Kehrwert δ_w läßt den Teilnehmer unmittelbar empfinden, wieviel Zeit er mit nutzlosem Warten zubringen muß, verglichen mit der nutzbringenden Dauer seiner Nachrichtenübermittlung.

Das Verteilungsgesetz der Wartezeiten um ihren Mittelwert t_w wurde schon von A. Jensen [4] und von E. C. Molina [6] hergeleitet. Der Anteil der c_w wartenden Belegungen, welche die Zeit „T und länger“ warten, ist

$$P_w(>T) = e^{-\frac{T}{t_w}} \quad (52)$$

Der Anteil aller c_A Belegungen, welche die Zeit „T und länger“ warten, ist danach

$$P_A(>T) = \gamma_w \cdot e^{-\frac{T}{t_w}} \quad (53)$$

Zum Abschluß der theoretischen Betrachtungen sei noch die Wartezeittheorie von F. Lubberger [7] erwähnt. Lubberger rechnet nur den Sonderfall $q = c_A$ und $t = t_m$. Als mathematische Erwartungszahl für den Belegungseinfall je Quelle und Zeiteinheit ins Bündel oder in den Wartespeicher verwendet er stets die Gl. (3). Für die Einfälle in den Speicher gilt aber Gl. (33). Es werden deshalb g_w und Ω zu klein berechnet. Für kleine Belegungswahrscheinlichkeiten (z. B. $t = \frac{1}{4}$) kann dieser Fehler vernachlässigt werden. Seine graphisch ermittelte Formel für c_w gibt dagegen zu große Werte. Die mittlere Wartezeit t_w wird nur mittelbar bestimmt aus

$$t_w = \frac{\Omega}{c_w}$$

Da Ω zu klein, c_w zu groß berechnet wird, ergeben sich für t_w zu kleine Werte. Die angegebenen Rechenverfahren sind überdies sehr zeitraubend.

Als Ergebnis der neuen Herleitungen wird festgestellt:

Ist für ein vollkommenes Bündel mit der Leitungszahl v , der Quellenzahl q oder Belegungswahrscheinlichkeit t , sowie dem Angebot A , außerdem mindestens einer der resultierenden Werte y , g , V_A oder V_L im Verlustsystem bekannt, so erhält man durch einfache Umrechnung daraus die Verkehrsgrößen g_w , g_s , γ_w , Ω , c_w des entsprechenden Wartezeitsystems mit der Bündelleistung A . Die Größen t_s , τ_w und δ_w können aus q , v , A und t_m unmittelbar und ebenfalls einfach errechnet werden.

Man kann selbstredend den Rechnungsgang auch umkehren und die unbekanntenen Größen eines Verlustsystems aus denjenigen eines Wartezeitsystems bestimmen.

Im folgenden Abschnitt wird die Anwendung der Theorie auf die Praxis behandelt.

4. Diagramme und Anwendungsbeispiele

Bild 5 und 6 zeigen Beispiele für die Abhängigkeit der mittleren Wartezeit t_w von der Bündelleistung A , Quellenzahl q und mittleren Belegungsdauer t_m . Die kleinsten Werte von t_m in Bild 6 können in einem Bündel

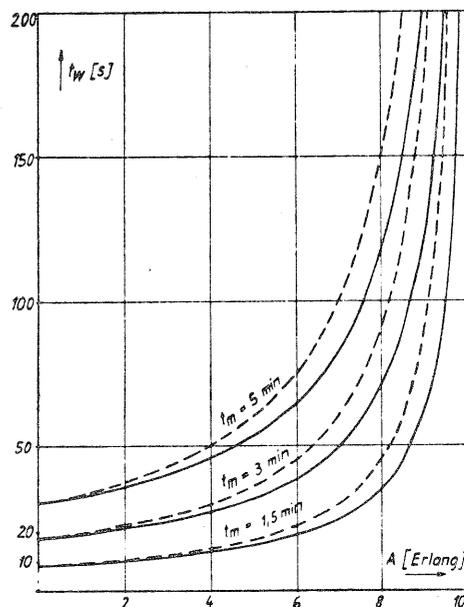


Bild 5. Mittlere Wartezeit t_w als Funktion der Leistung A eines Bündels mit $v = 10$ Leitungen bei verschiedenen Werten der mittleren Belegungsdauer t_m
 mit $q = \infty$ Verkehrsquellen
 mit $q = 50$ Verkehrsquellen

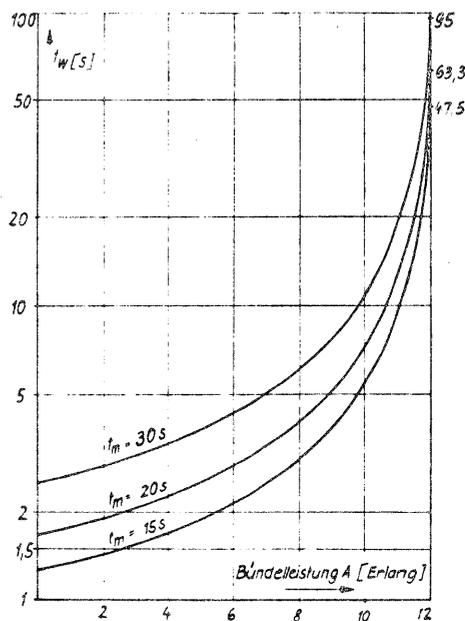


Bild 6. Mittlere Wartezeit t_w als Funktion der Leistung A eines Bündels mit $v = 12$ Leitungen und $q = 50$ Verkehrsquellen bei verschiedenen sehr kleinen Werten der mittleren Belegungsdauer t_m

zentraler Glieder (z. B. Markierer, Umrechner, Verzoner) eines Wartezeitsystems vorkommen.

Diagramme wie in Bild 7 bis 12 werden besonders häufig in der Praxis anwendbar sein.

In Bild 7 begrenzt eine gestrichelte Gerade das Kennlinienfeld nach links bei derjenigen Bündelleistung A , für die der vorgeschriebene Wert $t = \frac{A}{q}$ die kleinst-

mögliche Wartezeit $t_w(\min) = \frac{t_m}{v}$, also das größte Verhältnis $\frac{t_m}{t_w} = v = \delta_w(\max)$ ergibt.

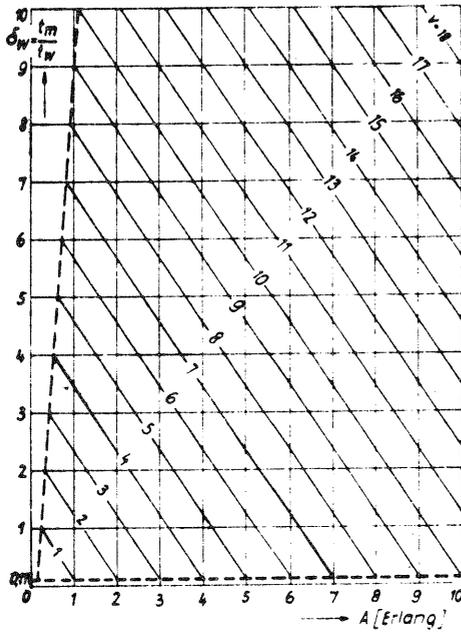


Bild 7. $\delta_w = \frac{t_m}{t_w}$ als Funktion der Bündelleistung A bei einer Belegungswahrscheinlichkeit $t = \frac{1}{10}$ und mit der Leitungszahl v als Parameter

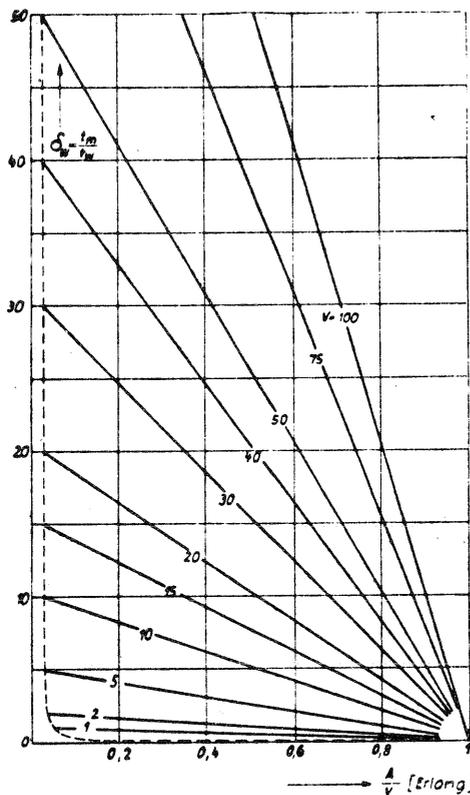


Bild 8. $\delta_w = \frac{t_m}{t_w}$ als Funktion der mittleren Leistungsbelastung $\frac{A}{v}$ bei einer Belegungswahrscheinlichkeit $t = \frac{1}{40}$ mit der Leitungszahl v als Parameter

Nach unten wird das Kennlinienfeld durch eine Parallele zur Abszissenachse begrenzt, welche durch den kleinstmöglichen Wert $\delta_w = \frac{t_m}{t_w}$, also die maximale Wartezeit, bestimmt wird.

Beispiel 1:

Eine Zubringergruppe von 70 Wählern werde durch ein zugehöriges Bündel mit 12 zentralen Schaltgliedern eingestellt und belaste dieses mit 7 Erlang. Dann ist $q = 70$, $A = 7$ Erlang, $t = \frac{7}{70} = \frac{1}{10}$ und $v = 12$. Die mittlere Belegungsdauer der zentralen Glieder sei $t_m = 18$ s.

Bild 7 ergibt $\frac{t_m}{t_w} = 5,8$, also $t_w = \frac{18}{5,8} = 3,1$ s.

Die Leistung eines Verlustsystems gleicher Daten q, v, A wäre $y = 6,85$ Erlang. Daraus ergibt sich mit Gl. (28) eine Wartehäufigkeit

$$\gamma_w = \frac{v \cdot (A - y)}{A \cdot (v - y)} = \frac{12 \cdot (7 - 6,85)}{7 \cdot (12 - 6,85)} = 0,05.$$

D. h. 5% aller Belegungen der Zubringergruppe werden durch die zentralen Schaltglieder nicht wartezeitlos abgefertigt und müssen im Mittel 3,1 s warten.

In Bild 8 wird $\delta_w = \frac{t_m}{t_w}$ als Funktion der mittleren Leistungsbelastung $\frac{A}{v}$ dargestellt ($t = \frac{1}{40}$). Die Kennlinienschar mit v als Parameter wird hier durch eine gestrichelte Kurve begrenzt. Links der Kurve ist $q < (v - 1)$, also $A = q \cdot t < (v - 1) \cdot t$, es können also keine Wartezeiten mehr auftreten.

Beispiel 2

Die Deutsche Bundespost zieht in Erwägung, ein Motorwählersystem für Ortsämter einzuführen, bei dem in der Vorwahlstufe jeweils eine Gruppe von 200 Teilnehmern durch ein Bündel von Anrufsuchern (AS) „vollkommen“ abgesucht wird. Betreibt man die Vorwahlstufe mit Besetztabschaltung während der Gefahrzeit des AS-Bündels, so handelt es sich um ein Verlustsystem. Für eine Verkehrsgüte von $V_L = 1\%$ ergibt sich dann unter der Annahme von $t = \frac{1}{40}$ ein Bedarf von z. B. $v = 10$ AS bei $y = 4,5$ Erlang.

Verzichtet man auf Besetztabschaltung, so arbeitet die Vorwahlstufe als Wartezeitsystem. Es ist also $A = 4,5$ Erlang, $v = 10$, $\frac{A}{v} = 0,45$ und $t = \frac{A}{q} = \frac{4,5}{200} \approx \frac{1}{40}$. Aus Bild 8 erhält man hierfür $\delta_w = \frac{t_m}{t_w} = 5,7$.

Erfahrungsgemäß ist $t_m \approx 100$ s. Die mittlere Wartezeit verzögerter abgefertigter Anrufe ergibt sich daraus zu $t_w = \frac{t_m}{\delta_w} = 17,5$ s.

Im Verlustsystem wäre beim Angebot $A = 4,5$ Erlang und $v = 10$ die Leistung $y = 4,455$ Erlang. Also ist die Wartehäufigkeit nach Gl. (28)

$$\gamma_w = \frac{v \cdot (A - y)}{A \cdot (v - y)} = \frac{10 \cdot 0,045}{4,5 \cdot 5,545} = 0,018,$$

d. h. 1,8% aller Anrufe müssen im Mittel 17,5 s warten, bevor sie von einem frei werdenden AS zum I. GW durchverbunden werden, Amtszeichen erhalten und wählen dürfen.

Bild 9 zeigt ebenfalls den Verlauf von $\delta_w = \frac{t_m}{t_w} = f\left(\frac{A}{v}\right)$, jedoch mit A als Parameter. Die Kennlinienschar wird durch dieselbe Kurve wie in Bild 8 begrenzt. Sie ist nicht sichtbar, weil die Abszisse nur Werte $\frac{A}{v} > 0,25$ darstellt.

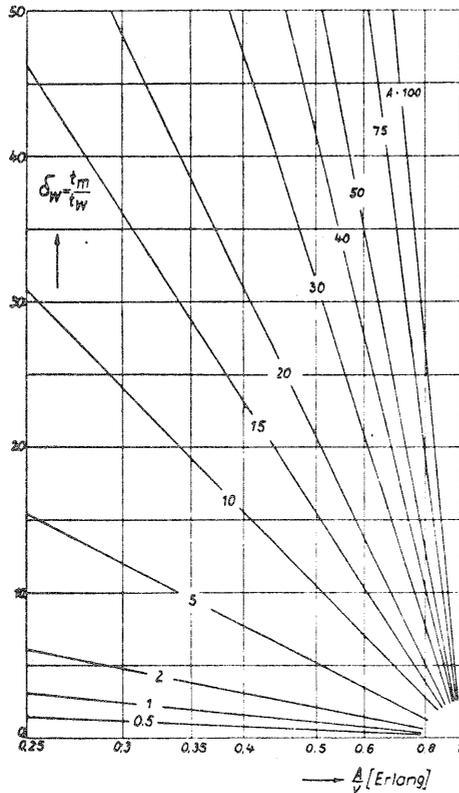


Bild 9. $\delta_w = \frac{t_m}{t_w}$ als Funktion der mittleren Leistungsbelastung A bei einer Belegungswahrscheinlichkeit $t = \frac{1}{40}$ mit der Bündelleistung A als Parameter

Beispiel 3:

In dem gleichen Motorwähleramt wie in Beispiel 2, betrieben als Wartezeitsystem, wird für $A = 4,5$ Erlang eine mittlere Wartezeit der verzögert abgefertigten Anrufe von $t_w = 12$ s verlangt. Mit $t_m \approx 100$ s wird $\delta_w = \frac{t_m}{t_w} = 8,34$ und damit aus Bild 9 $\frac{A}{v} \approx 0,38$, also $v = \frac{4,5}{0,38} \approx 12$ AS.

Beispiel 4:

Dasselbe Amt wie in Beispiel 2 und 3 wird in der Vorwahlstufe als Verlustsystem betrieben. Die AS werden jedoch aus Ersparnisgründen für einen Leistungsverlust von $V_L = 2\%$ bemessen. Für $y = 4,5$ Erlang werden dann rd. $v = 9$ AS benötigt.

Als Wartezeitsystem mit der Leistung $A = 4,5$ Erlang betrieben, ergibt sich für $v = 9$ und $\frac{A}{v} = 0,5$ aus

Bild 8 $\delta_w = \frac{t_m}{t_w} = 4,8$, also bei $t_m \approx 100$ s eine mittlere Wartezeit $t_w = \frac{100}{4,8} = 20,85$ s.

Die Wartehäufigkeit errechnet sich wieder mit Hilfe der Leistung y im Verlustsystem. Bei $v = 9$ und einem Angebot von 4,5 Erlang wäre $y \approx 4,39$ Erlang.

Mithin $\gamma_w = \frac{v \cdot (A - y)}{A \cdot (v - y)} \approx 0,048$, d. h. 4,8 %.

Ein Verlust von $V_L = 2\%$ bedeutet, daß der Teilnehmer im Mittel bei 100 abgehend geführten Gesprächen in der HVST zweimal beim Abheben Besetzzeichen erhält und den Versuch wiederholen muß.

Er wird einen Verlust von 2 % sicher als tragbar empfinden. Gibt man den Teilnehmern dagegen die Mög-

lichkeit, zu warten, bis ein AS frei wird, so wird in Beispiel 2 $t_w = 17,50$ s, $\gamma_w = 1,8\%$ und in Beispiel 4 $t_w = 20,85$ s, $\gamma_w = 4,8\%$. Vermutlich werden bei diesen Wartezeiten viele Teilnehmer ungeduldig werden, vor dem Erfolg verzichten und den Versuch in der Hoffnung auf wartezeitlose Abfertigung wiederholen. Es entsteht dann ein gemischter Wartezeit-Verlustbetrieb, bei dem die primär geforderte Leistung 4,5 Erlang teils durch Wiederholungen, teils durch Warten durchgesetzt wird.

Die tatsächliche mittlere Wartezeit liegt dann zwischen dem errechneten Wert t_w (0 % Verzichte) und dem Wert t_w^m ($\approx 100\%$ Verzichte). Rechnet man zur Wartehäufigkeit alle Anrufe, die während der Gefahrzeit eintreffen, gleichgültig ob der Teilnehmer wartet oder verzichtet, so bewegt sich γ_w zwischen dem errechneten

Wert $\frac{c_w}{c_A}$ (0 % Verzichte) und dem Leistungsverlust $V_L = \frac{b}{c_L}$ bei reinem Verlustbetrieb (100 % Verzichte).

Dabei ist $c_A \equiv c_L$ aufzufassen als die Zahl der in jedem Fall geleisteten Belegungen und b als Zahl der Besetztfälle mit sofortigem Verzicht, welche an Stelle der c_w Wartefälle tritt.

Man sieht, daß bei Motorwählerämtern der in Beispiel 2 bis 4 beschriebenen Art und bei üblichen Verkehrswerten von 4 bis 5 Erlang je 200er-Gruppe die mittlere Wartezeit t_w zwischen 15 und 25 s liegt. Man wird also mit Verzichten wartender Teilnehmer rechnen müssen und auch ohne Besetztabstaltung einen gemischten Verlust-Wartezeitbetrieb erhalten.

Ein Vorteil dieser Betriebsweise liegt darin, daß mindestens ein größerer Teil der Fernsprechteilnehmer mit der Zeit erkennen wird, daß er bei geduldigem Abwarten im Mittel ebensogut bedient wird. Der in [2] beschriebene „unruhige Verkehr“ eines reinen Verlustsystems wird dadurch in erträglichen Grenzen gehalten.

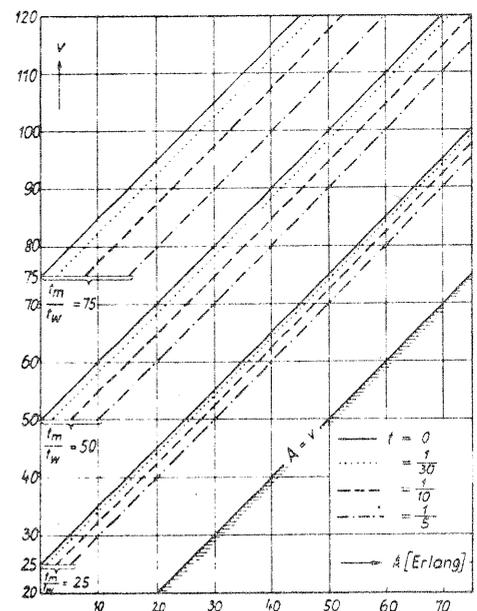


Bild 10. Leitungszahl v als Funktion der Bündelleistung A für verschiedene Werte $\delta_w = \frac{t_m}{t_w}$ mit der Belegungswahrscheinlichkeit t als Parameter

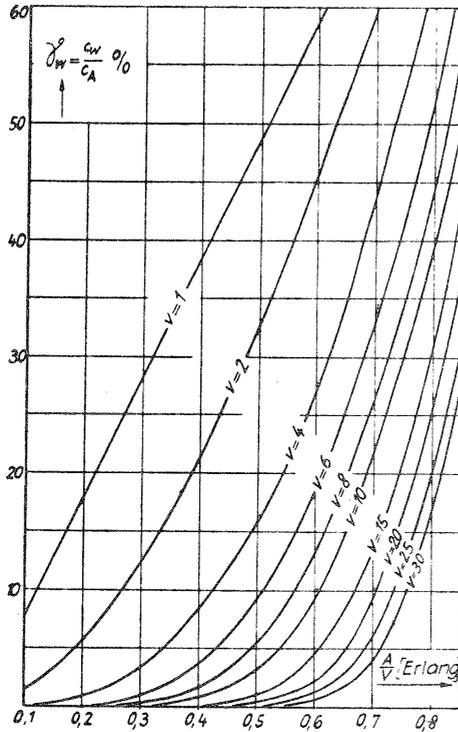


Bild 11. Wartehäufigkeit $\gamma_w = \frac{c_w}{c_A} \%$ als Funktion der mittleren Leistungsbelastung $\frac{A}{v}$ mit der Leitungszahl v als Parameter (Belegungswahrscheinlichkeit $t = \frac{1}{40}$).

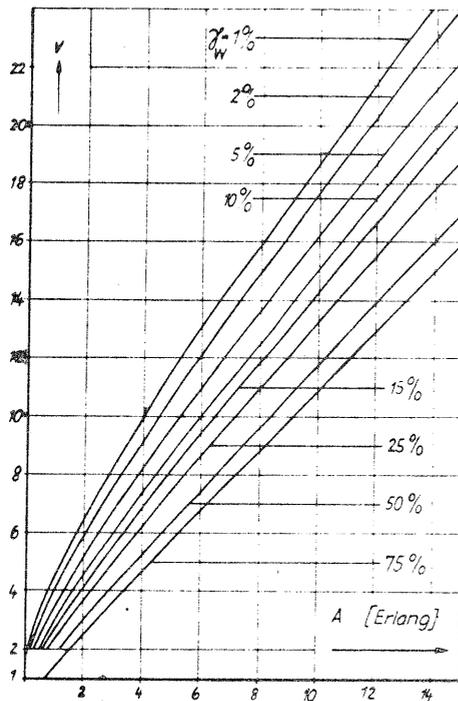


Bild 12. Bündelgröße v als Funktion der Bündelleistung A mit verschiedenen Werten der Wartehäufigkeit $\gamma_w = \frac{c_w}{c_A}$ als Parameter (Belegungswahrscheinlichkeit $t = \frac{1}{40}$)

Geht man für die Leitungsbemessung eines Wartezeitsystems mit bekanntem t_m davon aus, daß ein bestimmter Wert von t_w eingehalten werden muß, so kann man auch die in Bild 10 gezeichneten Kennlinienscharen $v = f(A)$ für $\delta_w = \frac{t_m}{t_w} = \text{const}$ verwenden.

Beispiel 5:

Es ist $A = 40$ Erlang, $t = \frac{1}{8}$ und $t_m = 120$ s. Es soll $t_w = 5$ s sein, also $\frac{t_m}{t_w} \approx 25$. Dann werden $v = 60$ Leitungen benötigt.

Es ist $v = 90$, $t = \frac{1}{10}$, $t_m = 3 \text{ min} = 180$ s. Es soll $t_w = 2.4$ s sein, dann ist $\frac{t_m}{t_w} = 75$, und die zulässige Bündelleistung beträgt $A = 23$ Erlang.

Die drei Kennlinienscharen in Bild 10 sind nach unten durch eine horizontale Gerade $v = \frac{t_m}{t_w}$ begrenzt, denn nach Gl. (41) sind Werte $v < \frac{t_m}{t_w}$ nicht möglich.

Interessiert für die Leitungsbemessung eines Wartezeitsystems in erster Linie die Wartehäufigkeit γ_w , so benutzt man die Funktionen $\gamma_w = f\left(\frac{A}{v}\right)$ und $v = f\left(\frac{A}{v}\right)$, wie sie in Bild 11 und 12 für $t = \frac{1}{40}$ dargestellt sind.

Beispiel 6:

Es wird bei $v = 6$ Leitungen eine Wartehäufigkeit von 20% vorgeschrieben. Die zulässige Belastung ist dann nach Bild 11 $\frac{A}{v} = 0.61$, mithin die Bündelleistung $A = 3.66$ Erlang.

Beispiel 7:

Gegeben $A = 10.4$ Erlang, gesucht v bei $\gamma_w = 2\%$. Nach Bild 12 wird $v = 18$ Leitungen.

Bild 13 vergleicht am Beispiel eines Bündels mit $v = 10$ Leitungen die relative Wartezeit τ_w mit dem Leistungsverlust V_L und der Gefahrzeit g eines Verlustsystems gleicher Größe und Bündelleistung. Diese Art der Darstellung gestattet es, für die Verkehrsgüte

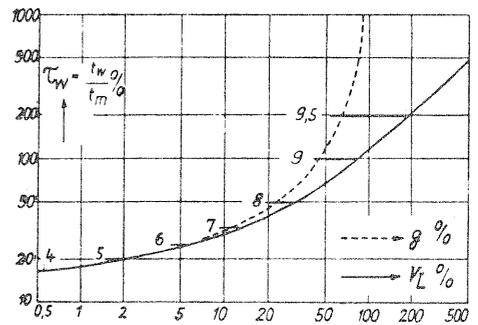


Bild 13. Relative (mittlere) Wartezeit τ_w eines Wartezeitsystems als Funktion der Verkehrsgrößen: Verlust V_L und Gefahrzeit g eines Verlustsystems gleicher Quellenzahl ($q = \infty$), Leitungszahl ($v = 10$) und Bündelleistung ($A = y$). Der Maßstab auf den Kurven gibt die Bündelleistung in Erlang an

eines Verlustsystems, ausgedrückt in V_L oder g , unmittelbar die entsprechende Verkehrsgüte eines Wartezeitsystems gleicher Leitungszahl und Leistung, ausgedrückt in τ_w , abzulesen [vgl. $\gamma_w = f(V_L)$, $f(g)$ in Bild 2)].

Bild 14 zeigt ein Beispiel für die Abhängigkeit der Leistung Ω des Wartebirges von der Bündelleistung A . Zum Vergleich sind außerdem die Funktionen $\rho_w = f(A)$ und $\tau_w = f(A)$ eingezeichnet.

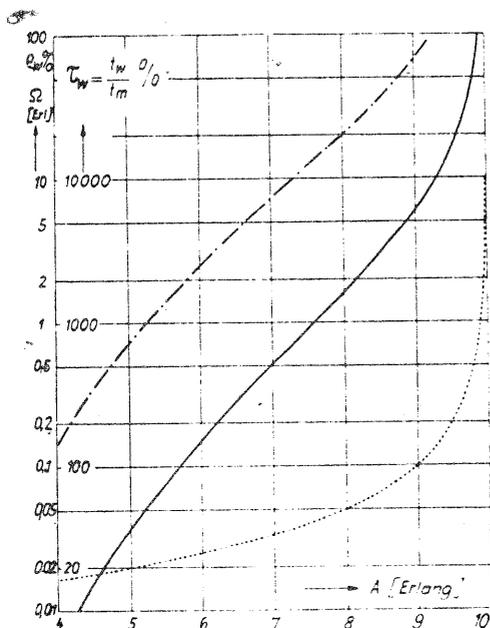


Bild 14. Leistung Ω des Wartegebirges, relative Warteleistung $\frac{g_w}{g_m}$ und relative Wartezeit $\frac{t_w}{t_m}$ als Funktion der Bündelbelastung A am Beispiel eines Bündels mit $q = \infty$, $v = 10$

Beispiel 8:

Es sollen die Verluste berechnet werden, welche durch den zentralen Markierer eines vorwärtsgesteuerten Wählsystems mit begrenzter Wartemöglichkeit vor dem Markierer entstehen können. Aufgabe des Markierers sei es, auf Anforderung eines Zubringerschaltgliedes (Wählers) diejenige Leitung oder Leitungsgruppe zu markieren, auf welche sich der Wähler vor Eintreffen der nächsten Ziffer einstellen soll. Wartezeit t_w und Abfertigungszeit t_M durch den Markierer (einschl. Einstellzeit des Wählers) müssen also innerhalb einer Zeit von rd. 500 ms liegen.

Die vom Markierer ($v = 1$) bediente Gruppe von q Zubringerschaltgliedern bildet dessen Verkehrsquellen. Sicher ist $q > 1$. Es kann deshalb mit den Gleichungen für $q \rightarrow \infty$ und $t \rightarrow 0$ gerechnet werden. Dann ist $g_w = g_m$, wie aus Gl. (8) leicht herzuleiten. Außerdem ist für $v = 1$ die Leistung des Wartezeitsystems $A = g_w$, also $g_w = A$.

Dem Markierer sollen z. B. stündlich 9000 Belegungen zugeführt werden. Die mittlere Markierdauer sei $t_M = 100$ ms. Die Markiererleistung ist dann

$$A_M = 9000 \cdot \frac{0,1}{3600} = 0,25 \text{ Erlang.}$$

Also wird die Wartehäufigkeit

$$g_w = A_M = 0,25 \text{ oder } 25\%.$$

Die mittlere Wartezeit wird mit Gl. (37)

$$t_w = \frac{100}{1 - 0,25} = 133,33 \text{ ms.}$$

Eine Belegung kann im Mittel nicht länger als 400 ms mit Aussicht auf Erfolg warten, weil sonst vor beendeter Markierung die nächste Ziffer eintrifft und die Verbindung ausgelöst wird.

Der Anteil aller Belegungen, welcher länger als 400 ms wartet, ergibt sich aus Gl. (53) zu

$$P_{1(>400)} = g_w \cdot e^{-\frac{400}{133,33}} = 0,0125 \text{ oder } 1,25\%.$$

In der Praxis wird dieser Anteil der Belegungen zwangsweise noch vor oder während der Markierung ausgelöst und vom Anrufer deshalb wiederholt werden. Wird die Wiederholung wartezeitlos abgefertigt, so bedeutet die vorzeitige Auslösung der Erstbelegung eine geringe Entlastung des Wartegebirges; muß sie aber bei Wiederholung erneut warten, so bedeutet dies u. U. eine geringe Mehrbelastung des Wartegebirges.

Die beiden Störungsfunktionen arbeiten gegeneinander und werden bei den hohen Verkehrsgütern, welche für einen Markierer stets gefordert werden, den Wert $P_{1(>400)}$ nur ganz geringfügig beeinflussen. Der oben errechnete Wert für $P_{1(>400)}$ stellt deshalb in guter Näherung den Leistungsverlust $V_{L,M}$ dar, welchen das Zubringerbündel durch den Markierer erleidet.

In einer früheren Veröffentlichung von B. Fischer [8] wird dasselbe Problem behandelt und auf anderem Wege berechnet. Es ergibt sich dort für das gleiche Beispiel ein Verlust von nur 0,244 ‰. Was ist die Ursache dieser unterschiedlichen Ergebnisse?

Da der Speicher im Mittel alle 100 ms eine weitere Belegung abfertigen kann, wird von Fischer angenommen, daß nur diejenigen Belegungen, welche bei ihrer Ankunft vier und mehr Wartende im Speicher vor sich haben, länger als 400 ms warten und vorzeitig ausgelöst werden.

Diese Näherungsannahme scheint nicht richtig zu sein. Auch von dem weit höheren Anteil der Belegungen, welcher nur drei oder weniger Wartende bei seinem Eintreffen vor dem Markierer vorfindet, wird eine gewisse Anzahl wegen der Schwankungen der Markierzeit um ihren Mittelwert t_M länger als 400 ms warten.

Die rd. 0,244 ‰ aller Belegungen tragen daher zum Mittelwert der Wartezeit, erzeugt durch 25 ‰ aller Belegungen, nur unwesentlich bei. Zur Abschätzung des Fehlers sei deshalb angenommen, daß ohne diese Belegungen die mittlere Wartezeit statt 133,33 ms nur $t'_w = 132$ ms betrage. Dann ist näherungsweise

$$P'_{1(>400)} = g_w \cdot e^{-\frac{400}{132}} = 0,25 \cdot 0,0484 = 0,0122 \text{ oder } 1,22\%.$$

Dieser Anteil der Belegungen, die bei ihrem Eintreffen höchstens drei Wartende vor dem Markierer vorfinden und dennoch länger als 400 ms warten, ist von Fischer bei der Berechnung des Verlusts nicht berücksichtigt.

Der Ableitung der Gl. (37) für t_w und der Gl. (53) für die Verteilung der Wartezeiten liegt allerdings die Annahme zugrunde, daß die Belegungsdauer t_m , hier t_M , ebenfalls den Mittelwert einer Verteilungsfunktion darstellt, für die

$$p(>t) = e^{-\frac{t}{t_M}}$$

den Anteil aller Belegungsdauern „ t und größer“ angibt. In Wirklichkeit wird die Markierdauer t_M , einschließlich der darin enthaltenen Einstellzeit des Zubringerschaltgliedes auf die markierte Leitung, meist weniger um ihren Mittelwert t_M streuen, als dieser Verteilungsfunktion entspricht. Damit werden auch die mittlere Wartezeit t_w und der Anteil $P_{1(>400)}$ etwas kleiner werden als errechnet. Die Bestimmung der Verluste nach Gl. (53) enthält insofern eine gewisse Sicherheit. Dagegen werden die Verluste nach dem in [8] angegebenen Verfahren sicher zu klein berechnet.

Beispiel 9:

Auch der Leitungsbedarf des handvermittelten Ferndienstes kann mit der Wartezeittheorie berechnet werden (Bild 15). Die Deutsche Bundespost unterscheidet für die Leitungsdimensionierung die Gruppe A der Nahverkehrs- und Zubringerfernleitungen und die

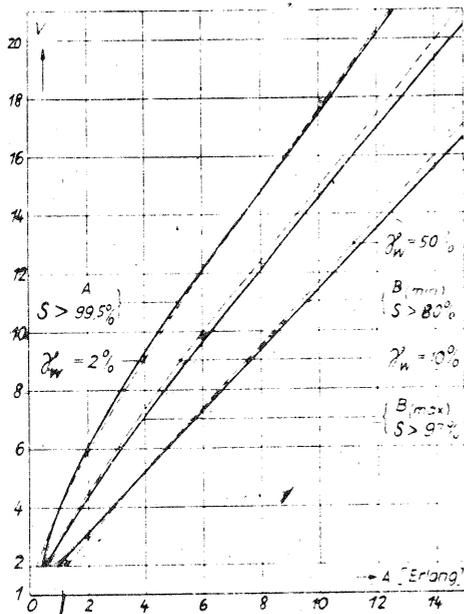


Bild 15. Leitungsbedarf v des handvermittelten Ferndienstes in Abhängigkeit vom Verkehrswert A [Erlang] bei verschieden hohem Sofortverkehrsanteil S .
 ——— Richtlinien der DBP für Fernleitungen der Gruppe A bzw. B
 - - - - - $v = f(A)$ für konstante Wartehäufigkeit nach Gl. (23) d. h. für konstanten Prozentsatz der rückwärts hergestellten Verbindungen einschl. des Anteils mit Wartezeiten $5 \text{ min} (t = \frac{1}{4} \text{ min})$

Gruppe B der Weitverkehrsleitungen. Die Gruppe A soll im VF oder DF ankommende Weitgespräche möglichst wartezeitlos zum nachgeordneten UF weiterverbinden. Die derzeitigen Bemessungsrichtlinien für die Leitungsgruppe A entsprechen ziemlich genau der Kurve $A = f(v)$ bei $t = \frac{1}{4}$ und einer Wartehäufigkeit $\gamma_w = 2\%$.

Auch auf den Leitungsbündeln der Gruppe B soll möglichst im Sofortverkehr gearbeitet werden. Die Deutsche Bundespost schreibt hierzu einen Höchst- und Mindestbedarf an Fernleitungen vor. Die Kurve B (max) deckt sich fast genau mit der errechneten Kurve $A = f(v)$ für $\gamma_w = 10\%$. Es können danach im Mittel $S_I = (100 - \gamma_w) = 90\%$ aller Anmeldungen sofort und im Vorwärtsaufbau hergestellt werden.

Außerdem zählen zum Sofortverkehr alle Anmeldungen, die verzögert, aber spätestens innerhalb von 5 min im Rückwärtsaufbau hergestellt werden. Für eine mittlere Belegungsdauer von $t_m = 6 \text{ min}$ im handvermittel-

ten Fernverkehr erhält man aus Kurve B (max) und Gl. (36) für $t = \frac{1}{4}$ und $v = 2$ eine mittlere Wartezeit $t_w = 4 \text{ min}$ und für $v \geq 20$ $t_w \approx 1 \text{ min}$. Nach Gl. (53) warten dann bei $v = 2$ $S_R = 7,1\%$ und bei $v \geq 20$ $S_R \geq 9,9\%$ aller Anmeldungen länger als 0, aber kürzer als 5 min. Insgesamt werden demnach

$$S = S_I + S_R = 97\% + 100\%$$

aller Anmeldungen im Sofortverkehr hergestellt. Diese hohe Verkehrsgüte dürfte es wohl erlauben, bei Leitungseingängen auch die Fernleitungen der Gruppe A nach Kurve B (max) zu bemessen.

Die Kurve B (min) deckt sich etwa mit der Kurve $A = f(v)$ bei $\gamma_w = 50\%$; das ergibt $S_V = 100 - \gamma_w = 50\%$ im Vorwärtsaufbau hergestellte Verbindungen. Gl. (36) besagt, daß hier die mittlere Wartezeit t_w der rückwärts aufgebauten Verbindungen zwischen 5,4 min (bei $v = 2$) und $\approx 3,4 \text{ min}$ (bei $v \geq 20$) liegt. Der Anteil des Sofortverkehrs im Rückwärtsaufbau ergibt sich mit $\gamma_w = 50\%$ und $T = 5 \text{ min}$ aus Gl. (53) für $v = 2$ zu $S_R = 30\%$ und für $v \geq 20$ zu $S_R \geq 38,5\%$. Es werden also insgesamt $S = 80 + 38,5\%$ aller Anmeldungen im Sofortverkehr hergestellt. Der tatsächliche Anteil des Vorwärtsaufbaus wird noch etwas höher liegen, weil eine Fernplatzbeamtin vor Weglegen der Anmeldung zum späteren Rückwärtsaufbau einige Sekunden abzuwarten pflegt, ob doch noch eine Leitung frei wird. Anmeldungen mit Wartezeiten unter 10 s werden daher des öfteren noch vorwärts hergestellt werden.

Die Verkehrsgüte eines nach der Mindestzahl B (min) bemessenen Fernleitungsbündels ist also noch recht hoch. In allen Fällen, wo z. B. durch die Einführung des Selbstwählferndienstes Leitungsknappheit auftritt, sollten deshalb die Leitungsbündel des handvermittelten Restferndienstes der Gruppe A nach Kurve B (max), diejenigen der Gruppe B nach Kurve B (min) bemessen werden.

Schriftumsverzeichnis

- [1] K. Rohde, Rationelle Wahrscheinlichkeitsrechnung und Theorie des Fernsprechverkehrs. Dissertation Techn. Universität Berlin-Charlottenburg 1952.
- [2] A. Lotze, Gefahrzeit oder Verlust als Maß für die Betriebsgüte im Fernsprechverkehr? FTZ 6 (1953), S. 564.
- [3] A. Lotze, Theorie der Gefahrzeit vollkommener Bündel in Fernsprechwahlsystemen. Dissertation Techn. Hochschule Stuttgart 1953.
- [4] A. K. Erlang, The Life and Works of A. K. Erlang. Herausgegeben von E. Brockmeyer, H. L. Halström und Arne Jensen. Kopenhagen 1948.
- [5] C. Palm, Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr. Ericsson Technics 44 (1943).
- [6] E. C. Molina, Zur Theorie der Wartezeiten. Zeitschrift für Fernmeldetechnik, Werk- und Gerätebau (1928), H. 1 und 2.
- [7] F. Lubberger, Wartezeiten in Fernsprechlagen mit Wahlbetrieb. Sonderdruck Siemens u. Halske, München 1951.
- [8] B. Fischer, Verkehrsprobleme bei Wähleinrichtungen mit zentralem Markierer. FTZ 5 (1952), S. 247.

(Eingeg. 2. Dez. 1953; wiedereingeg. 29. März 1954)