

Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung

Universität Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

**19. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten**

**Getaktete Wartesysteme bei Rechnern  
und zentralgesteuerten  
Nachrichtenvermittlungsanlagen**

von

M. Langenbach-Belz

Institute of Switching and Data Technics

University of Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

**19th Report on Studies in Congestion Theory**

**Sampled Queuing Systems in Computers and  
Computer-Controlled Switching Exchanges**

by

M. Langenbach-Belz



ABSTRACT

In computers or computer-controlled systems the informations (demands and instructions) are very often transferred only at fixed instants (sampling clock) between different devices (e.g. between the periphery and the central processing unit). In this report, three basic models of queuing systems, whose operation is influenced by a sampling clock, are introduced and investigated analytically. Many queuing problems in computer-controlled switching exchanges, in data transmission systems or in real time computer systems etc. can be traced back exactly or approximately to one of these basic models.

In the first model, single informations arrive randomly at a storage. Waiting informations are removed in groups from this storage always at equidistantly distributed clock instants. In the second model, groups of informations arrive at a storage in equidistantly distributed clock instants. The distribution of the group sizes can be chosen arbitrarily (from 0 up to a maximum m). Waiting informations are served separately by a single server with constant service time.

The third model is much more complex. It consists of a two-stage queuing system with g parallel input queues (called primary storages PSP), furthermore a central buffer (called secondary storage SSP) and a single server. Always at equidistantly distributed clock instants, all primary storages are sampled simultaneously and from each primary storage a group of informations is removed and is transferred to the secondary storage.

For the first two models as well as for the primary storages of the third model the following characteristic traffic values are derived exactly and explicitly:

Probabilities of state and mean queue length at an arbitrary instant, mean waiting time, probability of waiting and waiting time distribution function.

For the secondary system of the third model, mean queue length, mean waiting time and probability of waiting are derived exactly for some important combinations of structural parameters.

For further parameter combinations, an accurate approximate solution is given for the mean waiting times.

All results mentioned above are derived by the aid of the method of imbedded Markov chains and of generating functions of probabilities of state.

All theoretical results which are of particular interest for practical applications (e.g. mean waiting times, waiting time distribution functions), are evaluated also numerically and they are presented in diagrams.

In the following a brief review of the various chapters will be given.

CHAPTER I: Introduction (pp. 15-18)

A statement of the problem is given in I.1. The basic structure of a "sampled queuing system" is shown in Fig. A (cf. also Fig.1) where the clocked transfer of informations between the periphery and the central processing unit is indicated by a sampling switch.

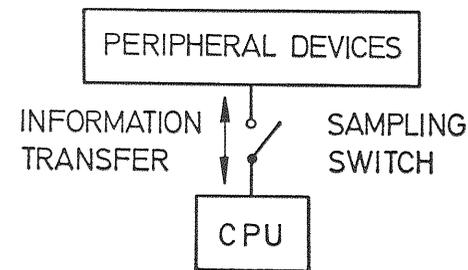


Fig. A: Basic Structure of a Sampled Queuing System

In I.2 the three models are introduced, one corresponding to the periphery (cf. also Fig.2), one corresponding to the central unit (cf. also Fig.3) and one corresponding to the total system (cf. also Fig.1).

A short survey of the report concludes the introduction.

CHAPTER II : Queuing System where Groups of Informations are Removed at Equidistantly Distributed Clock Instants (pp. 19-71)

The configuration of this model which corresponds, e.g., to peripheral devices of a computer-controlled system is shown in Fig. B (cf. also Fig.4).

Informations arrive according to a Poisson process with arrival rate  $\lambda$ . They have to wait in the queue (infinite number of waiting places) in the order of their arrival. Always after a

fixed interval of time  $T$ , the sampling switch is closed and the waiting calls located in the  $n$  "transfer places" in front of the queue are transferred, e.g., to the buffer of a CPU. If there are

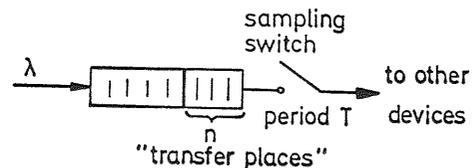


Fig.B: Configuration of the Model of Chapter II

less than  $n$  informations waiting in the queue at the sampling instant, then all informations are transferred. It is assumed that this transfer cannot be blocked by the CPU.

The principal aim of the first Section II.1 is to give a detailed introduction into the problem and to explain the possible ways of solution. This is done by means of the simplest example with  $n=1$  and by choosing the inspection instants of the imbedded Markov chain directly before the sampling clock (Fig.5).

For the case of statistical equilibrium, the set of equations Eq.(2.5) for the probabilities of state  $p(x)$  is derived in II.1.2. In II.1.3.1 the possibility is mentioned to solve Eq.(2.5) recursively starting with  $x=1$ . Another way of solution (II.1.3.2) is possible by introducing the generating function  $G_x(z)$  of the probabilities of state (definition in Eq.(2.6)). This way of solution is applied in the following chapters. The probabilities of state  $p(x)$  are found by developing the generating function step by step into a serial expansion with respect to  $z$  and comparing the coefficients with those of the definition equation of the generating function (II.1.3.3). The mean queue length (II.1.4) and the mean waiting time (II.1.5) can be obtained directly or indirectly from the generating function, respectively.

In II.2 the corresponding investigations are performed for the more general case where the inspection instants of the imbedded Markov chain are chosen at an instant  $t_v$  before the next sampling clock (Fig.8;  $t_v$  can be chosen arbitrarily). Furthermore, the waiting time distribution function (II.2.5) is derived by observing the fate of a "test-information" (Fig.9).

The most general case, i.e.  $n \geq 1$  and inspection instants of the imbedded Markov chain at an arbitrary instant  $t_v$  before the next sampling clock, is treated in II.3. The same way of solution

as in the sections before leads to the set of equations of the probabilities of state, Eq.(2.60), furthermore to the generating function of the probabilities of state Eq.(2.71) as well as to exact formulas for the mean queue length Eq.(2.74) and the mean waiting time Eq.(2.76 A) and also for the probabilities of state Eq.(2.83) and the waiting time distribution function Eq.(2.88).

The values  $z_v$  ( $v=0,1,\dots,n-1$ ) contained in the various equations, are the  $n$  roots inside and on the unit circle of the equation  $z^n - e^{-\lambda T(1-z)} = 0$  (denominator of Eq.(2.68)) where  $z_0=1$  is always a root.

Based on the probabilities of state being valid directly before the sampling clock, the distribution of the group size removed per sampling instant from the storage is derived in II.4.

Numerical evaluations for the mean waiting time referred to the sampling period  $T$  are presented in Figs.12 and 13, and for the complementary waiting time distribution function in the Figs.14, 15 and 16. It should be denoted that for the special case of  $n=1$  the mean waiting time and the waiting time distribution function are identical to those referred to waiting informations in the well known system M/D/1.

In II.5.3 the mutual influence of  $n$  and  $T$  on the absolute mean waiting time for constant ratio  $n/T$  is discussed and numerical examples are shown in Fig.17.

CHAPTER III: Queuing System with Group Arrivals at Equidistantly Distributed Clock Instants and with Constant Service Time (pp. 72-107)

The configuration of this model corresponding to a central processing unit is shown in Fig.C (see also Fig.18).

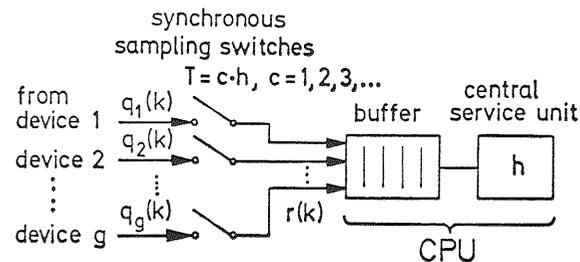


Fig. C: Configuration of the Model of Chapter III

The central service device has a constant service time  $h$ . Always after a fixed period of  $c$  service times ( $c = \text{integral number} \geq 1$ ),  $g$  peripheral devices are sampled synchronously.

One peripheral device corresponds, e.g., to a system similar to the model of Chapter II. From each peripheral device  $i$  ( $i=1,2,\dots,g$ ) there are transferred  $k=0,1,\dots,n_i$  informations per sampling clock to the buffer (infinite number of waiting places) with certain probabilities  $q_i(k)$  which can be chosen arbitrarily. It is assumed that the probabilities  $q_i(k)$  are independent from each other and from themselves at successive instants of the sampling clock. The global probability of  $k$  arriving informations from all  $g$  devices be  $r(k)$  with  $k=0,1,2,\dots,m$ . Within one global arriving group the informations of device 2 are filed in the buffer behind the informations of device 1 etc. The service discipline is first come, first served.

The investigations in III.2 consider only the global arriving group with probabilities of group size  $r(k)$ . Again, the method of imbedded Markov chains is applied. The inspection instants now are chosen directly after the sampling clock (Fig.19). The generating function of the probabilities of state directly a f t e r the sampling clock can be derived in two forms (III.2.1.1). One form, Eq.(3.11 A), contains the  $c$  roots  $z_\nu$  ( $\nu=0,1,\dots,c-1$ ) of the equation  $z^c - G_k(z) = 0$  inside and on the unit circle (where  $z_0=1$  is always a root); the other form, Eq.(3.14), contains the  $(m-c)$  roots  $z_\nu$  ( $\nu=c,c+1,\dots,m-1$ ) of the same equation outside the unit circle. From these equations the corresponding generating functions of probabilities of state directly b e f o r e the sampling clock can be obtained (III.2.1.2).

The mean queue length (including an information in the service unit) directly before the sampling clock (III.2.2.1) allows the calculation of the mean waiting time (III.2.3). The probability of waiting is determined in III.2.4.

Based on a serial expansion of the generating function the probabilities of state at an arbitrary instant are found in III.2.5 which allow furthermore the determination of the mean number of waiting informations (III.2.6).

The waiting time distribution function (III.2.7) which is a step function in time (cf. example in Fig.23), is derived by the aid of probabilities of state  $p(x,0)$  directly before the sampling clock and the probabilities  $r(k)$  of arriving group sizes.

Because of the variety of parameters of this model, it is im-

possible to compress the most interesting parameter combinations in some few handy diagrams for the exact mean waiting time, except the special case of  $c=1$  (Fig.22). Therefore, in addition to the exact solution, an approximation for the mean waiting time is suggested in III.2.8.2 (numerical example Fig.24).

A further approximation for the mean waiting time is proposed in III.2.8.3 for the case that the sampling period  $T$  is not an integral multiple of the holding time  $h$ .

Finally, in III.3 the informations are distinguished with regard to their origin. Based on the results of III.2, the mean waiting time (III.3.1), probability of waiting (III.3.2) and waiting time distribution function (III.3.3) related to informations coming from device  $i$  ( $i=1,2,\dots,g$ ) are derived.

#### CHAPTER IV: Two-Stage Queuing System with Sampled Parallel Input Queues (pp. 108-130)

The configuration of this model is shown in Fig.D (cf. also Fig. 26).

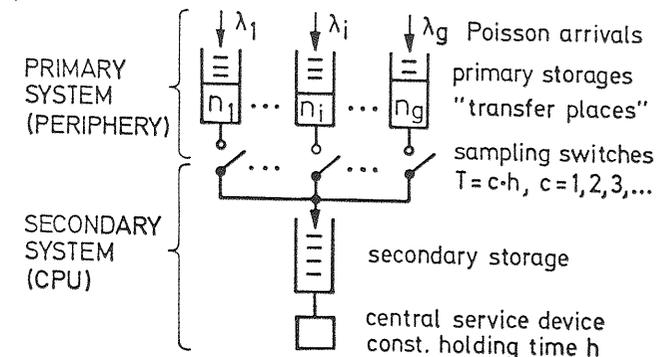


Fig. D: Configuration of the Model of Chapter IV

In principle, the structure of this model is a combination of the models treated in Chapters II and III. To each of the  $g$  primary storages PSP (infinite number of waiting places) informations are offered according to a Poisson process with arrival rate  $\lambda_i$  ( $i=1,2,\dots,g$ ). Always after a fixed time  $T$ , all sampling switches are closed simultaneously and from each primary storage  $i$  there are transferred at most  $n_i$  informations to the secondary storage SSP (infinite number of waiting places). The service unit has a constant service time  $h$ . Again, the sampling

interval is assumed to be an integral multiple  $c$  of the holding time  $h$ .

Because the secondary storage is assumed to have an infinite number of waiting places, the primary storages can be treated independently from each other (IV.2). Therefore, one primary storage is identical to the model of Chapter II and all characteristic traffic values derived in II can be applied.

The structure of the secondary system corresponds to the model of Chapter III. But here the arrival process at the secondary storage depends on the state of the primary system and so the results of Chapter III cannot be applied to the secondary system. The proposed way of solution for the secondary system is outlined in IV.3.1 for a system with only 1 primary storage ( $g=1$ ). The case  $n \leq c$  (IV.3.1.1) is trivial and can be traced back to the model of Chapter III if, there, the mean queue length directly before the sampling clock is set to zero.

For the case  $n > c$  the way of solution is the following:

The state of the general system (primary + secondary system) is considered directly after the sampling clock (imbedded Markov chain cf. Fig.28). The generating function of the probabilities of state of the general system directly after the sampling clock, Eq.(4.2), is analogous to that one of a primary storage directly before the sampling clock (cf. Eq.(2.71)). Therefore, the mean queue length Eq.(4.3) and the probabilities of state Eq.(4.4) of the general system directly after the sampling clock can be achieved in analogy to those of Chapter II. The determination of the mean queue length in the secondary system (including an information in the service unit) directly after the sampling clock is outlined in Fig.29. Furthermore, it is shown that the probabilities of state of the secondary system  $p_S(x,T)$  directly after the sampling clock must be identical to those of the general system directly after the sampling clock for the case of  $x < n$ , Eq.(4.6). This fact allows the exact determination of the mean number of waiting informations  $\Omega_S$ , the mean waiting time  $t_{WS}^*$  and the probability of waiting  $P_S(>0)$  in the secondary system.

Analogous considerations can be used for the general case of  $g > 1$  (IV.3.2). Again,  $\sum_{i=1}^g n_i \leq c$  is a trivial case (IV.3.2.1). For the case that each  $n_i \geq c$ , the same way of solution can be applied as described above for  $g=1$  and  $n > c$  (IV.3.2.2).

A new parameter combination for  $g > 1$  is the case  $\sum_{i=1}^g n_i > c$ , but any  $n_i < c$  (IV.4.3.2.3). In this case, exact investigations would be possible only by the aid of multi-dimensional probabilities of state. However, for symmetrical systems ( $n_i = n$  and  $\lambda_i = \lambda$  for  $i=1,2,\dots,g$ ) an accurate approximation is suggested for the mean waiting time in the secondary system. This approximation is based on the results of the model in Chapter III. In principle, the mean waiting time of the first information of an arriving group is increased by a factor  $F$  as against that one of the first information of an arriving group in the model of Chapter III (cf. Eq.(4.29)). The factor  $F$  is found empirically by the aid of plenty of simulation runs and it depends on the probability that the primary system is empty directly after the sampling clock (cf. Eq.(4.30)).

Numerical results and evaluations are presented in IV.3.3. Figs. 30 and 31 can be used for a simple numerical calculation of the mean waiting time in the secondary system according to Eqs.(4.32) and (4.23). Fig. 32 gives an example of the accuracy of the approximation suggested in IV.3.2.3. Fig. 33 shows the probability of waiting in the secondary system for systems with  $c < \text{Min}[n_i]$ . Finally, the mutual influence of  $n$  and  $T$  on the absolute total mean waiting time (primary + secondary system) for constant ratio  $n/T$  is demonstrated in Fig. 34 for the case of  $g=1$  primary storage (cf. also IV.3.3.2).

CHAPTER V: Conclusion (pp. 131-132);cf. ABSTRACT, p. i

APPENDIX (pp.133-152)

- Appendix 1: Determination of Eq.(2.45 B) by inserting Eq.(2.34) into Eq.(2.35).
- Appendix 2: Determination of the explicit formula Eq.(2.58 A) for the waiting time distribution function for  $n=1$  from Eq.(2.57 C).
- Appendix 3: Determination of the explicit formula Eq.(2.88) for the waiting time distribution function for  $n > 1$  from Eq.(2.87).
- Appendix 4: Proof for  $c$  roots of the denominator of Eq.(3.8) within and on the unit circle.

<u>INHALTSVERZEICHNIS</u>	Seite
SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS	6
ABKÜRZUNGEN	9
I. EINLEITUNG	15
I.1 Beschreibung des Problems	15
I.2 Übersicht über die Arbeit	17
II. TAKTMÄSSIG ABGEFRAGTES WARTESYSTEM	19
II.1 Einfachster Fall: $n=1$ Abfrageplatz und Betrachtung des Systems kurz vor dem Taktzeitpunkt	19
1.1 Struktur und Betriebsweise des Systems	19
1.2 Aufstellung des Gleichungssystems der Zustandswahrscheinlichkeiten	20
1.3 Lösung des Gleichungssystems der Zustandswahrscheinlichkeiten, Einführung der erzeugenden Funktion	23
1.3.1 Rekursive Lösung des Gleichungssystems	23
1.3.2 Einführung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten	24
1.3.3 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten aus der erzeugenden Funktion	28
1.4 Mittlere Schlangenlänge	31
1.5 Mittlere Wartezeit $t_w^*$	32
II.2 System mit $n=1$ Abfrageplatz und Beobachtungszeitpunkten zu einer beliebigen Zeit $t_v$ vor dem Taktzeitpunkt	34
2.1 Aufstellung des Gleichungssystems der Zustandswahrscheinlichkeiten	34
2.2 Bestimmung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten	35
2.3 Mittlere Schlangenlänge und mittlere Wartezeit	38
2.4 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten zu einem beliebigen Zeitpunkt aus der erzeugenden Funktion	39
2.5 Wartezeitverteilung	40
2.5.1 Sonderfall: Wartezeit im Bereich $t \leq T$	41
2.5.2 Allgemeiner Fall für beliebige Wartezeit	43
II.3 System mit $n > 1$ Abfrageplätzen und Beobachtungszeitpunkten zu einer beliebigen Zeit $t_v$ vor dem Taktzeitpunkt	45
3.1 Aufstellung des Gleichungssystems der Zustandswahrscheinlichkeiten	45
3.2 Bestimmung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten	47
3.3 Mittlere Schlangenlänge und mittlere Wartezeit	52
3.4 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten zu einem beliebigen Zeitpunkt aus der erzeugenden Funktion	55
3.5 Wartezeitverteilung	59
II.4 Verteilung der Gruppengröße, die pro Takt aus dem Speicher geholt wird	62
II.5 Numerische Ergebnisse und Auswertungen	63
5.1 Mittlere Wartezeiten	63
5.2 Wartezeitverteilung	63
5.3 Gegenseitiger Einfluß der Abfrageplatzzahl $n$ und der Taktdauer $T$ auf die absolute mittlere Wartezeit	64
III. WARTESYSTEM MIT GRUPPENANKÜNFTEIN IN TAKTZEITPUNKTEN UND KONSTANTER BEDIENUNGSDAUER	72
III.1 Struktur und Betriebsweise des Systems	72
III.2 Betrachtung des Systems mit globaler Ankunftsgruppe der Anforderungen	73
2.1 Bestimmung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten	73
2.1.1 Beobachtungszeitpunkt kurz nach dem Takt	73
2.1.2 Beobachtungszeitpunkt kurz vor dem Takt	80
2.2 Mittlere Schlangenlänge	81
2.2.1 Direkt vor dem Takt	81

2.2.2 Direkt nach dem Takt	83
2.3 Mittlere Wartezeit	84
2.4 Wartewahrscheinlichkeit	86
2.5 Zustandswahrscheinlichkeiten	88
2.5.1 Kurz vor dem Takt	88
2.5.2 Kurz nach dem Takt	89
2.5.3 Zu beliebigem Zeitpunkt	90
2.6 Mittlere Speicherbelastung	91
2.7 Wartezeitverteilung	93
2.8 Numerische Ergebnisse	96
2.8.1 Exakte Werte	96
2.8.2 Näherungswerte für die mittlere Wartezeit	97
2.8.3 Näherungen für die mittlere Wartezeit für den Fall, daß die Takt-dauer kein ganzzahliges Vielfaches der Bedienungsdauer ist	101
III.3 Unterscheidung der Anforderungen nach ihrer Herkunft	101
3.1 Mittlere Wartezeit	102
3.2 Wartewahrscheinlichkeit	103
3.3 Wartezeitverteilung	104
IV. ZWEISTUFIGES WARTESYSTEM MIT ABGETASTETEN, PARALLELEN EINGANGSWARTESCHLANGEN	108
IV.1 Struktur und Betriebsweise des Systems	108
IV.2 Behandlung des Primärsystems	109
IV.3 Behandlung des Sekundärsystems	109
3.1 Primärsystem besteht nur aus einem Speicher	110
3.1.1 Fall $n \leq c$	110
3.1.2 Fall $n > c$	111
3.2 Primärsystem besteht aus g Speichern	117
3.2.1 Fall $\sum_{i=1}^g n_i \leq c$	117
3.2.2 Fall jedes einzelne $n_i \geq c$	117
3.2.3 Fall $\sum_{i=1}^g n_i > c$ , aber einzelne $n_i < c$	120

3.3 Numerische Ergebnisse und Auswertungen	123
3.3.1 Mittlere Wartezeiten $t_{WS}^*$ und Wartewahrscheinlichkeit im Sekundärsystem	123
3.3.2 Gegenseitiger Einfluß der Abfrageplatzzahl n im Primärspeicher und der Takt-dauer T auf die absolute mittlere Wartezeit im Gesamtsystem	125
V. ZUSAMMENFASSUNG	131
ANHANG 1 Bestimmung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten aus dem Gleichungssystem der Zustandswahrscheinlichkeiten in Gl.(2.34)	133
ANHANG 2 Bestimmung der expliziten Formel für die Wartezeitverteilung im Fall $n=1$ aus dem Lösungsansatz in Kapitel II.2.5	135
ANHANG 3 Bestimmung der expliziten Formel für die Wartezeitverteilung im Fall $n>1$ aus dem Lösungsansatz in Kapitel II.3.5	139
ANHANG 4 Nachweis für c Nullstellen des Nenners in Gl.(3.8) innerhalb und auf dem Einheitskreis	150

SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

- [1] Bailey,N.T.J. : On queuing processes with bulk service.  
Journ. Roy. Stat. Soc., Ser. B,  
16(1954), 80-87
- [2] Downton,F. : Waiting time in bulk service queues.  
Journ. Roy. Stat. Soc., Ser. B,  
17(1955), 256-261
- [3] Jaiswal,N.K. : A bulk-service queuing problem with  
variable capacity.  
Journ. Roy. Stat. Soc., Ser. B,  
23(1961), 143-148
- [4] Nakamura,G. : An analysis of bulk service queues.  
Rev. Electr. Commun. Laboratory  
17(1969), 866-876
- [5] Chan,W.-C. : Computer-controlled queuing system with  
constant-access cycle and general  
service times.  
Proc. IEE, 117(1970), 927-930
- [6] Chan,W.-C. : Computer-controlled queuing systems  
Chung,W.K. with feedback.  
Proc. IEE, 118(1971), 1373-1377
- [7] Powell,B.A. : Queuing systems with enforced idle time.  
Avi-Itzhak,B. Oper. Res., 15(1967), 1145-1156
- [8] Delbrouck,L.E.N.: A multi server queue with enforced  
idle times.  
Oper. Res., 17(1969), 506-518
- [9] Miller,R.G. : A contribution to the theory of  
bulk queues.  
Journ. Roy. Stat. Soc., Ser. B,  
21(1959), 320-337
- [10] Beusch,J.U. : A general model of a single channel  
queue: discrete and continuous time  
cases.  
Oper. Res., 15(1967), 1131-1144

- [11] Soriano,A. : On the problem of batch arrivals and its  
application to a scheduling system.  
Oper. Res., 14(1966), 398-408
- [12] Silk,D.J. : Queuing model for message-switching  
networks with constant-length messages.  
Proc. IEE, 116(1969), 1821-1826
- [13] Conolly,B.W. : Queuing at a single serving point with  
group arrival.  
Journ. Roy. Stat. Soc., Ser. B,  
22(1960), 285-298
- [14] Boudreau,P.E. : Analysis of a basic queuing problem  
Kac,M. arising in computer systems.  
IBM Journ. Res. and Dev., 5(1961), 132-140
- [15] Bhat,U.N. : On single-server bulk-queuing processes  
with binomial input.  
Oper. Res., 12(1964), 527-533
- [16] Foster,F.G. : Batched queuing processes.  
Oper. Res., 12(1964), 441-449
- [17] Wishart,D.M.G. : A queuing system with  $\chi^2$  service-time  
distribution.  
Ann. Math. Statist., 27(1956), 768-779
- [18] Kendall, D.G. : Stochastic processes occurring in the  
theory of queues and their analysis by  
the method of the imbedded Markov chain.  
Ann. Math. Statist., 24(1953), 338-354
- [19] Crommelin,C.D. : Delay probability formulae when the  
holding times are constant.  
Post. Off. Elect. Engrs.,  
25(1932), 41-50; 26(1933/34), 266-274
- [20] Pollaczek,F. : Zur Theorie des Wartens vor Schalter-  
gruppen.  
Elekt. Nachr. Techn., 9(1932), 434-454
- [21] Lotze,A. : Einführung in die Nachrichtenverkehrs-  
theorie.  
Vorlesung an der Universität Stuttgart

[22] Syski, R. : Introduction to congestion theory in telephone systems. Oliver and Boyd, Edinburgh, London, 1960

[23] Cohen, J.W. : The single server queue. North-Holland, Amsterdam, London, 1969

[24] Le Gall, P. : Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques. Dunod, Paris, 1962

[25] Feller, W. : An introduction to probability theory and its applications. Volume 1. John Wiley & Sons, New York, London, Sidney, 1957

[26] Bieberbach, L. : Einführung in die Funktionentheorie. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1959

[27] Bronstein, I.N. : Taschenbuch der Mathematik. Semendjajew, K.A. Verlag Harry Deutsch, Zürich, Frankfurt/M., 1965

[28] : System IV  
Ein Fernsprech-Vermittlungssystem mit gespeichertem Steuerprogramm.  
Sonderheft, zusammengestellt aus Sonderdrucken aus "Informationen Fernsprech-Vermittlungstechnik".  
Herausgegeben vom Bereich Fernsprechtechnik der Siemens-Aktiengesellschaft, München. Bestell-Nr. N 120/1143

ABKÜRZUNGEN

Zu Kapitel II:

a	Ankunftsabstand (momentaner)
$E[k]$	Erwartungswert von k
$E[k_n]$	Erwartungswert von $k_n$
$E[x]$	Erwartungswert von x (Mittlere Schlängelänge)
$E[x^2]$	Erwartungswert von $x^2$
$E[x, t_v]$	Erwartungswert von x zur Zeit $t_v$ vor nächstem Takt
$Gk(z)$	erzeugende Funktion für Wahrscheinlichkeiten für k
$Gk_n(z)$	erzeugende Funktion für Wahrscheinlichkeiten für $k_n$
$Gk_v(z)$	erzeugende Funktion für Wahrscheinlichkeiten für $k_v$
$Gu_i(z)$	erzeugende Funktion von $s_i(u)$
$Gv_i(z)$	erzeugende Funktion für Wahrscheinlichkeiten für $v_i$
$Gx(z)$	erzeugende Funktion für p(x) (Abschnitt II.1)
$Gx_i(z)$	erzeugende Funktion für $p_i(x)$ (Abschnitt II.1)
$Gx(z, t_v)$	erzeugende Funktion für $p(x, t_v)$
$Gx_i(z, t_v)$	erzeugende Funktion für $p_i(x, t_v)$
K	Konstante
k	Anzahl von Anforderungen, die während der Zeit T eintreffen
$k_n$	Anzahl von Anforderungen, die während der Zeit $t_n$ eintreffen
$k_v$	Anzahl von Anforderungen, die während der Zeit $t_v$ eintreffen
n	Abfrageplatzzahl
p(x)	Wahrscheinlichkeit für x Anforderungen im System
$p_i(x)$	Wahrscheinlichkeit für x Anforderungen im System vor Takt i
$p(x, t_v)$	Wahrscheinlichkeit für x Anforderungen im System zum Zeitpunkt $t_v$ vor nächstem Takt
$p_i(x, t_v)$	Wahrscheinlichkeit für x Anforderungen im System zum Zeitpunkt $t_v$ vor Takt i
P	Hilfsgröße
$P(>0)$	Wartewahrscheinlichkeit
$P_a\{a>t\}$	Mindestwertverteilung der Ankunftsabstände
$P(>t)$	komplementäre Wartezeitverteilung bezogen auf alle Anforderungen

$P(\leq t)$	Wartezeitverteilung bezogen auf alle Anforderungen
$P(t-dt_v, t)$	Wahrscheinlichkeit, daß eine Anforderung eine Zeit zwischen $t-dt_v$ und $t$ warten muß, bezogen auf alle Anforderungen
$q(i)$	Wahrscheinlichkeit, daß aus dem Speicher $i$ Anforderungen mit dem Takt entnommen werden
$r(k)$	Wahrscheinlichkeit, daß $k$ Anforderungen während der Zeit $T$ ankommen
$r_n(k_n)$	Wahrscheinlichkeit, daß $k_n$ Anforderungen während der Zeit $t_n$ ankommen
$r_v(k_v)$	Wahrscheinlichkeit, daß $k_v$ Anforderungen während der Zeit $t_v$ ankommen
$S$	Hilfsgröße
$S_v$	Summe aus Produkten der Nullstellen $z_v$ (Gl.(2.81B))
$s_1(u)$	Wahrscheinlichkeit für $u_1$
$t$	Zeit
$T$	Taktzeit
$t_n$	Zeit nach letztem Takt
$t_v$	Zeit vor nächstem Takt
$t_w$	mittlere Wartezeit bezogen auf die wartenden Anforderungen
$t_w^*$	mittlere Wartezeit bezogen auf alle Anforderungen
$u_1$	$\{x_1, t_v\} + k_v$
$\ddot{u}(x_1, x_{i+1})$	Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand $\{x_i\}$ in den Zustand $\{x_{i+1}\}$ in der Zeit $T$
$v_i$	Abkürzung (Zufallsvariable) entsprechend Gl.(2.13) bzw. (2.37B) bzw. (2.62B)
$\text{Var}[x]$	Varianz von $x$
$\text{Var}[k]$	Varianz von $k$
$w$	Bereichsvariable bei Wartezeitverteilung
$W(>t)$	komplementäre Wartezeitverteilung bezogen auf die wartenden Anforderungen
$W(\leq t)$	Wartezeitvertlg. bezogen auf wartende Anforderungen
$x$	Anzahl von Anforderungen im System
$x_i$	Anzahl von Anforderungen im System vor Takt $i$
$\{x\}$	Zustand des Systems (Abschnitt II.1)
$\{x_1, t_v\}$	Zustand des Systems zur Zeit $t_v$ vor Takt $i$
$z$	Variable der erzeugenden Funktionen
$z_v$	Nullstellen einer Gleichung, wobei $z_0$ immer 1 ist

$\lambda$	Ankunftsrate eines Poisson-Angebotes
$\tau_w$	$t_w/T$
$\tau_w^*$	$t_w^*/T$
$\tau_{wc}^*$	auf $T$ normierte mittlere Wartezeit bezogen auf alle Anforderungen im System M/D/n
$\Omega$	mittlere Speicherbelastung
<u>Zu Kapitel III:</u>	
$c$	ganze Zahl $>0$ , um die die Taktdauer $T$ größer als die Bedienungsdauer $h$ ist
$c_0$	ganze Zahlen $>0$ (bei Näherung in Abschn. III.2.8.3)
$c_u$	
$d$	ganze Zahl $\geq 0$
$E[k]$	Erwartungswert für die Größe der pro Takt ankommenden globalen Gruppe
$E[k^2]$	$\sum_{k=0}^m k^2 r(k)$
$E[x, t]$	mittlere Schlangenlänge zur Zeit $t$ vor dem nächsten Takt
$E[k_i]$	mittlere Anzahl von Anforderungen pro Takt aus Richtung $i$
$E_i[x, 0]$	mittlere Schlangenlänge vor ankommenden Anforderungen aus Richtung $i$
$g$	Anzahl von Richtungen, aus welchen Anforderungen pro Takt ankommen
$Gk(z)$	erzeugende Funktion für $r(k)$
$Gv_i(z)$	erzeugende Funktion für Wahrscheinlichkeiten für $v_i$
$Gx(z, t)$	erzeugende Funktion für $p(x, t)$
$h$	konstante Bedienungsdauer
$k$	Größe einer pro Takt ankommenden Gruppe
$K$	Konstante (Gl.(3.9))
$K_i$	Konstanten (bei Partialbruchzerlegung)
$m$	maximale Größe der pro Takt ankommenden globalen Gruppe
$m_i$	maximale Gruppengröße pro Takt insgesamt aus den ersten $i$ Richtungen
$n_i$	maximale Gruppengröße pro Takt aus Richtung $i$
$P(=0)$	Wahrscheinlichkeit, daß eine Anforderung nicht warten muß

$P(>0)$	Wartewahrscheinlichkeit
$P_1(=0)$	Wahrscheinlichkeit, daß eine Anforderung aus Richtung $i$ nicht warten muß
$P_1(>0)$	Wartewahrscheinlichkeit für Anforderungen aus Richtung $i$
$P(dh)$	Wahrscheinlichkeit, daß eine Anforderung genau $d$ Bedienungszeiten $h$ warten muß
$P(\leq dh)$	Wartezeitverteilungsfunktion (Treppenfunktion, $d=0,1,2,\dots$ )
$P(>dh)$	komplementäre Wartezeitverteilungsfunktion
$P_1(\leq dh)$	Wartezeitverteilungsfunktion für Anforderungen aus Richtung $i$
$p(x,t)$	Wahrscheinlichkeit für $x$ Anforderungen im System zur Zeit $t$ vor dem nächsten Takt (Zustandswahrscheinlichkeit)
$p_1(x,0)$	Wahrscheinlichkeit, daß vor ankommenden Anforderungen aus Richtung $i$ bereits $x$ Anforderungen im System sind
$q_1(k)$	Wahrscheinlichkeit für $k$ Anforderungen pro Takt aus Richtung $i$
$r(k)$	Wahrscheinlichkeit für Größe $k$ der ankommenden globalen Gruppe
$r_1(k)$	Wahrscheinlichkeit für insgesamt $k$ Anforderungen pro Takt aus den ersten $i$ Richtungen
$T$	Taktzeit $T=ch$
$t_w^*$	mittlere Wartezeit aller Anforderungen
$t_w$	mittlere Wartezeit der wartenden Anforderungen
$t_w^*(k)$	bedingte mittlere Wartezeit für alle Anforderungen einer Gruppe der Größe $k$
$t_{w,i}^*$	mittlere Wartezeit aller Anforderungen aus Richtung $i$
$t_{w,c_u}^*$	mittlere Wartezeit aller Anforderungen mit $c_u$ bzw. $c_o$ berechnet
$t_{w,c_o}^*$	
$v_1$	Zufallsvariable, Abkürzung nach Gl.(3.2)
$\text{Var}[k]$	Varianz der Größe $k$ der ankommenden globalen Gruppe
$\text{Var}[k_i]$	Varianz der Größe $k_i$ der ankommenden Gruppe aus Richtung $i$

$W(>dh)$	komplementäre Wartezeitverteilung bezogen auf die wartenden Anforderungen
$W_1(>dh)$	komplementäre Wartezeitverteilung bezogen auf die wartenden Anforderungen aus Richtung $i$
$\{x,t\}$	Zustand des Systems zur Zeit $t$ vor dem nächsten Takt
$z$	Variable der erzeugenden Funktion
$z_0$	Nullstellen von $z^C-Gk(z)$
$\tau_w^*$	$t_w^*/T$
$\tau_{w,i}^*$	$t_{w,i}^*/T$
$\Omega$	mittlere Speicherbelastung
$\Omega(jh)$	mittlere Speicherbelastung im Zeitintervall zwischen $jh$ und $(j-1)h$ vor dem nächsten Takt

Zu Kapitel IV:

$c$	ganze Zahl $>0$ , um die die Taktdauer $T$ größer als die Bedienungsdauer $h$ ist
$E_G[x,T]$	Erwartungswert der Anzahl von Anforderungen im Gesamtsystem kurz nach dem Takt
$E_{P_i}[x,T]$	Erwartungswert der Anzahl von Anforderungen im Primärspeicher $i$ kurz nach dem Takt
$E_S[x,T]$	Erwartungswert der Anzahl von Anforderungen im Sekundärsystem kurz nach dem Takt
$F$	Faktor bei Näherung in Abschnitt IV.3.2.3
$g$	Anzahl der Primärspeicher
$GS$	Abkürzung für einen Term in der Gleichung für $\Omega_S$
$Gx_G(z,T)$	erzeugende Funktion von $p_G(x,T)$
$h$	konstante Bedienungsdauer
$k$	Anzahl der während der Zeit $T$ eintreffenden Anforderungen
$n_i$	Abfrageplatzzahl im Primärspeicher $i$
$P_G(x,T)$	Wahrscheinlichkeit für $x$ Anforderungen im Gesamtsystem kurz nach dem Takt
$P_P(0,T)$	Wahrscheinlichkeit, daß ein PSP kurz nach dem Takt $0$ Anforderungen enthält
$P_S(x,t)$	Wahrscheinlichkeit für $x$ Anforderungen im Sekundärsystem zur Zeit $t$ vor dem nächsten Takt

$P_S(=0)$	Wahrscheinlichkeit, daß eine Anforderung im Sekundärssystem nicht warten muß
$P_S(>0)$	Wartewahrscheinlichkeit im Sekundärssystem
$S_v$	Summen aus Produkten der Nullstellen $z_v$ , Gl.(2.81B)
$T$	Taktzeit $T=ch$
$t_{wG}^*$	mittlere Wartezeit aller Anforderungen im Gesamtsystem
$t_{wP}^*$	mittlere Wartezeit aller Anforderungen im Primärssystem
$t_{wPi}^*$	mittlere Wartezeit aller Anforderungen im Primärspeicher $i$
$t_{wS}^*$	mittlere Wartezeit aller Anforderungen im Sekundärssystem
$z$	Variable der erzeugenden Funktion
$z_v$	Nullstellen einer Bestimmungsgleichung
$\{x_G, T\}$	Zustand des Gesamtsystems kurz nach dem Takt
$\Lambda$	gesamte Ankunftsrate an alle Primärspeicher
$\lambda_i$	Ankunftsrate an Primärspeicher $i$
$\Omega_S$	mittlere Speicherbelastung des Sekundärspeichers

I  
EINLEITUNG

I.1 Beschreibung des Problems

In den letzten Jahren finden immer häufiger elektronische Digitalrechner Anwendung als zentrale Steuerungen in Nachrichtensystemen, wie z.B. in modernen Fernsprechvermittlungssystemen (vgl. [28]), in Datennetzen etc. Diese Steuerrechner sind im Grunde genommen speziell konstruierte Prozeßrechner. Da sie eine große Menge von Informationen zentral verarbeiten müssen, entstehen Wartezeiten für die Informationen. Die Wartezeiten der Informationen können als ein Maß für die Leistungsfähigkeit eines Systems herangezogen werden. Sie sollten möglichst klein gehalten werden, um zu vermeiden, daß sich die Zentralsteuerung als Engpaß für die Funktion des Systems auswirkt.

Rechnersysteme (z.B. Time-Sharing-Computer) bzw. rechnergesteuerte Systeme können ganz grob in zwei funktionelle Teile gegliedert werden, nämlich in die Peripherie und in die Zentraleinheit. Die in der Peripherie entstehenden Informationen werden in die Zentraleinheit gebracht und dort verarbeitet. Für die Übernahme der Informationen aus der Peripherie in die Zentraleinheit gibt es nun zwei prinzipielle Möglichkeiten:

Die erste Möglichkeit ist die, daß die Informationen direkt nach ihrem zufallsmäßigen Entstehen in der Peripherie sofort in die Zentraleinheit übernommen werden. Jede Informationsübernahme erfordert aber eine gewisse Verwaltungsarbeit in der Zentraleinheit, weshalb das momentan in Bearbeitung befindliche Programm unterbrochen werden muß. Der Nachteil dieser Methode ist deshalb, daß völlig ungeordnet bei jedem zufälligen Entstehen einer Information in der Peripherie sofort eine Programmunterbrechung in der Zentraleinheit erfolgt. Dies würde insbesondere bei größerer Belastung einen relativ großen Aufwand an reiner Verwaltungsarbeit bedeuten, wodurch die Wartezeiten der Informationen in der Zentraleinheit sehr ungünstig beeinflusst werden könnten. Diese Methode wird deshalb auch nur bei wenigen, speziellen Anwendungsfällen benützt (z.B. Alarmmeldungen).

Die zweite Möglichkeit besteht darin, die einzelnen Informationen nach ihrem Entstehen zunächst in der Peripherie zwischenspeichern oder evtl. sogar vorzuverarbeiten. Die Zentraleinheit kann dann von sich aus in geeigneten Zeitpunkten an der Peripherie nachfragen, ob irgendwelche Informationen auf die Übernahme in die Zentraleinheit warten.

Die zeitlichen Abstände dieser "Abfragezeitpunkte" sind bei den meisten realen Systemen konstant, was wohl auch am einfachsten in der Praxis realisierbar ist (z.B. hardwaremäßig). Das bedeutet, daß der Informationsaustausch zwischen Peripherie und der Zentraleinheit nur in determinierten Taktzeitpunkten mit konstantem Abstand stattfindet.

Diese Methode wird z.B. bei modernen, zentralgesteuerten Fernsprechvermittlungssystemen angewendet (vgl. [28]) oder bei Prozeßrechnersystemen etc.

Die prinzipielle Struktur eines solchen "getakteten Wartesystems" ist in dem groben Blockschaltbild von Bild 1 dargestellt.

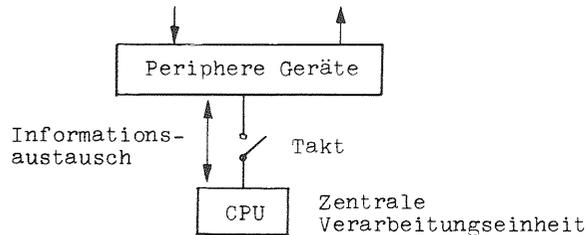


Bild 1: Prinzipielle Struktur eines getakteten Wartesystems

Ziel dieser Arbeit wird es sein, mit Hilfe vereinfachter mathematischer Modelle die Wartezeiten der Informationen in solchen getakteten Wartesystemen zu berechnen und zu analysieren. Die gewonnenen theoretischen und numerischen Ergebnisse können dann als Grundlage für die Dimensionierung bei praktischen Anwendungsfällen dienen.

Es wäre an dieser Stelle noch zu bemerken, daß das in Bild 1 gezeigte Schema eines getakteten Wartesystems zwar auf Grund der Betrachtung eines rechnergesteuerten Systems entstanden ist, daß es aber auch auf die verschiedensten Fälle in anderen Anwendungsbereichen zutreffend sein kann.

### I.2 Übersicht über die Arbeit

Aus Bild 1 kann entnommen werden, daß das dort vorgestellte Gesamtsystem in verschiedene Teilsysteme gegliedert werden kann.

In dem ersten Teilsystem, welches den peripheren Eingabegeräten entspricht, werden die vorverarbeiteten bzw. wartenden Informationen, welche in dieser Arbeit von nun an als "Anforderungen" bezeichnet werden (da sie zu ihrer Verarbeitung den Rechner anfordern), jeweils in festen Taktzeitpunkten mit konstantem Abstand diesem Teilsystem entnommen und an die Zentraleinheit weitergegeben. Die prinzipielle Struktur dieses Teilsystems ist in Bild 2 dargestellt.

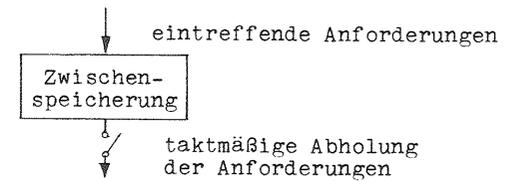


Bild 2: Struktur des den peripheren Geräten entsprechenden Teilsystems.

In dem zweiten Teilsystem, welches der zentralen Verarbeitungseinheit CPU (Central Processing Unit) entspricht, kommen die Anforderungen immer nur zu festen Taktzeitpunkten mit konstantem Abstand an und werden anschließend der Reihe nach abgearbeitet. Die prinzipielle Struktur dieses Teilsystems ist in Bild 3 dargestellt.

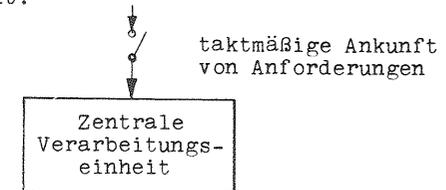


Bild 3: Struktur des der zentralen Verarbeitungseinheit entsprechenden Teilsystems.

In Kapitel II dieser Arbeit wird sehr eingehend ein dem Teilsystem nach Bild 2 entsprechendes Modell behandelt, bei dem die Anforderungen gruppenweise im Taktzeitpunkt abgeholt wer-

den. Der erste Abschnitt II.1 dieses Kapitels soll hauptsächlich dazu dienen, eine genauere Einführung in den Problembereich zu geben und die möglichen Lösungswege aufzuzeigen.

Mit Hilfe der Methode der eingebetteten Markoff-Ketten werden dann die folgenden charakteristischen Verkehrsgrößen berechnet: Zustandswahrscheinlichkeiten, mittlere Schlangenlänge, mittlere Wartezeit, Wartezeitverteilung.

In Kapitel III wird ein dem Teilsystem nach Bild 3 entsprechendes Modell behandelt. Dabei treffen in den Taktzeitpunkten Gruppen von Anforderungen mit vorgegebener Wahrscheinlichkeitsverteilung ein. Die in einem Pufferspeicher der zentralen Verarbeitungseinheit wartenden Anforderungen werden dann einzeln seriell abgearbeitet. Auch für dieses Modell werden mit Hilfe der Methode der eingebetteten Markoff-Ketten die oben schon erwähnten charakteristischen Verkehrswerte berechnet sowie zusätzlich noch die Wartewahrscheinlichkeit bestimmt.

In Kapitel IV schließlich wird ein Modell des Gesamtsystems entsprechend zu Bild 1 behandelt. Dabei kann in relativ starkem Maße auf die Ergebnisse der Kapitel II und III zurückgegriffen werden. So können z.B. für die peripheren Geräte die Ergebnisse aus Kapitel II sofort übernommen werden. Für die zentrale Verarbeitungseinheit allerdings ist eine direkte Übernahme der Ergebnisse aus Kapitel III infolge einer Abhängigkeit des Ankunftsprozesses an der zentralen Verarbeitungseinheit von dem Zustand der peripheren Geräte nicht möglich. Aus diesem Grunde können für die Zentraleinheit auch nicht sämtliche oben erwähnten charakteristischen Verkehrsgrößen berechnet werden, sondern es werden hauptsächlich die für praktische Anwendungen besonders wichtigen Mittelwerte bestimmt, wie z.B. mittlere Speicherbelastung, mittlere Wartezeit und Wartewahrscheinlichkeit.

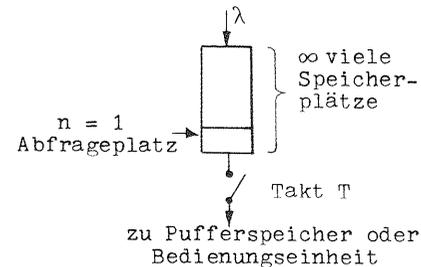
Sämtliche theoretisch ermittelten Ergebnisse der charakteristischen Verkehrsgrößen wurden mit Hilfe einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage auch numerisch ausgewertet.

II  
TAKTMÄSSIG ABGEFRAGTES WARTESYSTEM

II.1 Einfachster Fall: n=1 Abfrageplatz und Betrachtung des Systems kurz vor dem Taktzeitpunkt

Dieser Abschnitt II.1 soll hauptsächlich dazu dienen, eine Einführung in den Problembereich und in die Lösungsmethoden der folgenden Abschnitte dieser Arbeit zu geben.

II.1.1 Struktur und Betriebsweise des Systems



An einem unbeschränkt großen Speicher treffen einzelne Anforderungen in zufällig schwankenden zeitlichen Abständen ein. Zur mathematischen Beschreibung eines solchen Ankunftsprozesses wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Ankunftsabstände verwendet.

Bild 4: Struktur des Systems

Aus Messungen in existierenden Systemen ist bekannt, daß die Ankunftsabstände sehr oft in guter Näherung durch eine negativ exponentielle Verteilung beschrieben werden können. Deshalb wird auch hier angenommen, daß die einzelnen Anforderungen mit negativ exponentiell verteilten Ankunftsabständen mit der Ankunftsrate  $\lambda$  eintreffen (Poisson-Ankunftsprozeß,  $\lambda$  = mittlere Zahl von Ankünften pro Zeiteinheit).

Für die Mindestwertverteilung, d.h. die Wahrscheinlichkeit  $P_a\{a>t\}$ , daß ein Ankunftsabstand  $a$  größer als die Zeit  $t$  ist, gilt:

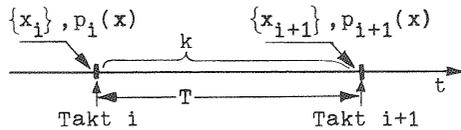
$$P_a\{a>t\} = e^{-\lambda t}$$

Sämtliche eintreffende Anforderungen müssen in dem Speicher warten und reihen sich am Ende der Warteschlange ein. In konstanten Taktabständen  $T$  wird jeweils die auf dem ersten Abfrageplatz des Speichers (Abfrageplatz) sitzende Anforderung aus dem Speicher geholt und z.B. an einen Pufferspeicher oder eine Bedienungseinheit weitergegeben (welche in Bild 4 nur angedeutet

ist). Aus dem Wartespeicher wird also in jedem Taktzeitpunkt eine Anforderung herausgeholt, wenn zum Taktzeitpunkt überhaupt eine Anforderung im Speicher vorhanden ist. Eine eintreffende Anforderung, welche einen leeren Wartespeicher antrifft, muß bis zum nächsten Taktzeitpunkt warten.

II.1.2 Aufstellung des Gleichungssystems der Zustandswahrscheinlichkeiten

Das zeitliche Verhalten eines Systems wird durch die Anzahl von Anforderungen gekennzeichnet, welche es jeweils enthält. Sind  $x$  Anforderungen in dem System enthalten, so sagt man, das System befindet sich im Zustand  $\{x\}$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System im Zustand  $\{x\}$  befindet, wird dann als Zustandswahrscheinlichkeit  $p(x)$  bezeichnet.



Das Wartesystem nach Bild 4 wird jeweils nur zu den Zeitpunkten kurz vor dem Takt betrachtet (vgl. Bild 5). Durch diese Betrachtungsweise kann die Wahrscheinlichkeit

Bild 5: Beobachtungszeitpunkte

$p_{i+1}(x)$  für den Zustand  $\{x_{i+1}\}$  kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i+1$  berechnet werden aus der Wahrscheinlichkeit  $p_i(x)$  für den Zustand  $\{x_i\}$  kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i$  und der von der Vorgeschichte des Systems unabhängigen Übergangswahrscheinlichkeit  $\bar{u}(x_i, x_{i+1})$  für den Übergang vom Zustand  $\{x_i\}$  in den Zustand  $\{x_{i+1}\}$  (Markoff'sche Eigenschaft). Die Folge der Zustände kurz vor den Taktzeitpunkten bildet somit eine sog. "eingebettete Markoff-Kette".

Allgemein gilt für die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_{i+1}(x)$  kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i+1$ :

$$p_{i+1}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} p_i(v) \bar{u}(v, x) \quad (2.1)$$

Formel (2.1) stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der der Zustand  $\{x_{i+1}\}$  kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i+1$  aus sämtlichen möglichen Zuständen kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i$  entsteht.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $\bar{u}(v, x)$  können dabei aus den folgenden Überlegungen bestimmt werden:

Die Anzahl von Anforderungen, welche während der Zeit  $T$  zwischen dem Taktzeitpunkt  $i$  und dem Taktzeitpunkt  $i+1$  eintreffen, sei  $k$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß während der Zeit  $T$  genau  $k$  Anforderungen eintreffen, sei  $r(k)$ . Da die Ankunftsabstände der Anforderungen negativ exponentiell mit der Ankunftsrate  $\lambda$  verteilt sind, stellen die Wahrscheinlichkeiten  $r(k)$  eine Poissonverteilung dar:

$$r(k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \quad (2.2A)$$

$$\text{Erwartungswert von } k: E[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k r(k) = \lambda T \quad (2.2B)$$

Sollen kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i+1$  genau  $x_{i+1}=x$  Anforderungen im System sein, so kann aus dem Zustand  $\{x_i\}$  kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i$  bestimmt werden, wieviele Anforderungen  $k$  noch während der Zeit  $T$  eintreffen müssen, um den Zustand  $\{x_{i+1}\}$  zu erzeugen. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen dieser  $k$  Anforderungen ist dann gleich der Übergangswahrscheinlichkeit  $\bar{u}(x_i, x_{i+1})$ .

Sind kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i$  0 Anforderungen im System vorhanden, so kann durch den Takt  $i$  auch keine Anforderung aus dem Speicher entfernt werden. Deshalb müssen während der Zeit  $T$  noch genau  $k=x$  Anforderungen eintreffen.

Sind kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i$   $x_i > 0$  Anforderungen im System enthalten, so wird durch den Takt  $i$  genau eine Anforderung aus dem Speicher entfernt und es müssen während der Zeit  $T$  noch  $k=x-x_i+1$  Anforderungen eintreffen. Dabei ist zu beachten, daß  $k$  immer nur größer oder gleich 0 sein kann. Die hier beschriebenen Beziehungen sind noch einmal in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Zustand $\{x_i\}$ kurz vor dem Taktzeitpunkt $i$	Anzahl $k$ von Anforderungen, welche während der Zeit $T$ eintreffen	Zustand $\{x_{i+1}\}$ kurz vor d. Taktzeitp. $i+1$
0	x	} x
1	x	
2	x-1	
⋮	⋮	
y	x-y+1	
⋮	⋮	
x	1	
x+1	0	
x+2	keine Übergänge mögl.	
⋮	⋮	

Aus der Tabelle folgt mit (2.2) für die Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\ddot{u}(0, x) = r(x) = \frac{(\lambda T)^x}{x!} e^{-\lambda T} \quad (2.3A)$$

$$\ddot{u}(v, x) = r(x-v+1) = \frac{(\lambda T)^{x-v+1}}{(x-v+1)!} e^{-\lambda T} \quad \text{für } 0 < v \leq x+1 \quad (2.3B)$$

$$\ddot{u}(v, x) = 0 \quad \text{für } v > x+1 \quad (2.3C)$$

Setzt man die Übergangswahrscheinlichkeiten von (2.3A,B,C) in (2.1) ein, so erhält man:

$$p_{i+1}(x) = p_i(0) \frac{(\lambda T)^x}{x!} e^{-\lambda T} + \sum_{v=1}^{x+1} p_i(v) \frac{(\lambda T)^{x-v+1}}{(x-v+1)!} e^{-\lambda T} \quad (2.4)$$

In der Gleichung (2.4) sind die Zustandswahrscheinlichkeiten für die Zustände kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i$  und kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i+1$  enthalten. Nimmt man nun an, daß sich das System im statistischen Gleichgewicht befindet, so müssen die Zustandswahrscheinlichkeiten für die Zustände kurz vor den Taktzeitpunkten  $i$  und  $i+1$  gleich sein, d.h.

$$p_{i+1}(x) = p_i(x) = p(x)$$

Damit wird aus (2.4) unter der Annahme des statistischen Gleichgewichts, welches hier durch die Bedingung  $\lambda T < 1$  gekennzeichnet wird

$$p(x) = p(0) \frac{(\lambda T)^x}{x!} e^{-\lambda T} + \sum_{v=1}^{x+1} p(v) \frac{(\lambda T)^{x-v+1}}{(x-v+1)!} e^{-\lambda T} \quad (2.5)$$

Gleichung (2.5) stellt ein lineares Gleichungssystem der Zustandswahrscheinlichkeiten kurz vor dem Taktzeitpunkt dar. Da der Speicher  $\infty$  groß ist und  $x$  somit Werte von 0 bis  $\infty$  annehmen kann, besteht dieses Gleichungssystem aus  $\infty$  vielen Gleichungen mit  $\infty$  vielen Unbekannten  $p(x)$ . Die Lösung dieses Gleichungssystems wird im folgenden Abschnitt II.1.3 beschrieben.

### II.1.3 Lösung des Gleichungssystems der Zustandswahrscheinlichkeiten, Einführung der erzeugenden Funktion

#### II.1.3.1 Rekursive Lösung des Gleichungssystems

Das Gleichungssystem (2.5) läßt sich prinzipiell auf folgende Art und Weise lösen:

Die linke Seite von (2.5) enthält nur die Wahrscheinlichkeit für den Zustand  $\{x\}$ . In der rechten Seite von (2.5) sind nur Wahrscheinlichkeiten von Zuständen enthalten, welche kleiner, gleich oder höchstens um 1 größer sind als  $\{x\}$ . Damit kann die Wahrscheinlichkeit  $p(x+1)$  in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten sämtlicher Zustände  $\leq \{x\}$  dargestellt werden. Setzt man in (2.5)  $x=0$ , so kann mit Hilfe der entstehenden Gleichung  $p(1)$  als Funktion von  $p(0)$  ausgedrückt werden. Setzt man in Gl.(2.5)  $x=1$ , so findet man eine Darstellung von  $p(2)$  als Funktion von  $p(1)$  und  $p(0)$ . Da aber  $p(1)$  selbst wieder eine Funktion von  $p(0)$  war, kann  $p(2)$  auch als Funktion von  $p(0)$  alleine dargestellt werden. Erhöht man nun laufend die Größe  $x$  in Gl.(2.5), so können sämtliche Wahrscheinlichkeiten  $p(x)$  für  $x > 0$  als Funktion von  $p(0)$  dargestellt werden. Die Wahrscheinlichkeit  $p(0)$  selbst erhält man schließlich dadurch, daß die von  $p(0)$  abhängigen Wahrscheinlichkeiten  $p(x)$  in die Normierungsbedingung  $\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1$  eingesetzt werden und diese nach  $p(0)$  aufgelöst wird.

Der oben beschriebene Lösungsweg zur Lösung des Gleichungssystems (2.5) ist zwar prinzipiell möglich, soll hier aber aus zwei Gründen nicht näher verfolgt werden. Erstens ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten  $p(x)$  in Abhängigkeit von  $p(0)$  und deren Einsetzen in die Normierungsbedingung relativ umfangreich und zweitens ist dieser Lösungsweg nicht auf alle Gleichungssysteme anwendbar, welche noch in dieser Arbeit behandelt werden. Deshalb wird in den Abschnitten II.1.3.2 und II.1.3.3 eine Möglichkeit behandelt, wie das Gleichungssystem (2.5) mit Hilfe der sog. "erzeugenden Funktion" gelöst wird.

II.1.3.2 Einführung der erzeugenden Funktion der Zustands-  
wahrscheinlichkeiten

Als sehr geeignetes mathematisches Werkzeug zur Lösung von Gleichungssystemen der Form von (2.5) erweist sich die sog. "erzeugende Funktion" (generating function) der Zustandswahrscheinlichkeiten. Sie ermöglicht nicht nur die Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x)$ , sondern sie gestattet es auch, auf sehr einfache Weise ohne Kenntnis der Zustandswahrscheinlichkeiten die Momente der Zustände zu bestimmen, wie z.B. Erwartungswert, Varianz usw.

Die erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten ist definiert als

$$G_X(z) = p(0) + p(1)z + p(2)z^2 + \dots + p(v)z^v + \dots = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) z^x \quad (2.6)$$

Dabei ist  $z$  eine beliebige (reelle oder auch komplexe) Variable. Einige besondere Eigenschaften der erzeugenden Funktion lassen sich direkt aus (2.6) angeben:

$$G_X(0) = p(0), \quad G_X(1) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) = 1 \quad (2.7A)$$

$$G_X^{(1)}(1) = \left. \frac{dG_X(z)}{dz} \right|_{z=1} = \sum_{x=0}^{\infty} x p(x) = E[x] = \text{Erwartungswert von } x \quad (2.7B)$$

$$G_X^{(2)}(1) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)p(x) = \text{Var}[x] - E[x] + E[x]^2 \quad (2.7C)$$

wobei  $\text{Var}[x] = \sum_{x=0}^{\infty} (x - E[x])^2 p(x) = \text{Varianz von } x$

Zur Berechnung der erzeugenden Funktion kann nun (2.5) in (2.6) eingesetzt werden. Dies ergibt:

$$G_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} p(0) \frac{(\lambda T z)^x}{x!} e^{-\lambda T z} z^x + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{x+1} p(v) \frac{(\lambda T)^{x-v+1}}{(x-v+1)!} e^{-\lambda T} z^x$$

Die Doppelsumme in diesem Ausdruck wird mit Hilfe von Bild 6 umgeformt.

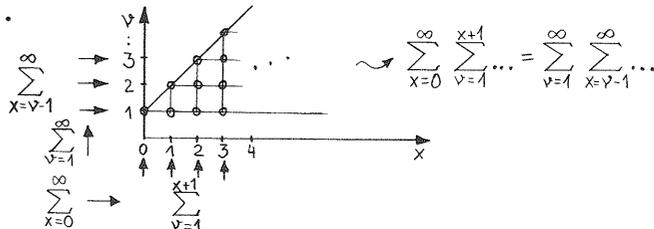


Bild 6: Umformung der Doppelsumme

Damit ist

$$G_X(z) = p(0) e^{-\lambda T} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^x}{x!} + e^{-\lambda T} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{x=v-1}^{\infty} p(v) \frac{(\lambda T)^{x-v+1}}{(x-v+1)!} z^x$$

Erweitert man den Ausdruck unter der Doppelsumme mit  $z^{-v+1}$  und zieht die Glieder, welche unabhängig von  $x$  sind, vor das zweite Summenzeichen, so erhält man

$$G_X(z) = p(0) e^{-\lambda T} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^x}{x!} + e^{-\lambda T} \sum_{v=1}^{\infty} p(v) z^{v-1} \sum_{x=v-1}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^{x-v+1}}{(x-v+1)!}$$

Eine Substitution der Laufvariablen der letzten Summe ergibt

$$G_X(z) = p(0) e^{-\lambda T} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^x}{x!} + e^{-\lambda T} \sum_{v=1}^{\infty} p(v) z^{v-1} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^x}{x!}$$

Berücksichtigt man nun, daß  $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^x}{x!}$  die Reihenentwicklung von  $e^{\lambda T z}$  ist, so wird aus obiger Gleichung

$$G_X(z) = p(0) e^{-\lambda T(1-z)} + e^{-\lambda T(1-z)} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} p(v) z^{v-1}$$

Schließlich wird noch der Ausdruck unter dem Summenzeichen mit  $z$  erweitert

$$G_X(z) = p(0) e^{-\lambda T(1-z)} + e^{-\lambda T(1-z)} \cdot \frac{1}{z} \cdot \sum_{v=1}^{\infty} p(v) z^v$$

$$G_X(z) = p(0) e^{-\lambda T(1-z)} + e^{-\lambda T(1-z)} \cdot \frac{1}{z} \left( \underbrace{\sum_{v=0}^{\infty} p(v) z^v}_{G_X(z)} - p(0) \right)$$

Diese Gleichung kann nach  $G_X(z)$  aufgelöst werden

$$G_X(z) = \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z} e^{-\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda T(1-z)} p(0)$$

$$G_X(z) = \frac{z - 1}{z - e^{-\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda T(1-z)} p(0) \quad (2.8A)$$

$$G_X(z) = \frac{z - 1}{z e^{\lambda T(1-z)} - 1} p(0) \quad (2.8B)$$

In (2.8A,B) ist die Wahrscheinlichkeit  $p(0)$  noch unbekannt. Setzt man in (2.8A)  $z=1$ , so erhält man mit Hilfe von (2.7A) durch eine Grenzwertbestimmung unter Anwendung der Regel von

l'Hospital

$$1 = p(0) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z - e^{-\lambda T(1-z)}} = p(0) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \lambda T e^{-\lambda T(1-z)}}$$

$$1 = p(0) \frac{1}{1 - \lambda T}$$

$$p(0) = 1 - \lambda T \quad (2.9)$$

Setzt man (2.9) in (2.8B) ein, so erhält man endgültig die erzeugende Funktion

$$Gx(z) = \frac{z-1}{ze^{\lambda T(1-z)} - 1} (1 - \lambda T) \quad (2.10)$$

Die erzeugende Funktion  $Gx(z)$  in (2.10) kann für das vorliegende System auch noch auf eine einfachere Art und Weise erhalten werden ohne direktes Einsetzen der Zustandsgleichung (2.5) in die erzeugende Funktion (2.6). Dazu geht man von den Zuständen selbst aus. Der Zustand  $\{x_{i+1}\}$  kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i+1$  entsteht aus dem Zustand  $\{x_i\}$  kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i$  abzüglich einer Anforderung, welche durch den Takt  $i$  aus dem System entfernt wird (bei  $x_i > 0$ ) plus der Anzahl  $k$  der während der Zeit  $T$  einfallenden Anforderungen (vgl. Bild 5).

Es gilt also für die Zustände

$$\{x_{i+1}\} = \text{Max}[\{\{x_i\} - 1, 0\}] + k \quad (2.11)$$

$$\text{Dabei ist } \text{Max}[\{\{x_i\} - 1, 0\}] = \begin{cases} \{x_i\} - 1 & \text{für } \{x_i\} > 0 \\ 0 & \text{für } \{x_i\} = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\text{Abkürzung: } v_i = \text{Max}[\{\{x_i\} - 1, 0\}] \quad (2.13)$$

Mit (2.13) folgt für (2.11)

$$\{x_{i+1}\} = v_i + k \quad (2.14)$$

Gleichung (2.14) besagt, daß die Zufallsvariable  $\{x_{i+1}\}$  die Summe aus den voneinander unabhängigen Zufallsvariablen  $v_i$  und  $k$  ist. Die Wahrscheinlichkeit für den Zustand  $\{x_{i+1}\}$  ergibt sich dann aus der Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten für  $v_i$  und  $k$ . Die erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_{i+1}(x)$  ist dann nach der Wahrscheinlichkeitstheorie gleich dem Produkt der einzelnen erzeugenden Funktionen der Wahrscheinlichkeiten für  $v_i$  und  $k$ , [25]. Daraus folgt mit (2.14)

$$Gx_{i+1}(z) = Gv_i(z) Gk(z) \quad (2.15)$$

wobei

$Gx_{i+1}(z)$  = erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeiten  $p_{i+1}(x)$

$Gv_i(z)$  = erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeiten für  $v_i$

$Gk(z)$  = erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeiten  $r(k)$

Für die erzeugende Funktion  $Gv_i(z)$  erhält man unter Berücksichtigung von (2.13) und (2.12)

$$Gv_i(z) = p_i(0) + \sum_{x=1}^{\infty} p_i(x) z^{x-1}$$

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen wird mit  $z$  erweitert und umgeformt

$$Gv_i(z) = p_i(0) + \frac{1}{z} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} p_i(x) z^x$$

$$Gv_i(z) = p_i(0) + \frac{1}{z} \cdot \left[ \frac{\sum_{x=0}^{\infty} p_i(x) z^x - p_i(0)}{Gx_i(z)} \right]$$

$$Gv_i(z) = p_i(0) \left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z} Gx_i(z) \quad (2.16)$$

(2.16) in (2.15) eingesetzt, ergibt

$$Gx_{i+1}(z) = \left[ p_i(0) \left(1 - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z} Gx_i(z) \right] Gk(z) \quad (2.17)$$

Nimmt man an, daß sich das System im statistischen Gleichgewicht befindet, so müssen die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_i(x)$  kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i$  gleich den Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_{i+1}(x)$  kurz vor dem Taktzeitpunkt  $i+1$  sein (vgl. S.22), d.h.

$$p_{i+1}(x) = p_i(x) = p(x)$$

und damit auch  $Gx_{i+1}(z) = Gx_i(z) = Gx(z)$

Unter der Annahme des statistischen Gleichgewichts führt damit Gl.(2.17) auf

$$Gx(z) = p(0) \left(1 - \frac{1}{z}\right) Gk(z) + \frac{1}{z} Gk(z) Gx(z)$$

$$Gx(z) = \frac{\left(1 - \frac{1}{z}\right) Gk(z)}{1 - \frac{1}{z} Gk(z)} p(0)$$

$$G_X(z) = \frac{(z-1)G_k(z)}{z - G_k(z)} p(0) \quad (2.18)$$

Das in Gl.(2.18) noch unbekanntes  $p(0)$  läßt sich aus der Bedingung  $G_X(1)=1$  bestimmen. Durch eine Grenzwertbetrachtung mit Hilfe der Regel von l'Hospital erhält man dann nach Einsetzen von  $z=1$  in Gl.(2.18)

$$1 = p(0) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z - G_k(z)} = p(0) \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 - G_k'(z)}$$

Unter Berücksichtigung von  $G_k'(1) = E[k]$  (vgl. auch Gl.(2.7B)) wird daraus

$$1 = p(0) \frac{1}{1 - E[k]}$$

$$p(0) = 1 - E[k] \quad (2.19)$$

Gl.(2.19) in Gl.(2.18) eingesetzt, ergibt

$$G_X(z) = \frac{(z-1)G_k(z)}{z - G_k(z)} (1 - E[k]) \quad (2.20)$$

Für eine Poissonverteilung von  $k$  nach Gl.(2.2A) gilt

$$E[k] = \lambda T$$

$$\text{und } G_k(z) = e^{-\lambda T(1-z)}$$

Damit wird aus (2.20)

$$G_X(z) = \frac{(z-1)e^{-\lambda T(1-z)}}{z - e^{-\lambda T(1-z)}} (1 - \lambda T)$$

$$G_X(z) = \frac{z-1}{ze^{\lambda T(1-z)} - 1} (1 - \lambda T)$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung (2.10). Selbstverständlich enthält dieser Lösungsweg implizit den zuerst gezeigten Lösungsweg zur Bestimmung von  $G_X(z)$ . Um aus der erzeugenden Funktion  $G_X(z)$  die Zustandswahrscheinlichkeiten zu gewinnen, muß die erzeugende Funktion rücktransformiert werden. Diese Rücktransformation wird in Abschnitt II.1.3.3 dargestellt.

### II.1.3.3 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten aus der erzeugenden Funktion

Für die Rücktransformation der erzeugenden Funktion zur Bestimmung der einzelnen Zustandswahrscheinlichkeiten gilt allgemein

(vgl. auch [22])

$$p(x) = \frac{1}{x!} \cdot \left. \frac{d^x G_X(z)}{dz^x} \right|_{z=0} = \frac{1}{x!} G_X^{(x)}(0) \quad (2.21)$$

(Gl.(2.21) läßt sich auch leicht durch Einsetzen von Gl.(2.6) bestätigen)

Gleichung (2.21) zeigt, daß die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x)$  gleich den Koeffizienten von  $z^x$  der Taylor-Reihenentwicklung von  $G_X(z)$  im Punkt  $z=0$  sind. Leider ist es aber oft nur sehr schwer oder überhaupt nicht möglich, eine explizite Formel für  $G_X^{(x)}(z)$ , d.h. die  $x$ -te Ableitung von  $G_X(z)$ , anzugeben. Trotzdem kann man zu einer expliziten Angabe der Reihenentwicklung von  $G_X(z)$  kommen, wenn man schrittweise Einzelteile von  $G_X(z)$  in eine Reihe entwickelt und anschließend diese zu einer einzigen Reihe zusammenfaßt. Die Anwendung dieses Lösungsweges auf die erzeugende Funktion  $G_X(z)$  in Gl.(2.10) soll im folgenden gezeigt werden. Dazu wird Gl.(2.10) etwas umgeformt

$$G_X(z) = (1 - \lambda T)(1 - z) \frac{1}{1 - ze^{\lambda T(1-z)}} \quad (2.22A)$$

Zuerst wird der Bruch von (2.22A) mit Hilfe der Reihenentwicklung  $\frac{1}{1-u} = \sum_{v=0}^{\infty} u^v$  (Konvergenzbereich  $|u| < 1$ ) umgeformt

$$G_X(z) = (1 - \lambda T)(1 - z) \sum_{v=0}^{\infty} [ze^{\lambda T(1-z)}]^v = (1 - \lambda T)(1 - z) \sum_{v=0}^{\infty} [z^v e^{\nu \lambda T} e^{-\nu \lambda T z}] \quad (2.22B)$$

Jetzt kann die Exponentialfunktion  $e^{-\nu \lambda T z}$  in die Reihe

$$e^{-\nu \lambda T z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\nu \lambda T z)^j}{j!}$$

entwickelt werden. Dadurch entsteht aus Gl.(2.22B)

$$G_X(z) = (1 - \lambda T)(1 - z) \sum_{v=0}^{\infty} \left[ z^v e^{\nu \lambda T} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\nu \lambda T z)^j}{j!} \right]$$

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, den obigen Ausdruck nach Potenzen von  $z$  zu ordnen. Dazu wird zunächst die Summe

$$S = \sum_{v=0}^{\infty} \left[ z^v e^{\nu \lambda T} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\nu \lambda T z)^j}{j!} \right]$$

umgeformt. Ausführlich geschrieben ist

$$S = z^0 \cdot 1 + z^1 \cdot e^{\lambda T} \left( 1 - \frac{(1\lambda T z)^1}{1!} + \frac{(1\lambda T z)^2}{2!} - \dots \right) + z^2 \cdot e^{2\lambda T} \left( 1 - \frac{(2\lambda T z)^1}{1!} + \frac{(2\lambda T z)^2}{2!} - \dots \right) + \dots$$

Um für die Summe S eine Ordnung nach Potenzen von z zu erhalten, müssen die einzelnen Terme in obiger Gleichung diagonal (von rechts oben nach links unten) zusammengefaßt werden.

S läßt sich dann schreiben als

$$S = \sum_{v=0}^{\infty} \left[ z^v \sum_{j=0}^v e^{j\lambda T} \frac{(-j\lambda T)^{v-j}}{(v-j)!} \right]$$

(Man beachte hierbei:  $\frac{0^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1$ )

Für Gx(z) gilt dann mit obigen Ausdrücken

$$Gx(z) = (1 - \lambda T)(S - zS)$$

Die Terme S und zS werden zusammengefaßt, indem gleiche Potenzen von z ausgeklammert werden. Dadurch entsteht

$$Gx(z) = (1 - \lambda T) \sum_{v=0}^{\infty} z^v \left( \underbrace{\sum_{j=0}^v e^{j\lambda T} \frac{(-j\lambda T)^{v-j}}{(v-j)!}}_{\text{von S}} - \underbrace{\sum_{j=0}^{v-1} e^{j\lambda T} \frac{(-j\lambda T)^{(v-1-j)}}{(v-1-j)!}}_{\text{von zS}} \right)$$

Hierbei ist zu beachten, daß in dieser Arbeit einer Summe, bei welcher die obere Summationsgrenze kleiner ist als die untere Summationsgrenze, der Wert 0 zugewiesen wird.

Spaltet man aus der Summe mit der oberen Grenze v noch das Glied mit j=v ab, so erhält man nach einer kleinen Umformung

$$Gx(z) = (1 - \lambda T) \sum_{v=0}^{\infty} z^v \left[ e^{v\lambda T} - \sum_{j=0}^{v-1} e^{j\lambda T} \frac{(-j\lambda T)^{(v-1-j)}}{(v-1-j)!} \left( \frac{j\lambda T}{v-j} + 1 \right) \right] \quad (2.23)$$

Gl.(2.23) ist die explizite Darstellung der Reihenentwicklung von Gx(z). Deshalb sind die Zustandswahrscheinlichkeiten p(x) gleich den Koeffizienten von z<sup>x</sup> in Gl.(2.23)

$$p(x) = (1 - \lambda T) \left[ e^{x\lambda T} - \sum_{j=0}^{x-1} e^{j\lambda T} \frac{(-j\lambda T)^{(x-1-j)}}{(x-1-j)!} \left( \frac{j\lambda T}{x-j} + 1 \right) \right] \quad (2.24)$$

Man beachte  $\frac{0^0}{0!} = 1$  und  $\sum_{\alpha}^b = 0$  für b < a

### II.1.4 Mittlere Schlangenlänge

Die mittlere Schlangenlänge im Speicher kurz vor dem Taktzeitpunkt ist gleich dem Erwartungswert von x, nämlich

$$E[x] = \sum_{x=0}^{\infty} xp(x)$$

Um den Erwartungswert E[x] zu berechnen, ist es aber nicht nötig, den Ausdruck für p(x) aus Gl.(2.24) in die obige Gleichung einzusetzen, sondern man kann E[x] direkt aus der erzeugenden Funktion Gx(z) nach Gl.(2.7B) berechnen.

Für die Bestimmung von E[x] wird hier von der erzeugenden Funktion nach Gl.(2.20) ausgegangen

$$Gx(z) = (1 - E[k]) \frac{z-1}{z - Gk(z)} Gk(z)$$

Die erste Ableitung nach z ist dann

$$\frac{dGx(z)}{dz} = Gx'(z) = (1 - E[k]) \left[ \frac{z - Gk(z) - (z-1)(-Gk'(z))}{(z - Gk(z))^2} Gk(z) + \frac{z-1}{z - Gk(z)} Gk'(z) \right] \quad (2.25)$$

Setzt man nun z=1 in Gl.(2.25) ein, so ergeben sich unbestimmte Ausdrücke, welche durch Grenzwertbetrachtungen nach der Regel von de l'Hospital ermittelt werden

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{dGx(z)}{dz} \right] &= (1 - E[k]) \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{1 - Gk''(z) - (1 - Gk'(z)) - (z-1)(-Gk''(z))}{2(z - Gk(z))(1 - Gk'(z))} Gk(z) + \frac{1}{1 - Gk'(z)} Gk''(z) \right] \\ &= (1 - E[k]) \left[ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Gk''(z) - (z-1)(-Gk'''(z))}{2(1 - Gk''(z))(1 - Gk'(z)) + 2(z - Gk(z))(-Gk''(z))} Gk(z) + \frac{1}{1 - E[k]} E[k] \right] \\ &= (1 - E[k]) \left[ \frac{Gk''(1)}{2(1 - E[k])^2} + \frac{E[k]}{1 - E[k]} \right] \end{aligned}$$

Verwendet man für den Zähler des ersten Bruches noch einen Ausdruck analog zu Gl.(2.7C), so wird daraus

$$E[x] = \frac{dGx(z)}{dz} \Big|_{z=1} = (1 - E[k]) \left[ \frac{\text{Var}[k] + E[k]^2 - E[k]}{2(1 - E[k])^2} + \frac{E[k]}{1 - E[k]} \right]$$

$$E[x] = (1 - E[k]) \left[ \frac{\text{Var}[k]}{2(1 - E[k])^2} - \frac{E[k](1 - E[k])}{2(1 - E[k])^2} + \frac{E[k]}{1 - E[k]} \right]$$

$$E[x] = \frac{E[k]}{2} + \frac{\text{Var}[k]}{2(1 - E[k])} \quad (2.26)$$

Für eine Poissonverteilung von k nach Gl.(2.2A) gilt

$$E[k] = \lambda T$$

$$\text{Var}[k] = E[k] = \lambda T$$

Damit ergibt sich für die mittlere Schlängellänge E[x] kurz vor dem Taktzeitpunkt aus Gl.(2.26)

$$E[x] = \frac{\lambda T}{2} \left( 1 + \frac{1}{1 - \lambda T} \right) \quad (2.27)$$

### II.1.5 Mittlere Wartezeit $t_w^*$

Die über eine Taktzeit T gemittelte mittlere Schlängellänge ist die Speicherbelastung  $\Omega$ . Für die auf alle Anforderungen bezogene mittlere Wartezeit  $t_w^*$  gilt allgemein

$$t_w^* = \frac{\Omega}{\lambda} \quad (2.28)$$

Da in dem behandelten System aber alle eintreffenden Anforderungen warten müssen, d.h. die Wartewahrscheinlichkeit  $P(>0)=1$  ist, gilt für die auf die wartenden Anforderungen bezogene mittlere Wartezeit  $t_w$  in diesem Fall

$$t_w = \frac{t_w^*}{P(>0)} = t_w^* = \frac{\Omega}{\lambda}$$

In Gl.(2.28) ist die Größe  $\Omega$  noch unbekannt. Sie kann aber leicht mit Hilfe von E[x] aus Gl.(2.27) auf folgende Weise bestimmt werden:

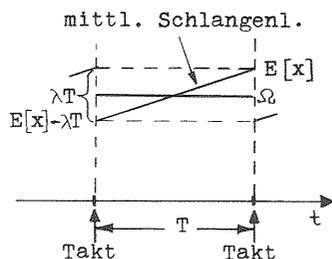


Bild 7: Bestimmung von  $\Omega$

Während der Taktzeit T kommen im Mittel  $\lambda T$  Anforderungen am System an und tragen dazu bei, daß kurz vor dem Taktzeitpunkt die mittlere Schlängellänge E[x] ist (vgl. Bild 7). Da der Anstieg der mittleren Schlängellänge innerhalb des Taktintervalles linear erfolgt (vgl. auch Abschn. II.2), folgt für  $\Omega$  aus Bild 7

$$\Omega = E[x] - \frac{1}{2} \lambda T$$

Dieser Ausdruck kann nun in Gl.(2.28) eingesetzt werden

$$t_w^* = \frac{1}{\lambda} \left( E[x] - \frac{1}{2} \lambda T \right)$$

Setzt man noch E[x] aus Gl.(2.27) ein, so wird daraus

$$t_w^* = \frac{T}{2(1 - \lambda T)} \quad (2.29A)$$

oder

$$t_w^* = \frac{t_w^*}{T} = \frac{1}{2(1 - \lambda T)} \quad (2.29B)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die Formel für die Wartezeit Gl.(2.29A) bzw. Gl.(2.29B) genau übereinstimmt mit der Formel für die Wartezeit bezogen auf die wartenden Anforderungen bei dem System M/D/1 (Poisson-Ankunftsprozess, konstante Belegungsdauer T, eine Leitung), welches von Pollaczek und Crommelin behandelt wurde. Für diese Tatsache gibt es eine einfache physikalische Erklärung:

Solange im System M/D/1 die Leitung belegt ist, ist das zeitliche Verhalten einer eventuell entstehenden Warteschlange im Speicher genau gleich wie bei dem hier behandelten System, da sich eine belegte Leitung genau wie der Takt auf die wartenden Anforderungen auswirkt. Bezieht man deshalb die mittlere Wartezeit im System M/D/1 nur auf jene Anforderungen, welche sich einmal in der Warteschlange befanden (d.h. die wartenden Anforderungen), so muß sich derselbe Wert ergeben wie für die mittlere Wartezeit in dem hier behandelten System.

In dem hiermit beendeten Abschnitt II.1 wurde sehr ausführlich gezeigt, welche Lösungswege zur Bestimmung von interessierenden Größen angewendet werden können. Dabei zeigte sich, daß die erzeugende Funktion ein geeignetes Hilfsmittel dazu ist, auch ohne Kenntnis der einzelnen Zustandswahrscheinlichkeiten verschiedene Mittelwerte bzw. Momente zu bestimmen (z.B. mittlere Schlängellänge, mittlere Wartezeit). Zur Berechnung der Wartezeitverteilungsfunktion ist es aber sinnvoll, die Zustandswahrscheinlichkeiten nicht nur kurz vor dem Taktzeitpunkt zu ermitteln, sondern zu einem beliebigen Zeitpunkt zwischen zwei Takten. Dies soll in Abschnitt II.2 durchgeführt werden.

II.2 System mit n=1 Abfrageplatz und Beobachtungszeitpunkten zu einer beliebigen Zeit  $t_v$  vor dem Taktzeitpunkt

II.2.1 Aufstellung des Gleichungssystems der Zustands-  
wahrscheinlichkeiten

Das gleiche System wie in Abschnitt II.1 wird nun zu Zeitpunkten betrachtet, welche jeweils die Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Taktzeitpunkt (vgl. Bild 8) bzw. die Zeit  $t_n$  nach dem letzten Taktzeitpunkt liegen. Es ist somit

$$t_n = T - t_v \text{ mit } 0 \leq t_v \leq T \quad (2.30)$$

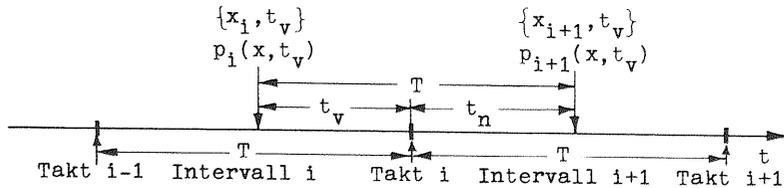


Bild 8: Beobachtungszeitpunkte

Die Folge von Zuständen zu diesen Zeitpunkten  $t_v$  vor dem nächsten Takt bildet ebenfalls eine eingebettete Markoff-Kette. Deshalb gilt entsprechend zu Gl. (2.1) für die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_{i+1}(x, t_v)$  für den Zustand  $\{x_{i+1}, t_v\}$  zum Zeitpunkt  $t_v$  vor dem Takt i+1

$$p_{i+1}(x, t_v) = \sum_{v=0}^{\infty} p_i(v, t_v) \ddot{u}(v, x) \quad (2.31)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten erhält man aus folgender Betrachtung:

Durch den Takt kann nur eine Anforderung aus dem Speicher entfernt werden, wenn überhaupt kurz vor dem Takt eine Anforderung im Speicher war. Die Entstehungsmöglichkeiten für den Zustand  $\{x_{i+1}, t_v\}$  werden in zwei Fälle aufgeteilt:

- 1.)  $\{x_{i+1}, t_v\}$  mit  $x_{i+1}=x$  entsteht aus  $\{v_1, t_v\}$  mit  $v_1=0$ , wenn
  - a)  $k_v=0$  Anforderungen während der Zeit  $t_v$  einfallen und  $k_n=x$  Anforderungen während der Zeit  $t_n$ . Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist bei einem Poisson-Ankunftsprozeß entsprechend zu Gl. (2.2A)

$$e^{-\lambda t_v} \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} e^{-\lambda t_n} = \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} e^{-\lambda T}$$

- b)  $k_v > 0$  Anforderungen während der Zeit  $t_v$  einfallen und  $k_n = x - k_v + 1$  Anforderungen während der Zeit  $t_n$  (mit  $1 \leq k_v \leq x+1$ ). Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist bei einem Poisson-Ankunftsprozeß

$$\frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} e^{-\lambda t_v} \frac{(\lambda t_n)^{(x-k_v+1)}}{(x-k_v+1)!} e^{-\lambda t_n} = \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} \cdot \frac{(\lambda t_n)^{(x-k_v+1)}}{(x-k_v+1)!} e^{-\lambda T}$$

- 2.)  $\{x_{i+1}, t_v\}$  mit  $x_{i+1}=x$  entsteht aus  $\{v_1, t_v\}$  mit  $v_1=v$  bei  $1 \leq v \leq x+1$ , wenn

$k = k_v + k_n = x - v + 1$  Anforderungen während der Zeit  $t_v + t_n = T$  einfallen, da in diesem Fall immer vor dem Takt i eine Anforderung im Speicher enthalten ist. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist bei einem Poisson-Ankunftsprozeß

$$\frac{(\lambda T)^{(x-v+1)}}{(x-v+1)!} e^{-\lambda T}$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten  $\ddot{u}(v, x)$  folgt deshalb

$$\text{aus 1.) } \ddot{u}(0, x) = e^{-\lambda T} \left[ \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} + \sum_{k_v=1}^{x+1} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} \cdot \frac{(\lambda t_n)^{(x-k_v+1)}}{(x-k_v+1)!} \right] \quad (2.32A)$$

$$\text{aus 2.) } \ddot{u}(v, x) = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^{(x-v+1)}}{(x-v+1)!} \quad \text{für } 1 \leq v \leq x+1 \quad (2.32B)$$

$$\text{und } \ddot{u}(v, x) = 0 \quad \text{für } v > x+1 \quad (2.32C)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten aus Gl. (2.32A, B, C) werden in Gl. (2.31) eingesetzt. Es entsteht dann

$$p_{i+1}(x, t_v) = e^{-\lambda T} \left[ p_i(0, t_v) \left( \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} + \sum_{k_v=1}^{x+1} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} \cdot \frac{(\lambda t_n)^{(x-k_v+1)}}{(x-k_v+1)!} \right) + \sum_{v=1}^{x+1} p_i(v, t_v) \frac{(\lambda T)^{(x-v+1)}}{(x-v+1)!} \right] \quad (2.33)$$

Unter Voraussetzung des statistischen Gleichgewichts wird  $p_{i+1}(x, t_v) = p_i(x, t_v) = p(x, t_v)$ . Damit erhält für den Fall des statistischen Gleichgewichts das Gleichungssystem für die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x, t_v)$  die Form

$$p(x, t_v) = e^{-\lambda T} \left[ p(0, t_v) \left( \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} + \sum_{k_v=1}^{x+1} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} \cdot \frac{(\lambda t_n)^{(x-k_v+1)}}{(x-k_v+1)!} \right) + \sum_{v=1}^{x+1} p(v, t_v) \frac{(\lambda T)^{(x-v+1)}}{(x-v+1)!} \right] \quad (2.34)$$

II.2.2 Bestimmung der erzeugenden Funktion der Zustands-  
wahrscheinlichkeiten

Zur Lösung des Gleichungssystems (2.34) wird wieder die erzeugende Funktion verwendet. Es sei

$$Gx(z, t_v) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x, t_v) z^x \quad (2.35)$$

Es könnte nun Gl.(2.34) in Gl.(2.35) eingesetzt werden, um die erzeugende Funktion  $Gx(z, t_v)$  zu berechnen. Dies wird jedoch nur der Vollständigkeit wegen in Anhang 1 durchgeführt. Hier soll der im vorliegenden Falle einfachere Weg zur Bestimmung der erzeugenden Funktion  $Gx(z, t_v)$  angewendet werden, indem von den Zuständen selbst ausgegangen wird (entsprechend zu Gl.(2.11)).

Zur Zeit  $t_v$  vor dem Takt  $i$  (vgl. Bild 8) befindet sich das System im Zustand  $\{x_i, t_v\}$ . Die Anzahl der während der Zeit  $t_v$  vor dem Takt  $i$  einfallenden Anforderungen sei  $k_v$ . Ist  $(\{x_i, t_v\} + k_v) > 0$ , so wird mit dem Takt  $i$  eine Anforderung aus dem Speicher geholt, in welchem sich dann nur noch  $(\{x_i, t_v\} + k_v) - 1$  Anforderungen befinden. Während der Zeit  $t_n$  nach dem Takt  $i$  bis zum nächsten Beobachtungszeitpunkt können keine Anforderungen mehr aus dem Speicher entfernt werden, sondern es können nur noch Anforderungen ankommen, deren Anzahl  $k_n$  sei.

Damit gilt für den Zustand  $\{x_{i+1}, t_v\}$

$$\{x_{i+1}, t_v\} = \text{Max}[(\{x_i, t_v\} + k_v - 1), 0] + k_n \quad (2.36)$$

$$\text{mit Max}[(\{x_i, t_v\} + k_v - 1), 0] = \begin{cases} \{x_i, t_v\} + k_v - 1 & \text{für } \{x_i, t_v\} + k_v > 0 \\ 0 & \text{für } \{x_i, t_v\} + k_v = 0 \end{cases}$$

Abkürzungen:

Die Summe der unabhängigen Zufallsvariablen  $\{x_i, t_v\}$  und  $k_v$  sei

$$u_i = \{x_i, t_v\} + k_v \quad (2.37A)$$

mit der Wahrscheinlichkeit  $s_i(u)$

$$\text{Weiterhin sei } v_i = \text{Max}[(u_i - 1), 0] \quad (2.37B)$$

Mit Gl.(2.37A,B) wird aus Gl.(2.36)

$$\{x_{i+1}, t_v\} = v_i + k_n \quad (2.38)$$

$Gx_{i+1}(z, t_v)$  sei die erzeugende Funktion für  $p_{i+1}(x, t_v)$

$Gv_i(z)$  sei die erzeugende Funktion für die Wahrscheinlichkeiten für  $v_i$

$Gk_n(z)$  sei die erzeugende Funktion für die Wahrscheinlichkeiten für  $k_n$

$Gu_i(z)$  sei die erzeugende Funktion für  $s_i(u)$

Da  $v_i$  und  $k_n$  unabhängige Zufallsvariable sind, gilt nach Gl.(2.38) analog zu Gl.(2.15)

$$Gx_{i+1}(z, t_v) = Gv_i(z)Gk_n(z) \quad (2.39)$$

Für die erzeugende Funktion  $Gv_i(z)$  gilt mit Hilfe von Gl.(2.37B)

$$Gv_i(z) = s_i(0) + \sum_{v=0}^{\infty} s_i(v+1)z^v = s_i(0) + \frac{1}{z} \sum_{v=0}^{\infty} s_i(v+1)z^{v+1} = s_i(0) + \frac{1}{z} [Gu_i(z) - s_i(0)]$$

$$Gv_i(z) = s_i(0)(1 - \frac{1}{z}) + \frac{1}{z} Gu_i(z) \quad (2.40)$$

Da  $\{x_i, t_v\}$  und  $k_v$  unabhängige Zufallsvariable sind, folgt nach Gl.(2.37A)

$$Gu_i(z) = Gx_i(z, t_v)Gk_v(z) \quad (2.41A)$$

$$\text{und } s_i(0) = p_i(0, t_v)r_v(0) \quad (2.41B)$$

wobei  $r_v(k_v)$  = Wahrscheinlichkeit für den Einfall von  $k_v$  Anforderungen während der Zeit  $t_v$

und  $Gk_v(z)$  = erzeugende Funktion für  $r_v(k_v)$

Gl.(2.41A,B) in Gl.(2.40) und das Ergebnis in Gl.(2.39) eingesetzt ergibt

$$Gx_{i+1}(z, t_v) = \left[ p_i(0, t_v)r_v(0)(1 - \frac{1}{z}) + \frac{1}{z} Gx_i(z, t_v)Gk_v(z) \right] Gk_n(z) \quad (2.42)$$

Bei der Annahme des statistischen Gleichgewichtes wird

$$p_{i+1}(x, t_v) = p_i(x, t_v) = p(x, t_v)$$

und damit auch  $Gx_{i+1}(z, t_v) = Gx_i(z, t_v) = Gx(z, t_v)$

Damit folgt aus Gl.(2.42) für den Fall des statistischen Gleichgewichtes

$$Gx(z, t_v)(1 - \frac{1}{z}Gk_v(z)Gk_n(z)) = p(0, t_v)r_v(0)(1 - \frac{1}{z})Gk_n(z)$$

$$Gx(z, t_v) = p(0, t_v)r_v(0) \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}Gk_v(z)Gk_n(z)} Gk_n(z)$$

Da  $k_v$  und  $k_n$  unabhängige Zufallsvariable sind, kann geschrieben werden

$$Gk_v(z)Gk_n(z) = Gk(z) \quad ,$$

wobei  $Gk(z)$  die erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeiten für den Einfall von  $k=k_v+k_n$  Anforderungen in der Zeit  $T$  ist.

Damit erhält man für die erzeugende Funktion  $Gx(z, t_v)$

$$Gx(z, t_v) = p(0, t_v) r_v(0) \cdot \frac{z-1}{z-Gk(z)} \cdot Gk_n(z) \quad (2.43)$$

Die unbekannte Zustandswahrscheinlichkeit  $p(0, t_v)$  kann wieder durch Einsetzen von  $z=1$  in Gl.(2.43) bestimmt werden.

Eine Grenzwertbetrachtung mit Anwendung der Regel von de l'Hospital liefert analog zu Gl.(2.19)

$$p(0, t_v) = \frac{1 - E[k]}{r_v(0)} \quad (2.44)$$

Für ein Poissonangebot wird

$$\begin{aligned} r_v(0) &= e^{-\lambda t_v} \\ E[k] &= \lambda T \\ Gk(z) &= e^{-\lambda T(1-z)} \\ Gk_n(z) &= e^{-\lambda t_n(1-z)} \end{aligned}$$

Damit erhält man aus Gl.(2.43) bzw. Gl.(2.44)

$$p(0, t_v) = (1-\lambda T) e^{\lambda t_v} \quad (2.45A)$$

$$Gx(z, t_v) = (1-\lambda T) \frac{z-1}{z-e^{\lambda T(z-1)}} e^{\lambda t_n(z-1)} \quad (2.45B)$$

Für  $t_v=0$  bzw.  $t_n=T$  ergibt sich aus Gl.(2.45A) die Gl.(2.9) und aus Gl.(2.45B) die Gl.(2.10).

### II.2.3 Mittlere Schlangenlänge und mittlere Wartezeit

Zur Bestimmung der mittleren Schlangenlänge zu einer beliebigen Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Taktzeitpunkt wird die erzeugende Funktion (2.43) nach  $z$  abgeleitet. Mit Gl.(2.44) erhält man dann

$$\frac{dGx(z, t_v)}{dz} = Gx^{(1)}(z, t_v) = (1-E[k]) \left[ \frac{z-Gk(z)-(z-1)(1-Gk^{(1)}(z))}{(z-Gk(z))^2} Gk_n(z) + \frac{z-1}{z-Gk(z)} Gk_n^{(1)}(z) \right] \quad (2.46)$$

Setzt man in Gl.(2.46)  $z=1$  ein, so erhält man durch Grenzwertbetrachtungen analog zur Bestimmung von Gl.(2.26) für den Erwartungswert  $E[x, t_v]$  der Anzahl von Anforderungen zur Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Taktzeitpunkt

$$E[x, t_v] = (1-E[k]) \left[ \frac{\text{Var}[k] + E[k]^2 - E[k]}{2(1-E[k])^2} + \frac{E[k_n]}{1-E[k]} \right] \quad (2.47)$$

Bei einem Poissonangebot ist  $E[k] = \lambda T$

$$\begin{aligned} E[k_n] &= \lambda t_n \\ \text{Var}[k] &= E[k] = \lambda T \end{aligned}$$

Damit wird aus Gl.(2.47)

$$\begin{aligned} E[x, t_v] &= (1-\lambda T) \left[ \frac{\lambda T + (\lambda T)^2 - \lambda T}{2(1-\lambda T)^2} + \frac{\lambda t_n}{1-\lambda T} \right] \\ E[x, t_v] &= \frac{(\lambda T)^2}{2(1-\lambda T)} + \lambda t_n = \frac{(\lambda T)^2}{2(1-\lambda T)} + \lambda(T-t_v) \\ E[x, t_v] &= \frac{(\lambda T)^2 + 2\lambda T - 2(\lambda T)^2}{2(1-\lambda T)} - \lambda t_v = \frac{\lambda T}{2} \left( \frac{1-\lambda T+1}{1-\lambda T} \right) - \lambda t_v \\ E[x, t_v] &= \frac{\lambda T}{2} \left( 1 + \frac{1}{1-\lambda T} \right) - \lambda t_v \quad (2.48) \end{aligned}$$

Diese Formel (2.48) bestätigt noch einmal die Darstellung der mittleren Schlangenlänge über der Zeit in Bild 7.

Kurz vor dem Taktzeitpunkt ist  $t_v=0$ . Gl.(2.48) stimmt für diesen Sonderfall mit Gl.(2.27) überein.

Zur Berechnung der mittleren Wartezeit muß zunächst die mittlere Speicherbelastung  $\Omega$  bestimmt werden durch Mittelwertbildung von Gl.(2.48) für  $0 \leq t_v \leq T$

$$\Omega = \frac{1}{T} \int_0^T E[x, t_v] dt_v = \frac{\lambda T}{2} \left( 1 + \frac{1}{1-\lambda T} \right) - \frac{1}{2} \lambda T$$

Dieser Wert für  $\Omega$  stimmt mit demjenigen aus Abschnitt II.1.5 überein. Für die mittlere Wartezeit  $t_w^*$  bzw.  $\tau_w^*$  erhält man dann nach dem schon in Abschnitt II.1.5 gezeigten Rechengang die Gleichungen (2.29A) bzw. (2.29B).

### II.2.4 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten zu einem beliebigen Zeitpunkt aus der erzeugenden Funktion

Die erzeugende Funktion (2.45B) wird schrittweise in eine Potenzreihe nach  $z$  entwickelt, um aus den Koeffizienten der Reihenentwicklung die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x, t_v)$  zu erhalten. Dazu wird Gl.(2.45B) zunächst mit  $e^{-\lambda T(z-1)}$  erweitert und umgeschrieben

$$Gx(z, t_v) = (1-\lambda T)(1-z) \frac{1}{1-ze^{\lambda T(1-z)}} e^{\lambda(t_n-T)(z-1)}$$

oder mit Gl.(2.30)

$$Gx(z, t_v) = (1-\lambda T)(1-z) \frac{1}{1-ze^{\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda t_v(z-1)} \quad (2.49A)$$

Zuerst wird der Bruch von Gl.(2.49A) mit Hilfe der Reihenentwicklung  $\frac{1}{1-u} = \sum_{v=0}^{\infty} u^v$  (Konvergenzbereich  $|u| < 1$ ) umgeformt

$$G_x(z, t_v) = (1-\lambda T)(1-z) \sum_{v=0}^{\infty} [ze^{\lambda T(1-z)}]^v e^{-\lambda t_v(z-1)}$$

Der letzte Term dieses Ausdrucks ist unabhängig von  $v$  und kann deshalb auch mit unter das Summenzeichen geschrieben werden

$$G_x(z, t_v) = (1-\lambda T)(1-z) \sum_{v=0}^{\infty} [z^v e^{\lambda(vT+t_v)} e^{-\lambda(vT+t_v)} z] \quad (2.49B)$$

Der weitere Rechnungsgang zur Reihenentwicklung von Gl.(2.49B) ist völlig analog zu demjenigen der Reihenentwicklung von Gl.(2.22B). Analog zu Gl.(2.23) erhält man somit als Reihenentwicklung von Gl.(2.49B)

$$G_x(z, t_v) = (1-\lambda T) \sum_{v=0}^{\infty} z^v \left[ e^{\lambda(vT+t_v)} \sum_{j=0}^{v-1} e^{-\lambda(jT+t_v)} \frac{[\lambda(jT+t_v)]^{(v-1-j)}}{(v-1-j)!} (\lambda(jT+t_v) + 1) \right] \quad (2.50)$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x, t_v)$  zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_v$  vor dem nächsten Takt sind entsprechend der Definition der erzeugenden Funktion  $G_x(z, t_v)$  gleich den Koeffizienten von  $z^x$  in Gl.(2.50)

$$p(x, t_v) = (1-\lambda T) \left[ e^{\lambda(xT+t_v)} - \sum_{j=0}^{x-1} e^{-\lambda(jT+t_v)} \frac{[\lambda(jT+t_v)]^{(x-1-j)}}{(x-1-j)!} (\lambda(jT+t_v) + 1) \right] \quad (2.51)$$

mit  $x \geq 0$

Auch hier ist zu beachten:  $\frac{0^0}{0!} = 1$  und  $\sum_{a=1}^b \dots = 0$  für  $b < a$

Kurz vor dem Taktzeitpunkt ist  $t_v = 0$ . Setzt man  $t_v = 0$  in Gl.(2.51) ein, so ist das Resultat identisch mit Gl.(2.24).

### II.2.5 Wartezeitverteilung

Mit Hilfe der in Abschnitt II.2.4 bestimmten Zustandswahrscheinlichkeiten zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_v$  vor dem nächsten Takt kann nun die komplementäre Wartezeitverteilung  $P(>t)$  bestimmt werden, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß eine Anforderung länger als die Zeit  $t$  warten muß. Da in dem behandelten System alle Anforderungen warten müssen, besteht kein Unterschied zwischen der komplementären Wartezeitverteilung  $P(>t)$  bezogen auf alle Anforderungen und der komplementären Wartezeitverteilung  $W(>t)$  bezogen auf die wartenden Anforderungen.

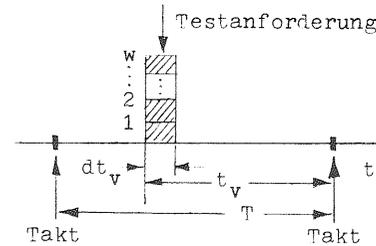


Bild 9: Testanforderung zur Bestimmung der Wartezeitverteilung

Da mit jedem Takt nur eine Anforderung aus dem Speicher geholt werden kann, hängt die Wartezeit einer zur Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt einfallenden Anforderung von der Anzahl der von ihr im Speicher angebotenen Anforderungen und von der Zeit  $t_v$  ab (vgl. Bild 9). Im einzelnen ergeben sich für eine zur Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt eintreffende An-

forderung folgende Wartezeiten:

Findet die eintreffende Anforderung

0 Wartende vor, so muß sie die Zeit  $t=t_v$  warten

1 Wartende vor, so muß sie die Zeit  $t=T+t_v$  warten

⋮ .....

$w$  Wartende vor, so muß sie die Zeit  $t=wT+t_v$  warten

usw.

Die obige Betrachtungsweise läßt es sinnvoll erscheinen, zunächst die Höchstwertverteilung  $P(\leq t) = P(\leq wT+t_v)$  der Wartezeit zu ermitteln (mit  $w=0,1,2,\dots$  und  $0 \leq t_v \leq T$ ) und anschließend die Mindestwertverteilung  $P(>t) = 1 - P(\leq t)$  durch Komplementbildung zu berechnen.

#### II.2.5.1 Sonderfall: Wartezeit im Bereich $t \leq T$

Dieser Sonderfall wird hier nur deshalb getrennt aufgeführt, um den prinzipiellen Rechnungsgang am einfachsten Beispiel zu verdeutlichen.

Eine betrachtete "Testanforderung" muß die Zeit  $t \leq T$  warten, wenn sie zur Zeit  $t_v = t$  vor dem nächsten Takt am Speicher eintrifft und keine wartenden Anforderungen vorfindet. Zur anschaulichen Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, daß zwischen dem Einfallzeitpunkt der Testanforderung und dem nächsten Takt die Zeit  $t_v$  liegt, wird die Zeit zwischen zwei Taktzeitpunkten (Taktintervall) in infinitesimal kleine Teilintervalle der Größe  $dt_v$  eingeteilt. Da die Anforderungen statistisch unab-

hängig voneinander eintreffen und die Einfallrate konstant ( $=\lambda$ ) ist, trifft in jedem beliebigen Teilintervall  $dt_v$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Anforderung ein. Umgekehrt gilt deshalb für die betrachtete Testanforderung, daß sie mit gleicher Wahrscheinlichkeit unabhängig vom Takt in einem beliebigen Teilintervall  $dt_v$  eintrifft. Da das gesamte Taktintervall der Länge  $T$  in  $T/dt_v$  Teilintervalle eingeteilt wurde, ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Testanforderung in einem ganz bestimmten Teilintervall eintrifft, gleich  $\frac{1}{T} = \frac{dt_v}{T}$ .

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Testanforderung im Teilintervall  $dt_v$  eintrifft, welches die Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt liegt (vgl. Bild 9), ebenfalls gleich  $dt_v/T$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß die eintreffende Testanforderung zur Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt 0 Anforderungen im Speicher vorfindet, ist  $p(0, t_v)$  und kann aus Gl.(2.45A) entnommen werden.

Da beide Ereignisse, nämlich Eintreffen der Testanforderung zur Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt und Vorfinden von 0 Wartenden unabhängig voneinander sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit  $P(t-dt_v, t)$ , daß die Testanforderung eine Zeit zwischen  $t-dt_v$  und  $t$  warten muß

$$P(t-dt_v, t) = p(0, t_v) \frac{dt_v}{T} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq T \quad (2.52)$$

Aus Gl.(2.45A) folgt dann

$$P(t-dt_v, t) = (1-\lambda T) e^{\lambda t} \frac{dt_v}{T} \quad (2.53)$$

Für die Höchstwertverteilung  $P(\leq t)$  erhält man dann aus Gl. (2.53) mit dem Grenzübergang  $dt_v \rightarrow 0$  (aus Summation wird Integration)

$$P(\leq t) = \int_0^t (1-\lambda T) e^{\lambda t} \frac{dt_v}{T} = \frac{1-\lambda T}{T} \left[ \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \right]_0^t$$

$$\text{und } \left. \begin{aligned} P(\leq t) &= \frac{1-\lambda T}{\lambda T} (e^{\lambda t} - 1) \\ P(> t) &= 1 - P(\leq t) = \frac{1}{\lambda T} [1 - (1-\lambda T) e^{\lambda t}] \end{aligned} \right\} \text{für } 0 \leq t \leq T \quad \begin{matrix} (2.54A) \\ (2.54B) \end{matrix}$$

### II.2.5.2 Allgemeiner Fall für beliebige Wartezeit

Eine betrachtete "Testanforderung" treffe zur Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt ein und finde schon  $w$  Wartende vor. Dann muß diese Testanforderung die Zeit  $t = wT + t_v$  warten (mit  $0 \leq t_v \leq T$ ). Ist andererseits die Wartezeit  $t$  vorgegeben, so können  $w$  und  $t_v$  bestimmt werden aus

$$t_v = \frac{t}{T} \bmod T = \text{Rest der Division } \frac{t}{T} \quad (2.55A)$$

$$w = \left[ \frac{t}{T} \right] = \text{das Ganze der Division } \frac{t}{T} \quad (2.55B)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Testanforderung im Teilintervall  $dt_v$  eintrifft, welches die Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt liegt, ist genau wie im vorhergehenden Abschnitt II.2.5.1  $dt_v/T$ .

Die Wahrscheinlichkeit, daß die eintreffende Testanforderung zur Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt  $w$  Anforderungen im Speicher vorfindet, ist  $p(w, t_v)$ , wobei  $p(w, t_v)$  aus Gl.(2.51) für  $x=w$  entnommen werden kann.

Da beide Ereignisse unabhängig voneinander sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit  $P(wT + t_v - dt_v, wT + t_v)$ , daß die Testanforderung eine Zeit zwischen  $wT + t_v - dt_v$  und  $wT + t_v$  warten muß

$$P(wT + t_v - dt_v, wT + t_v) = p(w, t_v) \frac{dt_v}{T} \quad \text{mit } 0 \leq t_v \leq T \quad (2.56) \\ \text{und } w \geq 0$$

Die Wahrscheinlichkeit  $P(wT, wT + t_v)$ , daß die Testanforderung eine Zeit zwischen  $wT$  und  $wT + t_v$  liegt, ist dann nach Gl.(2.56) mit dem Grenzübergang  $dt_v \rightarrow 0$

$$P(wT, wT + t_v) = \frac{1}{T} \int_0^{t_v} p(w, t_v) dt_v$$

Für die Höchstwertverteilung  $P(\leq wT + t_v)$  folgt dann

$$P(\leq wT + t_v) = P(wT, wT + t_v) + P(\leq wT)$$

$$\text{oder } P(\leq wT + t_v) = \frac{1}{T} \int_0^{t_v} p(w, t_v) dt_v + P(\leq wT) \quad (2.57A)$$

Gl.(2.57A) ist eine Rekursionsformel für die Höchstwertverteilung der Wartezeit. Die Größe  $P(\leq wT)$  auf der rechten Seite von Gl.(2.57A) kann dadurch bestimmt werden, daß in Gl.(2.57A) die Größe  $w$  durch  $w-1$  und die Größe  $t_v$  durch  $T$  ersetzt wird.

Die dann auf der rechten Seite der Gleichung entstehende Größe  $P(\leq(w-1)T)$  wird entsprechend zu  $P(\leq wT)$  bestimmt usw. Nach der vollständigen Durchführung dieser Rekursion kann  $P(\leq wT)$  geschlossen angegeben werden

$$P(\leq wT) = \frac{1}{T} \sum_{v=0}^{w-1} \int_0^T p(v, t_v) dt_v \quad (2.57B)$$

Mit Gl.(2.57B) wird dann aus Gl.(2.57A)

$$P(\leq wT+t_v) = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{t_v} p(w, t_v) dt_v + \sum_{v=0}^{w-1} \int_0^T p(v, t_v) dt_v \right] \quad (2.57C)$$

Nun können auch die Zustandswahrscheinlichkeiten aus Gl.(2.51) in die obige Gl.(2.57C) für  $p(w, t_v)$  bzw.  $p(v, t_v)$  eingesetzt werden. Die Auswertung der dadurch entstehenden umfangreichen Gleichung ist nur noch Integrations- und Umformungsarbeit, welche im Anhang 2 durchgeführt wird. Als Ergebnis liefert diese Auswertung für die Wartezeitverteilungsfunktion

$$P(\leq wT+t_v) = \frac{1-\lambda T}{\lambda T} \left( \sum_{j=0}^w \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{w-j}}{(w-j)!} e^{\lambda(jT+t_v)} - 1 \right) \quad (2.58A)$$

Die Mindestwertverteilung  $P(>wT+t_v)$  der Wartezeit ist das Komplement der Höchstwertverteilung der Wartezeit  $P(\leq wT+t_v)$

$$P(>wT+t_v) = 1 - P(\leq wT+t_v)$$

oder mit Gl.(2.58A)

$$P(>wT+t_v) = 1 + \frac{1-\lambda T}{\lambda T} - \frac{1-\lambda T}{\lambda T} \sum_{j=0}^w \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{w-j}}{(w-j)!} e^{\lambda(jT+t_v)}$$

$$P(>wT+t_v) = \frac{1}{\lambda T} \left[ 1 - (1-\lambda T) \sum_{j=0}^w \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{w-j}}{(w-j)!} e^{\lambda(jT+t_v)} \right] \quad (2.58B)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die Formel (2.58B) für die komplementäre Wartezeitverteilung genau übereinstimmt mit der Formel für die komplementäre Wartezeitverteilung bezogen auf die wartenden Anforderungen im System M/D/1. Für diese Tatsache gibt es dieselbe physikalische Erklärung wie sie schon in Abschnitt II.1.5 für die mittlere Wartezeit beschrieben wurde. Zur Kontrolle erhält man durch Einsetzen von  $w=0$  in Gl.(2.58B) die Gl.(2.54B).

### II.3 System mit $n>1$ Abfrageplätzen und Beobachtungszeitpunkten zu einer beliebigen Zeit $t_v$ vor dem Taktzeitpunkt

Die Struktur dieses Systems ist wie diejenige des in Abschnitt II.1.1 beschriebenen Systems (vgl. auch Bild 4), jedoch werden nun jeweils die auf den ersten  $n$  Plätzen (Abfrageplatzzahl  $n>1$ ) des Wartespeichers sitzenden Anforderungen mit dem Takt abgeholt. Befinden sich zum Taktzeitpunkt weniger als  $n$  Anforderungen im Wartespeicher, so werden alle Anforderungen abgeholt.

#### II.3.1 Aufstellung des Gleichungssystems der Zustandswahrscheinlichkeiten

Das System wird wie in Abschnitt II.2.1 jeweils zu Zeitpunkten betrachtet, welche die Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt bzw. die Zeit  $t_n$  nach dem letzten Takt liegen (vgl. Bild 8 in Abschnitt II.2.1).

Die Folge von Zuständen zu diesen Zeitpunkten  $t_v$  vor dem nächsten Takt bildet eine eingebettete Markoff-Kette und für die Zustandswahrscheinlichkeiten zu diesen Zeitpunkten ist dann wieder Gl.(2.31) anwendbar.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $\bar{u}(v, x)$  können aus folgender Betrachtung gewonnen werden:

Durch den Takt können  $n$  Anforderungen aus dem Speicher entfernt werden, falls überhaupt so viele Anforderungen vorhanden sind. Andernfalls werden alle Anforderungen entfernt. Die Entstellungsmöglichkeiten für den Zustand  $\{x_{i+1}, t_v\}$  können mit Hilfe von Bild 10 erläutert werden.

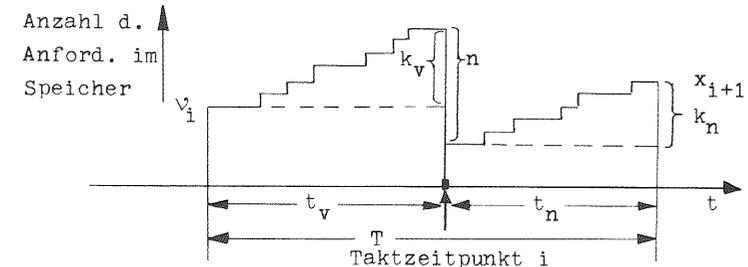


Bild 10: Belegungsgebirge im Speicher

Es werden dabei zwei Fälle unterschieden

1.)  $\{x_{i+1}, t_v\}$  mit  $x_{i+1}=x$  entsteht aus  $\{v_i, t_v\}$  mit  $v_i=v$  bei  $0 \leq v \leq n-1$ , wenn

a)  $0 \leq k_v \leq n-1-v$  Anforderungen während der Zeit  $t_v$  einfallen und  $k_n=x$  Anforderungen während der Zeit  $t_n$ . Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$\sum_{k_v=0}^{n-1-v} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} e^{-\lambda t_v} \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} e^{-\lambda t_n} = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} \sum_{k_v=0}^{n-1-v} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!}$$

b)  $n-v \leq k_v \leq x+n-v$  Anforderungen während der Zeit  $t_v$  einfallen und  $k_n=x-(v+k_v-n)$  Anforderungen während der Zeit  $t_n$ . Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$\sum_{k_v=n-v}^{x+n-v} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} e^{-\lambda t_v} \frac{(\lambda t_n)^{(x-v-k_v+n)}}{(x-v-k_v+n)!} e^{-\lambda t_n} = e^{-\lambda T} \sum_{k_v=n-v}^{x+n-v} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} \frac{(\lambda t_n)^{(x-v-k_v+n)}}{(x-v-k_v+n)!}$$

2.)  $\{x_{i+1}, t_v\}$  mit  $x_{i+1}=x$  entsteht aus  $\{v_i, t_v\}$  mit  $v_i=v$  bei  $n \leq v \leq x+n$ , wenn

$k=k_v+k_n=x-(v-n)$  Anforderungen während der Zeit  $t_v+t_n=T$  einfallen, da in diesem Fall immer vor dem Takt  $i$  mindestens  $n$  Anforderungen im Speicher enthalten sind. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^{(x-v+n)}}{(x-v+n)!}$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten  $\ddot{u}(v, x)$  folgt damit

$$\text{aus 1.) } \ddot{u}(v, x) = e^{-\lambda T} \left[ \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} \sum_{k_v=0}^{n-1-v} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} + \sum_{k_v=n-v}^{x+n-v} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} \frac{(\lambda t_n)^{(x-v-k_v+n)}}{(x-v-k_v+n)!} \right] \quad (2.59A)$$

für  $0 \leq v \leq n-1$

$$\text{aus 2.) } \ddot{u}(v, x) = e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^{(x-v+n)}}{(x-v+n)!} \quad \text{für } n \leq v \leq x+n \quad (2.59B)$$

$$\text{und } \ddot{u}(v, x) = 0 \quad \text{für } v > x+n \quad (2.59C)$$

Setzt man die Übergangswahrscheinlichkeiten Gl.(2.59A,B,C) in die Gl.(2.31) ein und nimmt weiterhin an, daß sich das System im statistischen Gleichgewicht befindet, d.h.  $p_{i+1}(x, t_v) = p_i(x, t_v) = p(x, t_v)$ , so erhält man nach einigen kleineren Umformungen das folgende Gleichungssystem der Zustandswahrscheinlichkeiten

$$p(x, t_v) = e^{-\lambda T} \left[ \sum_{v=0}^{n-1} p(v, t_v) \left( \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} \sum_{k_v=0}^{n-1-v} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} + \sum_{k_v=n-v}^{x+n-v} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} \frac{(\lambda t_n)^{(x-v-k_v+n)}}{(x-v-k_v+n)!} \right) + \sum_{v=n}^{x+n} p(v, t_v) \frac{(\lambda T)^{(x-v+n)}}{(x-v+n)!} \right] \quad (2.60)$$

### II.3.2 Bestimmung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten

Zur Lösung des Gleichungssystems (2.60) wird die erzeugende Funktion Gl.(2.35) verwendet. Dazu könnte Gl.(2.60) in die Definitionsgleichung (2.35) der erzeugenden Funktion eingesetzt werden. Doch soll auch hier der einfachere Weg entsprechend wie in Abschnitt II.2.2 zur Bestimmung der erzeugenden Funktion  $Gx(z, t_v)$  gegangen werden. Analog zu Abschnitt II.2.2 können dann die folgenden Betrachtungen durchgeführt werden.

Zur Zeit  $t_v$  vor dem Takt  $i$  (vgl. Bild 8, S.34) befindet sich das System im Zustand  $\{x_i, t_v\}$ . Die Anzahl der während der Zeit  $t_v$  vor dem Takt  $i$  einfallenden Anforderungen sei  $k_v$ . Ist  $(\{x_i, t_v\} + k_v) < n$ , so werden mit dem Takt  $i$  alle Anforderungen aus dem Speicher entfernt. Ist dagegen  $(\{x_i, t_v\} + k_v) \geq n$ , so werden  $n$  Anforderungen dem Speicher entnommen. Deshalb befinden sich kurz nach dem Takt  $i$  noch  $0$  bzw.  $\{x_i, t_v\} + k_v - n$  Anforderungen im System. Während der Zeit  $t_n$  nach dem Takt  $i$  bis zum nächsten Beobachtungszeitpunkt können keine Anforderungen mehr aus dem Speicher entnommen werden, sondern es können nur noch Anforderungen ankommen, deren Anzahl  $k_n$  sei. Damit gilt für den Zustand  $\{x_{i+1}, t_v\}$

$$\{x_{i+1}, t_v\} = \text{Max} \left[ (\{x_i, t_v\} + k_v - n), 0 \right] + k_n \quad (2.61)$$

$$\text{mit } \text{Max} \left[ (\{x_i, t_v\} + k_v - n), 0 \right] = \begin{cases} \{x_i, t_v\} + k_v - n & \text{für } \{x_i, t_v\} + k_v \geq n \\ 0 & \text{für } \{x_i, t_v\} + k_v < n \end{cases}$$

Die weitere Behandlung von Gl.(2.61) erfolgt analog zu derjenigen der Gl.(2.36). Dazu werden zunächst einige Abkürzungen eingeführt. Die Summe der unabhängigen Zufallsvariablen  $\{x_i, t_v\}$  und  $k_v$  sei die neue Zufallsvariable  $u_i$ , welche die Wahrscheinlichkeit  $s_i(u)$  besitze

$$u_i = \{x_i, t_v\} + k_v \quad (2.62A)$$

mit der Wahrscheinlichkeit  $s_i(u)$

$$\text{Außerdem sei} \quad v_i = \text{Max}[(u_i - n), 0] \quad (2.62B)$$

Mit Gl.(2.62A,B) wird damit aus Gl.(2.61)

$$\{x_{i+1}, t_v\} = v_i + k_n \quad (2.63)$$

Zu den Zufallsvariablen in Gl.(2.63) gehören die folgenden erzeugenden Funktionen für deren Wahrscheinlichkeiten:

$Gx_{i+1}(z, t_v)$  sei die erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_{i+1}(x, t_v)$

$Gv_i(z)$  sei die erzeugende Funktion für die Wahrscheinlichkeiten für  $v_i$

$Gk_n(z)$  sei die erzeugende Funktion für die Wahrscheinlichkeiten für  $k_n$

$Gu_i(z)$  sei die erzeugende Funktion für  $s_i(u)$

Da  $v_i$  und  $k_n$  unabhängige Zufallsvariable sind, gilt nach Gl.(2.63) analog zu Gl.(2.15)

$$Gx_{i+1}(z, t_v) = Gv_i(z)Gk_n(z) \quad (2.64)$$

Für die erzeugende Funktion  $Gv_i(z)$  gilt unter Berücksichtigung von Gl.(2.62B)

$$\begin{aligned} Gv_i(z) &= \underbrace{\sum_{v=0}^{n-1} s_i(v)}_{\text{von } u_i < n} + \underbrace{\sum_{v=0}^{\infty} s_i(n+v)z^v}_{\text{von } u_i \geq n} \\ &= \sum_{v=0}^{n-1} s_i(v) + \frac{1}{z^n} \sum_{v=0}^{\infty} s_i(n+v)z^{n+v} \\ &= \sum_{v=0}^{n-1} s_i(v) + \frac{1}{z^n} \left[ Gu_i(z) - \sum_{v=0}^{n-1} s_i(v)z^v \right] \\ Gv_i(z) &= \frac{1}{z^n} \sum_{v=0}^{n-1} s_i(v)(z^n - z^v) + \frac{1}{z^n} Gu_i(z) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Da  $\{x_i, t_v\}$  und  $k_v$  unabhängige Zufallsvariable sind, folgt nach

Gl.(2.62A) analog zu Gl.(2.41A) bzw. Gl.(2.41B)

$$Gu_i(z) = Gx_i(z, t_v)Gk_v(z) \quad (2.66A)$$

$$\text{und} \quad s_i(u) = \sum_{\mu=0}^u p_i(\mu, t_v)r_v(u-\mu) \quad (2.66B)$$

Gl.(2.66A,B) in Gl.(2.65) eingesetzt und das Ergebnis weiterhin in Gl.(2.64) eingesetzt führt auf

$$Gx_{i+1}(z, t_v) = \frac{1}{z^n} \left[ \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^v p_i(\mu, t_v)r_v(v-\mu)(z^n - z^v) + Gx_i(z, t_v)Gk_v(z) \right] Gk_n(z) \quad (2.67)$$

Bei der Annahme des statistischen Gleichgewichts wird

$$p_{i+1}(x, t_v) = p_i(x, t_v) = p(x, t_v)$$

und damit auch  $Gx_{i+1}(z, t_v) = Gx_i(z, t_v) = Gx(z, t_v)$ .

Damit folgt aus Gl.(2.67) für den Fall des statistischen Gleichgewichtes

$$Gx(z, t_v) \left( 1 - \frac{1}{z^n} Gk_v(z)Gk_n(z) \right) = \frac{1}{z^n} \left[ \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^v p(\mu, t_v)r_v(v-\mu)(z^n - z^v) \right] Gk_n(z)$$

$$Gx(z, t_v) = \frac{\sum_{v=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^v p(\mu, t_v)r_v(v-\mu)(z^n - z^v)}{z^n - Gk_v(z)Gk_n(z)} Gk_n(z)$$

Da  $k_v$  und  $k_n$  nur von dem Poisson-Ankunftsprozeß abhängen und damit voneinander unabhängige Zufallsvariable sind, kann geschrieben werden

$$Gk_v(z)Gk_n(z) = Gk(z),$$

wobei  $Gk(z)$  die erzeugende Funktion der Wahrscheinlichkeiten für den Einfall von  $k=k_v+k_n$  Anforderungen in der Zeit  $T$  ist. Außerdem ist bei einem Poisson-Ankunftsprozeß

$$r_v(k_v) = \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} e^{-\lambda t_v}$$

$$\text{sowie} \quad Gk(z) = e^{-\lambda T(1-z)}$$

$$\text{und} \quad Gk_n(z) = e^{-\lambda t_n(1-z)}$$

Damit ergibt sich für die erzeugende Funktion  $Gx(z, t_v)$  der folgende Ausdruck

$$Gx(z, t_v) = \frac{\sum_{v=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^v p(\mu, t_v) \frac{(\lambda t_v)^{v-\mu}}{(v-\mu)!} (z^n - z^v)}{z^n - e^{-\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda t_v} e^{-\lambda t_n(1-z)}$$

oder mit Gl.(2.30)

$$Gx(z, t_v) = \frac{\sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{\mu} p(\mu, t_v) \frac{(\lambda t_v)^{\nu} \mu!}{(\nu - \mu)!} (z^n - z^{\mu})}{z^n - e^{-\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda(T-t_n z)} \quad (2.68)$$

Im Zähler von Gl.(2.68) stehen nun noch die n unbekanntes Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(0, t_v)$ ,  $p(1, t_v)$ , ...,  $p(n-1, t_v)$ . Hier ist deshalb die Bedingung  $Gx(1, t_v)=1$  nicht mehr zur Eliminierung dieser unbekanntes Wahrscheinlichkeiten ausreichend, so wie dies im Falle  $n=1$  bei Gl.(2.43) noch möglich war.

Crommelin und Pollaczek kamen bei der Behandlung des Systems M/D/n (Wartesystem mit Poisson-Ankunftsprozeß, konstanter Bedienungs-dauer und n Leitungen) auf eine ähnliche erzeugende Funktion wie in Gl.(2.68). Dabei stimmte der Nenner dieser erzeugenden Funktion mit demjenigen in Gl.(2.68) überein. Sie wiesen mit Hilfe des Satzes von Rouché (vgl. auch Anhang 4) nach, daß ein Ausdruck wie derjenige im Nenner von Gl.(2.68) genau n Nullstellen innerhalb und auf dem Einheitskreis, d.h. für  $|z| \leq 1$  besitzt, die außerdem alle voneinander verschieden sind. Nun ist aber bekannt, daß die erzeugende Funktion  $Gx(z, t_v)$  für  $z=1$  ebenfalls gleich 1 ist und damit für  $|z| < 1$  auch  $< 1$  wird (vgl. Definition der erzeugenden Funktion in Gl.(2.35)).

Damit nun bei den Nullstellen des Nenners innerhalb und auf dem Einheitskreis die erzeugende Funktion (2.68) nicht  $\infty$  groß wird sondern  $\leq 1$  bleibt, muß der Zähler in Gl.(2.68) genau dieselben n Nullstellen innerhalb und auf dem Einheitskreis besitzen wie der Nenner. Da der Zähler in Gl.(2.68) ein Polynom in z vom Grade n ist, besitzt er insgesamt genau n Nullstellen. Bezeichnet man die n Nullstellen des Nenners innerhalb und auf dem Einheitskreis mit  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ , so kann das Polynom im Zähler in Produktschreibweise angegeben werden als  $K(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1})$ , wobei K noch eine unbekanntes Konstante ist. Da  $z_0=1$  immer eine Nullstelle des Nenners ist, kann Gl.(2.68) somit umgeschrieben werden in

$$Gx(z, t_v) = \frac{K(z-1)(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_{n-1})}{z^n - e^{-\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda(T-t_n z)} \quad (2.69)$$

Die Nullstellen  $z_1$  bis  $z_{n-1}$  können durch bekannte numerische Näherungsverfahren beliebig genau bestimmt werden. Nun enthält der Ausdruck für die erzeugende Funktion Gl.(2.69) nur noch eine Unbekannte, nämlich die Konstante K. Diese kann jetzt wiederum entsprechend zu der einen Unbekannten  $p(0, t_v)$  in Gl.(2.43) mit Hilfe der Bedingung  $Gx(1, t_v)=1$  ermittelt werden. Setzt man in Gl.(2.69)  $z=1$  ein, so entsteht der unbestimmte Ausdruck  $\frac{0}{0}$  (vgl. obige Begründung). Der Grenzwert dieses Ausdruckes (für  $z \rightarrow 1$ ) muß deshalb nach der Regel von de l'Hospital ermittelt werden

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} K \frac{(z-1)(z-z_1)\dots(z-z_{n-1})}{z^n - e^{-\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda(T-t_n z)} &= \lim_{z \rightarrow 1} K \frac{1 \cdot (1-z_1) \dots (1-z_{n-1}) + (z-1)[\dots]}{n z^{n-1} - \lambda T e^{-\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda(T-t_n z)} \\ &= K \frac{(1-z_1)(1-z_2)\dots(1-z_{n-1})}{n - \lambda T} e^{-\lambda(T-t_n)} = 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$K = \frac{n - \lambda T}{\prod_{\nu=1}^{n-1} (1-z_\nu)} e^{\lambda(T-t_n)} \quad (2.70)$$

Die erzeugende Funktion  $Gx(z, t_v)$  ergibt sich dann endgültig aus Gl.(2.69) und Gl.(2.70) zu

$$Gx(z, t_v) = \frac{n - \lambda T}{\prod_{\nu=1}^{n-1} (1-z_\nu)} \cdot \frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} (z-z_\nu)}{z^n - e^{-\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda t_n (1-z)} \quad (2.71)$$

wobei  $z_\nu$  die Nullstellen der Bestimmungsgleichung

$$z^n - e^{-\lambda T(1-z)} = 0$$

innerhalb und auf dem Einheitskreis sind.

Es ist erwähnenswert, daß für den Sonderfall  $t_n=T$  bzw.  $t_v=0$ , (d.h. der Beobachtungszeitpunkt liegt kurz vor dem Takt) genau dieselbe erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten aus Gl.(2.71) entsteht, wie sie für das System M/D/n zu einem beliebigen Zeitpunkt gilt. Das bedeutet aber, daß die Zustandswahrscheinlichkeiten des Speichers in dem hier betrachteten System kurz vor dem Taktzeitpunkt gleich denjenigen des Systems M/D/n (Speicher + Leitungen) zu einem beliebigen Zeitpunkt sind.

Weiterhin ist zu bemerken, daß für den Sonderfall  $n=1$  das Produkt im Nenner des ersten Terms von Gl.(2.71) entfällt und dann Gl.(2.45B) entsteht.

II.3.3 Mittlere Schlangenlänge und mittlere Wartezeit

Wie schon in Abschnitt II.2.3 beschrieben, erhält man die mittlere Schlangenlänge zu einer beliebigen Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Taktzeitpunkt aus der Ableitung der erzeugenden Funktion  $Gx(z, t_v)$  an der Stelle  $z=1$ . Doch bevor Gl.(2.71) differenziert wird, soll zunächst die Ableitung des Produkts im Zähler von Gl.(2.71) näher betrachtet werden.

$$\frac{d}{dz} \left[ \prod_{v=0}^{n-1} (z-z_v) \right] = \begin{matrix} 1 & (z-z_1) \cdot (z-z_2) \dots & (z-z_{n-1}) \\ + (z-z_0) \cdot 1 & \cdot (z-z_2) \dots & (z-z_{n-1}) \\ + (z-z_0) \cdot (z-z_1) \cdot 1 & \dots & (z-z_{n-1}) \\ + (z-z_0) \cdot (z-z_1) \cdot (z-z_2) \dots & & 1 \end{matrix}$$

Erweitert man nun jeden Summanden mit demjenigen Glied, welches durch die Differenziation verloren ging, so kann aus der gesamten Summe das ursprüngliche Produkt wieder ausgeklammert werden

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[ \prod_{v=0}^{n-1} (z-z_v) \right] &= \prod_{v=0}^{n-1} (z-z_v) \left( \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \dots + \frac{1}{z-z_{n-1}} \right) \\ &= \prod_{v=0}^{n-1} (z-z_v) \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{1}{z-z_\mu} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Unter Verwendung von Gl.( 2.72) wird nun Gl.(2.71) nach  $z$  differenziert

$$\begin{aligned} \frac{dGx(z,t_v)}{dz} &= \frac{n-\lambda T}{\prod_{v=1}^{n-1} (1-z_v)} \left[ \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (z-z_v)}{z^n - e^{-\lambda T(1-z)}} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{1}{z-z_\mu} e^{-\lambda t_n(1-z)} - \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (z-z_v) (nz^{n-1} - \lambda T e^{-\lambda T(1-z)})}{(z^n - e^{-\lambda T(1-z)})^2} e^{-\lambda t_n(1-z)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (z-z_v)}{z^n - e^{-\lambda T(1-z)}} \lambda t_n e^{-\lambda t_n(1-z)} \right] \end{aligned}$$

oder nach Verwendung von Gl.(2.71) und  $z_0=1$

$$\frac{dGx(z,t_v)}{dz} = Gx(z,t_v) \left[ \frac{1}{z-1} + \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} - \frac{nz^{n-1} - \lambda T e^{-\lambda T(1-z)}}{z^n - e^{-\lambda T(1-z)}} + \lambda t_n \right] \quad (2.73)$$

Setzt man nun in Gl.(2.73)  $z=1$  ein, so führt der 1. und der 3. Term auf den unbestimmten Ausdruck  $\infty-\infty$ . Zur Grenzwertbildung werden deshalb diese beiden Terme auf einen Bruchstrich

geschrieben und es wird dann die Regel von de l'Hospital angewendet

$$\begin{aligned} \left. \frac{dGx(z,t_v)}{dz} \right|_{z=1} &= \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \lambda t_n + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n - e^{-\lambda T(1-z)} - (z-1)(nz^{n-1} - \lambda T e^{-\lambda T(1-z)})}{(z-1)(z^n - e^{-\lambda T(1-z)})} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \lambda t_n + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{nz^{n-1} - \lambda T e^{-\lambda T(1-z)} - (nz^{n-1} - \lambda T e^{-\lambda T(1-z)}) - (z-1)(n(n-1)z^{n-2} - \lambda T^2 e^{-\lambda T(1-z)})}{z^n - e^{-\lambda T(1-z)} + (z-1)(nz^{n-1} - \lambda T e^{-\lambda T(1-z)})} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \lambda t_n + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-(n(n-1)z^{n-2} - \lambda T^2 e^{-\lambda T(1-z)}) - (z-1)(n(n-1)(n-2)z^{n-3} - \lambda T^3 e^{-\lambda T(1-z)})}{(nz^{n-1} - \lambda T e^{-\lambda T(1-z)})^2 + (z-1)(n(n-1)z^{n-2} - \lambda T^2 e^{-\lambda T(1-z)})} \\ &= \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \lambda t_n + \frac{(\lambda T)^2 - n(n-1)}{2(n-\lambda T)} \end{aligned}$$

Formt man diesen Ausdruck mit Hilfe vom Gl.(2.30) noch etwas um, so erhält man schließlich für die mittlere Schlangenlänge  $E[x, t_v]$  zum Zeitpunkt  $t_v$  vor dem nächsten Takt die Formel

$$E[x, t_v] = \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \frac{n-(n-\lambda T)^2}{2(n-\lambda T)} - \lambda t_v \quad (2.74)$$

Die mittlere Speicherbelastung  $\Omega$  wird wieder dadurch gewonnen, daß die mittlere Schlangenlänge zur Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt über den Bereich  $0 \leq t_v \leq T$  gemittelt wird. Aus Gl.(2.74) folgt deshalb

$$\Omega = \frac{1}{T} \int_0^T E[x, t_v] dt_v = \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \frac{n-(n-\lambda T)^2}{2(n-\lambda T)} - \frac{\lambda T}{2}$$

oder

$$\begin{aligned} \Omega &= \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \frac{n-n^2+2n\lambda T - (\lambda T)^2 - n\lambda T + (\lambda T)^2}{2(n-\lambda T)} \\ \Omega &= \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \frac{n\lambda T - n(n-1)}{2(n-\lambda T)} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Entsprechend zu Gl.(2.28) erhält man somit aus Gl.(2.75) für die mittlere Wartezeit  $t_w^*$  bezogen auf alle Anforderungen, welche hier gleich der mittleren Wartezeit  $t_w$  bezogen auf die wartenden Anforderungen ist

$$t_w^* = \frac{\Omega}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \frac{n\lambda T - n(n-1)}{2(n-\lambda T)} \right] \quad (2.76A)$$

bzw.

$$\tau_w^* = \frac{t_w^*}{T} = \frac{1}{\lambda T} \left[ \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \frac{n\lambda T - n(n-1)}{2(n-\lambda T)} \right] \quad (2.76B)$$

Für den Sonderfall  $n=1$  entfällt die Summe in der eckigen Klammer und es entsteht dann Gl.(2.29A) bzw. (2.29B).

Auch bei der Wartezeit nach Gl.(2.76A) bzw. (2.76B) für den Fall  $n>1$  fällt wieder eine Beziehung zu dem System M/D/n auf. Für das System M/D/n ist nämlich die auf alle Anforderungen bezogene und auf die konstante Belegungsdauer T normierte mittlere Wartezeit  $\tau_{wc}^*$  nach Crommelin bzw. Pollaczek

$$\tau_{wc}^* = \frac{1}{\lambda T} \left[ \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \frac{(\lambda T)^2 - n(n-1)}{2(n-\lambda T)} \right] \quad (2.77)$$

Da die einzelnen Nullstellen  $z_\mu$  in Gl.(2.77) gleich denjenigen in Gl.(2.76B) sind, besteht der Unterschied zwischen  $\tau_{wc}^*$  des Systems M/D/n und  $\tau_w^*$  des hier behandelten, getakteten Wartesystems nur in dem 1.Glied des Zählers von dem 2.Term in der eckigen Klammer. Für die mittlere Wartezeit  $\tau_w^*$  aus Gl.(2.76B) kann man deshalb auch mit Hilfe von  $\tau_{wc}^*$  aus Gl.(2.77) schreiben

$$\tau_w^* = \tau_{wc}^* + \frac{1}{\lambda T} \left[ -\frac{(\lambda T)^2}{2(n-\lambda T)} + \frac{n\lambda T}{2(n-\lambda T)} \right] = \tau_{wc}^* + \frac{n-\lambda T}{2(n-\lambda T)}$$

$$\tau_w^* = \tau_{wc}^* + 1/2 \quad (2.78)$$

Die Beziehung (2.78) besagt also, daß die mittlere Wartezeit des hier behandelten, getakteten Wartesystems um eine halbe Taktdauer größer ist als die auf alle Anforderungen bezogene mittlere Wartezeit des Systems M/D/n, dessen konstante Bedienungsdauer so groß wie die Taktdauer T ist. Für diese Tatsache kann folgende physikalische Erklärung gegeben werden. Trifft in dem System M/D/n eine ankommende Anforderung in das leere System ein, so wird sie sofort bedient und muß nicht warten. Trifft dagegen in dem hier behandelten, getakteten Wartesystem eine Anforderung in das leere System ein, so kann sie nicht

sofort bedient werden, sondern muß bis zu ihrer Abholung im nächsten Taktzeitpunkt warten. Da der nächste Taktzeitpunkt von dem Eintreffpunkt im Mittel noch eine halbe Taktdauer entfernt ist, beträgt diese Wartezeit ebenfalls im Mittel eine halbe Taktdauer. Wird dann nach dieser ersten Anforderung noch eine Warteschlange von weiteren Anforderungen aufgebaut, so wird jede einzelne dieser Anforderungen gegenüber dem System M/D/n um diejenige Zeit später dem Speicher entnommen, um die auch die erste Anforderung verzögert wurde, also im Mittel um die halbe Taktdauer. Deshalb besitzen alle Anforderungen eine um eine halbe Taktdauer größere mittlere Wartezeit als im System M/D/n.

### II.3.4 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten zu einem beliebigen Zeitpunkt aus der erzeugenden Funktion

Auch hier ist es nicht möglich, eine explizite Formel für die x-te Ableitung der erzeugenden Funktion  $G_x(z, t_v)$  nach Gl.(2.71) zu geben, um damit direkt die Zustandswahrscheinlichkeiten entsprechend der Gl.(2.21) zu gewinnen. Deshalb muß auch hier die erzeugende Funktion aus Gl.(2.71) schrittweise in eine Potenzreihe nach z entwickelt werden. Dazu wird Gl.(2.71) zunächst mit  $e^{\lambda T(1-z)}$  erweitert und unter Verwendung von Gl.(2.69) und Gl.(2.70) etwas umgeschrieben

$$G_x(z, t_v) = K \cdot \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (z-z_v)}{z^n e^{\lambda T(1-z)} - 1} e^{-\lambda(T-t_n z)} e^{\lambda T(1-z)}$$

Mit Gl.(2.30) wird daraus

$$G_x(z, t_v) = -K \prod_{v=0}^{n-1} (z-z_v) \frac{1}{1 - z^n e^{\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda t_v z} \quad (2.79)$$

Zuerst wird der Bruch von Gl.(2.79) mit Hilfe der Reihenentwicklung  $\frac{1}{1-u} = \sum_{\mu=0}^{\infty} u^\mu$  (mit Konvergenzbereich  $|u|<1$ ) umgeformt in

$$G_x(z, t_v) = -K \prod_{v=0}^{n-1} (z-z_v) \sum_{\mu=0}^{\infty} [z^n e^{\lambda T(1-z)}]^\mu e^{-\lambda t_v z}$$

Da der letzte Term dieses Ausdruckes unabhängig von  $\mu$  ist, kann er auch mit unter das Summenzeichen geschrieben werden

$$G_X(z, t_\nu) = -K \prod_{\nu=0}^{n-1} (z - z_\nu) \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[ z^{\mu n} e^{\mu \lambda T} e^{-\lambda z (\mu T + t_\nu)} \right]$$

Jetzt kann die letzte Exponentialfunktion in diesem Ausdruck in die Reihe

$$e^{-\lambda z (\mu T + t_\nu)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-\lambda z (\mu T + t_\nu)]^j}{j!}$$

entwickelt werden. Dadurch entsteht für die erzeugende Funktion der Ausdruck

$$G_X(z, t_\nu) = -K \underbrace{\prod_{\nu=0}^{n-1} (z - z_\nu)}_P \underbrace{\sum_{\mu=0}^{\infty} \left[ z^{\mu n} e^{\mu \lambda T} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-\lambda z (\mu T + t_\nu)]^j}{j!} \right]}_S \quad (2.80)$$

Gl.(2.80) stellt nun schon eine Potenzreihe in z dar, nur muß dieser Ausdruck jetzt noch nach Potenzen von z geordnet werden. Dazu werden zunächst die beiden Ausdrücke

$$P = \prod_{\nu=0}^{n-1} (z - z_\nu)$$

und

$$S = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[ z^{\mu n} e^{\mu \lambda T} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-\lambda z (\mu T + t_\nu)]^j}{j!} \right]$$

ausführlich angeschrieben und anschließend miteinander multipliziert. Mittels des Vieta'schen Wurzelsatzes läßt sich das Produkt P in ausmultiplizierter Form schreiben als

$$P = \prod_{\nu=0}^{n-1} (z - z_\nu) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^{(n-\nu)} S_{n-\nu} z^\nu \quad (2.81A)$$

wobei bedeutet

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= (z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} z_i \\ S_2 &= (z_0 z_1 + z_0 z_2 + z_0 z_3 + \dots + z_{n-2} z_{n-1}) = \sum_{\substack{i_1, i_2=0 \\ i_1 < i_2}}^{n-1} z_{i_1} z_{i_2} \\ &\vdots \\ S_n &= z_0 z_1 z_2 \dots z_{n-1} \end{aligned} \quad (2.81B)$$

oder in Worten:  $S_i$  bezeichnet die Summe aller möglichen Produkte aus den Nullstellen  $z_\nu$  ( $\nu=0, 1, \dots, n-1$ ) zu je i Faktoren.

Die Summe S in ausführlicher Form geschrieben lautet

$$\begin{aligned} S = & z^0 \cdot 1 \left( 1 + \frac{(-\lambda t_\nu)^1}{1!} z^1 + \frac{(-\lambda t_\nu)^2}{2!} z^2 + \frac{(-\lambda t_\nu)^3}{3!} z^3 + \dots \right) \\ & + z^n e^{\lambda T} \left( 1 + \frac{[-\lambda(T+t_\nu)]^1}{1!} z^1 + \frac{[-\lambda(T+t_\nu)]^2}{2!} z^2 + \frac{[-\lambda(T+t_\nu)]^3}{3!} z^3 + \dots \right) \\ & + z^{2n} e^{2\lambda T} \left( 1 + \frac{[-\lambda(2T+t_\nu)]^1}{1!} z^1 + \frac{[-\lambda(2T+t_\nu)]^2}{2!} z^2 + \frac{[-\lambda(2T+t_\nu)]^3}{3!} z^3 + \dots \right) \\ & + z^{3n} e^{3\lambda T} \left( 1 + \frac{[-\lambda(3T+t_\nu)]^1}{1!} z^1 + \frac{[-\lambda(3T+t_\nu)]^2}{2!} z^2 + \frac{[-\lambda(3T+t_\nu)]^3}{3!} z^3 + \dots \right) \\ & + \dots \end{aligned}$$

Das Produkt aus P und S ist dann in ausführlicher Schreibweise

$$P \cdot S = \left[ (-1)^0 S_0 z^n + (-1)^1 S_1 z^{n-1} + (-1)^2 S_2 z^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} S_{n-1} z^1 + (-1)^n S_n \right] \cdot \left[ \begin{aligned} & \left( 1 + \frac{(-\lambda t_\nu)^1}{1!} z^1 + \frac{(-\lambda t_\nu)^2}{2!} z^2 + \frac{(-\lambda t_\nu)^3}{3!} z^3 + \dots \right) \\ & + e^{\lambda T} \left( z^n + \frac{[-\lambda(T+t_\nu)]^1}{1!} z^{n+1} + \frac{[-\lambda(T+t_\nu)]^2}{2!} z^{n+2} + \frac{[-\lambda(T+t_\nu)]^3}{3!} z^{n+3} + \dots \right) \\ & + e^{2\lambda T} \left( z^{2n} + \frac{[-\lambda(2T+t_\nu)]^1}{1!} z^{2n+1} + \frac{[-\lambda(2T+t_\nu)]^2}{2!} z^{2n+2} + \frac{[-\lambda(2T+t_\nu)]^3}{3!} z^{2n+3} + \dots \right) \\ & + e^{3\lambda T} \left( z^{3n} + \frac{[-\lambda(3T+t_\nu)]^1}{1!} z^{3n+1} + \frac{[-\lambda(3T+t_\nu)]^2}{2!} z^{3n+2} + \frac{[-\lambda(3T+t_\nu)]^3}{3!} z^{3n+3} + \dots \right) \\ & + \dots \end{aligned} \right]$$

Zur Ausmultiplikation der beiden eckigen Klammern und gleichzeitiger Zusammenfassung nach Potenzen von z werden jeweils Gruppen von n Potenzen von z betrachtet, bei denen nach der Ausmultiplikation der Exponent  $\nu$  von z im Bereich  $bn \leq \nu \leq (b+1)n - 1$  (mit  $b=0, 1, 2, \dots$ ) liegt. Diese Gruppeneinteilung wird deshalb durchgeführt, weil die zweite runde Klammer von S erst Beiträge für Potenzen  $\geq n$  liefert, die dritte runde Klammer von S liefert erst Beiträge für Potenzen  $\geq 2n$  usw. Auf diese Weise werden z.B. für den Bereich  $0 \leq \nu \leq n-1$  jeweils  $\nu$  Elemente mit den Potenzen  $0, 1, \dots, \nu$  der ersten runden Klammer von S mit  $\nu$  Elementen mit den Potenzen  $0, 1, \dots, \nu$  von P miteinander verknüpft. Für den Bereich  $n \leq \nu \leq 2n-1$  werden n Elemente

mit den Potenzen  $0, 1, \dots, n$  der ersten runden Klammer von S mit  $n$  Elementen mit den Potenzen  $\nu-n, \nu-n+1, \dots, \nu$  von P verknüpft und außerdem noch  $\nu-n$  Elemente mit den Potenzen  $n, n+1, \dots, \nu$  der zweiten runden Klammer von S mit  $\nu-n$  Elementen mit den Potenzen  $0, 1, \dots, n-\nu$  von P usw. Auf diese Weise kommt man zu

$$\begin{aligned}
 P \cdot S &= z^0 \left[ (-1)^n S_n \right] \\
 &+ z^1 \left[ (-1)^{n-1} S_{n-1} + (-1)^n S_n \frac{(-\lambda t_\nu)^1}{1!} \right] \\
 &+ z^2 \left[ (-1)^{n-2} S_{n-2} + (-1)^{n-1} S_{n-1} \frac{(-\lambda t_\nu)^1}{1!} + (-1)^n S_n \frac{(-\lambda t_\nu)^2}{2!} \right] \\
 &+ \dots \\
 &+ z^{n-1} \left[ (-1)^1 S_1 + (-1)^2 S_2 \frac{(-\lambda t_\nu)^1}{1!} + (-1)^3 S_3 \frac{(-\lambda t_\nu)^2}{2!} + \dots + (-1)^n S_n \frac{(-\lambda t_\nu)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \\
 &+ z^n \left[ (-1)^0 S_0 + (-1)^1 S_1 \frac{(-\lambda t_\nu)^1}{1!} + (-1)^2 S_2 \frac{(-\lambda t_\nu)^2}{2!} + \dots + (-1)^n S_n \frac{(-\lambda t_\nu)^n}{n!} \right. \\
 &\quad \left. + e^{\lambda T} (-1)^n S_n \right] \\
 &+ z^{n+1} \left[ (-1)^0 S_0 \frac{(-\lambda t_\nu)^1}{1!} + (-1)^1 S_1 \frac{(-\lambda t_\nu)^2}{2!} + \dots + (-1)^n S_n \frac{(-\lambda t_\nu)^{n+1}}{(n+1)!} \right. \\
 &\quad \left. + e^{\lambda T} \left( (-1)^{n-1} S_{n-1} + (-1)^n S_n \frac{[\lambda(\Gamma+t_\nu)]^1}{1!} \right) \right] \\
 &+ \dots \\
 &+ z^{2n-1} \left[ (-1)^0 S_0 \frac{(-\lambda t_\nu)^{n-1}}{(n-1)!} + (-1)^1 S_1 \frac{(-\lambda t_\nu)^n}{n!} + \dots + (-1)^n S_n \frac{(-\lambda t_\nu)^{2n-1}}{(2n-1)!} \right. \\
 &\quad \left. + e^{\lambda T} \left( (-1)^1 S_1 + (-1)^2 S_2 \frac{[\lambda(\Gamma+t_\nu)]^1}{1!} + \dots + (-1)^n S_n \frac{[\lambda(\Gamma+t_\nu)]^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right] \\
 &+ z^{2n} \left[ \dots \right] \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P \cdot S &= \sum_{\nu=0}^{n-1} z^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{(-\lambda t_\nu)^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!} \quad \text{--- (1)} \\
 &+ \sum_{\nu=n}^{2n-1} z^\nu \left( \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{(-\lambda t_\nu)^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!} + e^{\lambda T} \sum_{\mu=0}^{\nu-n} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[\lambda(\Gamma+t_\nu)]^{\nu-n-\mu}}{(\nu-n-\mu)!} \right) \quad \text{--- (2)} \\
 &+ \sum_{\nu=2n}^{3n-1} z^\nu \left( \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{(-\lambda t_\nu)^{\nu-\mu}}{(\nu-\mu)!} + e^{\lambda T} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[\lambda(\Gamma+t_\nu)]^{\nu-n-\mu}}{(\nu-n-\mu)!} \right. \\
 &\quad \left. + e^{2\lambda T} \sum_{\mu=0}^{\nu-2n} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[\lambda(2\Gamma+t_\nu)]^{\nu-2n-\mu}}{(\nu-2n-\mu)!} \right) \quad \text{--- (3)} \\
 &+ \dots \\
 &+ \sum_{\nu=b n}^{(b+1)n-1} z^\nu \left[ \sum_{j=0}^{b-1} \left( e^{j\lambda T} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[\lambda(j\Gamma+t_\nu)]^{\nu-jn-\mu}}{(\nu-jn-\mu)!} \right) + e^{b\lambda T} \sum_{\mu=0}^{\nu-bn} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[\lambda(b\Gamma+t_\nu)]^{\nu-bn-\mu}}{(\nu-bn-\mu)!} \right] \\
 &+ \dots \quad \text{allgemein mit } b=3, 4, 5, \dots
 \end{aligned}$$

Damit erhält man schließlich für die erzeugende Funktion  $G_x(z, t_\nu)$  unter Verwendung von Gl.(2.80)

$$G_x(z, t_\nu) = -K \sum_{b=0}^{\infty} \sum_{\nu=b n}^{(b+1)n-1} z^\nu \left[ \sum_{j=0}^{b-1} \left( e^{j\lambda T} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[\lambda(j\Gamma+t_\nu)]^{\nu-jn-\mu}}{(\nu-jn-\mu)!} \right) + e^{b\lambda T} \sum_{\mu=0}^{\nu-bn} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[\lambda(b\Gamma+t_\nu)]^{\nu-bn-\mu}}{(\nu-bn-\mu)!} \right] \quad (2.82)$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x, t_\nu)$  sind nun laut Definition der erzeugenden Funktion jeweils die Koeffizienten von  $z^x$  in dieser Reihenentwicklung der erzeugenden Funktion. Aus Gl.(2.82) folgt deshalb mit  $\nu=x$  und unter der Verwendung der Gleichungen (2.70) und (2.30) jeweils für die Bereiche  $bn \leq x < (b+1)n$  (mit  $b=0, 1, 2, \dots$ )

$$p(x, t_\nu) = \frac{\lambda T - n}{\prod_{i=1}^n (1-z_i)} e^{\lambda t_\nu} \left[ \sum_{j=0}^{b-1} \left( e^{j\lambda T} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[\lambda(j\Gamma+t_\nu)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} \right) + e^{b\lambda T} \sum_{\mu=0}^{x-bn} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[\lambda(b\Gamma+t_\nu)]^{x-bn-\mu}}{(x-bn-\mu)!} \right] \quad (2.83)$$

mit  $S_i$  nach Gl.(2.81B) und  $bn \leq x \leq (b+1)n$  ( $b=0, 1, 2, \dots$ )

Man beachte auch hier  $\frac{0^0}{0!} = 1$  und  $\sum_{i=1}^j \dots = 0$  für  $j < 1$

### II.3.5 Wartezeitverteilung

Zur Bestimmung der Wartezeitverteilungsfunktion aus den Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x, t_\nu)$  werden hier die entsprechenden Schritte wie in Abschnitt II.2.5 durchgeführt. Es wird

dazu wieder eine "Testanforderung" betrachtet, welche zur Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt eintreffen soll.

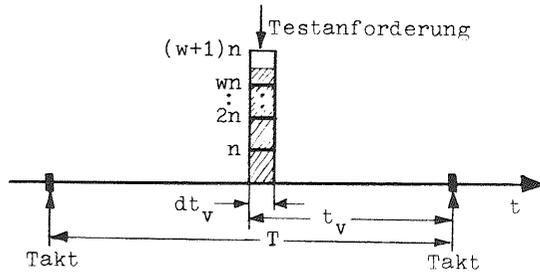


Bild 11: Testanforderung zur Bestimmung der Wartezeitverteilung

Findet diese Testanforderung bei ihrem Eintreffen  $0, 1, \dots, n-1$  Wartende vor, so muß sie die Zeit  $t_v$  warten,  $n, n+1, \dots, 2n-1$  Wartende vor, so muß sie die Zeit  $T+t_v$  warten,  $wn, wn+1, \dots, (w+1)n-1$  Wartende vor, so muß sie die Zeit  $wT+t_v$  warten. Es werden hier also die wartenden Anforderungen in Gruppen zu je  $n$  Anforderungen unterteilt, da pro Takt jeweils eine Gruppe von  $n$  Anforderungen abgeholt werden kann (vgl. Bild 11). Fällt die eintreffende Anforderung in die erste Gruppe, so wird sie schon beim nächsten Takt abgeholt. Fällt sie in die zweite Gruppe, so wird sie erst mit dem übernächsten Takt abgeholt usw. Die Wahrscheinlichkeit, daß die Testanforderung im Teilintervall  $dt_v$  eintrifft, welches die Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt liegt (vgl. Bild 11), ist wie im Abschnitt II.2.5.1 schon angegeben  $dt_v/T$ .

Die Wahrscheinlichkeit, daß die eintreffende Testanforderung zur Zeit  $t_v$  vor dem nächsten Takt in die  $(w+1)$ -te Gruppe fällt, d.h. bereits  $wn, wn+1, \dots, (w+1)n-1$  wartende Anforderungen vorfindet, ist

$$\sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} p(x, t_v),$$

wobei  $p(x, t_v)$  aus Gl.(2.83) entnommen werden kann. Da diese beiden Ereignisse unabhängig voneinander sind, gilt für die Wahrscheinlichkeit  $P(wT+t_v-dt, wT+t_v)$ , daß die Testan-

forderung eine Zeit zwischen  $wT+t_v-dt_v$  und  $wT+t_v$  warten muß

$$P(wT+t_v-dt_v, wT+t_v) = \sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} p(x, t_v) \frac{dt_v}{T} \quad (2.84)$$

mit  $0 \leq t_v \leq T$   
und  $w \geq 0$

Die Wahrscheinlichkeit  $P(wT, wT+t_v)$ , daß die eintreffende Testanforderung eine Zeit warten muß, welche zwischen  $wT$  und  $wT+t_v$  liegt, ist dann nach Gl.(2.84) mit dem Grenzübergang  $dt_v \rightarrow 0$

$$P(wT, wT+t_v) = \frac{1}{T} \int_0^{t_v} \sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} p(x, t_v) dt_v$$

Für die Höchstwertverteilung  $P(\leq wT+t_v)$  folgt dann

$$P(\leq wT+t_v) = P(wT, wT+t_v) + P(\leq wT) \quad \text{oder}$$

$$P(\leq wT+t_v) = \frac{1}{T} \int_0^{t_v} \sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} p(x, t_v) dt_v + P(\leq wT) \quad (2.85)$$

Gl.(2.85) ist wie Gl.(2.57A) in Abschnitt II.2.5.2 eine Rekursionsformel für die Höchstwertverteilung der Wartezeit. Die Größe  $P(\leq wT)$  auf der rechten Seite von Gl.(2.85) kann dadurch bestimmt werden, daß in Gl.(2.85) die Größe  $w$  durch  $w-1$  und die Größe  $t_v$  durch  $T$  ersetzt wird. Die dann auf der rechten Seite der Gleichung entstehende Größe  $P(\leq (w-1)T)$  wird analog zu  $P(\leq wT)$  bestimmt usw. Nach der vollständigen Durchführung dieser Rekursion kann  $P(\leq wT)$  geschlossen angegeben werden als

$$P(\leq wT) = \frac{1}{T} \sum_{v=0}^{w-1} \int_0^T \sum_{x=v n}^{(v+1)n-1} p(x, t_v) dt_v \quad (2.86)$$

Mit Gl.(2.86) wird dann schließlich aus Gl.(2.85)

$$P(\leq wT+t_v) = \frac{1}{T} \left[ \int_0^{t_v} \sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} p(x, t_v) dt_v + \sum_{v=0}^{w-1} \int_0^T \sum_{x=v n}^{(v+1)n-1} p(x, t_v) dt_v \right] \quad (2.87)$$

Nun können noch die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x, t_v)$  aus Gl.(2.83) in Gl.(2.87) eingesetzt werden. Die weitere Auswertung der dadurch entstehenden Gleichung ist im wesentlichen noch Integrations- und umfangreiche Umformungsarbeit, welche hier nicht weiter verfolgt werden soll, der Vollständigkeit halber aber in Anhang 3 gezeigt wird. Als Ergebnis liefert diese Auswertung für die Wartezeitverteilungsfunktion die explizite Formel

$$P(\leq wT+t_v) = \frac{\lambda T - n}{\prod_{v=1}^{n-1} (1-z_v)} \cdot \frac{1}{\lambda T} \cdot \sum_{\mu=0}^n (-1)^{\mu} S_{n,\mu} \left[ \sum_{j=0}^{w-1} e^{\lambda(jT+t_v)} \left( \sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} [(w+1)n-x] \frac{[\lambda(jT+t_v)]^x j^{n-\mu}}{(x-jn-\mu)!} \right) + n \sum_{f=1}^{(w-j)n-\mu} \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{(w-j)n-\mu-f}}{[(w-j)n-\mu-f]!} \right] + e^{\lambda(wT+t_v)} \sum_{x=0}^{n-1} \frac{\lambda^{n-1-\mu} [(w+1)n-x]^{n-1-\mu}}{x!} - [(w+1)n-\mu] \quad (2.88)$$

mit  $w = 0, 1, 2, \dots$

$$0 \leq t_v \leq T$$

$S_i$  nach Gl.(2.81B)

Man beachte auch hier  $\frac{0^0}{0!} = 1$  und  $\sum_i^j \dots = 0$  für  $j < i$

Ist die Wahrscheinlichkeit gefragt, daß eine Anforderung weniger oder gleich die Zeit  $t$  warten muß, so gelten für die Variablen  $w$  und  $t_v$  in Gl.(2.88) die Ausdrücke nach Gl.(2.55A,B).

Die komplementäre Wartezeitverteilungsfunktion  $P(>wT+t_v)$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß eine Anforderung länger als die Zeit  $t=wT+t_v$  warten muß, ist

$$P(>wT+t_v) = 1 - P(\leq wT+t_v) \quad (2.89)$$

#### II.4 Verteilung der Gruppengröße, die pro Takt aus dem Speicher geholt wird

Die mit dem Takt aus dem Speicher entnommene Gruppe von Anforderungen kann zur weiteren Verarbeitung einem nachfolgenden Bedienungssystem angeboten werden (vgl. Bild 4). In solchen Fällen ist für dieses nachfolgende Bedienungssystem die Verteilung der Größe der Gruppe von Anforderungen von Bedeutung, welche pro Takt dem Speicher des hier behandelten Modells entnommen wird. Diese Verteilung der Gruppengröße läßt sich aber sehr einfach aus den Zustandswahrscheinlichkeiten des hier behandelten Modells mit Hilfe der folgenden Überlegung bestimmen:

Befinden sich direkt vor dem Taktzeitpunkt  $x < n$  Anforderungen in dem Speicher, so werden mit dem Takt alle, also genau  $x$  Anforderungen aus dem Speicher entfernt. Befinden sich direkt vor dem Taktzeitpunkt  $x \geq n$  Anforderungen in dem Speicher, so werden immer nur genau  $n$  Anforderungen aus dem Speicher entfernt. Die Wahrscheinlichkeit  $p(x,0)$ , daß kurz vor dem Takt-

zeitpunkt  $x$  Anforderungen im System enthalten sind, läßt sich aus Gl.(2.83) für  $t_v=0$  entnehmen. Somit ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten  $q(i)$ , daß mit dem Takt genau  $i$  Anforderungen aus dem Speicher entfernt werden, zu

$$q(i) = p(i,0) \quad \text{für } 0 \leq i < n \quad (2.90)$$

$$q(n) = \sum_{x=n}^{\infty} p(x,0) = 1 - \sum_{x=0}^{n-1} p(x,0) = 1 - \sum_{x=0}^{n-1} q(x)$$

### II.5 Numerische Ergebnisse und Auswertungen

In diesem Abschnitt werden numerische Ergebnisse, welche mit Hilfe eines Rechners aus den theoretisch ermittelten Formeln der Abschnitte II.1 bis II.3 gewonnen wurden, in Form von Diagrammen dargestellt. Die für die numerischen Ergebnisse benötigten Nullstellen  $z_v$  wurden dabei mittels einer modifizierten "Regula falsi" näherungsweise, aber beliebig genau bestimmt.

#### II.5.1 Mittlere Wartezeiten

In den Diagrammen der Bilder 12 und 13 sind die auf die Takt-dauer  $T$  normierten mittleren Wartezeiten  $\tau_w^*$  entsprechend der Formeln (2.29B) bzw. (2.76B) in Abhängigkeit von der Ankunftsrate  $\lambda$  dargestellt. Die Abfrageplatzzahl  $n$  ist dabei als Parameter verwendet worden.

Aus diesen Diagrammen wird nochmals deutlich, daß die mittlere Wartezeit niemals kleiner als die halbe Taktdauer sein kann, wie dies in Abschnitt II.3.3 schon einmal angedeutet wurde.

#### II.5.2 Wartezeitverteilung

In den Diagrammen der Bilder 14, 15 und 16 sind die komplementären Wartezeitverteilungsfunktionen  $P(>t)$  entsprechend der Formeln (2.58B) bzw. (2.89) in Abhängigkeit der auf die Taktzeit  $T$  normierten Zeit für die Fälle  $n=1$ ,  $n=2$  und  $n=10$  dargestellt. Als Parameter dient hierbei die Ankunftsrate  $\lambda$ . In

diesen Diagrammen fallen die Knicke im Kurvenverlauf bei ganzzahligen Werten von  $t/T$  auf. Diese werden dadurch verursacht, daß die Formel für die Wartezeitverteilung immer nur abschnittsweise für Zeitintervalle der Länge  $T$  gilt. Diese abschnittsweise Gültigkeit der Formel für die Wartezeitverteilung kommt durch die ganzzahlige Größe  $w$  in den Gleichungen (2.58B) bzw. (2.89) zum Ausdruck. Dieser geknickte Verlauf der Wartezeitverteilung tritt auch in dem schon des öfteren zum Vergleich herangezogenen System  $M/D/n$  auf.

### II.5.3 Gegenseitiger Einfluß der Abfrageplattzahl $n$ und der Taktdauer $T$ auf die absolute mittlere Wartezeit

Als Beispiel für eine Auswertung der oben dargestellten numerischen Ergebnisse bei in der Praxis auftretenden Problemen soll der Fall betrachtet werden, daß das hier behandelte Modell ein Teil eines rechnergesteuerten Systems sei. In vielen rechnergesteuerten Systemen steht die Übernahme von Information aus der Peripherie in die Zentraleinheit - in dem hier behandelten Modell also die Durchführung des Taktes - in direktem Zusammenhang mit einer Unterbrechung des gerade in der Zentraleinheit ablaufenden Programmes. Diese Unterbrechungen verursachen eine zusätzliche Last für die Zentraleinheit. Deshalb ist es vom Gesichtspunkt der Zentraleinheit her wünschenswert, die Zahl der Unterbrechungen pro Zeiteinheit so klein wie möglich zu halten, d.h. das Taktintervall so groß wie möglich zu machen. Doch darf dann andererseits die absolute mittlere Wartezeit der einzelnen Anforderungen durch diese Vergrößerung des Taktintervalls nicht zu stark ansteigen.

Um dieses Problem genauer zu untersuchen, wird die absolute mittlere Wartezeit in verschiedenen Fällen betrachtet, in denen von Fall zu Fall das Taktintervall  $T$  vergrößert wird. Um jedoch die absolute mittlere Wartezeit unter einer bestimmten Grenze zu halten, wird dabei zum Ausgleich von Fall zu Fall die Zahl der Abfrageplätze  $n$  ebenfalls vergrößert und zwar derart, daß das Verhältnis  $n/T$  konstant bleibt. Die Größe  $n/T$  stellt die Anzahl von Anforderungen dar, die maximal pro Zeiteinheit aus dem Speicher geholt werden können. Mit Hilfe der numerischen Ergebnisse aus Abschnitt II.5.1 führen diese Betrachtun-

gen zu dem Diagramm in Bild 17. Dort sind vier Kurven für die absolute mittlere Wartezeit in Abhängigkeit der Ankunftsrate  $\lambda$  dargestellt für die Fälle  $n=1$ ,  $n=2$ ,  $n=3$  und  $n=4$ , wobei  $n/T$  jeweils gleich 1 gewählt wurde.

Das Diagramm in Bild 17 kann folgendermaßen interpretiert werden:

Für eine kleine Ankunftsrate  $\lambda$  ist es nicht ratsam, das Taktintervall  $T$  und die Abfrageplattzahl  $n$  zu erhöhen, da sich dann die absolute mittlere Wartezeit relativ gesehen sehr stark erhöht. Außerdem spielt für eine kleine Ankunftsrate  $\lambda$  die durch die Unterbrechungen verursachte zusätzliche Last der Zentraleinheit praktisch keine Rolle. Für eine große Ankunftsrate  $\lambda$  jedoch ist die Belastung der Zentraleinheit durch die Verarbeitung der Anforderungen selbst bereits so groß, daß die durch die Unterbrechungen verursachte Last von großer Bedeutung ist. In diesem Fall lohnt es sich, das Taktintervall  $T$  und die Abfrageplattzahl  $n$  zu vergrößern, da sich dann auch die absolute mittlere Wartezeit relativ gesehen nur wenig erhöht und außerdem die Zahl von Unterbrechungen pro Zeiteinheit merklich herabgesetzt wird.

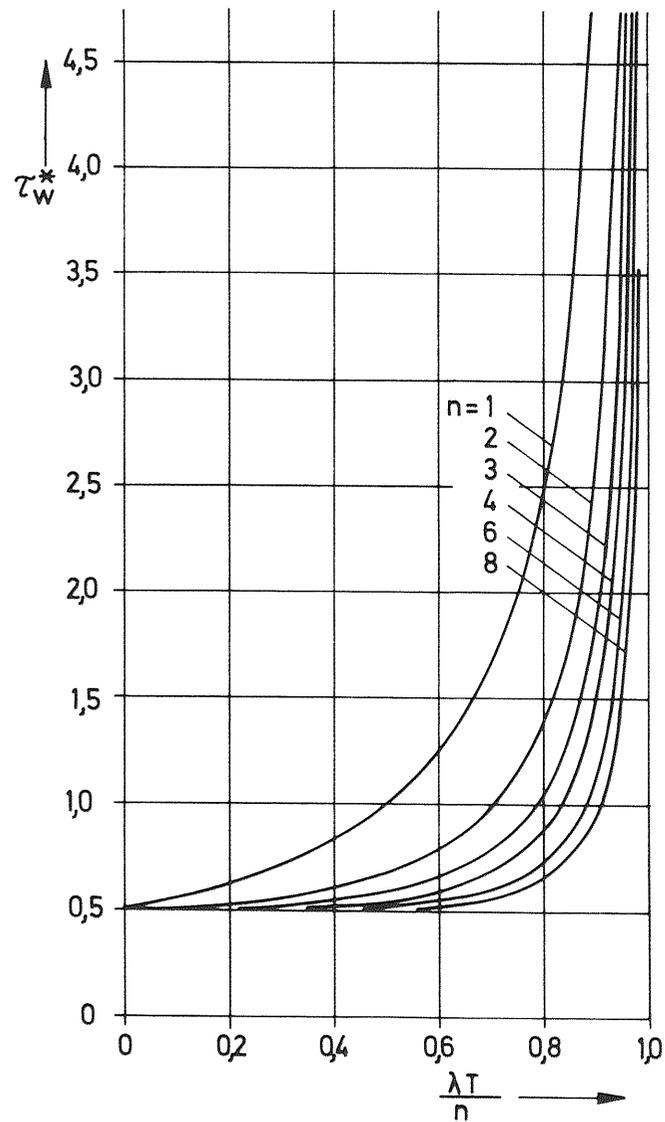


Bild 12: Normierte mittlere Wartezeit für ein System nach Abschn. II.3

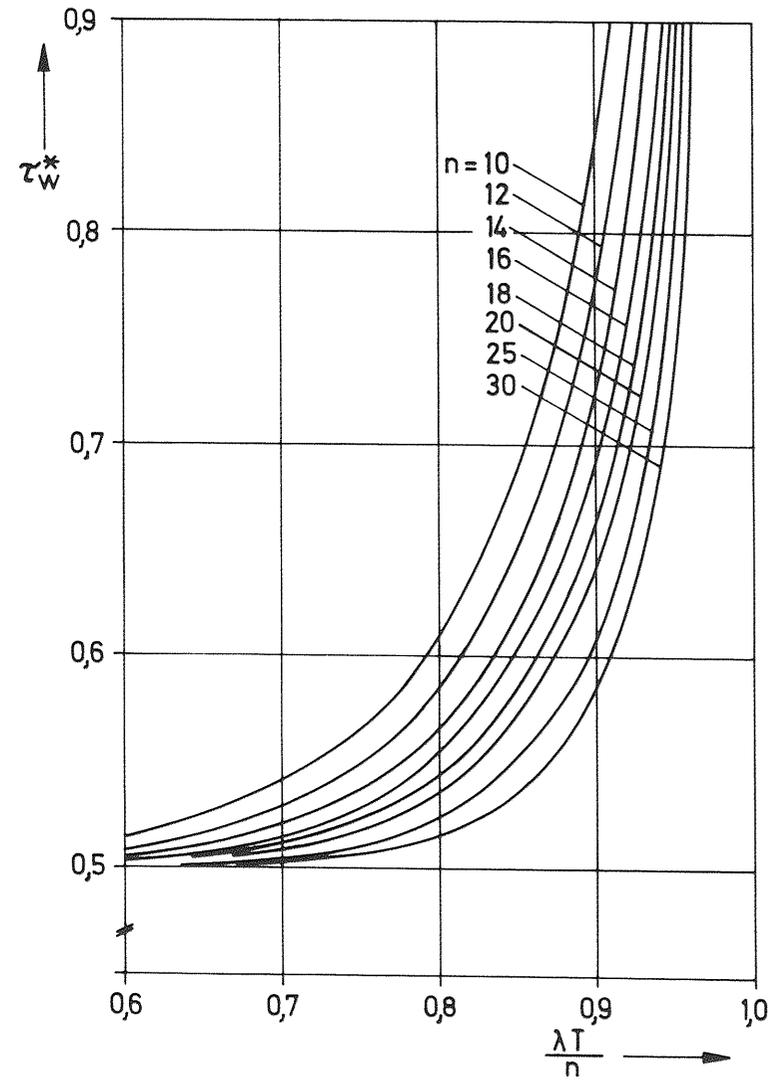


Bild 13: Normierte mittlere Wartezeit für ein System nach Abschn. II.3

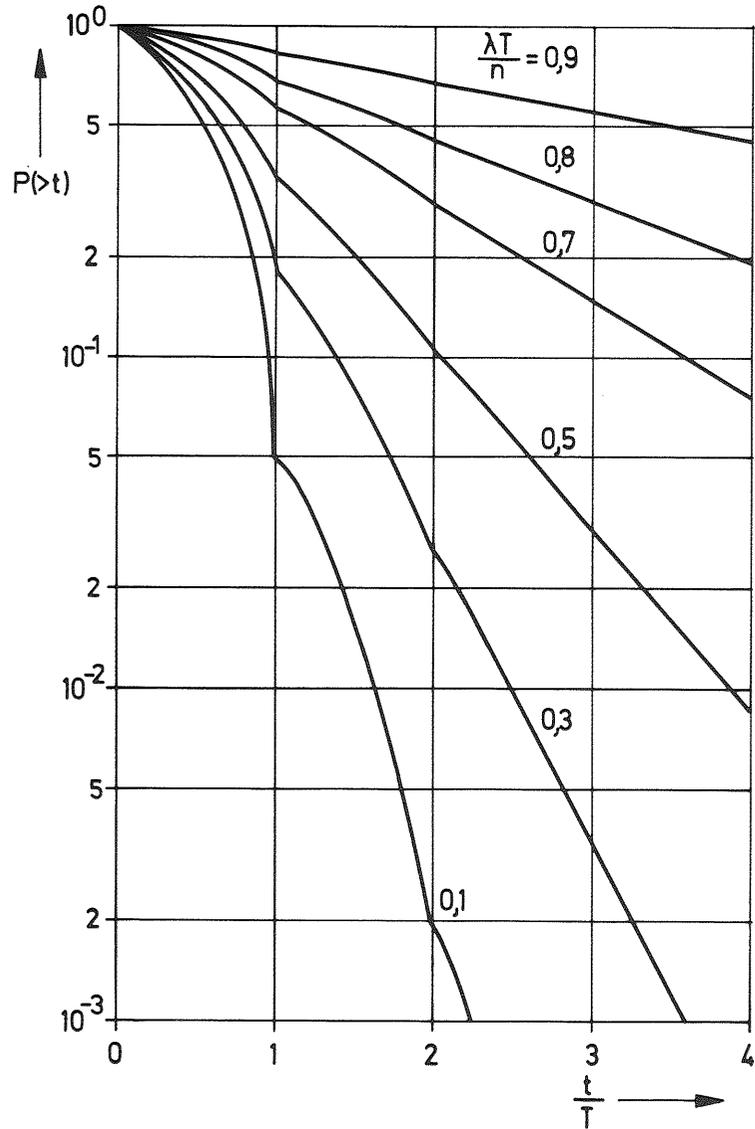


Bild 14: Komplementäre Wartezeitverteilung für ein System nach Abschn. II.2 mit  $n=1$  Abfrageplatz

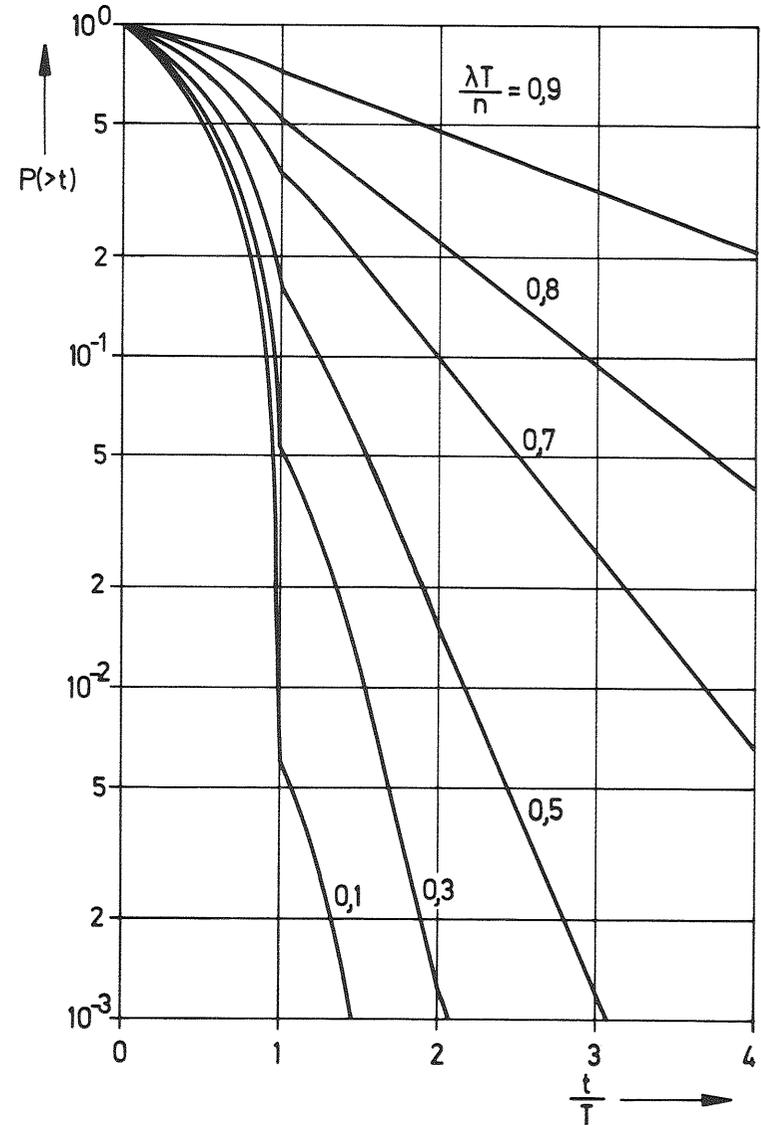


Bild 15: Komplementäre Wartezeitverteilung für ein System nach Abschn. II.3 mit  $n=2$  Abfrageplätzen

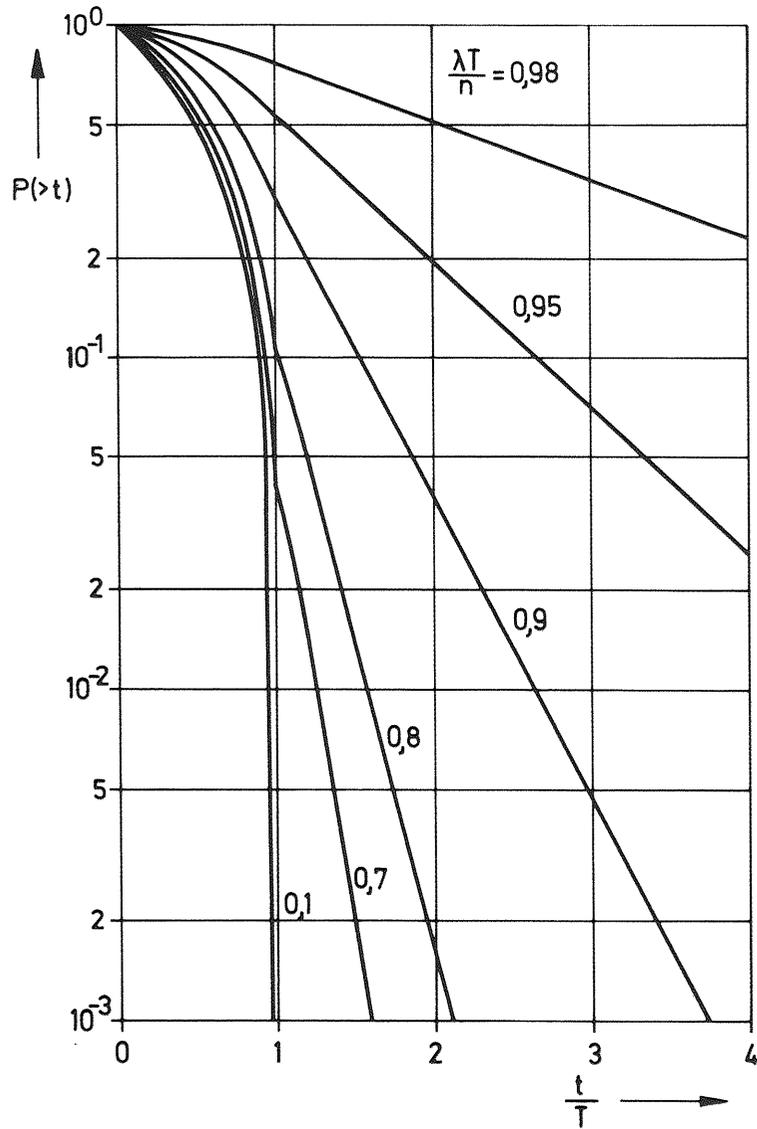


Bild 16: Komplementäre Wartezeitverteilung für ein System nach Abschn. II.3 mit  $n=10$  Abfrageplätzen

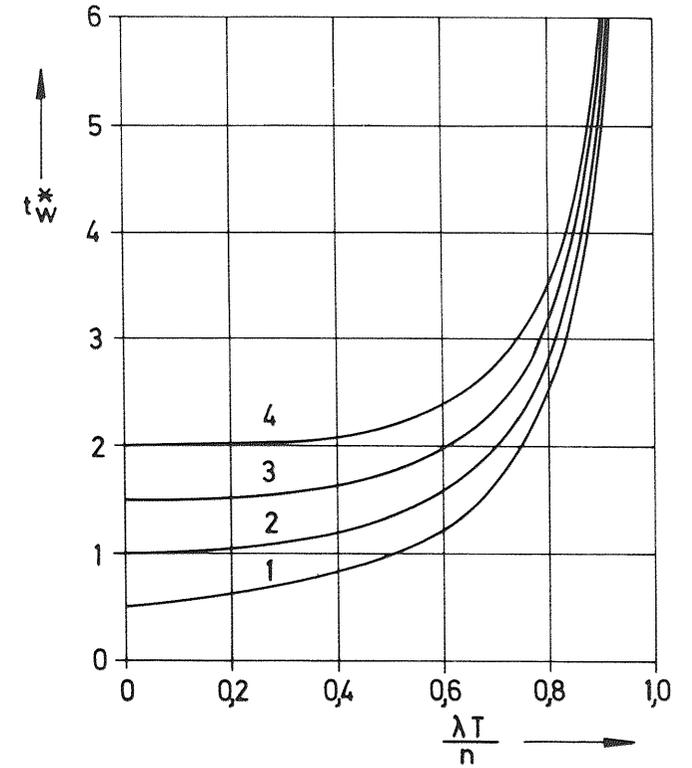


Bild 17: Absolute mittlere Wartezeit für ein System nach Abschn. II.3 ( $t_w^*$  und  $T$  in Zeiteinheiten)

- Kurve 1:  $n=1, T=1,$
- Kurve 2:  $n=2, T=2,$
- Kurve 3:  $n=3, T=3,$
- Kurve 4:  $n=4, T=4.$

III

WARTESYSTEM MIT GRUPPENANKÜNFEN IN TAKTZEIT-  
PUNKTEN UND KONSTANTER BEDIENTUNGSDAUER

III.1 Struktur und Betriebsweise des Systems

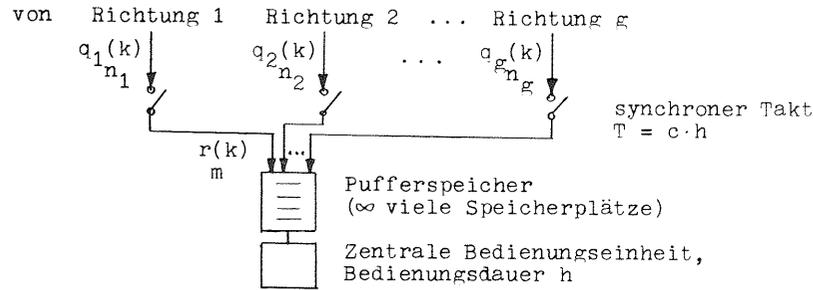


Bild 18: Struktur des Systems

Die zentrale Bedienungseinheit, z.B. ein Rechner, benötigt für die Verarbeitung einer Anforderung die konstante Bedienungsdauer  $h$  (vgl. Bild 18). Jeweils nach einer Zeit  $T$ , welche so groß wie  $c$  Bedienungsdauern ist ( $c = \text{ganze Zahl} \geq 1$ ), werden die  $g$  Richtungen synchron durch den Takt abgefragt. Eine solche Richtung kann z.B. von einem ähnlichen System kommen, wie es in Kapitel II behandelt wurde. Von jeder Richtung  $i$  kommen pro Takt jeweils  $k_i = 0, 1, 2, \dots, n_i$  Anforderungen mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten  $q_i(k)$  an. Für dieses Modell wird angenommen, daß die Wahrscheinlichkeiten  $q_i(k)$  unabhängig voneinander sind bezüglich der einzelnen Richtungen sowie in aufeinanderfolgenden Taktzeitpunkten. Die Wahrscheinlichkeit, daß insgesamt von allen Richtungen pro Takt  $k = 0, 1, 2, \dots, m$  Anforderungen ankommen, sei mit  $r(k)$  bezeichnet. Dabei ist

$$m = \sum_{i=1}^g n_i > c$$

Der Fall  $m \leq c$  muß nicht weiter behandelt werden, da in diesem Fall immer eine ankommende Gruppe bis zum nächsten Taktzeitpunkt abgearbeitet ist und deshalb die ankommenden Gruppen immer ein leeres System vorfinden.

Innerhalb einer gesamten ankommenden Gruppe von Anforderungen werden die Anforderungen aus Richtung 2 hinter denjenigen aus

Richtung 1 in den Pufferspeicher eingeordnet, die Anforderungen aus Richtung 3 hinter denjenigen aus Richtung 2 usw. Die im Pufferspeicher wartenden Anforderungen werden schließlich nach der Bedienungsdisziplin "first come, first served" von der Bedienungseinheit einzeln seriell abgearbeitet. Der Pufferspeicher sei unbegrenzt groß.

III.2 Betrachtung des Systems mit globaler Ankunftsgruppe der Anforderungen

In diesem Abschnitt sollen die pro Takt ankommenden Anforderungen noch nicht nach ihrer Herkunftsrichtung unterschieden werden, sondern es wird die gesamte, ankommende Gruppe von Anforderungen betrachtet, welche fortan als globale Gruppe bezeichnet wird.

III.2.1 Bestimmung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten

III.2.1.1 Beobachtungszeitpunkte kurz nach dem Takt

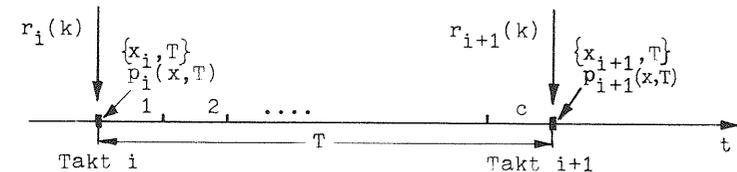


Bild 19: Beobachtungszeitpunkte

Das in Abschnitt III.1 beschriebene System wird zunächst zu Zeitpunkten direkt nach dem Takt betrachtet (vgl. Bild 19). Der Zeitpunkt direkt nach dem Takt liegt aber die Zeit  $T$  vor dem nächsten Takt. Verwendet man für die Zustände bzw. deren Wahrscheinlichkeiten die Schreibweise aus Kapitel II, so wird der Zustand des Systems kurz nach dem Takt  $i$  bzw.  $i+1$  auch durch  $\{x_i, T\}$  bzw.  $\{x_{i+1}, T\}$  dargestellt. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind dann  $p_i(x, T)$  bzw.  $p_{i+1}(x, T)$ . Der Zustand  $\{x_i, T\}$  bedeutet hier, daß kurz nach dem Takt in dem System, d.h. im Speicher und in der Bedienungseinheit, insgesamt genau  $x_i$  Anforderungen enthalten sind. Die Folge der Zustände kurz nach den Taktzeitpunkten bildet eine eingebettete Markoff-

Kette. Man könnte nun hier analog zu Kapitel II zuerst das Gleichungssystem der Zustandswahrscheinlichkeiten kurz nach dem Taktzeitpunkt aufstellen und dieses anschließend mit Hilfe der erzeugenden Funktion lösen. Der Einfachheit wegen wird aber hier die erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten direkt aus den Zuständen selbst bestimmt, wie dies in Kapitel II auch schon als weitere Möglichkeit zur Ermittlung der erzeugenden Funktion angewendet wurde.

Für die Bestimmung des Zustandes  $\{x_{i+1}, T\}$  aus dem Zustand  $\{x_i, T\}$  kann nun folgende Überlegung dienen:

Die Anforderungen können nur zu den Taktzeitpunkten ankommen. Die Wahrscheinlichkeit, daß  $k_i$  bzw.  $k_{i+1}$  Anforderungen mit dem Takt  $i$  bzw.  $i+1$  ankommen, sei  $r_i(k)$  bzw.  $r_{i+1}(k)$  (vgl. Bild 19). Zwischen zwei Taktzeitpunkten können nur Bedienungen enden und zwar maximal  $c$  Stück, wenn kurz nach dem Takt mindestens  $c$  Anforderungen im System waren (Speicher + Bedienungseinheit). Das heißt aber, daß zwischen zwei Taktzeitpunkten die Anzahl von Anforderungen im System niemals zunehmen kann, sondern immer abnehmen muß. Befindet sich das System kurz nach dem Taktzeitpunkt  $i$  im Zustand  $\{x_i, T\}$  mit  $x_i < c$ , so werden alle vorhandenen Anforderungen bis zum nächsten Taktzeitpunkt ihre Bedienungsdauer beendet haben, d.h. das System wird dann kurz vor dem Takt  $i+1$  leer sein. Befindet sich das System kurz nach dem Taktzeitpunkt  $i$  dagegen im Zustand  $\{x_i, T\}$  mit  $x_i \geq c$ , so können während der Zeit bis zum nächsten Taktzeitpunkt nur  $c$  Anforderungen abgearbeitet werden. Dann verbleiben noch  $\{x_i, T\} - c$  Anforderungen kurz vor dem Takt  $i+1$  im System. Mit dem Takt  $i+1$  kommen nun noch  $k_{i+1}$  neue Anforderungen im System an. Der Zustand  $\{x_{i+1}, T\}$  zum Zeitpunkt kurz nach dem Takt  $i+1$  ergibt sich deshalb zu

$$\{x_{i+1}, T\} = \text{Max} \left[ (\{x_i, T\} - c), 0 \right] + k_{i+1} \quad (3.1A)$$

$$\text{mit } \text{Max} \left[ (\{x_i, T\} - c), 0 \right] = \begin{cases} \{x_i, T\} - c & \text{für } \{x_i, T\} \geq c \\ 0 & \text{für } \{x_i, T\} < c \end{cases}$$

$$(3.1B)$$

Mit der Abkürzung  $v_i = \text{Max} \left[ (\{x_i, T\} - c), 0 \right]$  (3.2)

wird aus Gl.(3.1)  $\{x_{i+1}, T\} = v_i + k_{i+1}$  (3.3)

Gl.(3.3) ist analog zu den Gleichungen (2.14), (2.38) und (2.63) in Kapitel II. Ihre weitere Behandlung erfolgt deshalb analog zu derjenigen dieser Gleichungen. Auch hier in Gl.(3.3) sind  $v_i$  und  $k_{i+1}$  unabhängige Zufallsvariable. Die Wahrscheinlichkeit  $p_{i+1}(x, T)$  für den Zustand  $\{x_{i+1}, T\}$  ist daher die Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten für die unabhängigen Zufallsvariablen  $v_i$  und  $k_{i+1}$ . Die erzeugende Funktion für die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_{i+1}(x, T)$  ist somit nach der Wahrscheinlichkeitstheorie gleich dem Produkt der einzelnen erzeugenden Funktionen der Wahrscheinlichkeiten für  $v_i$  und  $k_{i+1}$ .

Die erzeugenden Funktionen für die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Zufallsvariablen seien bezeichnet mit

$$Gx_i(z, T) = \sum_{x=0}^{\infty} p_i(x, T) z^x = \text{erzeug. Fkt. von } p_i(x, T) \quad (3.4A)$$

$$Gx_{i+1}(z, T) = \sum_{x=0}^{\infty} p_{i+1}(x, T) z^x = \text{erz. Fkt. von } p_{i+1}(x, T) \quad (3.4B)$$

$$Gv_i(z) = \text{erzeugende Fkt. der Wahrscheinlichkeiten für } v_i \quad (3.4C)$$

$$Gk_{i+1}(z) = \sum_{k=0}^m r_{i+1}(k) z^k = \text{erz. Fkt. von } r_{i+1}(k) \quad (3.4D)$$

Zu Gleichung (3.4D) sei noch bemerkt, daß die obere Grenze der Laufvariablen  $k$  nicht  $\infty$  sondern gleich der maximalen Größe  $m$  der ankommenden Gruppe von Anforderungen ist. Die erzeugende Funktion  $Gk_{i+1}(z)$  ist also ein Polynom in  $z$  vom Grade  $m$ . Dies rührt daher, daß die Wahrscheinlichkeiten  $r_{i+1}(k)$  für eine ankommende Gruppe von Anforderungen der Größe  $k > m$  gleich 0 ist, weil nie mehr als  $m$  Anforderungen pro Takt ankommen können. Die erzeugende Funktion  $Gx_{i+1}(z, T)$  der Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_{i+1}(x, T)$  läßt sich mittels Gl.(3.3) und Gl.(3.4A,B,C,D) somit schreiben als

$$Gx_{i+1}(z, T) = Gv_i(z) Gk_{i+1}(z) \quad (3.5)$$

Für die erzeugende Funktion  $Gv_i(z)$  erhält man unter Verwendung von Gl.(3.1B) und Gl.(3.2) den Ausdruck

$$Gv_i(z) = \sum_{x=0}^{c-1} p_i(x, T) + \sum_{x=c}^{\infty} p_i(x, T) z^{x-c}$$

Der Ausdruck unter dem zweiten Summenzeichen in dieser Gleichung wird mit  $z^c$  erweitert und umgeformt

$$Gv_i(z) = \sum_{x=0}^{c-1} p_i(x,T) + \frac{1}{z^c} \sum_{x=c}^{\infty} p_i(x,T) z^x$$

$$Gv_i(z) = \sum_{x=0}^{c-1} p_i(x,T) + \frac{1}{z^c} \left[ \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} p_i(x,T) z^x}_{Gx_i(z,T)} - \sum_{x=0}^{c-1} p_i(x,T) z^x \right]$$

$$Gv_i(z) = \sum_{x=0}^{c-1} p_i(x,T) (1-z^{x-c}) + \frac{1}{z^c} Gx_i(z,T) \quad (3.6)$$

Gl.(3.6) in Gl.(3.5) eingesetzt, führt auf

$$Gx_{i+1}(z,T) = \left[ \sum_{x=0}^{c-1} p_i(x,T) (1-z^{x-c}) + \frac{1}{z^c} Gx_i(z,T) \right] Gk_{i+1}(z) \quad (3.7)$$

Nimmt man an, daß sich das System im statistischen Gleichgewicht befindet, so dürfen sich die Zustandswahrscheinlichkeiten in aufeinanderfolgenden Beobachtungszeitpunkten nicht ändern, d.h. es muß gelten

$$p_{i+1}(x,T) = p_i(x,T) = p(x,T)$$

und damit auch

$$Gx_{i+1}(z,T) = Gx_i(z,T) = Gx(z,T)$$

Das statistische Gleichgewicht ist hier gekennzeichnet durch die Bedingung

$$\frac{1}{c} \sum_{k=0}^m kr(k) < 1$$

Außerdem sind nach Voraussetzung die Wahrscheinlichkeiten für  $k$  ankommende Anforderungen pro Takt unabhängig in aufeinanderfolgenden Taktzeitpunkten.

Deshalb gilt

$$r_{i+1}(k) = r_i(k) = r(k)$$

und damit auch

$$Gk_{i+1}(z) = Gk_i(z) = Gk(z)$$

Unter der Annahme des statistischen Gleichgewichts wird somit aus Gl.(3.7)

$$Gx(z,T) = \left[ \sum_{x=0}^{c-1} p(x,T) (1-z^{x-c}) + \frac{1}{z^c} Gx(z,T) \right] Gk(z)$$

$$Gx(z,T) = \frac{\sum_{x=0}^{c-1} p(x,T) (1-z^{x-c})}{1 - \frac{1}{z^c} Gk(z)} Gk(z)$$

$$Gx(z,T) = \frac{\sum_{x=0}^{c-1} p(x,T) (z^c - z^x)}{z^c - Gk(z)} Gk(z) \quad (3.8)$$

mit  $Gk(z)$  nach Gl.(3.4D)

Entsprechend zu Gl.(2.68) in Kapitel II stehen auch in dieser Gl.(3.8) noch die  $c$  unbekannt Wahrscheinlichkeiten  $p(0,T), p(1,T), \dots, p(c-1,T)$  im Zähler des Ausdrucks auf der rechten Seite. In Anhang 4 wird mit Hilfe des Satzes von Rouché nachgewiesen, daß der Nenner in Gl.(3.8) genau  $c$  Nullstellen innerhalb und auf dem Einheitskreis, d.h. für  $|z| \leq 1$ , besitzt. Deshalb können die unbekannt Zustandswahrscheinlichkeiten im Zähler von Gl.(3.8) auf die gleiche Weise eliminiert werden wie diejenigen in Gl.(2.68) in Kapitel II. Da die erzeugende Funktion  $Gx(z,T)$  innerhalb des Bereichs  $|z| \leq 1$  endlich ist, muß auch der Zähler von Gl.(3.8) innerhalb des Bereichs  $|z| \leq 1$  genau dieselben  $c$  Nullstellen besitzen wie der Nenner von Gl.(3.8). Die  $c$  Nullstellen des Nenners von Gl.(3.8) innerhalb und auf dem Einheitskreis seien mit  $z_0, z_1, \dots, z_{c-1}$  bezeichnet. Da der Zähler von Gl.(3.8) ein Polynom in  $z$  ist, welches genau vom Grad  $c$  ist, kann er in Produktschreibweise angegeben werden als  $K(z-z_0)(z-z_1)\dots(z-z_{c-1})$ , wobei  $K$  eine noch unbekannt Konstante ist. Da  $z_0=1$  immer eine Nullstelle des Nenners von Gl.(3.8) ist, kann Gl.(3.8) umgeschrieben werden in

$$Gx(z,T) = \frac{K(z-1)(z-z_1)\dots(z-z_{c-1})}{z^c - Gk(z)} Gk(z) \quad (3.9)$$

Die Wurzeln  $z_1$  bis  $z_{c-1}$  können durch bekannte numerische Näherungsverfahren beliebig genau bestimmt werden. Die einzige noch unbekannt Größe  $K$  wird wieder mittels der Bedingung  $Gx(1,T)=1$  eliminiert. Nach Einsetzen von  $z=1$  in Gl.(3.9) erhält man den unbestimmten Ausdruck  $0/0$ , dessen Grenzwert nach der Regel von de l'Hospital ermittelt werden kann

$$K \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)(z-z_1) \dots (z-z_{c-1})}{z^c - Gk(z)} = K \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1 \cdot (z-z_1) \dots (z-z_{c-1}) + (z-1) [\dots]}{C z^c - Gk^{(1)}(z)}$$

$$= K \frac{(1-z_1)(1-z_2) \dots (1-z_{c-1})}{C - Gk^{(1)}(1)} = 1$$

Daraus folgt für K

$$K = \frac{C - Gk^{(1)}(1)}{\prod_{\nu=1}^{c-1} (1-z_\nu)}$$

Berücksichtigt man noch, daß die erste Ableitung  $Gk^{(1)}(1)$  der erzeugenden Funktion  $Gk(z)$  an der Stelle  $z=1$  gleich dem Erwartungswert  $E[k]$  der Größe der pro Takt ankommenden Gruppe von Anforderungen ist, so wird daraus

$$K = \frac{C - E[k]}{\prod_{\nu=1}^{c-1} (1-z_\nu)} \quad (3.10)$$

Die erzeugende Funktion  $Gx(z,T)$  ergibt sich dann mit Gl.(3.10) und Gl.(3.9) endgültig zu

$$Gx(z,T) = \frac{C - E[k]}{\prod_{\nu=1}^{c-1} (1-z_\nu)} \cdot \frac{\prod_{\nu=0}^{c-1} (z-z_\nu)}{z^c - Gk(z)} Gk(z) \quad (3.11A)$$

wobei  $Gk(z) = \sum_{k=0}^m r(k) z^k$  (vgl. Gl.(3.4D)) (3.11B)

und  $E[k] = \sum_{k=1}^m kr(k)$  (3.11C)

Gl.(3.11A) ist im Prinzip wie Gl.(2.71) aus Kapitel II aufgebaut, wenn dort  $t_n = T$  gesetzt wird. Das heißt bei dem in Kapitel II behandelten System mit getakteter Abfertigung in Gruppen ergibt sich für die erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten kurz vor dem Takt eine Formel gleichen Typs wie für die erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten kurz nach dem Takt in dem hier behandelten System mit getakteter Ankunft in Gruppen.

Für die erzeugende Funktion  $Gx(z,T)$  kann hier noch eine andere Lösungsmöglichkeit angegeben werden. Diese beruht darauf, daß der Nenner von Gl.(3.8) im Gegensatz zu dem Nenner von Gl.(2.68) endlich viele Nullstellen besitzt. Da die erzeugende Funktion  $Gk(z)$  ein Polynom in  $z$  vom Grade  $m$  ist (wobei hier  $m > c$  betrach-

tet wird), besitzt der Nenner in Gl.(3.8) genau  $m$  Nullstellen. Wie oben schon angegeben, liegen  $c$  dieser Nullstellen innerhalb bzw. auf dem Einheitskreis, nämlich  $z_0, z_1, \dots, z_{c-1}$ . Deshalb verbleiben noch  $m-c$  Nullstellen außerhalb des Einheitskreises. Diese seien mit  $z_c, z_{c+1}, \dots, z_{m-1}$  bezeichnet. Entsprechend zur Produktschreibweise des Zählers in Gl.(3.9) kann nun auch der Nenner von Gl.(3.8) in Produktschreibweise angegeben werden. Man erhält dann entsprechend zu Gl.(3.9)

$$Gx(z,T) = K \frac{(z-z_0)(z-z_1) \dots (z-z_{c-1})}{(z-z_0)(z-z_1) \dots (z-z_{c-1})(z-z_c) \dots (z-z_{m-1})} Gk(z) \quad (3.12)$$

In Gl.(3.12) können nun sämtliche Glieder  $(z-z_\nu)$  mit  $\nu=0, 1, \dots, c-1$  des Bruches gekürzt werden, sodaß ein Ausdruck entsteht, der nur noch die Nullstellen mit  $|z_\nu| > 1$  enthält

$$Gx(z,T) = K \frac{1}{\prod_{\nu=c}^{m-1} (z-z_\nu)} Gk(z) \quad (3.13)$$

Die unbekannte Konstante  $K$  kann auch hier wieder mit der Bedingung  $Gx(1,T)=1$  eliminiert werden. Man erhält mit  $z=1$  aus Gl.(3.13)

$$K \frac{1}{\prod_{\nu=c}^{m-1} (1-z_\nu)} = 1$$

oder

$$K = \prod_{\nu=c}^{m-1} (1-z_\nu)$$

Setzt man diesen Wert für  $K$  in Gl.(3.13) ein, so erhält man schließlich als zweite Form der erzeugenden Funktion

$$Gx(z,T) = \frac{m-1}{\prod_{\nu=c}^{m-1} \frac{1-z_\nu}{z-z_\nu}} Gk(z) \quad (3.14)$$

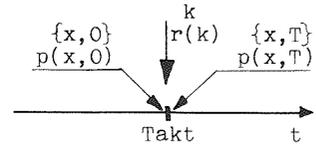
Zur Frage, welche der Formeln (3.11A) bzw. (3.14) bei Anwendung in der Praxis verwendet werden soll, kann der folgende Hinweis gegeben werden:

Prinzipiell ist es ratsam, aus Genauigkeitsgründen diejenige Formel zu verwenden, welche weniger Nullstellen  $z_\nu$  enthält als die andere. Für den Fall  $c < m-c$  wäre dies also die Formel in Gl.(3.11A), für den Fall  $c > m-c$  wäre dies die Formel in Gl.(3.14).

Für den Fall  $c=m-c$  könnte der einfachere Aufbau von Gl.(3.14) für deren Verwendung sprechen.

III.2.1.2 Beobachtungszeitpunkt kurz vor dem Takt

Die Zustände kurz vor dem Takt seien entsprechend der Schreibweise in Kapitel II mit  $\{x,0\}$  bezeichnet mit den zugehörigen Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x,0)$ . Die zeitliche Lage von  $\{x,0\}$  und  $\{x,T\}$  ist noch einmal in Bild 20 verdeutlicht.



Der Zustand kurz nach dem Takt  $\{x,T\}$  entsteht aus dem Zustand kurz vor dem Takt  $\{x,0\}$  und den im Taktzeitpunkt hinzukommenden  $k$  neuen Anforderungen (vgl. Bild 20)

$$\{x,T\} = \{x,0\} + k \quad (3.15)$$

Bild 20: Beobachtungszeitpunkte

Dabei ist vorausgesetzt, daß im Zustand  $\{x,0\}$  diejenige Anforderung, welche evtl. in der vor dem Takt liegenden Bedienungszeit noch bearbeitet wurde, nicht mehr enthalten ist und das System schon verlassen hat. Somit wird durch  $\{x,0\}$  derjenige Zustand dargestellt, den die im Taktzeitpunkt ankommende Gruppe von Anforderungen antrifft.

Da die Größe  $k$  der ankommenden Gruppe von Anforderungen und der Zustand  $\{x,0\}$  direkt vor dem Takt unabhängige Zufallsvariable sind, folgt für die erzeugenden Funktionen der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus Gl.(3.15)

$$Gx(z,T) = Gx(z,0) Gk(z) \quad (3.16)$$

wobei  $Gx(z,0)$  = erzeugende Funktion von  $p(x,0)$

Aus Gl.(3.16) folgt für die erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x,0)$  direkt vor dem Takt

$$Gx(z,0) = \frac{Gx(z,T)}{Gk(z)} \quad (3.17)$$

Setzt man Gl.(3.11A) in Gl.(3.17) ein, so ergibt sich

$$Gx(z,0) = \frac{c-E[k]}{z-1} \cdot \frac{\prod_{v=0}^{c-1} (z-z_v)}{z^c - Gk(z)} \quad (3.18A)$$

Die andere Möglichkeit ist, Gl.(3,14) in Gl.(3.17) einzusetzen

$$Gx(z,0) = \prod_{v=c}^{m-1} \frac{1-z_v}{z-z_v} \quad (3.18B)$$

Gl.(3.18A) enthält die Nullstellen  $z_v$  mit  $|z_v| \leq 1$ , Gl.(3.18B) diejenigen mit  $|z_v| > 1$ .

III.2.2 Mittlere Schlangenlänge

III.2.2.1 Direkt vor dem Takt

Die mittlere Schlangenlänge direkt vor dem Takt  $E[x,0]$  ist genau diejenige Anzahl von Anforderungen, welche durch die im Taktzeitpunkt ankommenden Anforderungen im System angetroffen wird. Sie ist deshalb direkt für die Wartezeit der ankommenden Anforderungen von Bedeutung.

Wie schon in Kapitel II gezeigt, ist die mittlere Schlangenlänge gleich der ersten Ableitung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten an der Stelle  $z=1$

$$E[x,0] = \left. \frac{dGx(z,0)}{dz} \right|_{z=1}$$

Berücksichtigt man Gl.(2.72) für die Ableitung des Produkts im Zähler von Gl.(3.18A), so kann die erste Ableitung von  $Gx(z,0)$  in der Darstellung nach Gl.(3.18A) angegeben werden als

$$\frac{dGx(z,0)}{dz} = \frac{c-E[k]}{\prod_{v=1}^{c-1} (1-z_v)} \left[ \frac{\prod_{v=0}^{c-1} (z-z_v)}{z^c - Gk(z)} \sum_{\mu=0}^{c-1} \frac{1}{z-z_\mu} - \frac{\prod_{v=0}^{c-1} (z-z_v)}{(z^c - Gk(z))^2} (c z^{c-1} - Gk^{(1)}(z)) \right]$$

Unter Verwendung von Gl.(3.18A) und  $z_0=1$  wird daraus

$$\frac{dGx(z,0)}{dz} = Gx^{(1)}(z,0) = Gx(z,0) \left[ \frac{1}{z-1} + \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{z-z_\mu} - \frac{c z^{c-1} - Gk^{(1)}(z)}{z^c - Gk(z)} \right] \quad (3.19)$$

Setzt man in Gl.(3.19)  $z=1$  ein, so führt der erste und der dritte Term auf den unbestimmten Ausdruck  $\infty-\infty$ . Zur Grenzwertbildung werden deshalb diese beiden Terme auf einen Bruchstrich geschrieben und anschließend die Regel von de l'Hospital angewendet

$$\begin{aligned} \left. \frac{dG(x,z,0)}{dz} \right|_{z=1} &= \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^c - Gk(z) - (z-1)(cz^{c-1} - Gk^{(1)}(z))}{(z-1)[z^c - Gk(z)]} \\ &= \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{cz^c - Gk^{(1)}(z) - (cz^{c-1} - Gk^{(1)}(z)) - (z-1)[c(c-1)z^{c-2} - Gk^{(2)}(z)]}{z^c - Gk(z) + (z-1)[cz^{c-1} - Gk^{(1)}(z)]} \\ &= \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-[c(c-1)z^{c-2} - Gk^{(2)}(z)] - (z-1)[\dots]}{cz^{c-1} - Gk^{(1)}(z) + (z-1)[\dots]} \\ &= \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} - \frac{c(c-1) - Gk^{(2)}(1)}{2(c - Gk^{(1)}(1))} \end{aligned}$$

Es gilt außerdem allgemein

$$Gk^{(1)}(1) = \left. \frac{dGk(z)}{dz} \right|_{z=1} = E[k]$$

und

$$Gk^{(2)}(1) = \left. \frac{d^2 Gk(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = E[k^2] - E[k]^2$$

wobei

$$E[k^2] = \sum_{k=0}^m k^2 r(k)$$

Damit erhält man schließlich für die mittlere Schlangenlänge  $E[x,0]$  direkt vor dem Takt

$$\begin{aligned} E[x,0] &= \left. \frac{dG(x,z,0)}{dz} \right|_{z=1} = \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} - \frac{c^2 - c - E[k^2] - E[k]}{2(c - E[k])} \\ E[x,0] &= \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E[k^2] - c}{E[k] - c} \right) \end{aligned} \quad (3.20A)$$

Eine weitere Umformung ist möglich, wenn man die folgende allgemein gültige Beziehung berücksichtigt

$$E[k^2] = \text{Var}[k] + E[k]^2$$

wobei  $\text{Var}[k] = \sum_{k=0}^m (k - E[k])^2 r(k) = \text{Varianz von } k$

Setzt man diese Beziehung in Gl.(3.20A) ein, so wird daraus

$$E[x,0] = \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\text{Var}[k] + E[k]^2 - c^2}{E[k] - c} \right) = \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\text{Var}[k] + (E[k] + c)(E[k] - c)}{E[k] - c} \right)$$

$$E[x,0] = \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} + \frac{1}{2} \left( 1 - E[k] - c - \frac{\text{Var}[k]}{E[k] - c} \right) \quad (3.20B)$$

Die andere Möglichkeit zur Bestimmung von  $E[x,0]$  ist durch die erste Ableitung von  $G(x,0)$  in der Darstellung nach Gl.(3.18B) gegeben. Berücksichtigt man auch hier für die Ableitung des Produkts im Nenner von Gl.(3.18B) die Gl.(2.72), so kann die erste Ableitung von  $G(x,0)$  in der Darstellung nach Gl.(3.18B) angegeben werden als

$$\begin{aligned} \frac{dG(x,z,0)}{dz} &= Gx^{(1)}(z) = \left[ \prod_{\nu=c}^{m-1} (1-z^\nu) \right]^{-1} \left( -1 \right) \frac{1}{\left( \prod_{\nu=c}^{m-1} (z-z^\nu) \right)^2} \cdot \prod_{\nu=c}^{m-1} (z-z^\nu) \sum_{\mu=c}^{m-1} \frac{1}{z-z^\mu} \\ Gx^{(1)}(z) &= - \frac{1}{\prod_{\nu=c}^{m-1} (z-z^\nu)} \sum_{\mu=c}^{m-1} \frac{1}{1-z^\mu} \end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung  $z=1$ , so wird der Bruch hinter dem Produktzeichen gleich 1 und es verbleibt noch

$$E[x,0] = Gx^{(1)}(1,0) = - \sum_{\mu=c}^{m-1} \frac{1}{1-z^\mu}$$

oder

$$E[x,0] = \sum_{\mu=c}^{m-1} \frac{1}{z^\mu - 1} \quad (3.20C)$$

Auch hier ist es ratsam, für Anwendungen in der Praxis im Falle  $c \ll m-c$  die Gleichung (3.20A) bzw. (3.20B) zu verwenden, im Falle  $c \gg m-c$  dagegen die Gleichung (3.20C). Für Fälle  $c \approx m-c$  wird es sinnvoll sein, der einfacheren Form wegen die Gleichung (3.20C) zu verwenden. Selbstverständlich sind für die Theorie die Formeln (3.20A) bzw. (3.20B) und (3.20C) gleichwertig!

### III.2.2.2 Direkt nach dem Takt

Im Mittel kommen pro Takt  $E[k]$  neue Anforderungen in das System. Deshalb ist die mittlere Schlangenlänge  $E[x,T]$  kurz nach dem Takt entsprechend zu Gl.(3.15)

$$E[x,T] = E[x,0] + E[k] \quad (3.21)$$

Setzt man Gl.(3.20A) bzw. (3.20B) bzw. (3.20C) in Gl.(3.21) ein, so erhält man

$$E[x_i, T] = \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E[k^2] - c^2}{E[k] - c} \right) + E[k] \quad (3.22A)$$

$$E[x_i, T] = \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z^\mu} + \frac{1}{2} \left( 1 - E[k] - c - \frac{\text{Var}[k]}{E[k] - c} \right) + E[k] \quad (3.22B)$$

$$E[x_i, T] = \sum_{\mu=c}^{m-1} \frac{1}{z^{\mu-1}} + E[k] \quad (3.22C)$$

III.2.3 Mittlere Wartezeit

Eine im Taktzeitpunkt ankommende Gruppe von Anforderungen trifft im Mittel  $E[x, 0]$  Anforderungen im System an (Speicher + Bedienungseinheit). Befindet sich zu diesem Zeitpunkt eine Anforderung in der Bedienungseinheit, so beginnt sie gerade ihre Bedienstzeit. Dies folgt aus der Voraussetzung, daß die Taktzeit ein ganzzahliges Vielfaches der Bedienungsdauer  $h$  ist. Die erste Anforderung der ankommenden Gruppe muß deshalb im Mittel volle  $E[x, 0]$  Bedienstzeiten bis zum Beginn ihrer Verarbeitung warten, die zweite Anforderung muß  $(E[x, 0] + 1)$  Bedienstzeiten warten usw. Die mittlere Wartezeit  $t_w^*(k)$  aller Anforderungen einer ankommenden Gruppe der Größe  $k$  ist nach dieser Überlegung für die möglichen Gruppengrößen in der folgenden Tabelle dargestellt.

Größe der ankommenden Gruppe	Mittlere Wartezeit $t_w^*(k)$ aller Anforderungen dieser Gruppe
1 Anforderung	$E[x, 0] h$
2 Anforderungen	$\frac{1}{2} [E[x, 0] h + (E[x, 0] + 1) h]$ 1.Anford. 2.Anford.
3 Anforderungen	$\frac{1}{3} [E[x, 0] h + (E[x, 0] + 1) h + (E[x, 0] + 2) h]$ 1.Anford. 2.Anford. 3.Anford.
...	.....
k Anforderungen $k \leq m$	$\frac{1}{k} [E[x, 0] h + (E[x, 0] + 1) h + \dots + (E[x, 0] + k - 1) h]$ 1.Anford. 2.Anford. k.Anford.

Die mittlere Wartezeit  $t_w^*(k)$  der Anforderungen einer Gruppe der Größe  $k$  läßt sich mit Hilfe der Tabelle allgemein angeben als

$$t_w^*(k) = \frac{h}{k} [kE[x, 0] + 1 + 2 + \dots + (k-1)]$$

oder  $t_w^*(k) = hE[x, 0] + \frac{h}{k} [1 + 2 + \dots + (k-1)]$

In der eckigen Klammer des obigen Ausdrucks steht eine endliche arithmetische Reihe, deren Summe geschlossen angegeben werden kann

$$t_w^*(k) = hE[x, 0] + \frac{h}{k} \frac{[1+(k-1)](k-1)}{2}$$

$$t_w^*(k) = h(E[x, 0] + \frac{k-1}{2}) \quad (3.23)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß im Taktzeitpunkt eine Gruppe von  $k$  Anforderungen ankommt, ist nach Voraussetzung  $r(k)$ . Deshalb kommen im Mittel pro Takt  $kr(k)$  Anforderungen an, welche die mittlere Wartezeit  $t_w^*(k)$  haben werden. Insgesamt kommen im Mittel  $E[k]$  Anforderungen pro Takt an. Für die mittlere Wartezeit  $t_w^*$  aller an das System angebotenen Anforderungen folgt deshalb durch gewichtete Summenbildung

$$t_w^* = \sum_{k=1}^m \frac{kr(k)}{E[k]} t_w^*(k) \quad (3.24)$$

Gl.(3.23) in Gl.(3.24) eingesetzt ergibt

$$t_w^* = \frac{h}{E[k]} \sum_{k=1}^m kr(k) \cdot (E[x, 0] + \frac{k-1}{2})$$

Da  $E[x, 0]$  unabhängig von der Laufvariablen  $k$  ist, kann es vor das Summenzeichen gezogen werden. Berücksichtigt man außerdem noch die Beziehung Gl.(3.11C), so ergibt sich für die mittlere Wartezeit der Ausdruck

$$t_w^* = h \left[ E[x, 0] + \frac{\sum_{k=1}^m k(k-1)r(k)}{2E[k]} \right] \quad (3.25A)$$

Eine weitere Umformung ist noch möglich, wenn man die allgemein gültige Beziehung

$$\sum_{k=1}^m k(k-1)r(k) = \text{Var}[k] + E[k]^2 - E[k]$$

verwendet. Damit wird aus Gl.(3.25A)

$$t_w^* = h \left[ E[x,0] + \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Var}[k]}{E[k]} + E[k] - 1 \right) \right] \quad (3.25B)$$

Der Wert für  $E[x,0]$  kann aus Gl.(3.20A) bzw. (3.20B) oder aus Gl.(3.20C) entnommen werden. Die auf die Bedienungsdauer  $h$  normierte mittlere Wartezeit  $\tau_w^*$  ist entsprechend zu Gl.(3.25A) bzw. Gl.(3.25B)

$$\tau_w^* = \frac{t_w^*}{h} = E[x,0] + \frac{\sum_{k=1}^m k(k-1)r(k)}{2 E[k]} \quad (3.26A)$$

oder 
$$\tau_w^* = E[x,0] + \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Var}[k]}{E[k]} + E[k] - 1 \right) \quad (3.26B)$$

Für den Spezialfall  $c=1$ , d.h. Taktdauer und Bedienungsdauer sind gleich groß, reduziert sich Gl.(3.26B) nach Einsetzen von Gl.(3.20B) auf

$$\tau_w^* = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Var}[k]}{E[k]} \cdot \frac{1}{1 - E[k]} - 1 \right) \quad \text{bei } c=1 \quad (3.27)$$

Es ist bemerkenswert, daß für den Spezialfall  $c=1$  die mittlere Wartezeit  $\tau_w^*$  nach Gl.(3.27) nur noch von dem Mittelwert  $E[k]$  und der Varianz  $\text{Var}[k]$  der Größe der ankommenden Gruppe abhängt, nicht dagegen von der maximalen Gruppengröße  $m$  und den individuellen Wahrscheinlichkeiten  $r(k)$ .

### III.2.4 Wartewahrscheinlichkeit

Um die Wartewahrscheinlichkeit  $P(>0)$  zu bestimmen, ist es sinnvoll, zunächst die Wahrscheinlichkeit  $P(=0)$  zu berechnen, daß eine ankommende Anforderung nicht warten muß. Die Möglichkeit, nach der Ankunft sofort bedient zu werden und nicht zu warten, besteht für die erste Anforderung der ankommenden Gruppe, wenn diese das System leer vorfindet. Die Wahrscheinlichkeit  $p(0,0)$ , daß kurz vor dem Takt keine Anforderung mehr im System vorhanden ist, läßt sich aus der erzeugenden Funktion  $Gx(z,0)$  für  $z=0$  entnehmen

$$p(0,0) = Gx(0,0) \quad (3.28)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß im Taktzeitpunkt überhaupt eine Anforderung ankommt, ist

$$1 - r(0)$$

Da diese Wahrscheinlichkeit unabhängig von  $p(0,0)$  ist, ist die Wahrscheinlichkeit, daß mit dem Takt eine Gruppe von Anforderungen eintrifft und ein leeres System vorfindet, gleich dem Produkt

$$p(0,0) \cdot (1 - r(0))$$

Da in diesem Fall nur die erste Anforderung der Gruppe nicht warten muß, kommen also im Mittel  $p(0,0) \cdot (1 - r(0)) \cdot 1$  Anforderungen pro Takt an, die nicht warten müssen. Insgesamt kommen im Mittel aber  $E[k]$  Anforderungen pro Takt an. Somit ist die Wahrscheinlichkeit  $P(=0)$ , daß eine Anforderung nicht warten muß, gleich dem Quotienten aus diesen beiden Mittelwerten

$$P(=0) = \frac{p(0,0) \cdot (1 - r(0)) \cdot 1}{E[k]} \quad (3.29)$$

Mit Gl.(3.28) folgt aus Gl.(3.29)

$$P(=0) = \frac{Gx(0,0) \cdot (1 - r(0)) \cdot 1}{E[k]} \quad (3.30)$$

Entnimmt man den Wert für  $Gx(0,0)$  aus Gl.(3.18A), so folgt aus Gl.(3.30)

$$P(=0) = \frac{c - E[k]}{\prod_{v=1}^{c-1} (1 - z_v)} \cdot \prod_{v=0}^{c-1} (-z_v) \cdot \frac{1 - r(0)}{E[k]}$$

Da nun noch  $Gk(0)=r(0)$  gilt (vgl. Gl.(3.4D)) und außerdem immer  $z_0=1$  ist, wird daraus

$$P(=0) = \frac{c-1}{\prod_{v=1}^{c-1} z_v^{-1}} \cdot \frac{(c-E[k])(1-r(0))}{E[k] r(0)} \quad (3.31A)$$

Entnimmt man den Wert für  $Gx(0,0)$  dagegen aus Gl.(3.18B), so folgt aus Gl.(3.30)

$$P(=0) = \frac{1-r(0)}{E[k]} \cdot \prod_{v=c}^{m-1} \frac{z_v^{-1}}{z_v} \quad (3.31B)$$

Die Wartewahrscheinlichkeit  $P(>0)$  ist nun einfach

$$P(>0) = 1 - P(=0) \quad (3.32)$$

In Gl.(3.32) kann für  $P(=0)$  entweder Gl.(3.31A) oder Gl.(3.31B) eingesetzt werden.

Nachdem die Wartewahrscheinlichkeit bekannt ist, sei noch bemerkt, daß für die mittlere Wartezeit  $t_w$  bezogen auf die war-

tenden Anforderungen allgemein gilt

$$t_w = \frac{t_w^*}{P(>0)} \quad (3.33)$$

Für diese Gleichung kann  $t_w^*$  aus Gl.(3.25A) bzw. (3.25B) entnommen werden und  $P(>0)$  aus Gl.(3.32) unter Verwendung von Gl.(3.31A) bzw. (3.31B).

### III.2.5 Zustandswahrscheinlichkeiten

#### III.2.5.1 Kurz vor dem Takt

Wie auch schon in Kapitel II wird zur Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeiten die erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten schrittweise in eine Potenzreihe von  $z$  entwickelt. Hierzu ist es günstig, von der erzeugenden Funktion  $G_x(z,0)$  in der Darstellung nach Gl.(3.18B) auszugehen. Etwas umgeschrieben lautet  $G_x(z,0)$  nach Gl.(3.18B)

$$G_x(z,0) = \left[ \prod_{\nu=c}^{m-1} (1-z_\nu) \right] \frac{1}{\prod_{\nu=c}^{m-1} (z-z_\nu)} \quad (3.34)$$

Der Bruch in Gl.(3.34) kann nun in Partialbrüche zerlegt werden. Für den Fall, daß alle Nullstellen  $z_c, z_{c+1}, \dots, z_{m-1}$  verschieden voneinander sind, führt die Partialbruchzerlegung auf

$$G_x(z,0) = \left[ \prod_{\nu=c}^{m-1} (1-z_\nu) \right] \sum_{i=c}^{m-1} \frac{K_i}{(z-z_i)} \quad (3.35)$$

Die Konstanten  $K_i$  ergeben sich nach bekannten Verfahren der Partialbruchzerlegung als Quotient von Zähler des zu zerlegenden Bruches an der Stelle  $z=z_i$  und erster Ableitung des Nenners des zu zerlegenden Bruches an der Stelle  $z=z_i$ . Auf den Bruch in Gl.(3.34) angewendet, führt dies zu

$$K_i = \frac{1}{\prod_{\substack{\nu=c \\ \nu \neq i}}^{m-1} (z_i - z_\nu)} \quad (3.36)$$

Gl.(3.36) in Gl.(3.35) eingesetzt und das Glied mit  $\nu=i$  aus dem Produkt in Gl.(3.35) herausgenommen, ergibt

$$G_x(z,0) = \sum_{i=c}^{m-1} \left[ \prod_{\substack{\nu=c \\ \nu \neq i}}^{m-1} \left( \frac{1-z_\nu}{z_i - z_\nu} \right) \cdot \frac{1-z_i}{z-z_i} \right]$$

$$G_x(z,0) = - \sum_{i=c}^{m-1} \left[ \prod_{\substack{\nu=c \\ \nu \neq i}}^{m-1} \left( \frac{1-z_\nu}{z_i - z_\nu} \right) \cdot \frac{1-z_i}{z_i} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{z_i}} \right]$$

Der letzte Bruch in der eckigen Klammer des obigen Ausdrucks wird mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{x=0}^{\infty} a^x \quad \text{in eine Reihe entwickelt.}$$

$$G_x(z,0) = - \sum_{i=c}^{m-1} \left[ \prod_{\substack{\nu=c \\ \nu \neq i}}^{m-1} \left( \frac{1-z_\nu}{z_i - z_\nu} \right) \cdot \frac{1-z_i}{z_i} \sum_{x=0}^{\infty} \left( \frac{z}{z_i} \right)^x \right] \quad (3.37)$$

Gl.(3.37) stellt die Potenzreihenentwicklung nach  $z$  von  $G_x(z,0)$  dar. Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x,0)$  sind nun laut Definition der erzeugenden Funktion jeweils die Koeffizienten von  $z^x$  in dieser Reihenentwicklung. Aus Gl.(3.37) folgt somit

$$p(x,0) = - \sum_{i=c}^{m-1} \left[ \prod_{\substack{\nu=c \\ \nu \neq i}}^{m-1} \left( \frac{1-z_\nu}{z_i - z_\nu} \right) \cdot \frac{1-z_i}{z_i^{x+1}} \right] \quad (3.38)$$

#### III.2.5.2 Kurz nach dem Takt

Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x,T)$  kurz nach dem Takt hängen ab von den Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x,0)$  kurz vor dem Takt und von den Wahrscheinlichkeiten  $r(k)$  für die Größe der im Taktzeitpunkt ankommenden Gruppe von Anforderungen (vgl. Bild 20 und Gl.(3.15)). Da die Wahrscheinlichkeiten  $p(x,0)$  und  $r(k)$  unabhängig voneinander sind, ergibt die Faltung dieser beiden Wahrscheinlichkeiten die gesuchten Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x,T)$ . Ausführlich geschrieben lautet

$$p(0,T) = p(0,0)r(0)$$

$$p(1,T) = p(0,0)r(1)+p(1,0)r(0)$$

⋮

$$p(m,T) = p(0,0)r(m)+p(1,0)r(m-1)+\dots+p(m-1,0)r(1)+p(m,0)r(0)$$

$$p(m+1,T) = p(1,0)r(m)+p(2,0)r(m-1)+\dots+p(m,0)r(1)+p(m+1,0)r(0)$$

⋮

Zusammengefaßt läßt sich das obige Gleichungssystem schreiben als

$$\left. \begin{aligned} p(x,T) &= \sum_{j=0}^x p(j,0) r(x-j) && \text{für } x \leq m \\ p(x,T) &= \sum_{j=x-m}^x p(j,0) r(x-j) && \text{für } x > m \end{aligned} \right\} (3.39)$$

Die in Gl.(3.39) verwendeten Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(j,0)$  sind aus Gl.(3.38) bekannt.

### III.2.5.3 Zu beliebigem Zeitpunkt

Der Zustand des Systems kann sich zwischen zwei Taktzeitpunkten nur in Zeitpunkten ändern, welche ganzzahlige Vielfache der Bedienungsdauer  $h$  vom letzten Takt bzw. vom nächsten Takt entfernt sind. Nur zu solchen Zeitpunkten können nämlich die Bedienungsdauern der Anforderungen beendet werden (vgl. "Belegungsgebirge" in Bild 21).

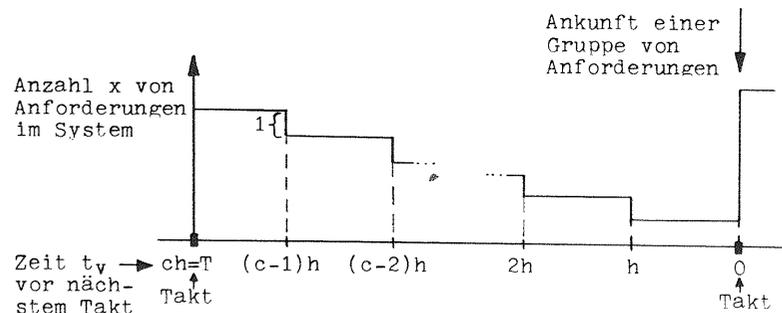


Bild 21: Belegungsgebirge des Systems (Beispiel)

Die Zustandswahrscheinlichkeiten sind deshalb zwischen den Zeitpunkten, die ein ganzzahliges Vielfaches der Bedienungsdauer vor dem nächsten Takt liegen, immer konstant. Sie werden deshalb nur jeweils für den Beginn eines solchen Zeitintervalls angegeben. So sind z.B. alle Wahrscheinlichkeiten  $p(x, t_v)$  für  $(c-1)h < t_v \leq ch$  gleich der Wahrscheinlichkeit  $p(x, ch) = p(x, T)$ .

Die Zustandswahrscheinlichkeiten zu einem beliebigen Zeitpunkt können durch die folgende Überlegung aus den Zustandswahrscheinlichkeiten

$p(x, T)$  direkt nach dem Takt gewonnen werden: Das System werde zu dem Zeitpunkt  $t_v = jh$  (mit  $j=0, 1, \dots, c$ ) vor dem Takt betrachtet. In dem Zeitintervall zwischen dem letzten Takt und dem betrachteten Zeitpunkt können dann maximal  $c-j$  Anforderungen abgearbeitet worden sein (wenn überhaupt so viele Anforderungen nach dem letzten Takt vorhanden waren). Befinden sich in dem System zu dem Beobachtungszeitpunkt 0 Anforderungen, so kann deshalb dieser Zustand daraus entstanden sein, daß sich kurz nach dem Takt  $0, 1, 2, \dots$  oder  $c-j$  Anforderungen im System befanden. Sind in dem System zu dem Beobachtungszeitpunkt  $x > 0$  Anforderungen enthalten, so müssen sich kurz nach dem Takt genau  $x + (c-j)$  Anforderungen in dem System befinden haben. Folglich gilt für die Zustandswahrscheinlichkeiten zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_v = jh$  vor dem nächsten Takt

$$\left. \begin{aligned} p(0, jh) &= \sum_{x=0}^{c-j} p(x, T) \\ p(x, jh) &= p(x+c-j, T) && \text{für } x > 0 \end{aligned} \right\} (3.40)$$

jeweils mit  $j = 0, 1, 2, \dots, c$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite von Gl.(3.40) sind aus Gl.(3.39) bekannt.

### III.2.6 Mittlere Speicherbelastung

Die mittlere Speicherbelastung  $\Omega$  kann aus den Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x, jh)$  in Gl.(3.40) gewonnen werden. Die momentane Speicherbelastung bleibt genau wie die Zustandswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Taktzeitpunkten immer abschnittsweise in Intervallen der Länge  $h$  konstant (vgl. Belegungsgebirge in Bild 21).

Befinden sich in dem Speicher des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt  $x > 0$  Anforderungen, so ist die Bedienungseinheit sicher belegt. Im System befinden sich somit insgesamt  $x+1$  Anforderungen. Für die mittlere Speicherbelastung  $\Omega(jh)$  innerhalb des Zeitintervalls  $(j-1)h < t_v \leq jh$  vor dem nächsten Takt gilt deshalb

$$\Omega(jh) = \sum_{x=1}^{\infty} xp(x+1, jh) \quad (3.41)$$

Um die gesamte mittlere Speicherbelastung  $\Omega$  zu bekommen, müssen nun die mittleren Speicherbelastungen  $\Omega(jh)$  über die  $c$  Teilintervalle  $j=1,2,\dots,c$  zwischen zwei Taktzeitpunkten gemittelt werden

$$\Omega = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \Omega(jh) \quad (3.42)$$

Setzt man Gl.(3.41) in Gl.(3.42) ein, so erhält man

$$\Omega = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(x+1, jh) \quad (3.43)$$

In Gl.(3.43) können die darin enthaltenen Zustandswahrscheinlichkeiten noch durch Gl.(3.40) ersetzt werden. Der dann entstehende Ausdruck hängt nur noch von den Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x, T)$  kurz nach dem Takt ab

$$\Omega = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(x+1+c-j, T)$$

Der Ausdruck wird zur weiteren Verarbeitung etwas erweitert

$$\Omega = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \sum_{x=1}^{\infty} [x+(1+c-j) - (1+c-j)] \cdot p(x+1+c-j, T)$$

$$\Omega = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ \sum_{x=1}^{\infty} (x+1+c-j) p(x+1+c-j, T) - (1+c-j) \sum_{x=1}^{\infty} p(x+1+c-j, T) \right]$$

Durch Substitution der Summationsgrenzen beider Summenausdrücke innerhalb der eckigen Klammer bekommt man

$$\Omega = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ \sum_{x=2+c-j}^{\infty} x p(x, T) - (1+c-j) \sum_{x=2+c-j}^{\infty} p(x, T) \right]$$

Bei der ersten Summe innerhalb der eckigen Klammer werden die fehlenden Glieder  $x=0,1,\dots,1+c-j$  ergänzt und sofort wieder abgezogen

$$\Omega = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} x p(x, T)}_{E[x, T]} - \sum_{x=0}^{1+c-j} x p(x, T) - (1+c-j) \sum_{x=2+c-j}^{\infty} p(x, T) \right]$$

Die erste Summe innerhalb der eckigen Klammer stellt die mittlere Schlangenlänge  $E[x, T]$  kurz nach dem Takt dar. Weiterhin kann aus der zweiten Summe innerhalb der eckigen Klammer das Glied an der oberen Summationsgrenze in die dritte Summe übernommen werden

$$\Omega = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ E[x, T] - \sum_{x=0}^{c-j} x p(x, T) - (1+c-j) \sum_{x=1+c-j}^{\infty} p(x, T) \right]$$

Nun kann die letzte Summe in der eckigen Klammer noch um die fehlenden Glieder  $x=0,1,\dots,c-j$  ergänzt werden, welche aber sofort wieder subtrahiert werden müssen

$$\Omega = E[x, T] - \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ \sum_{x=0}^{c-j} x p(x, T) + (1+c-j) \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} p(x, T)}_{=1} - (1+c-j) \sum_{x=0}^{c-j} p(x, T) \right]$$

$$\Omega = E[x, T] - \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ (1+c-j) + \sum_{x=0}^{c-j} (x-1+c+j) p(x, T) \right]$$

Schreibt man die Summe mit der Laufvariablen  $j$  aus und summiert die einzelnen Glieder in umgekehrter Reihenfolge wieder auf, so läßt sich die obige Gleichung einfacher schreiben als

$$\Omega = E[x, T] - \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ j - \sum_{x=0}^{j-1} (j-x) p(x, T) \right] \quad (3.44)$$

Die mittlere Schlangenlänge  $E[x, T]$  direkt nach dem Takt ist aus Gl.(3.22A) bzw. (3.22B) bzw. (3.22C) bekannt, die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x, T)$  direkt nach dem Takt aus Gl.(3.39).

### III.2.7 Wartezeitverteilung

Finden die im Taktzeitpunkt ankommenden Anforderungen die Bedienungseinheit belegt vor, so hat die Anforderung, welche die Bedienungseinheit belegt, gerade ihre Bedienungszeit begonnen (vgl. auch Abschnitt III.2.3). Deshalb sind die Wartezeiten der Anforderungen immer ganzzahlige Vielfache der Bedienungsdauer  $h$ . Die Wartezeitverteilungsfunktion ist aus diesem Grunde eine Treppenfunktion. Sie wird hier als  $P(\leq dh)$  bezeichnet, wobei  $d$  eine ganze Zahl  $\geq 0$  ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Anforderung genau die Zeit  $dh$  warten muß, sei mit  $P(dh)$  bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeiten  $P(dh)$  können analog zum Rechnungs-

gang für die Bestimmung der Wartewahrscheinlichkeit in Abschnitt III.2.4 ermittelt werden. Die Herleitung dieser Wahrscheinlichkeiten  $P(dh)$  soll hier am Beispiel von  $P(1h)$  ausführlich erläutert werden.

Eine eintreffende Anforderung muß eine Bedienungsdauer lang warten, wenn sie

- a) entweder die erste Anforderung in der ankommenden Gruppe ist und die ankommende Gruppe schon eine Anforderung im System antrifft
- b) oder die zweite Anforderung in der ankommenden Gruppe ist und die ankommende Gruppe keine Anforderung im System antrifft.

Die Fälle a) und b) schließen sich gegenseitig aus.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die ankommende Gruppe 0 bzw. 1 Anforderung im System vorfindet, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß kurz vor dem Takt 0 bzw. 1 Anforderung im System enthalten ist, d.h.  $p(0,0)$  bzw.  $p(1,0)$ . Die Wahrscheinlichkeit, daß eine ankommende Gruppe überhaupt mindestens eine bzw. zwei Anforderungen enthält, ist  $1-r(0)$  bzw.  $1-r(0)-r(1)$ . Die Zustandswahrscheinlichkeiten und die Ankunftswahrscheinlichkeiten für die Gruppe sind unabhängig voneinander. Deshalb kommen im Mittel pro Takt

$$\underbrace{p(0,0) [1-r(0)-r(1)] \cdot 1}_{\text{von Fall b)}} + \underbrace{p(1,0) [1-r(0)] \cdot 1}_{\text{von Fall a)}}$$

Anforderungen an, welche genau eine Bedienungsdauer lang warten werden müssen. Insgesamt kommen im Mittel aber  $E[k]$  Anforderungen je Takt an. Somit ist die Wahrscheinlichkeit  $P(1h)$ , daß eine eintreffende Anforderung genau eine Bedienungsdauer lang warten muß, gleich dem Quotienten aus diesen beiden Mittelwerten

$$P(1h) = \frac{1}{E[k]} [p(0,0)(1-r(0)-r(1)) + p(1,0)(1-r(0))]$$

Analog zur Herleitung von  $P(1h)$  können die restlichen Wahrscheinlichkeiten  $P(dh)$  für  $d > 1$  ermittelt werden. Diese sind in ausführlicher Schreibweise

$$P(2h) = \frac{1}{E[k]} [p(0,0)(1-r(0)-r(1)-r(2)) + p(1,0)(1-r(0)-r(1)) + p(2,0)(1-r(0))]$$

$$\vdots$$

$$P(m-1h) = \frac{1}{E[k]} [p(0,0) \underbrace{(1-r(0)-r(1)-\dots-r(m-1))}_{r(m)} + p(1,0)(1-r(0)-r(1)-\dots-r(m-2))+\dots+p(m-1,0)(1-r(0))]$$


---


$$P(mh) = \frac{1}{E[k]} [p(1,0)(1-r(0)-\dots-r(m-1)) + p(2,0)(1-r(0)-\dots-r(m-2))+\dots+p(m,0)(1-r(0))]$$

$$P(m+1h) = \frac{1}{E[k]} [p(2,0)(1-r(0)-\dots-r(m-1)) + p(3,0)(1-r(0)-\dots-r(m-2))+\dots+p(m+1,0)(1-r(0))]$$

$$\vdots$$

Die allgemeinen Ausdrücke für  $P(dh)$  sind damit

$$P(dh) = \frac{1}{E[k]} \sum_{x=0}^d p(x,0) \left[ 1 - \sum_{k=0}^{d-x} r(k) \right] \quad \text{für } d < m$$

$$P(dh) = \frac{1}{E[k]} \sum_{x=d-m+1}^d p(x,0) \left[ 1 - \sum_{k=0}^{d-x} r(k) \right] \quad \text{für } d \geq m \quad (3.45)$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x,0)$  können aus Gl.(3.38) entnommen werden. Die Wartezeitverteilungsfunktion  $P(\leq dh)$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß eine Anforderung weniger als die Zeit  $dh$  oder gleich die Zeit  $dh$  warten muß, erhält man nun durch Aufsummation der Wahrscheinlichkeiten  $P(dh)$

$$P(\leq dh) = \sum_{j=0}^d P(jh) \quad (3.46)$$

Setzt man Gl.(3.45) in Gl.(3.46) ein, so ergibt sich

$$P(\leq dh) = \frac{1}{E[k]} \sum_{j=0}^d \sum_{x=0}^j p(x,0) \left[ 1 - \sum_{k=0}^{j-x} r(k) \right] \quad \text{für } d < m \quad (3.47)$$

$$P(\leq dh) = P(\leq (m-1)h) + \frac{1}{E[k]} \sum_{j=m}^d \sum_{x=j-m+1}^j p(x,0) \left[ 1 - \sum_{k=0}^{j-x} r(k) \right] \quad \text{für } d \geq m$$

Die komplementäre Wartezeitverteilungsfunktion  $P(>dh)$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß eine Anforderung länger als die Zeit  $dh$  warten muß, ist

$$P(>dh) = 1 - P(\leq dh) \quad (3.48)$$

Die komplementäre Wartezeitverteilungsfunktion  $W(>dh)$  bezogen auf die wartenden Anforderungen ist

$$w(>dh) = \frac{P(>dh)}{P(>0)} \quad (3.49)$$

Die Wartewahrscheinlichkeit  $P(>0)$  ist aus Gl.(3.32) in Verbindung mit Gl.(3.31A) bzw.(3.31B) bekannt.

### III.2.8 Numerische Ergebnisse

#### III.2.8.1 Exakte Werte

Für das in diesem Kapitel III behandelte System lassen sich leider die exakten numerischen Ergebnisse z.B. für die mittlere Wartezeit, die Wartezeitverteilung etc. nicht so geschlossen in wenigen Diagrammen darstellen wie bei dem in Kapitel II behandelten System. Der Grund dafür ist die Vielzahl an beeinflussenden Parametern

- maximale Gruppengröße  $m$  der ankommenden Anforderungen
- $(m+1)$  einzelne Wahrscheinlichkeiten  $r(k)$  für die Gruppengröße
- Taktzeit  $T=ch$

Man müßte deshalb entweder für ein interessierendes System die einzelnen Werte jeweils für sich nach den Formeln in den Abschnitten III.2.2 bis III.2.7 berechnen oder aber man müßte sehr umfangreiche Tabellen bzw. sehr viele Diagramme für die verschiedensten Parameterkombinationen erstellen.

Eine Ausnahme ist dabei aber die mittlere Wartezeit für den Sonderfall  $c=1$ , d.h. Taktdauer  $T$  gleich Bedienungsdauer  $h$ , wie es in Abschnitt III.2.3 bei Gl.(3.26B) schon erwähnt wurde. Für diesen Sonderfall läßt sich ein Diagramm angeben, in dem die normierte mittlere Wartezeit  $\tau_w^*$  in Abhängigkeit der mittleren Gruppengröße dargestellt ist und  $\text{Var}[k]/E[k]$  als Parameter verwendet wird. Bild 22 zeigt dieses Diagramm.

Als Beispiel für die Wartezeitverteilung soll Bild 23 dienen, in dem die komplementäre Wartezeitverteilung  $P(>dh)$  für ein System mit den dort angegebenen, speziellen Parametern dargestellt ist.

#### III.2.8.2 Näherungswerte für die mittlere Wartezeit

Für praktische Anwendungen sind Diagramme insbesondere der mittleren Wartezeit meistens von großem Nutzen. Man kann aus ihnen die numerischen Werte für interessierende Systeme sofort ablesen und man erspart sich somit lange numerische Auswertungen von Formeln. Da die exakten Werte für die Fälle  $c>1$  nicht in wenigen übersichtlichen Diagrammen angebar sind, wie schon im vorhergehenden Abschnitt erläutert, wird in diesem Abschnitt auf die Angabe von Näherungswerten in Diagrammform eingegangen.

Betrachtet man die Formel für die normierte mittlere Wartezeit  $\tau_w^*$  in Gl.(3.26B), so sieht man, daß der zweite Term auf der rechten Seite dieser Gleichung nur von der mittleren Gruppengröße  $E[k]$  und der Varianz der Gruppengröße  $\text{Var}[k]$  abhängt. In dem ersten Term  $E[x,0]$  spielen allerdings noch die einzelnen Wahrscheinlichkeiten  $r(k)$ , die maximale Gruppengröße  $m$  und die Taktdauer  $T=ch$  eine Rolle. Tests haben aber gezeigt, daß für eine feste Taktdauer  $T=ch$  der numerische Wert für  $E[x,0]$  in der gleichen Größenordnung bleibt für verschiedene Kombinationen von  $m$  und  $r(k)$  unter der Bedingung, daß  $E[k]$  und  $\text{Var}[k]$  konstant gehalten werden. Deshalb können für feste Taktauern  $T=ch$  Diagramme für genäherte mittlere Wartezeiten  $\tau_w^*$  als Funktion von  $E[k]$  unter Verwendung von  $\text{Var}[k]/E[k]$  als Parameter angegeben werden entsprechend wie im Bild 22 für die exakten Werte des Sonderfalls  $c=1$ . Bild 24 zeigt ein solches Beispiel für den Fall  $c=2$  und  $m=6$ . Für  $m<6$  tendieren die exakten Werte  $\tau_w^*$  dazu, unterhalb der gezeigten Näherungskurven zu liegen, für  $m>6$  tendieren sie dazu, oberhalb der gezeigten Näherungskurven zu liegen.

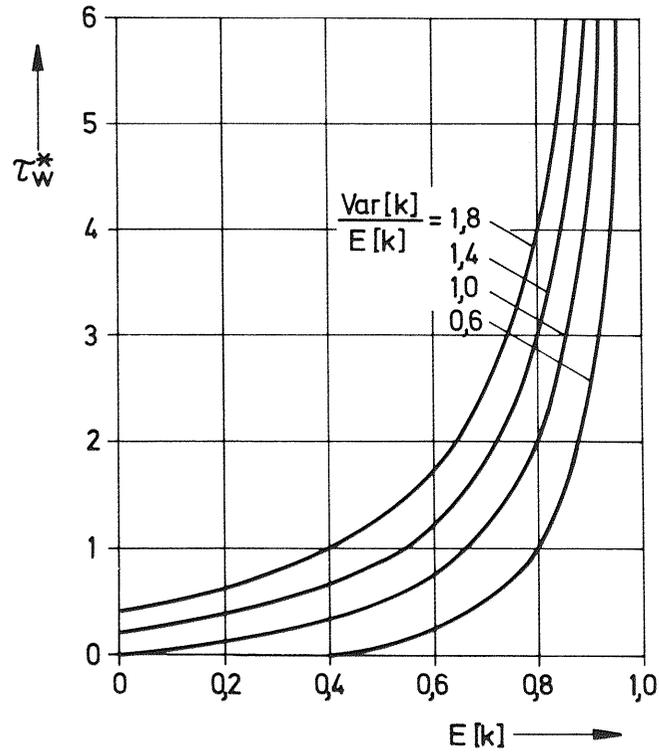


Bild 22: Normierte mittlere Wartezeit eines Systems nach Bild 18 für den Fall  $c=1$

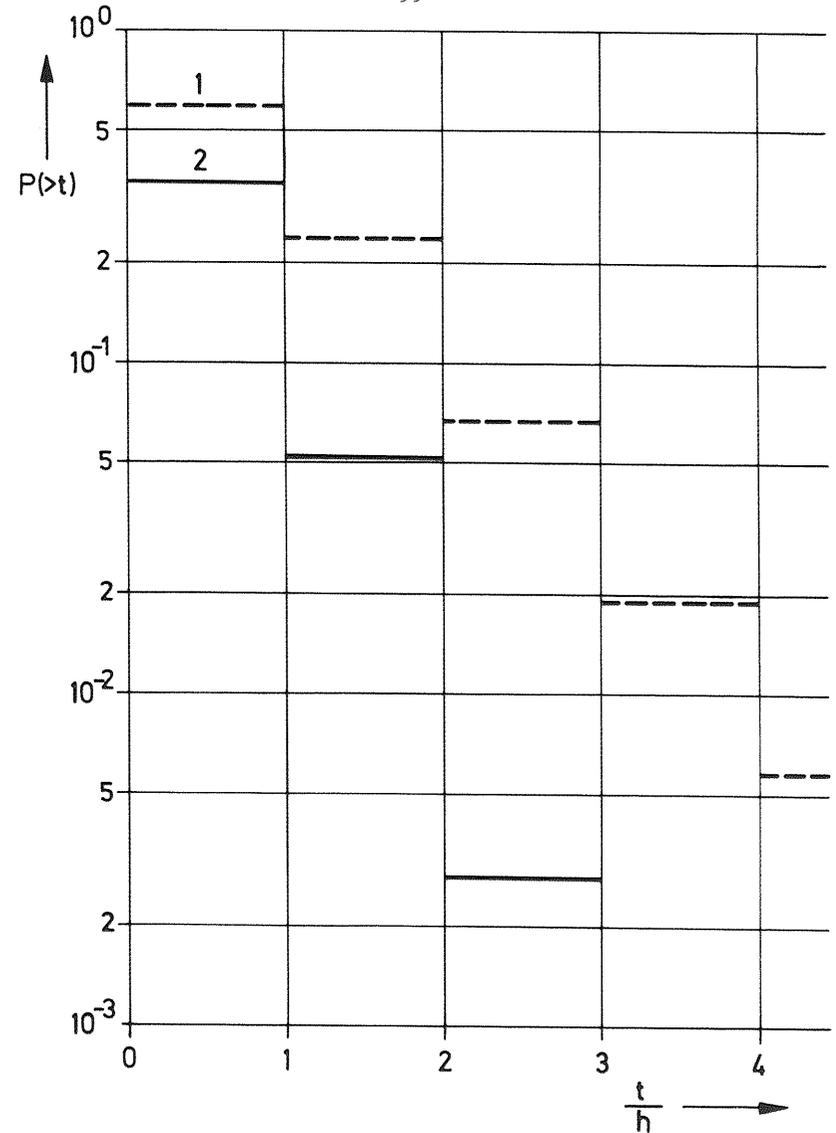


Bild 23: Beispiel für die komplementäre Wartezeitverteilung eines Systems nach Bild 18 für  $m=3$  und  $c=2$

Kurve 1: $r(0)=0,1655$	Kurve 2: $r(0)=0,3684$
$r(1)=0,3346$	$r(1)=0,3762$
$r(2)=0,3480$	$r(2)=0,2209$
$r(3)=0,1519$	$r(3)=0,0345$
$E[k]=1,4863$	$E[k]=0,9215$
$\text{Var}[k]=0,8846$	$\text{Var}[k]=0,7211$
$\tau_w^*=0,9260$	$\tau_w^*=0,3995$

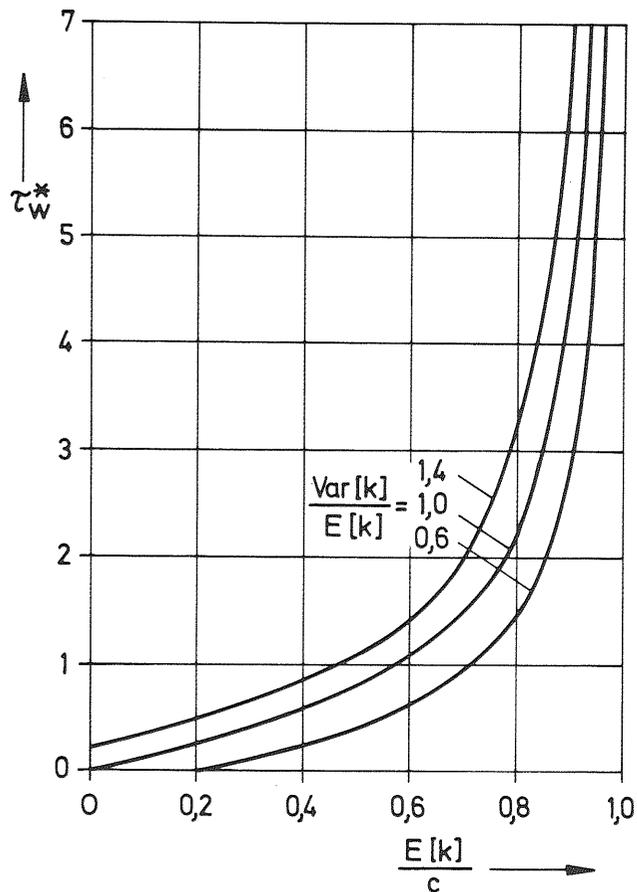


Bild 24: Näherungswerte für die normierte mittlere Wartezeit eines Systems nach Bild 18 für  $c=2$  und  $m=6$

III.2.8.3 Näherungen für die mittlere Wartezeit für den Fall, daß die Taktdauer kein ganzzahliges Vielfaches der Bedienungsdauer ist

Für den von der Strukturbeschreibung des Systems in Abschnitt III.1 abweichenden Fall, daß die Taktdauer kein ganzzahliges Vielfaches der Bedienungsdauer ist, soll hier noch eine Möglichkeit zur näherungsweise Bestimmung der mittleren Wartezeit angegeben werden.

Die Taktdauer sei  $T=ch$ , wobei jetzt aber  $c$  eine reelle Zahl zwischen den zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen  $c_u$  und  $c_o$  sei. Dann wird mit den gegebenen Ankunftsverteilungen  $r(k)$  mit Hilfe der Gl.(3.25A) bzw. (3.25B) einmal die mittlere Wartezeit  $t_{w,c_u}^*$  mit  $c_u$  berechnet und das andere Mal  $t_{w,c_o}^*$  mit  $c_o$ . Die mittlere Wartezeit  $t_w^*$  des tatsächlichen Systems kann dann näherungsweise durch lineare Interpolation zwischen den beiden Werten  $t_{w,c_u}^*$  und  $t_{w,c_o}^*$  gewonnen werden

$$t_w^* = (c - c_u)t_{w,c_o}^* + (c_o - c)t_{w,c_u}^*$$

Selbstverständlich kann derselbe Weg mit Hilfe der im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Diagramme für Näherungswerte der mittleren Wartezeit beschriftet werden. In diesem Fall erhält man die mittlere Wartezeit  $t_w^*$  näherungsweise durch eine entsprechende lineare Interpolation zwischen den zwei zu  $c_u$  und  $c_o$  gehörenden Kurven mit gleichem Parameterwert  $\frac{\text{Var}[k]}{E[k]}$  an der Stelle des gleichen Abszissenwertes  $E[k]/c$ .

Simulationen auf einem Digitalrechner haben gezeigt, daß diese einfachen Näherungsverfahren für praktische Anwendungen ausreichende Ergebnisse liefern.

III.3 Unterscheidung der Anforderungen nach ihrer Herkunft

In Abschnitt III.2 wurden die ankommenden Anforderungen noch nicht nach ihrer Herkunft unterschieden, sondern es wurde die in den Taktzeitpunkten ankommende Gruppe von Anforderungen global betrachtet. Wie in Abschnitt III.1 schon beschrieben, werden innerhalb einer ankommenden Gruppe von Anforderungen zuerst diejenigen aus Richtung 1 in den Speicher eingeordnet,

dann diejenigen aus Richtung 2 usw. Das bedeutet aber, daß die Anforderungen aus Richtung 1 bezüglich der Wartezeit gegenüber den Anforderungen aus Richtung 2 begünstigt werden, diese wiederum gegenüber denjenigen aus Richtung 3 usw. Deshalb sind außer den auf alle Anforderungen bezogenen charakteristischen Verkehrswerten, wie sie in Abschnitt III.2 bestimmt wurden, auch noch die entsprechenden Verkehrswerte von Interesse, welche nur auf die aus einer bestimmten Richtung kommenden Anforderungen bezogen sind.

### III.3.1 Mittlere Wartezeit

Die mittlere Anzahl von Anforderungen, die sich bei der Ankunft der Anforderungen aus Richtung i vor diesen im System befindet sei mit  $E_i[x,0]$  bezeichnet. Die von den Anforderungen aus Richtung 1 angetroffene mittlere Schlangenlänge ist dieselbe wie die von der ankommenden globalen Gruppe angetroffene mittlere Schlangenlänge

$$E_1[x,0] = E[x,0] \quad (3.50)$$

$E[x,0]$  ist aus Gl.(3.20A) bzw. (3.20B) bzw. (3.20C) bekannt. Die mittlere Anzahl  $E[k_i]$  von Anforderungen, welche pro Takt aus Richtung i ankommen, ist

$$E[k_i] = \sum_{k=1}^{n_i} k q_i(k) \quad (3.51A)$$

Die zugehörige Varianz der Gruppengröße ist

$$\text{Var}[k_i] = \sum_{k=0}^{n_i} (k - E[k_i])^2 q_i(k) \quad (3.51B)$$

Da innerhalb einer ankommenden Gruppe die Anforderungen aus den Richtungen 1,2,...,i-1 vor denjenigen aus Richtung i in den Speicher eingeordnet werden, gilt für die Mittelwerte  $E_i[x,0]$

$$E_i[x,0] = E_1[x,0] + \sum_{j=1}^{i-1} E[k_j]$$

oder mit Gl.(3.50)

$$E_i[x,0] = E[x,0] + \sum_{j=1}^{i-1} E[k_j] \quad \text{für } i > 1 \quad (3.52)$$

Ganz analog zu der mittleren Wartezeit  $t_w^*$  aller Anforderungen der globalen Gruppe nach Gl.(3.25A) bzw. (3.25B) gilt dann für die mittlere Wartezeit  $t_{w,i}^*$  aller Anforderungen, welche aus Richtung i kommen

$$t_{w,i}^* = h \left[ E_i[x,0] + \frac{\sum_{k=1}^{n_i} k(k-1) q_i(k)}{2 E[k_i]} \right] \quad (3.53A)$$

$$\text{bzw. } t_{w,i}^* = h \left[ E_i[x,0] + \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Var}[k_i]}{E[k_i]} + E[k_i] - 1 \right) \right] \quad (3.53B)$$

Für die auf die Bedienungsdauer h normierten mittleren Wartezeiten  $\tau_{w,i}^*$  aller Anforderungen aus Richtung i gilt dann entsprechend

$$\tau_{w,i}^* = E_i[x,0] + \frac{\sum_{k=1}^{n_i} k(k-1) q_i(k)}{2 E[k_i]} \quad (3.54A)$$

$$\text{bzw. } \tau_{w,i}^* = E_i[x,0] + \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Var}[k_i]}{E[k_i]} + E[k_i] - 1 \right) \quad (3.54B)$$

Die Werte für  $E_i[x,0]$ ,  $E[k_i]$  und  $\text{Var}[k_i]$  sind in den Gleichungen (3.50) bzw. (3.52), (3.51A) und (3.51B) angegeben.

### III.3.2 Wartewahrscheinlichkeit

Die eintreffenden Anforderungen aus Richtung i finden das System leer vor, wenn kurz vor dem Takt keine Anforderungen mehr im System vorhanden sind und außerdem die ankommende globale Gruppe keine Anforderungen aus den Richtungen 1,2,...,i-1 enthält. Die Wahrscheinlichkeit  $p_i(0,0)$ , daß kurz vor dem Takt keine Anforderungen im System enthalten sind und außerdem mit dem Takt aus den Richtungen 1,2,...,i-1 keine Anforderungen ankommen, ist

$$p_i(0,0) = p(0,0) \quad (3.55A)$$

$$p_i(0,0) = p(0,0) \prod_{j=1}^{i-1} q_j(0) \quad \text{für } i > 1 \quad (3.55B)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $p(0,0)$  kann aus Gl.(3.28) mit Hilfe von Gl.(3.18A) bzw. (3.18B) entnommen werden.

Nun ist ganz analog zur Wahrscheinlichkeit  $P(=0)$  in Gl.(3.29), daß eine ankommende Anforderung der globalen Gruppe nicht warten muß, die Wahrscheinlichkeit  $P_i(=0)$ , daß eine aus Richtung

i ankommende Anforderung nicht warten muß

$$P_i(=0) = \frac{1 - q_i(0)}{E[k_i]} p_i(0,0) \quad (3.56)$$

Die Wartewahrscheinlichkeit  $P_i(>0)$  für Anforderungen aus Richtung i ist dann

$$P_i(>0) = 1 - P_i(=0) \quad (3.57)$$

### III.3.3 Wartezeitverteilung

Zur Bestimmung der Wartezeitverteilung  $P_i(\leq dh)$ , d.h. der Wahrscheinlichkeit, daß eine aus Richtung i kommende Anforderung weniger oder gleich die Zeit dh warten muß (mit  $d=0,1,2,\dots$ ), müssen die Wahrscheinlichkeiten  $p_i(x,0)$  bekannt sein, daß die Anforderungen aus Richtung i bei ihrer Ankunft bereits x Anforderungen antreffen. Diese Wahrscheinlichkeiten hängen von den Wahrscheinlichkeiten  $p(x,0)$ , daß kurz vor dem Takt x Anforderungen im System sind und von den einzelnen Wahrscheinlichkeiten  $q_1(k), q_2(k), \dots, q_{i-1}(k)$  der Gruppengrößen aus den Richtungen 1, 2, ..., i-1 ab. Deshalb werden zunächst die Wahrscheinlichkeiten  $r_i(k)$  bestimmt, daß pro Takt aus den ersten i Richtungen 1, 2, ..., i zusammen genau k Anforderungen ankommen. Diese Wahrscheinlichkeiten  $r_i(k)$  können allgemein aus der Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten  $q_1(k), q_2(k), \dots, q_i(k)$  gewonnen werden, da diese unabhängig voneinander sind. Die jeweils zu  $r_i(k)$  gehörende, maximale Gruppengröße ist

$$m_i = \sum_{j=1}^i n_j \quad (3.58)$$

Zur Verdeutlichung des Zusammenhangs zwischen den Wahrscheinlichkeiten  $r_i(k)$  und  $q_i(k)$  soll Bild 25 dienen.

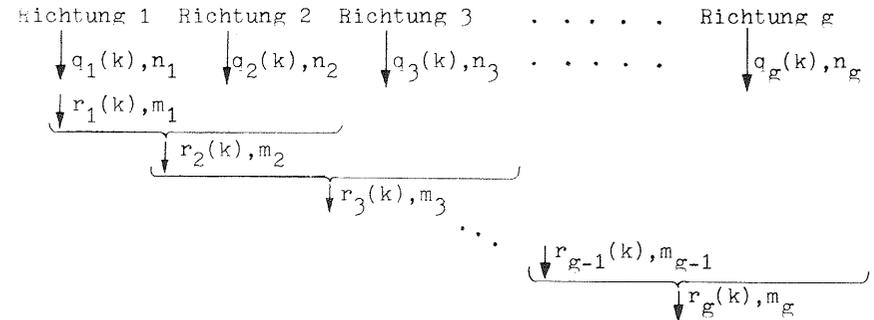


Bild 25: Rekursive Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten  $r_i(k)$

Aus Bild 25 ist auch ersichtlich, daß die Wahrscheinlichkeiten  $r_i(k)$  rekursiv berechnet werden können, was für die numerische Auswertung auf Digitalrechnern besonders geeignet ist.

Ausführlich geschrieben lautet die Beziehung zwischen  $r_i(k)$ ,  $r_{i-1}(k)$  und  $q_i(k)$  für den Fall  $m_{i-1} \geq n_i$

$$\begin{aligned} r_i(0) &= r_{i-1}(0) q_i(0) \\ r_i(1) &= r_{i-1}(0) q_i(1) + r_{i-1}(1) q_i(0) \\ &\vdots \\ r_i(n_i-1) &= r_{i-1}(0) q_i(n_i-1) + r_{i-1}(1) q_i(n_i-2) + \dots + r_{i-1}(n_i-1) q_i(0) \\ \hline r_i(n_i) &= r_{i-1}(0) q_i(n_i) + r_{i-1}(1) q_i(n_i-1) + \dots + r_{i-1}(n_i) q_i(0) \\ r_i(n_i+1) &= r_{i-1}(1) q_i(n_i) + r_{i-1}(2) q_i(n_i-1) + \dots + r_{i-1}(n_i+1) q_i(0) \\ &\vdots \\ r_i(m_{i-1}-1) &= r_{i-1}(m_{i-1}-1-n_i) q_i(n_i) + r_{i-1}(m_{i-1}-n_i) q_i(n_i-1) + \dots + r_{i-1}(m_{i-1}-1) q_i(0) \\ \hline r_i(m_{i-1}) &= r_{i-1}(m_{i-1}-n_i) q_i(n_i) + r_{i-1}(m_{i-1}-n_i+1) q_i(n_i-1) + \dots + r_{i-1}(m_{i-1}) q_i(0) \\ r_i(m_{i-1}+1) &= r_{i-1}(m_{i-1}-n_i+1) q_i(n_i) + r_{i-1}(m_{i-1}-n_i+2) q_i(n_i-1) + \dots + r_{i-1}(m_{i-1}) q_i(1) \\ &\vdots \\ r_i(m_{i-1}+n_i) &= r_{i-1}(m_{i-1}) q_i(n_i) \end{aligned}$$

Zusammengefaßt läßt sich das obige Gleichungssystem schreiben als

$$\left. \begin{aligned} r_i(k) &= \sum_{j=0}^k r_{i-1}(j)q_i(k-j) && \text{für } 0 \leq k < n_i \\ r_i(k) &= \sum_{j=k-n_i}^k r_{i-1}(j)q_i(k-j) && \text{für } n_i \leq k < m_{i-1} \\ r_i(k) &= \sum_{j=k-n_i}^{m_{i-1}} r_{i-1}(j)q_i(k-j) && \text{für } m_{i-1} \leq k \leq m_{i-1} + n_i \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für den Fall} \\ m_{i-1} \geq n_i \\ (3.59A) \end{array}$$

Ganz analog dazu lassen sich die Beziehungen für den Fall  $m_{i-1} \leq n_i$  angeben als

$$\left. \begin{aligned} r_i(k) &= \sum_{j=0}^k r_{i-1}(j)q_i(k-j) && \text{für } 0 \leq k < m_{i-1} \\ r_i(k) &= \sum_{j=0}^{m_{i-1}} r_{i-1}(j)q_i(k-j) && \text{für } m_{i-1} \leq k < n_i \\ r_i(k) &= \sum_{j=k-n_i}^{m_{i-1}} r_{i-1}(j)q_i(k-j) && \text{für } n_i \leq k \leq m_{i-1} + n_i \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{für den Fall} \\ m_{i-1} \leq n_i \\ (3.59B) \end{array}$$

Als Sonderfälle treten hier  $r_i(k) = q_i(k)$  bzw.  $m_i = n_i$  und  $r_g(k) = r(k)$  bzw.  $m_g = m$  auf.

Die Wahrscheinlichkeiten  $p_i(x,0)$ , daß die Anforderungen aus Richtung  $i$  bei ihrer Ankunft genau  $x$  Anforderungen vor sich im System finden, sind nun noch durch eine Faltung der voneinander unabhängigen Wahrscheinlichkeiten  $p(x,0)$  und  $r_{i-1}(k)$  zu erhalten. Analog zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten  $p(x,T)$  in Abschnitt III.2.5.2 erhält man damit

$$\begin{aligned} p_i(x,0) &= \sum_{j=0}^x p(j,0)r_{i-1}(x-j) && \text{für } x \leq m_{i-1} \\ p_i(x,0) &= \sum_{j=x-m_{i-1}}^x p(j,0)r_{i-1}(x-j) && \text{für } x > m_{i-1} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die Wahrscheinlichkeiten  $p(j,0)$  sind aus Gl.(3.38) bekannt.

Nachdem nun die Wahrscheinlichkeiten  $p_i(x,0)$  mit Gl.(3.60) bekannt sind, ergibt sich ganz analog zur Wartezeitverteilung

$P(\leq dh)$  der Anforderungen der globalen Gruppe in Gl.(3.47) für die Wartezeitverteilung  $P_i(\leq dh)$  der Anforderungen aus Richtung  $i$  die Formel

$$\begin{aligned} P_i(\leq dh) &= \frac{1}{E[k_i]} \sum_{j=0}^d \sum_{x=0}^j p_i(x,0) \left[ 1 - \sum_{k=0}^{j-x} q_i(k) \right] && \text{für } d < n_i \\ P_i(\leq dh) &= P_i(\leq (n_i-1)h) + \frac{1}{E[k_i]} \sum_{j=n_i}^d \sum_{x=j-n_i+1}^j p_i(x,0) \left[ 1 - \sum_{k=0}^{j-x} q_i(k) \right] && \text{für } d \geq n_i \end{aligned} \quad (3.61)$$

Die komplementäre Wartezeitverteilung  $P_i(>dh)$ , d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß eine aus Richtung  $i$  ankommende Anforderung länger als  $d$  Bedienungsdauern warten muß, ist dann

$$P_i(>dh) = 1 - P_i(\leq dh)$$

Die komplementäre Wartezeitverteilung  $W_i(>dh)$  bezogen auf die wartenden Anforderungen aus Richtung  $i$  ist

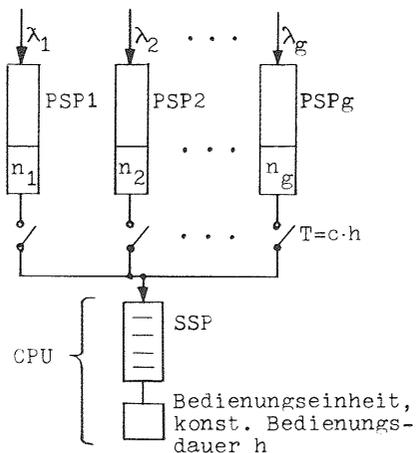
$$W_i(>dh) = \frac{P_i(>dh)}{P_i(>0)}$$

Die Wartewahrscheinlichkeit  $P_i(>0)$  für Anforderungen aus Richtung  $i$  ist aus Gl.(3.57) bekannt.

IV

ZWEISTUFIGES WARTESYSTEM MIT ABGETASTETEN,  
PARALLELEN EINGANGSWARTESCHLANGEN

IV.1 Struktur und Betriebsweise des Systems



Das in Bild 26 dargestellte System ist eine Kombination aus den in Kapitel II und III beschriebenen Systemen. Die  $g$  parallelen,  $\infty$  großen Primärspeicher PSP 1, PSP 2, ..., PSP $g-1$ , PSP $g$ , denen je ein Poissonangebot mit der Ankunftsrate  $\lambda_i$  zugeführt wird, werden mit jedem Takt gleichzeitig abgetastet. Aus jedem Primärspeicher  $i$  werden pro Takt maximal  $n_i$  Anforderungen entnommen und in den  $\infty$  großen Sekundärspeicher SSP eingeordnet, welcher als Puffer-

speicher vor der Bedienungseinheit dient. Auch hier hat die Bedienungseinheit eine konstante Bedienungsdauer  $h$  und die Taktzeit  $T$  ist ein ganzzahliges Vielfaches  $c$  von  $h$ . Im Moment des Taktzeitpunktes werden die Anforderungen aus PSP1 zuerst in den SSP eingeordnet, anschließend die Anforderungen aus PSP2 usw. Die im SSP wartenden Anforderungen werden einzeln seriell von der Bedienungseinheit, z.B. einem Rechner, abgearbeitet.

Dieses System nach Bild 26 entspricht einem vereinfachten Modell eines zentralgesteuerten Systems, wie z.B. einem Prozeßrechner mit Peripherie oder einer zentralgesteuerten Fernsprech- oder Datenvermittlungsstelle. Die einzelnen Primärspeicher PSPi können dabei als das Modell von peripheren Geräten betrachtet werden, der Sekundärspeicher SSP und die Bedienungseinheit als die zentrale Verarbeitungseinheit (Central Processing Unit CPU, vgl. Kapitel I). Alle  $g$  Primärspeicher zusammen werden als Primärsystem bezeichnet, die Bedienungseinheit mit dem Sekundärspeicher als Sekundärsystem.

IV.2 Behandlung des Primärsystems

Aus jedem einzelnen Primärspeicher PSPi werden maximal  $n_i$  Anforderungen im Taktzeitpunkt entnommen und an den Sekundärspeicher SSP weitergegeben. Da dieser Sekundärspeicher SSP als unbegrenzt groß angenommen wird, kann er immer alle Anforderungen aufnehmen, die ihm jeweils in den Taktzeitpunkten angeboten werden. Deshalb tritt nicht der Fall auf, daß auf Grund eines vollen Sekundärspeichers im Taktzeitpunkt die Anforderungen aus dem Primärsystem nicht übernommen werden können. Es tritt also kein Rückstau vom Sekundärsystem in das Primärsystem auf. Das bedeutet aber, daß in keiner Weise der Zustand irgend eines Primärspeichers durch den Zustand irgend eines anderen Primärspeichers oder durch den Zustand des Sekundärsystems beeinflusst wird. Deshalb kann jeder einzelne Primärspeicher PSPi unabhängig von den anderen Primärspeichern und unabhängig vom Sekundärsystem für sich betrachtet werden. Somit entspricht ein einzelner Primärspeicher genau dem in Kapitel II behandelten System und sämtliche interessierenden charakteristischen Verkehrsgrößen können aus den dort gewonnenen Ergebnissen entnommen werden.

IV.3 Behandlung des Sekundärsystems

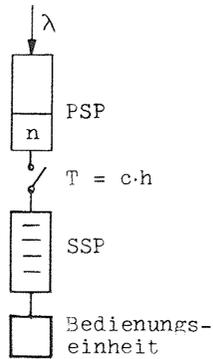
Das Sekundärsystem entspricht zwar in seiner Struktur genau dem in Kapitel III behandelten System, jedoch tritt hier bezüglich des angebotenen Verkehrs eine andere Bedingung als in Kapitel III auf. Dort wurde nämlich angenommen, daß die Wahrscheinlichkeiten  $r(k)$  für die Gruppenankünfte in aufeinanderfolgenden Taktzeitpunkten unabhängig voneinander sind. Diese Voraussetzung trifft in dem hier behandelten System (vgl. Bild 26) nicht mehr zu. Als Begründung kann die folgende Überlegung dienen:

Werden aus dem Primärspeicher PSPi mit dem Takt weniger als  $n_i$  Anforderungen entnommen, so ist dieser Primärspeicher kurz nach dem Takt leer. Für die Gruppengröße, welche im darauffolgenden Taktzeitpunkt diesem Primärspeicher entnommen wird, ist deshalb nur das Poissonangebot mit der Ankunftsrate  $\lambda_i$  verantwortlich. Werden aus dem Primärspeicher PSPi mit dem Takt dagegen  $n_i$  Anforderungen entnommen, so können sich kurz nach dem Takt noch Anforderungen in diesem Primärspeicher befinden. Für die Grup-

pengröße, welche im darauffolgenden Taktzeitpunkt diesem Primärspeicher entnommen wird, ist deshalb außer dem Poissonangebot mit der Ankunftsrate  $\lambda_i$  auch noch der Zustand dieses Speichers kurz nach dem Takt verantwortlich. Die Wahrscheinlichkeiten für die in einem Taktzeitpunkt dem Sekundärspeicher angebotenen Gruppengrößen hängen deshalb davon ab, wie groß die im letzten Taktzeitpunkt angebotene Gruppengröße war.

IV.3.1 Primärsystem besteht nur aus einem Speicher

Das gesamte System, welches nur einen Primärspeicher enthält, ist in Bild 27 dargestellt. Es können nun zwei verschiedene Fälle unterschieden werden, nämlich  $n \leq c$  und  $n > c$ .



IV.3.1.1 Fall  $n \leq c$

Pro Takt können maximal  $n$  Anforderungen vom Primärspeicher PSP in den Sekundärspeicher übernommen werden. Da die Bedienungseinheit zwischen zwei Taktzeitpunkten aber maximal  $c \cdot n$  Anforderungen abarbeiten kann, sind die pro Takt ankommenden Anforderungen immer bis zum nächsten Taktzeitpunkt schon abgearbeitet. Das bedeutet aber, daß die in den Taktzeitpunkten ankommenden Gruppen von Anforderungen immer in ein leeres Sekundärsystem eintreffen. Folglich hat die Tatsache, daß die Gruppengrößen

Bild 27: Struktur des Systems mit nur einem Primärspeicher

in aufeinanderfolgenden Taktzeitpunkten abhängig voneinander sind, keinen Einfluß auf die von den ankommenden Gruppen angebotene Anzahl von Anforderungen im Sekundärsystem, (welche hier also immer 0 ist). Deshalb hängen die Wartezeiten der Anforderungen nur von den jeweiligen Gruppengrößen selbst ab. Es können deshalb für diesen Fall alle in Kapitel III gewonnenen Ergebnisse verwendet werden, wenn dort  $E[x, 0] = 0$ ,  $p(0, 0) = 1$  und  $p(x, 0) = 0$  für  $x > 0$  gesetzt wird.

Es wäre noch zu bemerken, daß dieser Fall in der Praxis nur dann sinnvoll wäre, wenn die Bedienungseinheit zusätzlich noch durch irgendwelche "Hintergrundaufgaben" belastet würde. Andernfalls müßte sinnvollerweise der Takt schneller gemacht werden, damit nicht kurz nach dem Takt noch Anforderungen im Primärspeicher zurückgelassen werden, die Bedienungseinheit aber andererseits bis zum nächsten Takt eine zeitlang leer steht.

IV.3.1.2 Fall  $n > c$

Um für diesen Fall die mittlere Wartezeit und die Wartewahrscheinlichkeit im Sekundärsystem zu bestimmen, wird zuerst das Gesamtsystem betrachtet und zwar jeweils kurz nach dem Takt bzw. zur Zeit  $T$  vor dem nächsten Takt. Befinden sich kurz nach dem Takt im Gesamtsystem  $x \leq n$  Anforderungen, so müssen sich diese Anforderungen gezwungenermaßen im Sekundärsystem befinden, da ja mit dem Takt maximal  $n$  Anforderungen aus dem Primärspeicher entnommen werden können. Ist  $x < c$ , so werden deshalb während des folgenden Zeitintervalles bis zum nächsten Takt alle  $x$  Anforderungen abgearbeitet, ist dagegen  $x \geq c$ , so werden während des folgenden Zeitintervalles bis zum nächsten Takt genau  $c$  Anforderungen abgearbeitet.

Befinden sich kurz nach dem Takt  $x > n$  Anforderungen im Gesamtsystem, so müssen in jedem Fall mindestens  $n$  Anforderungen davon im Sekundärsystem sitzen und es können in dem folgenden Zeitintervall bis zum nächsten Takt  $c$  Anforderungen abgearbeitet werden.

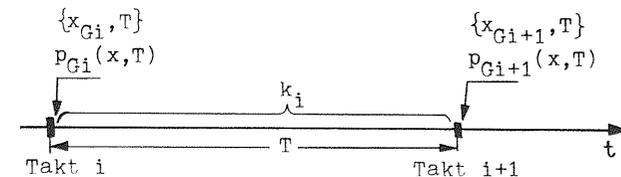


Bild 28: Beobachtungszeitpunkte

Der Zustand des Gesamtsystems (PSP + SSP + Bedienungseinheit) kurz nach dem Takt  $i$  bzw.  $i+1$  sei bezeichnet mit  $\{x_{Gi}, T\}$  bzw.  $\{x_{Gi+1}, T\}$  und die entsprechende Wahrscheinlichkeit mit  $p_{Gi}(x, T)$  bzw.  $p_{Gi+1}(x, T)$  (vgl. Bild 28). Die Folge dieser Zustände bil-

det wieder eine eingebettete Markoff-Kette. Zwischen den Takten  $i$  und  $i+1$  sollen  $k_i$  neue Anforderungen im Gesamtsystem eintreffen. Diese neuen Anforderungen treffen im Primärspeicher ein und können zwischen den Takten  $i$  und  $i+1$  nicht an das Sekundärsystem weitergegeben werden. Deshalb können im Sekundärsystem auch nur solche Anforderungen zwischen den Takten  $i$  und  $i+1$  abgearbeitet werden, welche sich bereits kurz nach dem Takt  $i$  schon im Sekundärsystem befunden haben. Hiermit und mit den obigen Überlegungen folgt für den Zustand  $\{x_{Gi+1}, T\}$

$$\{x_{Gi+1}, T\} = \text{Max}[(\{x_{Gi}, T\} - c), 0] + k_i \quad (4.1)$$

mit 
$$\text{Max}[(\{x_{Gi}, T\} - c), 0] = \begin{cases} \{x_{Gi}, T\} - c & \text{für } \{x_{Gi}, T\} \geq c \\ 0 & \text{für } \{x_{Gi}, T\} < c \end{cases}$$

Diese Gl.(4.1) ist völlig analog zu Gl.(2.61) in Kapitel II, wenn dort  $t_v=0$  gesetzt wird und damit  $k_v=0$  wird, d.h. wenn dort das behandelte System direkt vor dem Takt betrachtet wird. Anstelle der Abfrageplattzahl  $n$  in Gl.(2.61) tritt hier nur die Größe  $c$ . Diese beiden Größen entsprechen sich auch physikalisch gesehen, da sie die maximal bedienbare Anzahl von Anforderungen pro Taktzeit in dem jeweiligen System darstellen. Die in der Taktzeit  $T$  eintreffende Anzahl von Anforderungen  $k_i$  wird hier ebenso durch das Poissonangebot mit der Ankunftsrate  $\lambda$  bestimmt wie die Anzahl  $k_n$  für  $t_v=0$  in Gl.(2.61). Deshalb kann der weitere Rechnungsgang zur Bestimmung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten und der Zustandswahrscheinlichkeiten selbst völlig analog zu demjenigen in Kapitel II erfolgen. Für den Fall des statistischen Gleichgewichts, welches hier durch die Bedingungen  $\frac{\lambda T}{n} < 1$  und  $\frac{\lambda T}{c} < 1$  gekennzeichnet ist, können somit für das hier behandelte Gesamtsystem die entsprechenden Formeln für die oben genannten Größen direkt aus Kapitel II übernommen werden, wenn dort  $t_v=0$  gesetzt und  $n$  durch  $c$  ersetzt wird.

Die erzeugende Funktion  $Gx_G(z, T)$  der Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_G(x, T)$  des Gesamtsystems kurz nach dem Takt lautet dann analog zu Gl.(2.71)

$$Gx_G(z, T) = \frac{c - \lambda T}{c - \lambda T} \frac{\prod_{v=0}^{c-1} (z - z_v)}{z^c - e^{-\lambda T(1-z)}} e^{-\lambda T(1-z)} \quad (4.2)$$

Dabei sind  $z_v$  ( $v=0, 1, \dots, c-1$ ) die Nullstellen mit  $|z_v| \leq 1$  der Bestimmungsgleichung

$$z^c - e^{-\lambda T(1-z)} = 0$$

Der Erwartungswert  $E_G[x, T]$  der Anzahl von Anforderungen im Gesamtsystem direkt nach dem Takt ist völlig analog zu Gl.(2.74)

$$E_G[x, T] = \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \frac{c - (c - \lambda T)^2}{2(c - \lambda T)} \quad (4.3)$$

Die aus der erzeugenden Funktion in Gl.(4.2) mittels einer Reihenentwicklung abgeleiteten Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_G(x, T)$  des Gesamtsystems kurz nach dem Takt sind analog zu Gl.(2.83)

$$p_G(x, T) = \frac{\lambda T - c}{c - \lambda T} \left[ \sum_{j=0}^{b-1} (e^{j\lambda T} \sum_{\mu=0}^c (-1)^{c-\mu} S_{c-\mu} \frac{(-\lambda_j T)^{x-jc-\mu}}{(x-jc-\mu)!}) + e^{b\lambda T} \sum_{\mu=0}^{x-bc} (-1)^{c-\mu} S_{c-\mu} \frac{(-\lambda b T)^{x-bc-\mu}}{(x-bc-\mu)!} \right] \quad (4.4)$$

mit  $S_i$  nach Gl.(2.81B)

und  $bc \leq x < (b+1)c$  ( $b=0, 1, 2, \dots$ )

Man beachte auch hier:  $\frac{0^0}{0!} = 1$  und  $\sum_{i=1}^j \dots = 0$  für  $j < i$

Nun ist mit Gl.(4.3) der Erwartungswert  $E_G[x, T]$  der Anzahl von Anforderungen im Gesamtsystem kurz nach dem Takt bekannt. Andererseits ist der Erwartungswert  $E_P[x, T]$  der Anzahl von Anforderungen im Primärsystem kurz nach dem Takt aus Gl.(2.74) bekannt (Begründung vgl. Abschnitt IV.2). Aus diesen beiden Erwartungswerten läßt sich der Erwartungswert  $E_S[x, T]$  der Anzahl von Anforderungen im Sekundärsystem durch Differenzbildung berechnen (vgl. dazu auch Bild 29)

$$E_S[x, T] = E_G[x, T] - E_P[x, T] \quad (4.5)$$

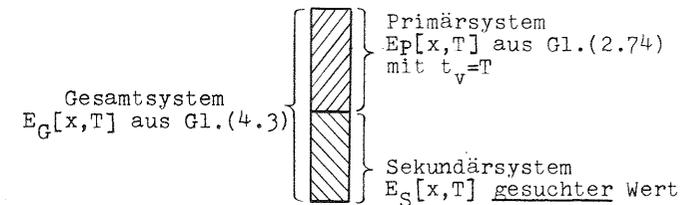


Bild 29: Bestimmung des Erwartungswertes  $E_S[x, T]$

Über die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_S(x,T)$  des Sekundärsystems kurz nach dem Takt läßt sich folgende Aussage machen:

Befinden sich kurz nach dem Taktzeitpunkt  $x < n$  Anforderungen im Sekundärsystem, so muß das Primärsystem leer sein, da ja maximal  $n$  Anforderungen pro Takt vom Primär- in das Sekundärsystem übernommen werden können. Das bedeutet aber, daß auch das Gesamtsystem dann nur diese  $x$  Anforderungen enthält. Deshalb müssen die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_S(x,T)$  und  $p_G(x,T)$  für  $x < n$  gleich sein

$$p_S(x,T) = p_G(x,T) \quad \text{für } x < n \quad (4.6)$$

Befinden sich kurz nach dem Taktzeitpunkt  $x \geq n$  Anforderungen im Sekundärsystem, so läßt sich daraus keine Aussage über die Anzahl von Anforderungen im Primärsystem und damit auch im Gesamtsystem machen. Für die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_S(x)$  im Falle  $x \geq n$  läßt sich also keine so einfache Beziehung wie für  $x < n$  finden.

Mit Gl.(4.6) folgt für den Sonderfall  $x < c$  (d.h.  $b=0$ ) aus Gl.(4.4)

$$p_S(x,T) = \frac{\lambda T - c}{c! \prod_{v=1}^c (1-z_v)} \sum_{\mu=0}^x (-1)^{c-\mu} S_{c-\mu} \frac{(-1)^{x-\mu}}{(x-\mu)!}$$

$$p_S(x,T) = \frac{\lambda T - c}{c! \prod_{v=1}^c (1-z_v)} (-1)^{c-x} S_{c-x} \quad (4.7)$$

mit  $S_1$  nach Gl.(2.81B)

Aus der mittleren Schlangenlänge  $E_S[x,T]$  und den Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_S(x,T)$  direkt nach dem Takt kann nun ganz analog zu Abschnitt III.2.6 die mittlere Speicherbelastung  $\Omega_S$  des Sekundärspeichers ermittelt werden. In Analogie zu Gl.(3.44) ergibt sich dafür

$$\Omega_S = E_S[x,T] - \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ j - \sum_{x=0}^{j-1} (j-x) p_S(x,T) \right] \quad (4.8)$$

In Gl.(4.8) sind nur Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_S(x,T)$  mit  $x < c$  enthalten. Genau diese sind aber aus Gl.(4.7) bekannt.

Die Ankunftsrate von Anforderungen ist für den Primärspeicher gleich  $\lambda$  (vgl. Abschnitt IV.1). Da sich das Gesamtsystem im

statistischen Gleichgewicht, d.h. im stationären Zustand befindet und alle am Primärsystem eintreffenden Anforderungen auch das Sekundärsystem durchlaufen, müssen pro Zeiteinheit am Sekundärsystem genauso viele Anforderungen eintreffen wie am Primärsystem. Dadurch ist die Ankunftsrate von Anforderungen im Sekundärsystem ebenfalls  $\lambda$ . Nun kann die mittlere Wartezeit  $t_{WS}^*$  aller Anforderungen im Sekundärsystem aus der allgemein gültigen Beziehung

$$\Omega_S = \lambda t_{WS}^* \quad (4.9)$$

gewonnen werden.

Mit Gl.(4.8) folgt aus Gl.(4.9)

$$t_{WS}^* = \frac{1}{\lambda} \left[ E_S[x,T] - \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ j - \sum_{x=0}^{j-1} (j-x) p_S(x,T) \right] \right] \quad (4.10)$$

$E_S[x,T]$  ist aus Gl.(4.5) bekannt,  $p_S(x,T)$  aus Gl.(4.7).

Mit der mittleren Wartezeit  $t_{WP}^*$  aller Anforderungen im Primärsystem nach Gl.(2.76A) wird dann die mittlere Wartezeit  $t_{WG}^*$  aller Anforderungen im Gesamtsystem

$$t_{WG}^* = t_{WP}^* + t_{WS}^* \quad (4.11)$$

$t_{WG}^*$  ist diejenige Wartezeit, die eine Anforderung von ihrem Eintritt in das Primärsystem bis zu ihrer Bedienung im Sekundärsystem im Mittel warten muß.

Schließlich kann nun noch die Wartewahrscheinlichkeit  $P_S(>0)$  der Anforderungen im Sekundärsystem bestimmt werden. Dazu ist es wieder sinnvoll, zuerst die Wahrscheinlichkeit  $P_S(=0)$  zu ermitteln, daß eine Anforderung im Sekundärsystem nicht warten muß.

Die erste Anforderung einer im Taktzeitpunkt am Sekundärsystem ankommenden Gruppe muß nicht warten, wenn das Sekundärsystem bei der Ankunft der Gruppe leer ist. Dies kann aber nur der Fall sein, wenn kurz nach dem Taktzeitpunkt des vorhergehenden Taktes nur 0,1,2,... oder  $c$  Anforderungen im System waren.

Dies bedeutet aber zwingend, wie oben schon erwähnt, daß das Primärsystem kurz nach dem vorhergehenden Takt leer ist.

Die Wahrscheinlichkeit  $p_S(0,0)$ , daß kurz vor dem Taktzeitpunkt das Sekundärsystem leer ist, ist also

$$p_S(0,0) = \sum_{x=0}^c p_S(x,T) \quad (4.12)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Taktzeitpunkt, vor welchem das Sekundärsystem leer ist, überhaupt eine Anforderung am Sekundärsystem eintrifft, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, daß während der Zeit T im Primärspeicher (der ja nach dem vorhergehenden Takt leer war) eine Anforderung ankommt. Aufgrund des Poissonangebotes ist diese Wahrscheinlichkeit gleich

$$1 - e^{-\lambda T}$$

Da diese Wahrscheinlichkeit unabhängig von  $p_S(0,0)$  ist, ist die Wahrscheinlichkeit, daß mit dem Takt eine Gruppe von Anforderungen eintrifft und ein leeres Sekundärsystem vorfindet, gleich dem Produkt

$$p_S(0,0)(1 - e^{-\lambda T})$$

Da in diesem Fall nur die erste Anforderung der ankommenden Gruppe nicht warten muß, kommen somit im Mittel  $p_S(0,0)(1 - e^{-\lambda T}) \cdot 1$  Anforderungen pro Takt am Sekundärsystem an, die nicht warten müssen. Im Mittel kommen zwischen zwei Takten  $\lambda T$  Anforderungen am Primärsystem an. Da sich das Gesamtsystem im statistischen Gleichgewicht befinden soll, werden pro Takt auch  $\lambda T$  Anforderungen vom Primärsystem an das Sekundärsystem weitergegeben. Damit kommen insgesamt pro Takt im Mittel  $\lambda T$  Anforderungen am Sekundärsystem an. Die Wahrscheinlichkeit  $P_S(=0)$ , daß eine Anforderung im Sekundärsystem nicht warten muß, ist dann

$$P_S(=0) = \frac{p_S(0,0)(1 - e^{-\lambda T})}{\lambda T} \quad (4.13)$$

Setzt man noch Gl.(4.12) in Gl.(4.13) ein, so erhält man

$$P_S(=0) = \frac{1}{\lambda T} (1 - e^{-\lambda T}) \sum_{x=0}^c p_S(x,T) \quad (4.14)$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_S(x,T)$  können für  $x < c$  aus Gl.(4.7) entnommen werden und für  $x=c$  aus Gl.(4.6).

Die Wartewahrscheinlichkeit  $P_S(>0)$  der Anforderungen im Sekundärspeicher ist nun einfach

$$P_S(>0) = 1 - P_S(=0) \quad (4.15)$$

#### IV.3.2 Primärsystem besteht aus $g$ Speichern

In diesem Abschnitt wird das Sekundärsystem behandelt, welches zu einem Gesamtsystem nach Bild 26 gehört. Es können hier drei Fälle unterschieden werden, nämlich

- a)  $\sum_{i=1}^g n_i \leq c$
- b) jedes einzelne  $n_i \geq c$
- c)  $\sum_{i=1}^g n_i > c$ , aber einzelne  $n_i < c$

##### IV.3.2.1 Fall $\sum_{i=1}^g n_i \leq c$

Auch hier gilt wie in Abschnitt IV.3.1.1, daß die maximale Gruppengröße, welche pro Takt am Sekundärsystem ankommen kann, kleiner ist als die Anzahl  $c$  von Anforderungen, welche maximal in einem Taktzeitintervall abgearbeitet werden kann. Die in den Taktzeitpunkten am Sekundärsystem ankommenden Gruppen von Anforderungen treffen also immer ein leeres Sekundärsystem an. Es gilt in diesem Fall für die charakteristischen Verkehrsgrößen genau dasselbe wie das in Abschnitt IV.3.1.1 Gesagte.

Zu bemerken wäre hier noch, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Größe der in den Taktzeitpunkten ankommenden Gruppen von Anforderungen mit Hilfe der Gleichungen (2.90) und (3.59A) bzw. (3.59B) berechnet werden können.

##### IV.3.2.2 Fall jedes einzelne $n_i \geq c$

Dieser Fall, bei dem aus jedem einzelnen Primärspeicher PSPi mindestens so viele Anforderungen mit dem Takt abgeholt werden können, wie im Sekundärsystem während einer Taktperiode maximal verarbeitet werden können, entspricht dem in Abschnitt IV.3.1.2 behandelten Fall bei einem Primärspeicher. Auch hier wird zuerst das Gesamtsystem kurz nach dem Taktzeitpunkt betrachtet.

Befinden sich kurz nach dem Takt im Gesamtsystem  $x \leq \text{Min}[n_i]$  Anforderungen, wobei  $\text{Min}[n_i]$  gleich dem kleinsten aller  $n_i$  ist, so müssen sich diese Anforderungen im Sekundärsystem befinden.

Befinden sich kurz nach dem Takt  $x > \text{Min}[n_i]$  Anforderungen im Gesamtsystem, so müssen mindestens  $\text{Min}[n_i]$  davon im Sekundär-system sein. Deshalb gilt nach den gleichen Überlegungen wie in Abschnitt IV.3.1.2 auch hier die Gleichung (4.1). Nur ist jetzt  $k_i$  aus Gl.(4.1) die Anzahl der Anforderungen, welche insgesamt zwischen Takt  $i$  und Takt  $i+1$  (vgl. Bild 28) am Pri-märssystem ankommt;  $k_i$  wird also bestimmt durch den gesamten Poisson-Ankunftsprozeß mit der Gesamtankunftsrate  $\Lambda$

$$\Lambda = \sum_{i=1}^g \lambda_i \quad (4.16)$$

Ganz entsprechend zu Gl.(4.2) ist dann die erzeugende Funktion  $Gx_G(z,T)$  der Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_G(x,T)$  des Gesamt-systems kurz nach dem Takt

$$Gx_G(z,T) = \frac{c-\Lambda T}{\prod_{v=1}^{c-1} (1-z_v)} \prod_{v=0}^{c-1} (z-z_v) e^{-\Lambda T(1-z)} \quad (4.17)$$

Dabei sind  $z_v$  ( $v=0,1,\dots,c-1$ ) die Nullstellen mit  $|z_v| \leq 1$  der Bestimmungsgleichung

$$z^c - e^{-\Lambda T(1-z)} = 0$$

Der Erwartungswert  $E_G[x,T]$  der Anzahl von Anforderungen im Ge-samtsystem direkt nach dem Takt ist ganz entsprechend zu Gl.(4.3)

$$E_G[x,T] = \sum_{\mu=1}^{c-1} \frac{1}{1-z_\mu} + \frac{c-(c-\Lambda T)^2}{2(c-\Lambda T)} \quad (4.18)$$

Die aus der erzeugenden Funktion in Gl.(4.17) abgeleiteten Zu-standswahrscheinlichkeiten  $p_G(x,T)$  des Gesamtsystems sind ent-sprechend zu Gl.(4.4)

$$p_G(x,T) = \frac{\Lambda T - c}{\prod_{v=1}^{c-1} (1-z_v)} \left[ \sum_{j=0}^{b-1} \left( e^{j\Lambda T} \sum_{\mu=0}^c (-1)^{c-\mu} S_{c,\mu} \frac{(-\Lambda j T)^{x-jc-\mu}}{(x-jc-\mu)!} \right) + e^{b\Lambda T} \sum_{\mu=0}^{x-bc} (-1)^{c-\mu} S_{c,\mu} \frac{(-\Lambda b T)^{x-bc-\mu}}{(x-bc-\mu)!} \right] \quad (4.19)$$

mit  $S_i$  nach Gl.(2.81B)

und  $bc \leq x < (b+1)c$  ( $b=0,1,2,\dots$ )

Man beachte auch hier  $\frac{0^0}{0!} = 1$  und  $\sum_1^j \dots = 0$  für  $j < i$

Die Erwartungswerte  $E_{P_i}[x,T]$  der Anzahl von Anforderungen im Primärspeicher PSPi kurz nach dem Takt können für jeden ein-zelnen Primärspeicher PSPi aus Gl.(2.74) berechnet werden. Dann gilt für den Erwartungswert  $E_S[x,T]$  der Anzahl von An-forderungen im Sekundärssystem kurz nach dem Takt entsprechend zu Gl.(4.5)

$$E_S[x,T] = E_G[x,T] - \sum_{i=1}^g E_{P_i}[x,T] \quad (4.20)$$

Für die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_S(x,T)$  des Sekundär-sy-stems gilt das in Abschnitt IV.3.1.2 Gesagte analog, wenn dort  $n$  durch  $\text{Min}[n_i]$  ersetzt wird. Entsprechend zu Gl.(4.6) ist also

$$p_S(x,T) = p_G(x,T) \quad \text{für } x < \text{Min}[n_i] \quad (4.21)$$

Speziell für den Sonderfall  $x < c$  entsprechend zu Gl.(4.7)

$$p_S(x,T) = \frac{\Lambda T - c}{\prod_{v=1}^{c-1} (1-z_v)} (-1)^{c-x} S_{c-x} \quad (4.22)$$

Für die mittlere Speicherbelastung  $\Omega_S$  des Sekundär-speichers ist Gl.(4.8) voll gültig, wenn dort  $E_S[x,T]$  aus Gl.(4.20) und  $p_S(x,T)$  aus Gl.(4.22) eingesetzt wird. Die mittlere Wartezeit  $t_{wS}^*$  der Anforderungen im Sekundärssystem ist dann analog zu Gl.(4.9)

$$t_{wS}^* = \frac{\Omega_S}{\Lambda} \quad (4.23)$$

Gl.(4.8) in Gl.(4.23) eingesetzt

$$t_{wS}^* = \frac{1}{\Lambda} \left[ E_S[x,T] - \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ j - \sum_{x=0}^{j-1} (j-x) p_S(x,T) \right] \right] \quad (4.24)$$

$E_S[x,T]$  ist aus Gl.(4.20) bekannt,  $p_S(x,T)$  aus Gl.(4.22).

Wird die mittlere Wartezeit der Anforderungen im Primärspei-cher PSPi mit  $t_{wP_i}^*$  (aus Gl.(2.76A) berechenbar) bezeichnet, so folgt für die mittlere Wartezeit  $t_{wP}^*$  aller Anforderungen im ganzen Primärssystem durch gewichtete Summenbildung

$$t_{wP}^* = \sum_{i=1}^g \frac{\lambda_i}{\Lambda} t_{wP_i}^* \quad (4.25)$$

Die mittlere Wartezeit  $t_{WG}^*$  aller Anforderungen im Gesamtsystem ist dann

$$t_{WG}^* = t_{WP}^* + t_{WS}^* \quad , \quad \text{mit Gl.(4.25)}$$

$$t_{WG}^* = \sum_{i=1}^g \frac{\lambda_i}{\Lambda} t_{WPI}^* + t_{WS}^* \quad (4.26)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $P_S(=0)$ , daß eine Anforderung im Sekundärsystem nicht warten muß, wird ebenfalls analog zu Abschnitt IV.3.1.2 bestimmt. Auch hier gilt für die Wahrscheinlichkeit  $p_S(0,0)$ , daß kurz vor dem Takt das Sekundärsystem leer ist, die Gl.(4.12). Dann muß kurz nach dem vorhergehenden Takt das gesamte Primärsystem leer gewesen sein. Die Wahrscheinlichkeit, daß mit dem Takt, vor welchem das Sekundärsystem leer ist, überhaupt eine Anforderung ankommt, ist deshalb gleich der Wahrscheinlichkeit, daß während der vorhergehenden Taktperiode im Primärsystem eine Anforderung eingetroffen ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist  $1 - e^{-\Lambda T}$ .

Analog zu Gl.(4.14) ergibt sich dann für  $P_S(=0)$

$$P_S(=0) = \frac{1}{\Lambda T} (1 - e^{-\Lambda T}) \sum_{x=0}^c p_S(x,T) \quad (4.27)$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_S(x,T)$  können für  $x < c$  aus Gl.(4.22) entnommen werden und für  $x=c$  aus Gl.(4.21), wobei dann aber  $\text{Min}[n_i] > c$  sein muß.

Die Wartewahrscheinlichkeit im Sekundärsystem ist dann

$$P_S(>0) = 1 - P_S(=0) \quad (4.28)$$

#### IV.3.2.3 Fall $\sum_{i=1}^g n_i > c$ , aber einzelne $n_i < c$

Dieser Fall ist wesentlich komplizierter zu behandeln als die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Fälle. Ein Beispiel kann dies am besten verdeutlichen.

Der Primärspeicher PSP1 habe eine Abfrageplattzahl  $n_1 < c$ . Die Abfrageplattzahlen  $n_i$  aller anderen Primärspeicher PSPi seien größer als  $c$ . Kurz nach dem Takt sollen sich im Gesamtsystem  $x$  Anforderungen befinden, wobei  $n_1 < x < c$  sein soll. Dann können sich entweder alle  $x$  Anforderungen im Sekundärsystem befinden und alle Primärspeicher leer sein oder es können sich weniger

als  $x$ , aber mehr als  $n_1$  Anforderungen im Sekundärsystem befinden und der Rest kann im Primärspeicher PSP1 enthalten sein. Um angeben zu können, wieviele Anforderungen in der nächsten Taktperiode abgearbeitet werden können, genügt nun nicht die Kenntnis über den Zustand des Gesamtsystems, sondern es müßte detailliert die Verteilung der Anforderungen auf die einzelnen Speicher bekannt sein. Zur Lösung dieses Problems müßten umfangreiche Rechnungen mit mehrdimensionalen Zustandswahrscheinlichkeiten angestellt werden, welche aber hier nicht weiter verfolgt werden sollen.

Es soll vielmehr für diesen Fall im folgenden noch eine Näherungslösung für die mittlere Wartezeit  $t_{WS}^*$  im Sekundärspeicher bei symmetrischen Systemen angegeben werden. Bei symmetrischen Systemen besitzen alle Primärspeicher PSPi ( $i=1,2,\dots,g$ ) gleiche Abfrageplattzahlen  $n_i=n$  und gleiche Ankunftsrate  $\lambda_i=\lambda$ .

Die absoluten (d.h. unbedingten) Wahrscheinlichkeiten  $r(k)$ , daß pro Takt eine Gruppe von  $k$  Anforderungen vom gesamten Primärsystem an das Sekundärsystem übergeben wird, können mit Hilfe der Gleichungen (2.90) und (3.59A,B) berechnet werden. Als erste Näherung könnte man nun diese Wahrscheinlichkeiten  $r(k)$  als unabhängig voneinander in aufeinanderfolgenden Taktzeitpunkten annehmen (im Gegensatz zur Wirklichkeit, vgl. Abschn. IV.3, S.109). Dann würde das Sekundärsystem bezüglich seiner Struktur und seiner Verkehrsparameter genau mit dem in Kapitel III behandelten System übereinstimmen (vgl. Abschn. III.1, S.72) und als Näherung für die mittlere Wartezeit  $t_{WS}^*$  aller Anforderungen im Sekundärspeicher könnte Gl.(3.25B) verwendet werden. Eine große Anzahl von Simulationen auf einem Digitalrechner hat gezeigt, daß diese erste Näherung die mittleren Wartezeiten  $t_{WS}^*$  insbesondere für hohe Ankunftsrate unterschätzt. Der Grund für diese Unterschätzung kann folgendermaßen qualitativ erklärt werden: Wenn mit dem Takt von einem Primärspeicher die maximale Anzahl von  $n$  Anforderungen an das Sekundärsystem übergeben wird, so sind folgende zwei Punkte von Bedeutung:

- Erstens ist die vom Primär- zum Sekundärsystem übertragene Gruppe relativ groß, so daß direkt vor dem nächsten Takt noch relativ viele Anforderungen im Sekundärsystem enthalten sind.
- Zweitens besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, daß in dem Primärspeicher noch Anforderungen zurückgelassen werden und

deshalb mit dem nächsten Takt eine Gruppe mit mindestens einer Anforderung an das Sekundärsystem übergeben wird. Die Wartezeit der ersten Anforderung dieser Gruppe ist dann relativ groß wegen des ersten Punktes.

Bei der Näherung mit einem Modell nach Kapitel III bleibt diese Korrelation unberücksichtigt.

Die Idee für eine bessere Näherung geht deshalb davon aus, die mittlere Wartezeit der ersten Anforderung einer am Sekundärsystem ankommenden Gruppe um einen Faktor F gegenüber derjenigen bei dem Modell nach Kapitel III zu erhöhen. In Gl.(3.25B) war der erste Term  $E[x,0] \cdot h$  die mittlere Wartezeit der ersten Anforderung einer Gruppe, wogegen der restliche Term von der zusätzlichen Wartezeit der anderen Anforderungen der Gruppe herrührte. Mit Gl.(3.25B) und der obigen Überlegung folgt deshalb für die näherungsweise mittlere Wartezeit  $t_{WS}^*$ :

$$t_{WS}^* = F \cdot E[x,0] \cdot h + \frac{1}{2} \left( \frac{\text{Var}[k]}{E[k]} + E[k] - 1 \right) \cdot h \quad (4.29)$$

Der Faktor F in Gl.(4.29) berücksichtigt die oben erwähnte Korrelation. Als ein Maß für diese Korrelation kann die Wahrscheinlichkeit angesehen werden, daß mindestens eine Anforderung direkt nach dem Takt im Primärsystem zurückgelassen wird, d.h. daß das Primärsystem mindestens eine Anforderung zur Zeit  $t_v=T$  vor dem nächsten Takt enthält. Wegen der Annahme eines symmetrischen Systems ist diese Wahrscheinlichkeit gleich

$$1 - (p_p(0,T))^R,$$

wobei  $p_p(0,T)$  die Wahrscheinlichkeit ist, daß ein Primärspeicher zur Zeit  $t_v=T$  vor dem nächsten Takt 0 Anforderungen enthält (aus Gl.(2.83) mit  $x=0$  und  $t_v=T$ ). Mit Hilfe einer großen Anzahl von Simulationen hat sich nun gezeigt, daß der Faktor F allgemein angenommen werden kann als

$$F = 1 + 1,9 \left[ 1 - (p_p(0,T))^R \right] \quad (4.30)$$

Der Faktor F aus Gl.(4.30) kann jetzt in Gl.(4.29) eingesetzt werden. Alle anderen Größen auf der rechten Seite von Gl.(4.29) werden wie bei dem Modell nach Kapitel III berechnet, d.h. also mit den Gleichungen (3.20C), (3.11C) und der Beziehung für  $\text{Var}[k]$  auf S.82 unten.

Die Genauigkeit dieser Näherung ist für praktische Anwendungen

ausreichend. In allen durch Simulation überprüften Fällen betrug die Differenz zwischen dem Näherungswert nach Gl.(4.29) und dem Simulationswert für  $t_{WS}^*$  weniger als 10%.

### IV.3.3 Numerische Ergebnisse und Auswertungen

#### IV.3.3.1 Mittlere Wartezeiten $t_{WS}^*$ und Wartewahrscheinlichkeit im Sekundärsystem

Die mittlere Wartezeit  $t_{WS}^*$  nach Gl.(4.24) wird genau wie die mittlere Wartezeit des in Kapitel III behandelten Systems durch eine sehr große Anzahl von Parametern beeinflusst. Im Gegensatz zu Kapitel III besteht aber hier die Möglichkeit, die mittlere Wartezeit  $t_{WS}^*$  im Sekundärsystem für ein beliebig gestaltetes Gesamtsystem unter Berücksichtigung der Bedingungen in den Abschnitten IV.3.1.2 bzw. IV.3.2.2 aus nur zwei Diagrammen zu ermitteln. Dieser Möglichkeit liegen die Gleichungen (4.23) und (4.8) zugrunde. Schreibt man Gl.(4.8) durch Einsetzen von Gl.(4.20) ausführlich an, so erhält man für die mittlere Speicherbelastung  $\Omega_S$  des Sekundärspeichers

$$\Omega_S = E_G[x,T] - \sum_{i=1}^G E_{P_i}[x,T] - \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ j - \sum_{x=0}^{j-1} (j-x) p_S(x,T) \right] \quad (4.31)$$

In Gl.(4.31) kommen nur Zustandswahrscheinlichkeiten  $p_S(x,T)$  mit  $x < c$  vor. Es kann also weiterhin noch Gl.(4.21) in Gl.(4.31) eingesetzt werden. Dann ergibt sich

$$\Omega_S = \underbrace{E_G[x,T] - \frac{1}{c} \sum_{j=1}^c \left[ j - \sum_{x=0}^{j-1} (j-x) p_G(x,T) \right]}_{GS} - \sum_{i=1}^G E_{P_i}[x,T] \quad (4.32)$$

Der in Gl.(4.32) mit GS (Gesamt-System) bezeichnete Term hängt nur vom Gesamtsystem ab. Er wird einzig und allein durch das Gesamtangebot mit der Ankunftsrate  $\Lambda$  und die Taktzeit  $T=ch$  bestimmt, nicht aber davon, wie das Primärsystem im einzelnen aussieht. Die Größe GS, welche keine direkte physikalische Bedeutung hat sondern nur ein Rechenwert ist, kann also in einem Diagramm in Abhängigkeit von der Gesamt-Ankunftsrate  $\Lambda$  dargestellt werden unter Verwendung von  $c$  als Parameter. Dieses Diagramm zeigt Bild 30.

Der zweite Term von Gl.(4.32) hängt nur allein vom Primärsystem ab. Dieser Term enthält die mittlere Schlangenlänge  $E_{Pi}[x,T]$  jedes einzelnen Primärspeichers PSPi kurz nach dem Takt, welche auch für jeden einzelnen Primärspeicher nach Gl.(2.74) mit  $t_v=T$  für sich berechenbar ist. Aus Gl.(2.74) ist auch ersichtlich, daß die mittlere Schlangenlänge  $E_{Pi}[x,T]$  nur von  $\lambda_i T$  und der Abfrageplattzahl  $n_i$  des Primärspeichers PSPi abhängt. Deshalb können die Werte für  $E_{Pi}[x,T]$  in Abhängigkeit von  $\lambda_i T$  geschlossen in einem Diagramm dargestellt werden, wobei  $n_i$  als Parameter verwendet wird. Dieses Diagramm zeigt Bild 31.

Die mittlere Speicherbelastung  $\Omega_S$  des Sekundärspeichers kann nun folgendermaßen auf einfache Art und Weise aus den Diagrammen ermittelt werden:

Zuerst wird aus Bild 30 mit den Parametern  $\Lambda$  und  $c$  der Wert von GS abgelesen. Aus Bild 31 können nacheinander die einzelnen Werte von  $E_{Pi}[x,T]$  jeweils mit den Parametern  $\lambda_i T$  und  $n_i$  abgelesen werden. Durch einfache Subtraktion dieser abgelesenen Werte  $E_{Pi}[x,T]$  von dem abgelesenen Wert GS erhält man entsprechend zu Gl.(4.32) sofort den Wert von  $\Omega_S$ . Damit ist aber auch die mittlere Wartezeit  $t_{WS}^*$  im Sekundärspeicher entsprechend zu Gl.(4.23) bekannt, nämlich

$$t_{WS}^* = \frac{\Omega_S}{\Lambda}$$

Auf diese Weise kann für ein beliebiges System mit den Einschränkungen nach Abschnitt IV.3.1.2 bzw. IV.3.2.2 sehr leicht aus den zwei Diagrammen in den Bildern 30 und 31 die mittlere Wartezeit  $t_{WS}^*$  durch eine Subtraktion und eine Division durch  $\Lambda$  gewonnen werden.

Als Beispiel für näherungsweise bestimmte mittlere Wartezeiten  $t_{WS}^*$  nach Abschnitt IV.3.2.3 soll Bild 32 dienen. Viele Tests haben gezeigt, daß bei einem Angebot von  $\Lambda \cdot h < 0,5$  die Näherung mit dem Modell nach Kapitel III für praktische Anwendungen ausreichend ist (vgl. auch gestrichelte Linie a in Bild 32). Für Angebote von  $\Lambda \cdot h \geq 0,5$  jedoch sollte die genauere Näherung nach Gl.(4.29) verwendet werden (vgl. auch durchgezogene Linie b in Bild 32).

Schließlich zeigt Bild 33 noch die Wartewahrscheinlichkeit im Sekundärsystem nach Gl.(4.28) für Systeme, bei denen jedes einzelne  $n_i$  größer als  $c$  ist. Sie hängt nur von den Parametern  $\Lambda$  und  $c$  des Gesamtsystems ab.

IV.3.3.2 Gegenseitiger Einfluß der Abfrageplattzahl  $n$  im Primärspeicher und der Taktdauer  $T$  auf die absolute mittlere Wartezeit im Gesamtsystem

In diesem Abschnitt soll eine Untersuchung entsprechend zu Abschnitt II.5.3 durchgeführt werden. Der Übersichtlichkeit wegen soll das Gesamtsystem nur einen Primärspeicher enthalten. In Abschnitt II.5.3 wurde untersucht, wie sich die absolute mittlere Wartezeit in einem Primärspeicher ändert, wenn die Taktdauer erhöht wird und zugleich auch die Abfrageplattzahl  $n$  vergrößert wird und zwar derart, daß der Quotient  $n/T$  konstant bleibt. Der Grund für eine Erhöhung der Taktdauer ist in Abschnitt II.5.3 angeführt. Hier soll nun untersucht werden, wie sich die obige Maßnahme auf die absolute mittlere Wartezeit im Gesamtsystem auswirkt. Mit Hilfe der numerischen Ergebnisse aus Abschnitt IV.3.3.1 führen diese Betrachtungen zu dem Diagramm in Bild 34. Bild 34 kann entsprechend interpretiert werden wie Bild 17 in Abschnitt II.5.3. Auch hier ist es nicht ratsam, für kleine Ankunftsraten  $\lambda$  das Taktintervall  $T$  und die Abfrageplattzahl  $n$  des Primärspeichers zu erhöhen (also z.B. von Kurve 1 auf Kurve 2 überzugehen), da die absolute mittlere Wartezeit im Gesamtsystem dann relativ gesehen sehr stark ansteigt. Bei großen Ankunftsraten  $\lambda$  aber steigt die absolute mittlere Wartezeit im Gesamtsystem bei Erhöhung von  $n$  und  $T$  relativ gesehen nur wenig an, obwohl die Anzahl von Takten pro Zeiteinheit und damit die Anzahl von Unterbrechungen pro Zeiteinheit in der Zentraleinheit erheblich herabgesetzt wird. Dieser Effekt ist hier allerdings weniger stark ausgeprägt als bei der entsprechenden Betrachtung der absoluten mittleren Wartezeit nur innerhalb eines Primärspeichers (vgl. Bild 17 in Abschnitt II.5.3).

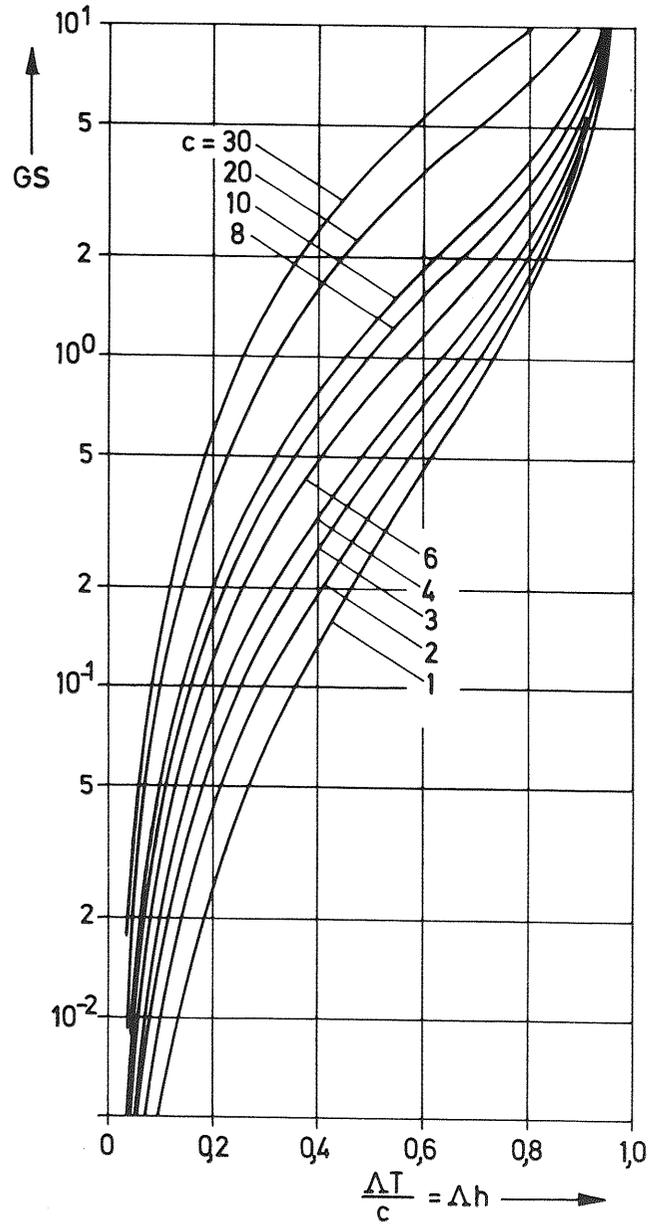


Bild 30: Term  $GS$  von Gl.(4.32) zur Bestimmung der mittleren Wartezeit  $t_{WS}^*$

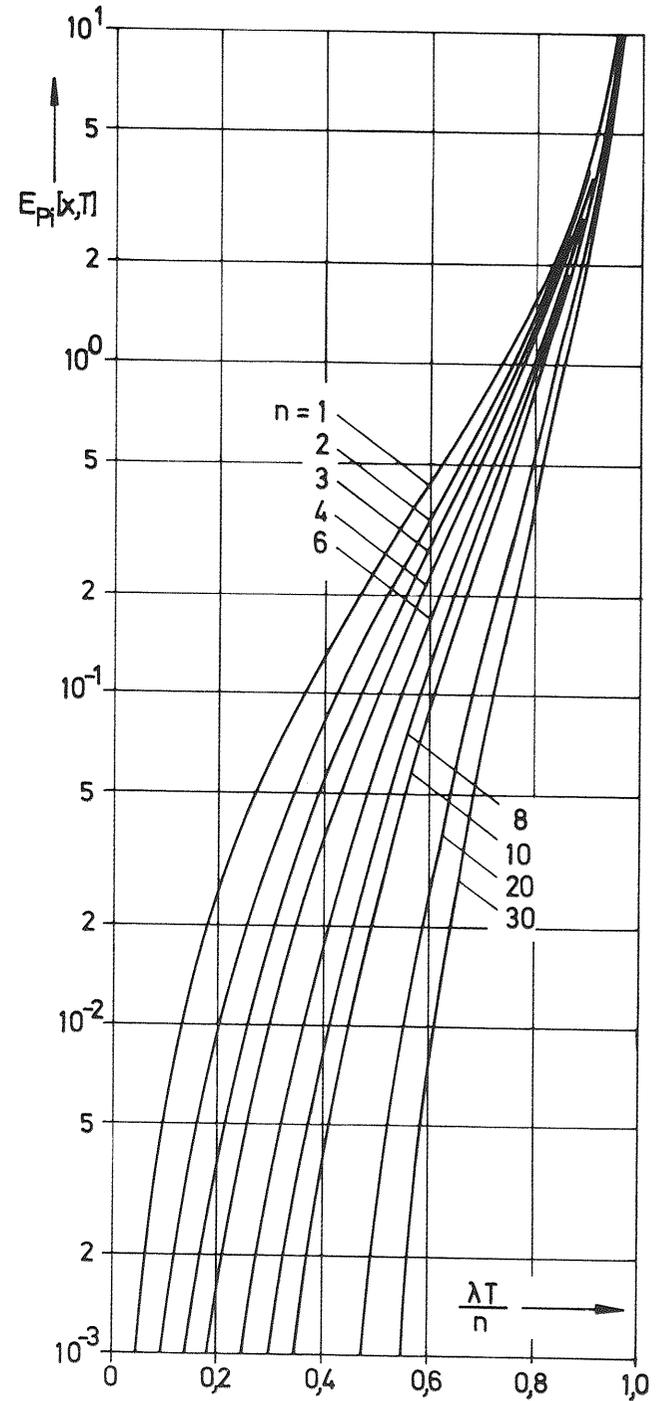


Bild 31: Mittl. Schlängelänge  $E_{P_i}[x,T]$  eines Primärsp. i kurz nach dem Takt (zur Bestimmung der mittl. Wartezeit  $t_{WS}^*$ )

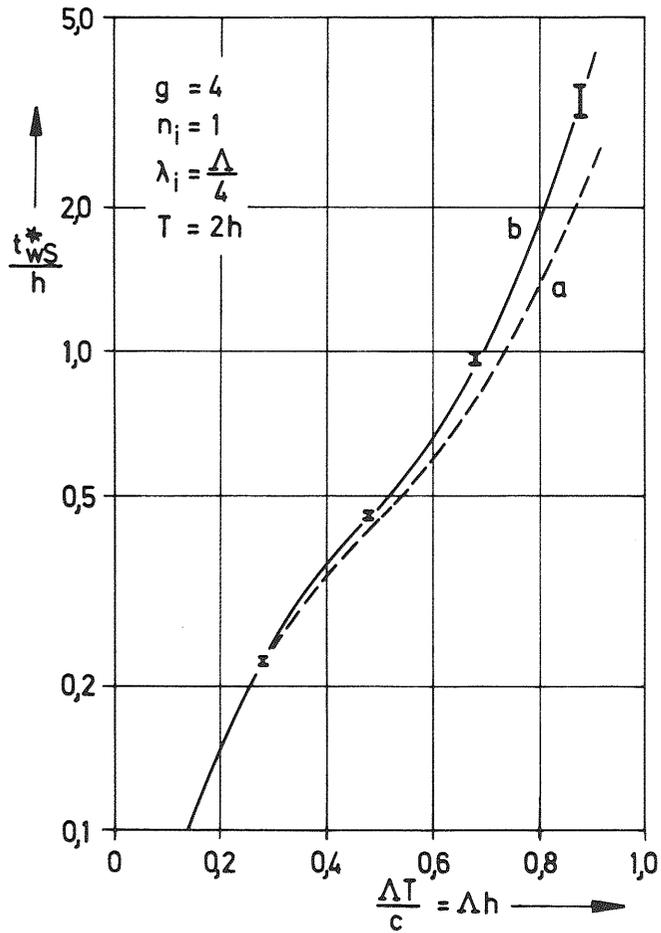


Bild 32: Näherungsweise mittlere Wartezeit  $t_{WS}^*$  im Sekundär-  
 speicher eines symmetrischen Systems  
**I** Simulationswerte (95%-Vertrauensintervall)  
 Gestrichelte Linie a: Näherung mit Modell von  
 Kapitel III  
 Durchgezogene Linie b: Näherung nach Gl.(4.29)

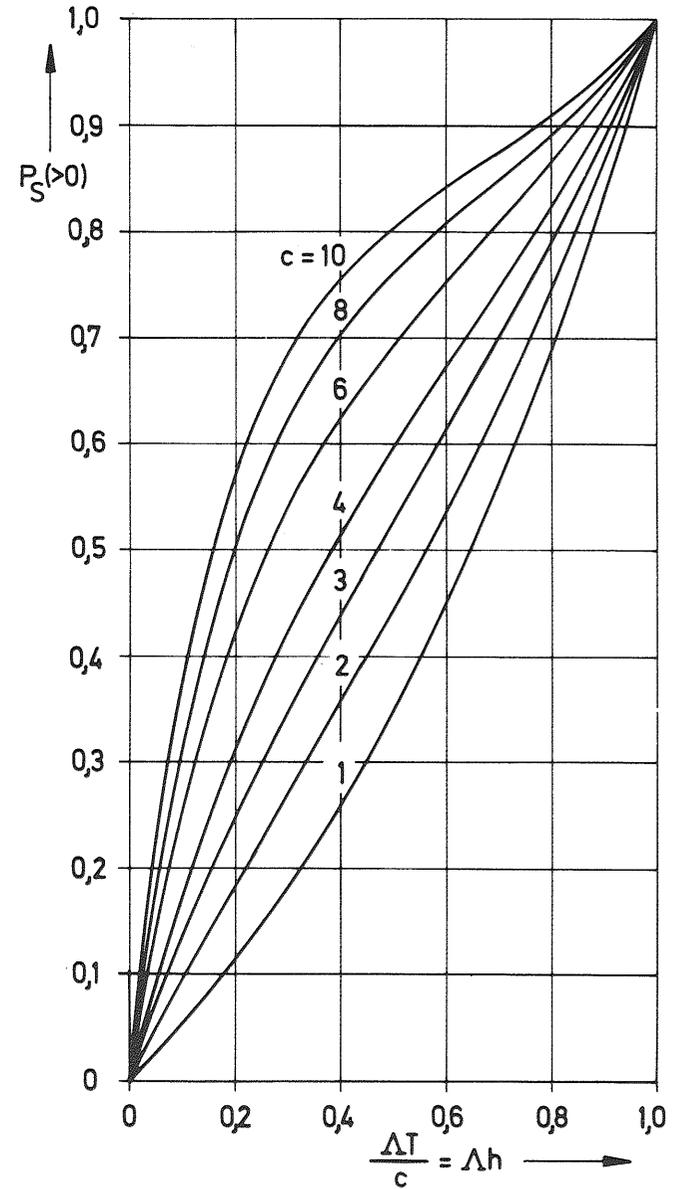


Bild 33: Wartewahrscheinlichkeit  $P_S(>0)$  im Sekundärsystem  
 für Gesamtsysteme mit  $c < \text{Min}[n_i]$

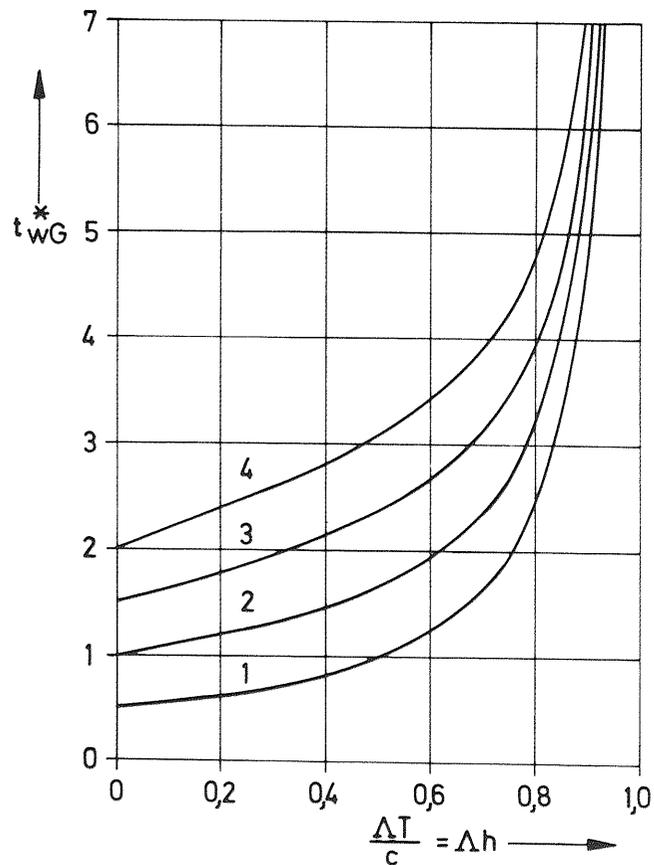


Bild 34: Absolute mittlere Wartezeit im Gesamtsystem nach Bild 27 mit 1 Primärspeicher ( $t_{WG}^*$  und  $T$  in Zeiteinheiten,  $h=1$  Zeiteinheit)

- Kurve 1:  $n=1, T=1, c=1,$
- Kurve 2:  $n=2, T=2, c=2,$
- Kurve 3:  $n=3, T=3, c=3,$
- Kurve 4:  $n=4, T=4, c=4.$

ZUSAMMENFASSUNG

In Rechnersystemen bzw. rechnergesteuerten Systemen werden häufig die Informationen zwischen einzelnen Baueinheiten taktmäßig ausgetauscht (z.B. zwischen Peripherie und Zentraleinheit) bzw. verarbeitet. In dieser Arbeit wurden drei prinzipielle Modelle von Wartesystemen vorgestellt, welche durch einen Takt beeinflusst werden.

Im ersten Modell treffen zufallsmäßig die Informationen einzeln an einem Speicher ein und sie werden jeweils in Gruppen in Taktzeitpunkten mit konstantem Abstand aus dem Speicher abgeholt.

Im zweiten Modell treffen in Taktzeitpunkten mit konstantem Abstand Gruppen von Informationen mit beliebig vorgegebener Verteilung der Gruppengrößen (0 bis Maximalwert  $m$ ) an einem Pufferspeicher ein. Die wartenden Informationen werden hier einzeln seriell von einer Bedienungseinheit abgearbeitet.

Für die beiden obigen Modelle wurden exakte, explizite Lösungen für die folgenden charakteristischen Verkehrsgrößen ermittelt: Mittlere Schlangenlängen zu beliebigem Zeitpunkt, mittlere Wartezeiten, Zustandswahrscheinlichkeiten zu beliebigem Zeitpunkt, Wartewahrscheinlichkeit und Wartezeitverteilung.

Das dritte, komplexere Modell stellt ein zweistufiges Wartesystem dar. Insgesamt  $g$  parallele Wartespeicher, Primärspeicher PSP genannt, werden gleichzeitig durch einen Takt nach wartenden Informationen abgefragt. In jedem Taktzeitpunkt wird aus jedem einzelnen Primärspeicher eine Gruppe von Informationen entnommen und in einen Pufferspeicher, den sogenannten Sekundärspeicher SSP, transferiert. Die im Sekundärspeicher befindlichen Informationen werden einzeln seriell durch eine zentrale Bedienungseinheit abgearbeitet. Sämtliche oben genannten charakteristischen Verkehrsgrößen können für jeden einzelnen Primärspeicher direkt aus dem ersten Modell entnommen werden. Für das Sekundärsystem allerdings ist eine Übernahme der Ergebnisse aus dem zweiten Modell nicht möglich auf Grund einer gewissen Abhängigkeit des Sekundärsystems vom

Primärssystem. Deshalb wurden für das Sekundärssystem noch für bestimmte Kombinationen der Strukturparameter die folgenden charakteristischen Verkehrsgrößen exakt bestimmt: Mittlere Speicherbelastung, mittlere Wartezeit und Wartewahrscheinlichkeit. Für die restlichen Kombinationen der Strukturparameter wurde eine Näherungsformel für die bei praktischen Anwendungen besonders wichtige mittlere Wartezeit im Sekundärspeicher angegeben. Exakte Ergebnisse wären in diesen Fällen nur durch die Verwendung mehrdimensionaler Zustandswahrscheinlichkeiten erreichbar.

Sämtliche oben erwähnten Ergebnisse wurden mit Hilfe der Methode der eingebetteten Markoff-Ketten und mit erzeugenden Funktionen der Zustandswahrscheinlichkeiten gewonnen.

Alle theoretischen Ergebnisse, welche für praktische Anwendungen von besonderem Interesse sind, wie z.B. mittlere Wartezeiten und Wartezeitverteilungen, wurden auch numerisch ausgewertet und so weit wie möglich in Diagrammen dargestellt.

Die analytische Behandlung des Verkehrs innerhalb großer, komplexer Rechnersysteme ist heute noch nicht exakt durchführbar. Um sich trotzdem ein Bild über das Verkehrsverhalten solcher Systeme zu machen bzw. Dimensionierungsfragen zu beantworten, ist man gezwungen, einzelne Teilprobleme herauszugreifen und somit Teilsysteme zu berechnen. Viele solche speziellen Probleme z.B. in rechnergesteuerten Nachrichtenvermittlungssystemen, in Datenübertragungssystemen oder in Prozeßrechnersystemen etc. können zum Teil exakt, zum Teil wenigstens näherungsweise auf eines der in dieser Arbeit vorgestellten Modelle zurückgeführt werden.

ANHANG 1

Bestimmung der erzeugenden Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten aus dem Gleichungssystem der Zustandswahrscheinlichkeiten in Gl.(2.34)

In diesem Anhang soll gezeigt werden, daß durch Einsetzen von Gl.(2.34) in Gl.(2.35) die erzeugende Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten nach Gl.(2.45B) entsteht.

Gl.(2.34) in Gl.(2.35) eingesetzt ergibt

$$G_x(z, t_v) = e^{-\lambda T} \left[ p(0, t_v) \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda t_n)^x}{x!} z^x}_{e^{\lambda t_n z}} + p(0, t_v) \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{k_v=1}^{x+1} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} \cdot \frac{(\lambda t_n)^{x-k_v+1}}{(x-k_v+1)!} z^x + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=1}^{x+1} p(v, t_v) \frac{(\lambda T)^{x-v+1}}{(x-v+1)!} z^x \right]$$

Der erste Summenausdruck in der eckigen Klammer stellt die Reihenentwicklung von  $e^{\lambda t_n z}$  dar. Die beiden Doppelsummen werden noch mit Hilfe von Bild 35 umgeordnet.

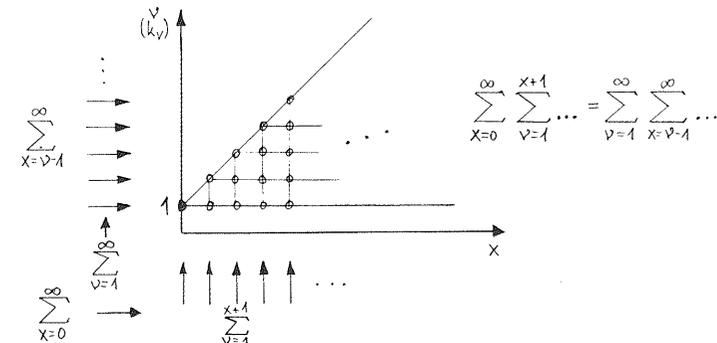


Bild 35: Umordnung der Doppelsummen

$$G_x(z, t_v) = e^{-\lambda T} \left[ p(0, t_v) e^{\lambda t_n z} + p(0, t_v) \sum_{k_v=1}^{\infty} \sum_{x=k_v-1}^{\infty} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} \cdot \frac{(\lambda t_n)^{x-k_v+1}}{(x-k_v+1)!} z^x + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{x=v-1}^{\infty} p(v, t_v) \frac{(\lambda T)^{x-v+1}}{(x-v+1)!} z^x \right]$$

Die von der Laufvariablen x der inneren Summe unabhängigen Teile der Doppelsummen können vor die innere Summe gezogen und mit  $z^{k_v-1}$  bzw.  $z^{v-1}$  erweitert werden:

$$G_x(z, t_v) = e^{-\lambda T} \left[ p(0, t_v) e^{\lambda t_n z} + p(0, t_v) \sum_{k_v=1}^{\infty} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} z^{k_v-1} \underbrace{\sum_{x-k_v+1=0}^{\infty} \frac{(\lambda t_n z)^{x-k_v+1}}{(x-k_v+1)!}}_{e^{\lambda t_n z}} \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^{\infty} p(v, t_v) z^{v-1} \sum_{x-v+1=0}^{\infty} \frac{(\lambda T z)^{x-v+1}}{(x-v+1)!} \right] \\ e^{\lambda T z} = e^{\lambda t_n z} e^{\lambda t_v z}$$

$$G_x(z, t_v) = e^{-\lambda T} e^{\lambda t_n z} \left[ p(0, t_v) + p(0, t_v) z^{-1} \sum_{k_v=1}^{\infty} \frac{(\lambda t_v)^{k_v}}{k_v!} z^{k_v} + e^{\lambda t_v z} z^{-1} \sum_{v=1}^{\infty} p(v, t_v) z^v \right]$$

$$G_x(z, t_v) = e^{\lambda(t_n z - T)} \left[ p(0, t_v) + p(0, t_v) z^{-1} (e^{\lambda t_v z} - 1) + e^{\lambda t_v z} z^{-1} (G_x(z, t_v) - p(0, t_v)) \right]$$

$$G_x(z, t_v) = e^{\lambda(t_n z - T)} p(0, t_v) \left(1 - \frac{1}{z}\right) + e^{\lambda(t_n z - T)} e^{\lambda t_v z} \frac{G_x(z, t_v)}{z}$$

$$G_x(z, t_v) \left(1 - \frac{e^{\lambda T(z-1)}}{z}\right) = e^{\lambda(t_n z - T)} p(0, t_v) \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

$$G_x(z, t_v) = \frac{p(0, t_v)(z-1)}{z - e^{\lambda T(z-1)}} e^{\lambda(t_n z - T)}$$

Die unbekannte Zustandswahrscheinlichkeit  $p(0, t_v)$  wird mittels der Normierungsbedingung  $G_x(1, t_v) = 1$  eliminiert unter Verwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{p(0, t_v)(z-1)}{z - e^{\lambda T(z-1)}} e^{\lambda(t_n z - T)} = p(0, t_v) e^{\lambda(t_n - T)} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 - \lambda T e^{\lambda T(z-1)}}$$

$$= p(0, t_v) e^{\lambda(t_n - T)} \frac{1}{1 - \lambda T} = 1$$

$$p(0, t_v) = (1 - \lambda T) e^{\lambda(T - t_n)}$$

Damit wird die erzeugende Funktion

$$G_x(z, t_v) = (1 - \lambda T) \frac{z-1}{z - e^{\lambda T(z-1)}} e^{\lambda t_n(z-1)}$$

Diese Formel für  $G_x(z, t_v)$  ist identisch mit Gl.(2.45B).

ANHANG 2

Bestimmung der expliziten Formel für die Wartezeitverteilung im Fall  $n=1$  aus dem Lösungsansatz in Kapitel II.2.5

Gl.(2.57C) ist der Ansatz für die Wartezeitverteilungsfunktion. Diese Gleichung besteht aus Integralausdrücken der Form

$$I = \int_0^t p(x, t_v) dt_v$$

Es wird deshalb zuerst das Integral I durch Einsetzen der Zustandswahrscheinlichkeiten  $p(x, t_v)$  aus Gl.(2.51) berechnet.

$$I = \int_0^t (1 - \lambda T) \left[ e^{\lambda(xT+t_v)} - \sum_{j=0}^{x-1} e^{\lambda(jT+t_v)} \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{x-1-j}}{(x-1-j)!} \left( \frac{\lambda(jT+t_v)}{x-j} + 1 \right) \right] dt_v$$

$$I = (1 - \lambda T) \left[ e^{\lambda x T} \int_0^t e^{\lambda t_v} dt_v + \underbrace{\int_0^t \sum_{j=0}^{x-1} \frac{(-\lambda)^{x-j}}{(x-j)!} (jT+t_v)^{x-j} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v}_{I1} \right. \\ \left. - \int_0^t \sum_{j=0}^{x-1} \frac{(-\lambda)^{x-1-j}}{(x-1-j)!} (jT+t_v)^{x-1-j} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v \right] \quad (A.1)$$

Der in Gl.(A.1) mit I1 bezeichnete Term setzt sich aus Integralen der Form  $K \int u^a e^{bu} du$  zusammen (K, a, b sind Konstanten). Diese Integrale werden mit Hilfe der partiellen Integration umgeformt. Für den Ausdruck I1 erhält man dabei

$$I1 = \sum_{j=0}^{x-1} \frac{(-\lambda)^{x-j}}{(x-j)!} (jT+t_v)^{x-j} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda(jT+t_v)} \Big|_0^t - \int_0^t \sum_{j=0}^{x-1} \frac{(x-j)(-\lambda)^{x-j}}{(x-j)!} (jT+t_v)^{x-1-j} \frac{1}{\lambda} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v$$

$$I1 = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{x-1} \frac{(-\lambda)^{x-j}}{(x-j)!} (jT+t) e^{\lambda(jT+t)} - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{x-1} \frac{(-\lambda)^{x-j}}{(x-j)!} (jT) e^{\lambda j T} \\ + \int_0^t \sum_{j=0}^{x-1} \frac{(-\lambda)^{x-1-j}}{(x-1-j)!} (jT+t_v)^{x-1-j} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v \quad (A.2)$$

Setzt man Gl.(A.2) in Gl.(A.1) ein, so hebt sich der letzte Term von I1 gegen den letzten Term von I weg und man erhält

$$I = \int_0^t p(x,t_v) dt_v = (1-\lambda T) \left[ e^{\lambda T} \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{x-1} \frac{(-\lambda)^{x-j}}{(x-j)!} e^{j\lambda T} [(j+1)T]^x e^{\lambda t - (j+1)\lambda T} \right] \quad (A.3)$$

Mit Gl.(A.3) kann nun  $P(\leq wT)$  nach Gl.(2.57B) bestimmt werden, wenn in Gl.(A.3)  $t=T$  und  $x=v$  gesetzt wird

$$P(\leq wT) = \frac{1-\lambda T}{\lambda T} \left[ \underbrace{e^{\lambda T} (1 - e^{w\lambda T})}_{T1} + \underbrace{\sum_{v=0}^{w-1} \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(-\lambda)^{v-j}}{(v-j)!} e^{j\lambda T} [(j+1)T]^v e^{\lambda T - (j+1)\lambda T}}_{T2} \right] \quad (A.4)$$

Der mit T1 bezeichnete Term ist eine endliche geometrische Reihe mit w Gliedern. Ihre Summe ist

$$T1 = (e^{\lambda T} - 1) \frac{1 - (e^{w\lambda T} - 1)}{e^{\lambda T} - 1}$$

$$T1 = e^{w\lambda T} - 1 \quad (A.5)$$

Der in Gl.(A.4) mit T2 bezeichnete Term ist in ausführlicher Schreibweise

$$T2 = \sum_{j=0}^{w-2} \frac{(-\lambda)^{w-1-j}}{(w-1-j)!} [(j+1)T]^{w-1-j} e^{(j+1)\lambda T} - \sum_{j=0}^{w-2} \frac{(-\lambda)^{w-1-j}}{(w-1-j)!} (jT)^{w-1-j} e^{j\lambda T} \quad \leftarrow \text{von } v=w-1$$

$$+ \sum_{j=0}^{w-3} \frac{(-\lambda)^{w-2-j}}{(w-2-j)!} [(j+1)T]^{w-2-j} e^{(j+1)\lambda T} - \sum_{j=0}^{w-3} \frac{(-\lambda)^{w-2-j}}{(w-2-j)!} (jT)^{w-2-j} e^{j\lambda T} \quad \leftarrow \text{von } v=w-2$$

$$+ \sum_{j=0}^{w-4} \frac{(-\lambda)^{w-3-j}}{(w-3-j)!} [(j+1)T]^{w-3-j} e^{(j+1)\lambda T} - \sum_{j=0}^{w-4} \frac{(-\lambda)^{w-3-j}}{(w-3-j)!} (jT)^{w-3-j} e^{j\lambda T} \quad \leftarrow \text{von } v=w-3$$

$$+ \dots$$

$$+ \sum_{j=0}^0 \frac{(-\lambda)^{1-j}}{(1-j)!} [(j+1)T]^{1-j} e^{(j+1)\lambda T} - \underbrace{\sum_{j=0}^0 \frac{(-\lambda)^{1-j}}{(1-j)!} (jT)^{1-j} e^{j\lambda T}}_0 \quad \leftarrow \text{von } v=1$$

$v=0$   
entfällt

In der zweiten Summe jeder Zeile wird jeweils das Glied mit  $j=0$  ebenfalls gleich 0. Deshalb kann man die zweiten Summen jeder Zeile erst bei  $j=1$  beginnen lassen. Führt man dann noch eine Substitution der Laufvariablen  $j_{alt}=j_{neu}+1$  durch, so ergibt sich für T2

$$T2 = \sum_{j=0}^{w-2} \frac{(-\lambda)^{w-1-j}}{(w-1-j)!} [(j+1)T]^{w-1-j} e^{(j+1)\lambda T} - \sum_{j=0}^{w-3} \frac{(-\lambda)^{w-2-j}}{(w-2-j)!} [(j+1)T]^{w-2-j} e^{(j+1)\lambda T}$$

$\swarrow$  hebt sich weg

$$+ \sum_{j=0}^{w-3} \frac{(-\lambda)^{w-2-j}}{(w-2-j)!} [(j+1)T]^{w-2-j} e^{(j+1)\lambda T} - \sum_{j=0}^{w-4} \frac{(-\lambda)^{w-3-j}}{(w-3-j)!} [(j+1)T]^{w-3-j} e^{(j+1)\lambda T}$$

$\swarrow$  hebt sich weg

$$+ \sum_{j=0}^{w-4} \frac{(-\lambda)^{w-3-j}}{(w-3-j)!} [(j+1)T]^{w-3-j} e^{(j+1)\lambda T} - \sum_{j=0}^{w-5} \frac{(-\lambda)^{w-4-j}}{(w-4-j)!} [(j+1)T]^{w-4-j} e^{(j+1)\lambda T}$$

$\swarrow$  hebt sich weg

$$+ \dots$$

$\swarrow$  hebt sich weg

$$+ \sum_{j=0}^0 \frac{(-\lambda)^{1-j}}{(1-j)!} [(j+1)T]^{1-j} e^{(j+1)\lambda T}$$

Der zweite Term in jeder Zeile hebt sich jeweils gegen den ersten Term der nächsten Zeile weg. Es bleibt lediglich übrig

$$T2 = \sum_{j=0}^{w-2} \frac{(-\lambda)^{w-1-j}}{(w-1-j)!} [(j+1)T]^{w-1-j} e^{(j+1)\lambda T} \quad (A.6)$$

Gl.(A.5) und Gl.(A.6) in Gl.(A.4) eingesetzt ergibt

$$P(\leq wT) = \frac{1-\lambda T}{\lambda T} \left[ e^{w\lambda T} - 1 + \sum_{j=0}^{w-2} \frac{(-\lambda)^{w-1-j}}{(w-1-j)!} [(j+1)T]^{w-1-j} e^{(j+1)\lambda T} \right] \quad (A.7)$$

Schließlich wird noch Gl.(A.7) und Gl.(A.3) mit  $t=t_v$  in Gl.(2.57A) eingesetzt

$$P(\leq wT+t_v) = \frac{1-\lambda T}{\lambda T} \left[ e^{w\lambda T} (e^{\lambda t_v} - 1) + \sum_{j=0}^{w-1} \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{w-j}}{(w-j)!} e^{\lambda(jT+t_v)} - \sum_{j=0}^{w-1} \frac{(-\lambda)^{w-j}}{(w-j)!} (jT)^{w-j} e^{j\lambda T} \right. \\ \left. + e^{w\lambda T} - 1 + \sum_{j=0}^{w-2} \frac{(-\lambda)^{w-1-j}}{(w-1-j)!} [(j+1)T]^{w-1-j} e^{(j+1)\lambda T} \right]$$

In dieser Gleichung wird für die zweite Summe in der eckigen Klammer die gleiche Umformung vorgenommen wie für die zweiten Terme jeder Zeile der obigen ausführlichen Gleichung für T2. Man erhält dann

$$P(\leq wT+t_v) = \frac{1-\lambda T}{\lambda T} \left[ e^{\lambda(wT+t_v)} + \sum_{j=0}^{w-1} \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{w-j}}{(w-j)!} e^{\lambda(jT+t_v)} - \sum_{j=0}^{w-2} \frac{(-\lambda)^{w-1-j}}{(w-1-j)!} [(j+1)T]^{w-1-j} e^{(j+1)\lambda T} \right. \\ \left. - 1 + \sum_{j=0}^{w-2} \frac{(-\lambda)^{w-1-j}}{(w-1-j)!} [(j+1)T]^{w-1-j} e^{(j+1)\lambda T} \right]$$

↙ hebt sich weg ↘

Der erste Term in der eckigen Klammer kann noch mit unter das erste Summenzeichen geschrieben werden, wenn man die Laufvariable j bis w laufen läßt.

$$P(\leq wT+t_v) = \frac{1-\lambda T}{\lambda T} \left[ \sum_{j=0}^w \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{w-j}}{(w-j)!} e^{\lambda(jT+t_v)} - 1 \right] \quad (A.8)$$

Gl.(2.58A) ist identisch mit Gl.(A.8).

ANHANG 3

Bestimmung der expliziten Formel für die Wartezeitverteilung im Fall n>1 aus dem Lösungsansatz in Kapitel II.3.5

Gl.(2.87) ist der Ansatz für die Wartezeitverteilungsfunktion im Falle n>1. Diese Gleichung besteht aus Integralausdrücken der Form

$$I = \int_0^t \sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} p(x, t_v) dt_v \quad (A.9)$$

Das Integral I nach Gl.(A.9) wird durch Einsetzen der Zustandswahrscheinlichkeiten p(x, t\_v) aus Gl.(2.83) bestimmt

$$I = \frac{\lambda T - n}{T \prod_{v=1}^{n-1} (1-z_v)} \int_0^t \left[ \sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+t_v)} \right. \\ \left. + \sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} \sum_{\mu=0}^{x-wn} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[-\lambda(wT+t_v)]^{x-wn-\mu}}{(x-wn-\mu)!} e^{\lambda(wT+t_v)} \right] dt_v$$

Es werden folgende Abkürzungen eingeführt

$$I1 = \int_0^t \sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v \quad (A.10A)$$

$$I2 = \int_0^t \sum_{x=wn}^{(w+1)n-1} \sum_{\mu=0}^{x-wn} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{[-\lambda(wT+t_v)]^{x-wn-\mu}}{(x-wn-\mu)!} e^{\lambda(wT+t_v)} dt_v \quad (A.10B)$$

Damit ist

$$I = \frac{\lambda T - n}{T \prod_{v=1}^{n-1} (1-z_v)} (I1 + I2) \quad (A.10C)$$

Zunächst wird das Integral I1 nach Gl.(A.10A) ausgewertet. Dazu werden alle Summenzeichen vor das Integralzeichen gezogen und außerdem wird das Summenzeichen mit der Laufvariablen x an die letzte Stelle gebracht und ausgeschrieben. Damit erhält man dann für I1 in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned}
 I1 = & \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{\mu} S_{n,\mu} \left[ \int_0^t \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{wn-jn-\mu}}{(wn-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v \right. \\
 & + \int_0^t \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{wn+1-jn-\mu}}{(wn+1-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v \\
 & + \dots \\
 & + \int_0^t \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{(w+1)n-2-jn-\mu}}{[(w+1)n-2-jn-\mu]!} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v \\
 & \left. + \int_0^t \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{(w+1)n-1-jn-\mu}}{[(w+1)n-1-jn-\mu]!} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v \right] \quad (A.11)
 \end{aligned}$$

Die  $n$  Integrale in der eckigen Klammer sind von der Form  $K \int_a^b u^a e^{bu} du$  ( $K, a, b$  sind Konstanten), welche mittels partieller Integration umgeformt werden können. Für das letzte Integral der eckigen Klammer gilt damit

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{(w+1)n-1-jn-\mu}}{[(w+1)n-1-jn-\mu]!} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v &= \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{(w+1)n-1-jn-\mu}}{[(w+1)n-1-jn-\mu]!} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda(jT+t_v)} \Bigg|_0^t \\
 &- \int_0^t \frac{[(w+1)n-1-jn-\mu] [-\lambda(jT+t_v)]^{(w+1)n-2-jn-\mu} \cdot (-\lambda)}{[(w+1)n-1-jn-\mu]!} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v \\
 &= \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{[-\lambda(jT+t)]^{(w+1)n-1-jn-\mu}}{[(w+1)n-1-jn-\mu]!} e^{\lambda(jT+t)} - \frac{(-j\lambda T)^{(w+1)n-1-jn-\mu}}{[(w+1)n-1-jn-\mu]!} e^{j\lambda T} \right] \\
 &+ \int_0^t \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{(w+1)n-2-jn-\mu}}{[(w+1)n-2-jn-\mu]!} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v
 \end{aligned}$$

Das Integral am Ende dieses Ausdrucks ist genau gleich wie das Integral in der vorletzten Zeile von Gl.(A.11) und kann deshalb mit diesem zu  $2 \int_0^t \dots dt_v$  zusammengefaßt werden. Dieses Integral wird wieder partiell integriert, wobei wieder als ein

Teil ein Integral entsteht, welches mit demjenigen der darüberliegenden Zeile zusammengefaßt werden kann usw. Diese Rekursion wird so lange fortgesetzt, bis man in der ersten Zeile angelangt ist. Als Formel für I1 ergibt sich dann nach einer Zusammenfassung

$$\begin{aligned}
 I1 = & \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{\mu} S_{n,\mu} \left[ \frac{1}{\lambda} \sum_{x=wn+1}^{(w+1)n-1} \frac{(w+1)n-x}{(x-jn-\mu)!} \left( [-\lambda(jT+t)]^{x-jn-\mu} e^{\lambda(jT+t)} - (-j\lambda T)^{x-jn-\mu} e^{j\lambda T} \right) \right. \\
 & \left. + n \int_0^t \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{wn-jn-\mu}}{(wn-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+t_v)} dt_v \right]
 \end{aligned}$$

Auch das letzte Integral in diesem Ausdruck kann noch durch fortgesetzte partielle Integration entsprechend wie oben gelöst werden. Man erhält dann schließlich

$$\begin{aligned}
 I1 = & \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{\mu} S_{n,\mu} \left[ \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{x=wn+1}^{(w+1)n-1} \frac{(w+1)n-x}{(x-jn-\mu)!} \left( [-\lambda(jT+t)]^{x-jn-\mu} e^{\lambda(jT+t)} - (-j\lambda T)^{x-jn-\mu} e^{j\lambda T} \right) \right. \\
 & \left. + \frac{n}{\lambda} \sum_{f=0}^{wn-jn-\mu} \frac{1}{(wn-jn-\mu-f)!} \left( [-\lambda(jT+t)]^{wn-jn-\mu-f} e^{\lambda(jT+t)} - (-j\lambda T)^{wn-jn-\mu-f} e^{j\lambda T} \right) \right] \quad (A.12)
 \end{aligned}$$

Als nächstes wird das Integral I2 nach Gl.(A.10B) berechnet. Auch hier werden alle Summenzeichen vor das Integral gezogen. Außerdem wird die Doppelsumme mit Hilfe von Bild 36 umgeordnet.

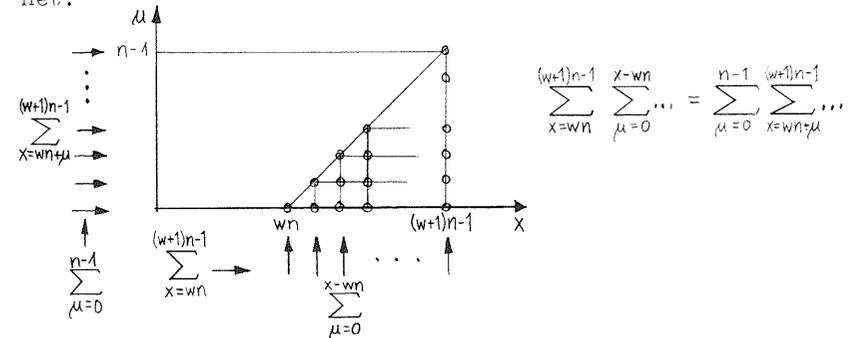


Bild 36: Umordnung der Doppelsumme

$$I_2 = \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \left[ \int_0^t \frac{[-\lambda(wT+t_v)]^0}{0!} e^{\lambda(wT+t_v)} dt_v + \int_0^t \frac{[-\lambda(wT+t_v)]^1}{1!} e^{\lambda(wT+t_v)} dt_v + \dots + \int_0^t \frac{[-\lambda(wT+t_v)]^{n-\mu-1}}{(n-\mu-1)!} e^{\lambda(wT+t_v)} dt_v \right] \quad (A.13)$$

Die  $n-\mu$  Integrale in der eckigen Klammer von Gl.(A.13) können auf die gleiche Weise durch partielle Integration wie diejenigen in Gl.(A.11) rekursiv gelöst werden, beginnend mit dem letzten Integral. Das Ergebnis lautet dann

$$I_2 = \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \left[ \frac{1}{\lambda} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} \frac{n-x-\mu}{x!} [-\lambda(wT+t)]^x e^{\lambda(wT+t)} - (w\lambda T)^x e^{w\lambda T} \right] \quad (A.14)$$

Gl.(A.12) und (A.14) können in Gl.(A.10C) eingesetzt werden. Damit ist das Integral I nach Gl.(A.9) bestimmt. Jetzt kann  $P(\leq wT)$  nach Gl.(2.86) berechnet werden, wenn in Gl.(A.12) bzw. (A.14)  $t=T$  und  $w=v$  gesetzt wird. Dazu werden noch einige Abkürzungen eingeführt. Im Zusammenhang mit Gl.(A.12) :

$$T_1 = \sum_{v=0}^{w-1} \left[ \sum_{j=0}^{v-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=vn+1}^{(v+1)n-1} [(v+1)n-x] \frac{[-\lambda(jT+T)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+T)} - \sum_{j=0}^{v-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=vn+1}^{(v+1)n-1} [(v+1)n-x] \frac{(-j\lambda T)^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{j\lambda T} \right] \quad (A.15A)$$

$$T_2 = \sum_{v=0}^{w-1} \left[ \sum_{j=0}^{v-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{n}{\lambda} \sum_{f=0}^{vn-jn-\mu} \frac{[-\lambda(jT+T)]^{vn-jn-\mu-f}}{(vn-jn-\mu-f)!} e^{\lambda(jT+T)} - \sum_{j=0}^{v-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \frac{n}{\lambda} \sum_{f=0}^{vn-jn-\mu} \frac{(-j\lambda T)^{vn-jn-\mu-f}}{(vn-jn-\mu-f)!} e^{j\lambda T} \right] \quad (A.15B)$$

Im Zusammenhang mit Gl.(A.14) :

$$T_3 = \sum_{v=0}^{w-1} \left[ \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{[-\lambda(vT+T)]^x}{x!} e^{\lambda(vT+T)} - \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{(-v\lambda T)^x}{x!} e^{v\lambda T} \right] \quad (A.15C)$$

Für  $P(\leq wT)$  nach Gl.(2.86) gilt dann unter Verwendung der Gleichungen (A.9), (A.10) und (A.15A,B,C)

$$P(\leq wT) = \frac{\lambda T}{n-1} - \frac{n}{T} \cdot \frac{1}{T} \cdot (T_1 + T_2 + T_3) \quad (A.15D)$$

Zuerst wird der Term  $T_1$  von Gl.(A.15A) berechnet. Nach der Summe mit der Laufvariablen  $v$  aufgelöst, lautet er

$$T_1 = \sum_{j=0}^{w-2} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=(w-1)n+1}^{wn-1} (wn-x) \frac{[-\lambda(jT+T)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+T)} - \sum_{j=0}^{w-2} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=(w-1)n+1}^{wn-1} (wn-x) \frac{(-j\lambda T)^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{j\lambda T} \quad \leftarrow v=w-1$$

hebt sich weg

$$+ \sum_{j=0}^{w-3} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=(w-2)n+1}^{(w-1)n-1} [(w-1)n-x] \frac{[-\lambda(jT+T)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+T)} - \sum_{j=0}^{w-3} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=(w-2)n+1}^{(w-1)n-1} [(w-1)n-x] \frac{(-j\lambda T)^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{j\lambda T} \quad \leftarrow v=w-2$$

hebt sich weg

+ ...

$$+ \sum_{j=0}^0 \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=n+1}^{2n-1} (2n-x) \frac{[-\lambda(jT+T)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+T)} - \sum_{j=0}^0 \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=n+1}^{2n-1} (2n-x) \frac{(-j\lambda T)^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{j\lambda T} \quad \leftarrow v=1$$

hebt sich weg

$$\underbrace{\sum_{j=0}^0 \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=n+1}^{2n-1} (2n-x) \frac{(-j\lambda T)^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{j\lambda T}}_0 \quad \leftarrow v=0$$

entfällt

Das gegenseitige Wegheben der einzelnen Terme, wie es in der obigen Gleichung angegeben ist, soll am Beispiel des zweiten Termes der ersten Zeile (d.h. der durch  $v=w-1$  gekennzeichneten Zeile) erläutert werden:

Das Glied mit  $j=0$  liefert keinen Beitrag (d.h. es ist 0). Deshalb kann die erste Summe auch erst bei  $j=1$  begonnen werden. Führt man dann die Substitution der Laufvariablen  $j_{alt}=j_{neu}+1$  durch, so wird aus diesem Term

$$\sum_{j=0}^{w-3} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=(w-1)n+1}^{wn-1} (wn-x) \frac{[-\lambda(j+1)T]^x (j+1)n-\mu}{[x-(j+1)n-\mu]!} e^{\lambda(j+1)T}$$

Eine weitere Substitution der Laufvariablen  $x_{alt}=x_{neu}+n$  in der innersten Summe führt auf

$$\sum_{j=0}^{w-3} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=(w-2)n+1}^{(w-1)n-1} [(w-1)n-x] \frac{[-\lambda(jT+T)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+T)}$$

Dieser Ausdruck hebt sich gegen den ersten Term der zweiten Zeile (mit  $v=w-2$  gekennzeichnet) weg. Entsprechendes gilt für die anderen Terme. Es bleibt nur der erste Term der ersten Zeile übrig, d.h.

$$T1 = \sum_{j=0}^{w-2} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=(w-1)n+1}^{wn-1} (wn-x) \frac{[-\lambda(jT+T)]^x jn-\mu}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+T)} \quad (A.16)$$

Als nächstes wird T2 von Gl.(A.15B) berechnet. Auch T2 wird nach der Summe mit der Laufvariablen  $v$  aufgelöst

$$\begin{aligned} T2 = & \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-2} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{(w-1)n-jn-\mu} \frac{[-\lambda(jT+T)]^{(w-1)n-jn-\mu-f}}{[(w-1)n-jn-\mu-f]!} e^{\lambda(jT+T)} & \leftarrow v=w-1 \\ & - \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-2} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{(w-1)n-jn-\mu} \frac{(-j\lambda T)^{(w-1)n-jn-\mu-f}}{[(w-1)n-jn-\mu-f]!} e^{j\lambda T} \\ & + \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-3} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{(w-2)n-jn-\mu} \frac{[-\lambda(jT+T)]^{(w-2)n-jn-\mu-f}}{[(w-2)n-jn-\mu-f]!} e^{\lambda(jT+T)} & \leftarrow v=w-2 \\ & - \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-3} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{(w-2)n-jn-\mu} \frac{(-j\lambda T)^{(w-2)n-jn-\mu-f}}{[(w-2)n-jn-\mu-f]!} e^{j\lambda T} \\ & + \dots \\ & + \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^0 \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{n-jn-\mu} \frac{[-\lambda(jT+T)]^{n-jn-\mu-f}}{(n-jn-\mu-f)!} e^{\lambda(jT+T)} & \leftarrow v=1 \\ & - \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^0 \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{n-jn-\mu} \frac{(-j\lambda T)^{n-jn-\mu-f}}{(n-jn-\mu-f)!} e^{j\lambda T} & \leftarrow v=0 \\ & & \text{entfällt} \end{aligned}$$

Auch hier werden wieder entsprechend wie bei T1 jeweils die zweiten Terme einer Zeile umgeformt. Die Umformung wird am Beispiel des zweiten Terms der ersten Zeile (durch  $v=w-1$  gekennzeichnet) erläutert:

Das Glied mit  $j=0$  wird aus der Summe herausgezogen. Man erhält

$$\underbrace{\frac{n}{\lambda} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu}}_{\text{von } j=0} + \frac{n}{\lambda} \sum_{j=1}^{w-2} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{(w-1)n-jn-\mu} \frac{(-j\lambda T)^{(w-1)n-jn-\mu-f}}{[(w-1)n-jn-\mu-f]!} e^{j\lambda T}$$

Es wird für die Laufvariable  $j$  wieder die Substitution  $j_{alt}=j_{neu}+1$  durchgeführt. Das ergibt

$$\underbrace{\frac{n}{\lambda} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu}}_{\text{Bleibt in jeder der } w-1 \text{ Zeilen von T2 übrig}} + \underbrace{\frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-3} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{(w-2)n-jn-\mu} \frac{[-\lambda(j+1)T]^{(w-2)n-jn-\mu-f}}{[(w-2)n-jn-\mu-f]!} e^{\lambda(j+1)T}}_{\text{Hebt sich gegen den ersten Term der nächsten Zeile weg. Entsprechendes gilt bei den anderen Zeilen von T2}}$$

Bleibt in jeder der  $w-1$  Zeilen von T2 übrig

Hebt sich gegen den ersten Term der nächsten Zeile weg. Entsprechendes gilt bei den anderen Zeilen von T2

Außerdem bleibt noch der erste Term der ersten Zeile übrig.  
T2 wird also

$$T2 = \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-2} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{(w-1)n-jn-\mu} \frac{[-\lambda(jT+T)]^{(w-1)n-jn-\mu-f}}{[(w-1)n-jn-\mu-f]!} e^{\lambda(jT+T)} - \frac{(w-1)n}{\lambda} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \quad (A.17)$$

Schließlich wird noch T3 von Gl.(A.15C) berechnet. Eine Auflösung der Summe mit der Laufvariablen v ergibt

$$T3 = \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{[-\lambda(w-1)T+T]^x}{x!} e^{\lambda[(w-1)T+T]} \quad \leftarrow v=w-1$$

$$- \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{[-\lambda(w-1)T]^x}{x!} e^{\lambda(w-1)T}$$

hebt sich weg

$$+ \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{[-\lambda(w-2)T+T]^x}{x!} e^{\lambda[(w-2)T+T]} \quad \leftarrow v=w-2$$

$$- \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{[-\lambda(w-2)T]^x}{x!} e^{\lambda(w-2)T}$$

hebt sich weg

+ . . .

hebt sich weg

$$+ \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{[-\lambda(0+T)]^x}{x!} e^{\lambda(0+T)} \quad \leftarrow v=0$$

$$- \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{(-\lambda \cdot 0)^x}{x!} e^{\lambda \cdot 0 \cdot T}$$

Bei T3 bleibt also nur der erste Term der ersten Zeile und der zweite Term der letzten Zeile übrig

$$T3 = \frac{1}{\lambda} \left[ \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{(-\lambda w T)^x}{x!} e^{\lambda w T} - \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} (n-\mu) \right] \quad (A.18)$$

Mit den Gleichungen (A.16), (A.17) und (A.18) ist dann P( $\leq wT$ ) nach Gl.(A.15D) bestimmt.

Zur Berechnung der Wartezeitverteilung P( $\leq wT+t_v$ ) nach Gl.(2.87) kann jetzt Gl.(A.15D) und Gl.(A.9) mit  $t=t_v$  herangezogen werden. Dazu werden wieder einige Abkürzungen eingeführt

$$T1^* = T1 + \text{erster Term von I1 nach Gl.(A.12) mit } t=t_v \quad (A.19A)$$

$$T2^* = T2 + \text{zweiter Term von I1 nach Gl.(A.12) mit } t=t_v \quad (A.19B)$$

$$T3^* = T3 + I2 \text{ nach Gl.(A.14) mit } t=t_v \quad (A.19C)$$

Dann ist

$$P(\leq wT+t_v) = \frac{\lambda T - n}{\prod_{v=1}^{n-1} (1-z_v)} \cdot \frac{1}{T} \cdot (T1^* + T2^* + T3^*) \quad (A.19D)$$

Zuerst wird T1\* von Gl.(A.19A) berechnet. Mit Gl.(A.16) und (A.12) erhält man aus Gl.(A.19A)

$$T1^* = \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=wn+1}^{(w+1)n-1} [(w+1)n-x] \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+t_v)} \quad \leftarrow \text{von I1}$$

$$- \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=wn+1}^{(w+1)n-1} [(w+1)n-x] \frac{(-j\lambda T)^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{j\lambda T}$$

hebt sich weg

$$+ \sum_{j=0}^{w-2} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \frac{S_{n-\mu}}{\lambda} \sum_{x=(w-1)n+1}^{(w+1)n-1} (wn-x) \frac{[-\lambda(jT+T)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+T)} \quad \leftarrow \text{von T1}$$

Die letzten beiden Terme dieses Ausdrucks heben sich gegenseitig weg, wenn man den zweiten Term des Ausdrucks genauso umformt wie die zweiten Glieder jeder Zeile von T1 (siehe S.144). Es bleibt lediglich übrig

$$T1^* = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{x=wn+1}^{(w+1)n-1} [(w+1)n-x] \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} e^{\lambda(jT+t_v)} \quad (A.20)$$

Als nächstes wird T2\* von Gl.(A.19B) berechnet. Mit Gl.(A.17) und Gl.(A.12) erhält man aus Gl.(A.19B)

$$T2^* = \left. \begin{aligned} & \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{wn-jn-\mu} \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{wn-jn-\mu-f}}{(wn-jn-\mu-f)!} e^{\lambda(jT+t_v)} \\ & - \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{wn-jn-\mu} \frac{(-j\lambda T)^{wn-jn-\mu-f}}{(wn-jn-\mu-f)!} e^{j\lambda T} \end{aligned} \right\} \leftarrow \text{von T1}$$

$$+ \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-2} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{(w-1)n-jn-\mu} \frac{[-\lambda(jT+T)]^{(w-1)n-jn-\mu-f}}{[(w-1)n-jn-\mu-f]!} e^{\lambda(jT+T)} - \frac{(w-1)n}{\lambda} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu}$$

← von T2

Wird bei diesem Ausdruck im zweiten Term das Glied mit  $j=0$  herausgezogen, so hebt sich der Rest nach einer Umformung entsprechend zu derjenigen für die zweiten Termen jeder Zeile von T2 (siehe S.145) gegen den dritten Term weg. Es bleibt dann noch übrig

$$T2^* = \frac{n}{\lambda} \sum_{j=0}^{w-1} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{f=0}^{wn-jn-\mu} \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{wn-jn-\mu-f}}{(wn-jn-\mu-f)!} e^{\lambda(jT+t_v)} - \frac{wn}{\lambda} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \quad (A.21)$$

Schließlich wird noch T3\* von Gl.(A.19C) berechnet. Mit Gl.(A.18) und Gl.(A.14) erhält man aus Gl.(A.19C)

$$T3^* = \frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{[-\lambda(wT+t_v)]^x}{x!} e^{\lambda(wT+t_v)} - \frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{x=0}^{n-1} (n-x-\mu) \frac{(w\lambda T)^x}{x!} e^{w\lambda T}$$

← hebt sich weg →

$$+ \frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{(w\lambda T)^x}{x!} e^{w\lambda T} - \frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} (n-\mu)$$

$$T3^* = \frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \sum_{x=0}^{n-\mu-1} (n-x-\mu) \frac{[-\lambda(wT+t_v)]^x}{x!} e^{\lambda(wT+t_v)} - \frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=0}^{n-1} (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} (n-\mu) \quad (A.22)$$

Die Gleichungen (A.20), (A.21) und (A.22) können jetzt in Gl.(A.19D) eingesetzt werden. Dabei werden gleichzeitig noch folgende kleine Umformungen vorgenommen:

In Gl.(A.22) kann man die Laufvariable  $\mu$  in beiden Summen anstatt nur bis  $n-1$  auch bis  $n$  laufen lassen, da für  $\mu=n$  beide

Terme zu 0 werden. Weiterhin kann der zweite Term von Gl.(A.21) und der zweite Term von Gl.(A.22) zusammengefaßt werden zu

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} [(w+1)n-\mu]$$

Außerdem kann aus sämtlichen Termen der Gleichungen (A.20), (A.21) und (A.22) der Teil

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu}$$

ausgeklammert werden.

Schließlich kann noch aus dem ersten Term von Gl.(A.21) das Glied mit  $f=0$  herausgezogen werden und bei T1\* nach Gl.(A.20) berücksichtigt werden, indem dort die Laufvariable  $x$  bereits bei  $x=wn$  beginnt.

Nach allen diesen kleineren Umformungen erhält man endgültig die folgende explizite Formel für die Wartezeitverteilungsfunktion

$$P(\leq wT+t_v) = \frac{\lambda T - n}{\prod_{v=1}^{w-1} (1-z_v)} \cdot \frac{1}{\lambda T} \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} S_{n-\mu} \left[ \sum_{j=0}^{w-1} e^{\lambda(jT+t_v)} \left( \sum_{x=wn}^{(w-1)n-1} [(w+1)n-x] \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{x-jn-\mu}}{(x-jn-\mu)!} \right. \right.$$

$$\left. \left. + n \sum_{f=1}^{(w-j)n-\mu} \frac{[-\lambda(jT+t_v)]^{(w-j)n-\mu-f}}{[(w-j)n-\mu-f]!} \right) + e^{\lambda(wT+t_v)} \sum_{x=0}^{n-1} (n-x-\mu) \frac{[-\lambda(wT+t_v)]^x}{x!} - [(w+1)n-\mu] \right] \quad (A.23)$$

Gl.(2.88) ist identisch mit Gl.(A.23).

ANHANG 4

Nachweis für c Nullstellen des Nenners von Gl.(3.8) innerhalb und auf dem Einheitskreis

Der Nachweis für c Nullstellen des Nenners von Gl.(3.8) innerhalb und auf dem Einheitskreis wird mit Hilfe des aus der Funktionentheorie bekannten Satzes von Rouché durchgeführt.

Der Satz von Rouché lautet (vgl. [26]):

Satz: Die Funktionen f(z) und g(z) mögen in einem Bereich B der z-Ebene eindeutig und analytisch erklärt sein. In dem Bereich B verlaufe eine einfachgeschlossene stetige rektifizierbare Kurve L, die einen einfach zusammenhängenden Teilbereich G von B abgrenzt. Auf L sei überall |g(z)| < |f(z)| (das enthält implizit f(z) ≠ 0). Dann besitzt f(z)+g(z) in dem von L begrenzten Teilbereich G genauso viele Nullstellen wie f(z).

Dieser Satz wird auf den Nenner von Gl.(3.8) angewendet, d.h. auf die Funktion

$$z^c - G_k(z)$$

Es werde zugeordnet

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= z^c \\ g(z) &= -G_k(z) = - \sum_{k=0}^m r(k) z^k \end{aligned} \right\} \quad (A.24)$$

Nun werden Gebiete betrachtet, welche durch konzentrische Kreise mit Radius R um den Nullpunkt begrenzt werden (ein Kreis entspricht hier der Kurve L des Satzes von Rouché).

Auf einem solchen Kreis ist

$$z = R e^{j\theta}$$

wobei j = Einheit der imaginären Achse

R = Realzahl (Radius)

$$\left. \begin{aligned} \text{Damit wird} \quad |f(z)| &= |R^c e^{jc\theta}| = R^c \\ \text{Für } g(z) \text{ gilt} \quad |g(z)| &= \left| \sum_{k=0}^m r(k) R^k \cdot e^{jk\theta} \right| \leq \sum_{k=0}^m r(k) R^k \end{aligned} \right\} \quad (A.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Es sei} \quad f(R) &= R^c, & f'(R) &= cR^{c-1} \\ g(R) &= \sum_{k=0}^m r(k) R^k, & g'(R) &= \sum_{k=0}^m kr(k) R^{k-1} \end{aligned} \right\} \quad (A.26)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Dann ist} \quad f(R)|_{R=0} &= 0, & f(R)|_{R=1} &= 1 \\ g(R)|_{R=0} &= r(0) > 0, & g(R)|_{R=1} &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (A.27)$$

f(R) und g(R) sind beide an der Stelle R=1 gleich 1. Es werden nun zwei Fälle für die Steigungen der beiden Funktionen an der Stelle R=1 unterschieden:

1. Fall  $f'(R)|_{R=1} > g'(R)|_{R=1}$ ,

daraus folgt mit Gl.(A.26)

$$c > \sum_{k=0}^m kr(k)$$

bzw.  $c > E[k]$  ( $E[k]$  = Erwartungswert von k)

Genau diese Bedingung muß aber für das statistische Gleichgewicht des Systems erfüllt sein, d.h. im Mittel müssen pro Taktintervall weniger Anforderungen eintreffen, als maximal pro Taktintervall abgefertigt werden können.

2. Fall  $f'(R)|_{R=1} \leq g'(R)|_{R=1}$ ,

daraus folgt mit Gl.(A.26)

$c \leq E[k]$  kein statistisches Gleichgewicht.

Der prinzipielle Verlauf der beiden Funktionen f(R) und g(R) ist unter Verwendung der obigen Betrachtungen in Bild 37 dargestellt.

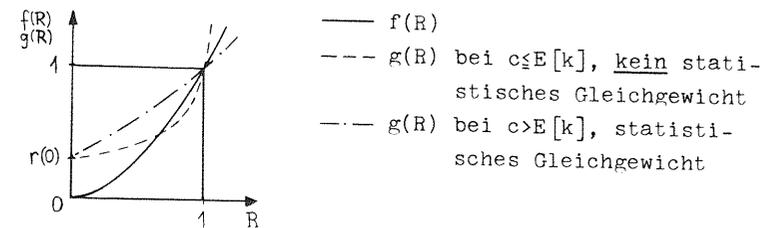


Bild 37: Prinzipieller Verlauf der Funktionen f(R) und g(R)

Man sieht aus Bild 37, daß für den Fall des statistischen Gleichgewichtes ( $c > E[k]$ ) für  $R=1+\delta$  ( $\delta > 0$ , jedoch beliebig klein)  $g(R) < f(R)$  ist. Deshalb folgt daraus mit Gl.(A.25), daß auf einem Kreis mit  $|z|=1+\delta$  überall  $|g(z)| < |f(z)|$  ist. Die Funktion  $f(z)$  nach Gl.(A.24) hat  $c$  Nullstellen innerhalb dieses Kreises, nämlich eine  $c$ -fache Nullstelle bei  $z=0$ . Dann besagt der Satz von Rouché, daß auf Grund der obigen Gegebenheiten auch die Funktion  $f(z)+g(z)$  innerhalb des Bereiches  $|z| \leq 1$  genau  $c$  Nullstellen besitzt.