IV/29

# Lecture Notes in Computer Science

Edited by G. Goos, Karlsruhe and J. Hartmanis, Ithaca

1

GI
Gesellschaft für Informatik e. V.

## 3. Jahrestagung

Hamburg, 8.–10. Oktober 1973

Springer-Verlag
Berlin · Heidelberg · New York

# VERGLEICH ZWEIER WARTESCHLANGENMODELLE FÜR REALZEIT-RECHNERSYSTEME MIT INTERRUPT- BZW. TAKT-GESTEUERTER ÜBERNAHME VON ANFORDERUNGEN AUS DER PERIPHERIE

Manfred Langenbach-Belz

## 1. EINLEITUNG

In Realzeitrechnersystemen kann die Übernahme von Anforderungen (Informationen) aus der Peripherie in die Zentraleinheit prinzipiell auf 2 Arten erfolgen:

Erstens können die Anforderungen direkt nach ihrer Entstehung in der Peripherie eine Interrupt-Meldung verursachen und anschließend sofort in die Zentraleinheit übernommen werden (interrupt-gesteuerte Eingabe). Somit ist für jede einzelne, zufallsmäßig entstehende Anforderung eine gewisse Verwaltungszeit für ihre Eingabe nötig (E/A-overhead).

Zweitens können die Anforderungen in der Peripherie zunächst nach ihrer Entstehung zwischengespeichert werden. Die Zentraleinheit kann dann von sich aus die Peripherie in bestimmtem zeitlichen Abstand nach wartenden Anforderungen abfragen und in diesen Abfragezeitpunkten ganze Gruppen von Anforderungen übernehmen. Dadurch ist eine Eingabe-Verwaltungszeit nur in den Abfragezeitpunkten erforderlich. Diese Methode wird z.B. bei modernen rechnergesteuerten Fernsprech- oder Datenvermittlungssystemen angewendet, wobei der zeitliche Abstand zwischen 2 Abfragezeitpunkten konstant ist (takt-gesteuerte Eingabe).

Die Arbeit befaßt sich mit der Frage, wie sich die obigen prinzipiellen Betriebsweisen insbesondere auf die mittleren Wartezeiten der Anforderungen auswirken. Zu diesem Zweck werden 2 Warteschlangenmodelle analytisch behandelt und deren numerische Ergebnisse einander gegenübergestellt.

## 2. BESCHREIBUNG DER BEIDEN WARTESCHLANGENMODELLE

### 2.1 Modell mit interrupt-gesteuerter Eingabe (Modell 1)

Die Anforderungen entstehen in g peripheren Geräten mit der Ankunftsrate $\lambda_i$ $(i=1,2,\ldots,g)$ in negativ-exponentiell verteilten zeitlichen Abständen. Jede in der Peripherie entstehende Anforderung hat unmittelbar eine Interrupt-Meldung an die Zentraleinheit zur Folge, welche in eine Warteschlange für Interrupt-Meldungen eingeordnet wird (vgl. Bild 1a). Die Bedienungseinheit der Zentraleinheit benötigt zur Behandlung einer Interrupt-Meldung die konstante Zeit v (Verwaltungszeit für Eingabe). Während dieser Zeit v soll auch die zugehörige Anforderung, welche seither in der Peripherie gewartet hatte, in den Speicher der Zentraleinheit geholt werden. Zur Bearbeitung einer Anforderung benötige die Bedienungseinheit die konstante Bedienungsdauer h. Die Interrupt-Meldungen haben unterbrechende Priorität gegenüber der Verarbeitung von Anforderungen. Unterbrochene Anforderungen werden später in ihrer Verarbeitung fortgesetzt. Die Warteschlangendisziplin innerhalb wartender Anforderungen bzw. Interrupt-Meldungen sei "first-in, first-out" (FIFO).

Aufgrund der oben beschriebenen Betriebsweise kann das in Bild 1a ausführlich gezeichnete Modell wie in Bild 1b vereinfacht dargestellt werden. Dabei wird angenommen, daß die Wartespeicher für Anforderungen und Interrupt-Meldungen unbegrenzt groß seien.

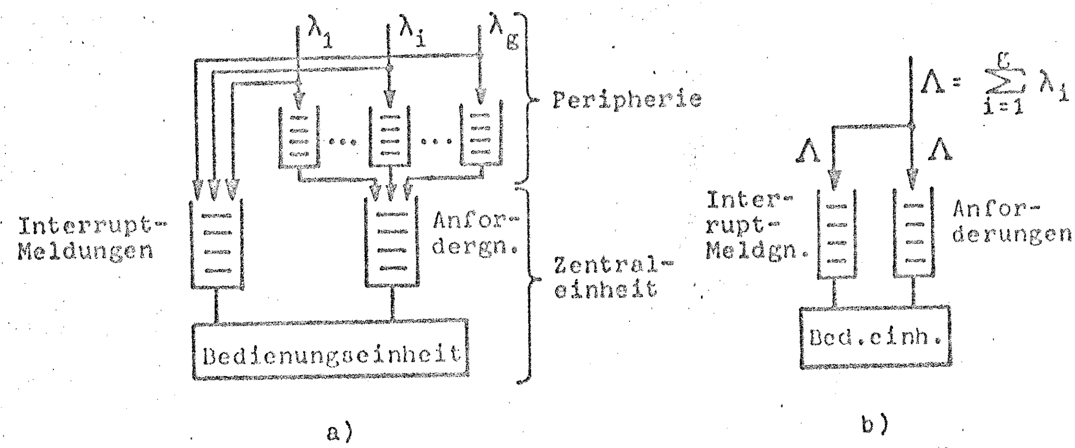


Bild 1: Warteschlangenmodell für interrupt-gesteuerte Eingabe (Modell 1)
a) ausführliches Modell b) vereinfachte Darstellung

## 2.2 Modell mit takt-gesteuerter Eingabe (Modell 2)

Die Anforderungen entstehen auch hier in negativ-exponentiell verteilten zeitlichen Abständen. Sie werden zunächst in g parallelen Primärspeichern (PS) in der Peripherie zwischengespeichert (vgl. Bild 2). Jeweils in konstanten Taktabständen T werden die Anforderungen aus den Primärspeichern in einen Pufferspeicher (Sekundärspeicher SS) der Zentraleinheit übernommen. Dabei wird allerdings pro Taktzeitpunkt aus einem Primärspeicher i eine Gruppe von max. $n_i$ Anforderungen entnommen. Befinden sich zu diesem Zeitpunkt mehr als $n_i$ Anforderungen in diesem $PS_i$, so müssen die restlichen Anforderungen weiterhin warten. Die im SS wartenden Anforderungen werden von der zentralen Bedienungseinheit nach der Disziplin FIFO einzeln abgearbeitet. Zur Bearbeitung einer Anforderung wird die konstante Bedienungsdauer h benötigt. In den Taktzeitpunkten wird die zentrale Bedienungseinheit zur Durchführung der Abfrage und Eingabe für die konstante Zeitdauer v belegt. Es wird angenommen, daß $T=v+c\cdot h$ sei, wobei c eine feste ganze Zahl ist. Alle Wartespeicher seien unbegrenzt groß. Weitere Voraussetzung sei, daß $\mathrm{Min}[n_i]\geq c$ ist, da sonst der Fall auftreten könnte, daß in einem Taktzeitpunkt noch Anforderungen in einem Primärspeicher zurückgelassen würden, andererseits die Bedienungseinheit aber bis zum nächsten Taktzeitpunkt nicht voll beschäftigt wäre.

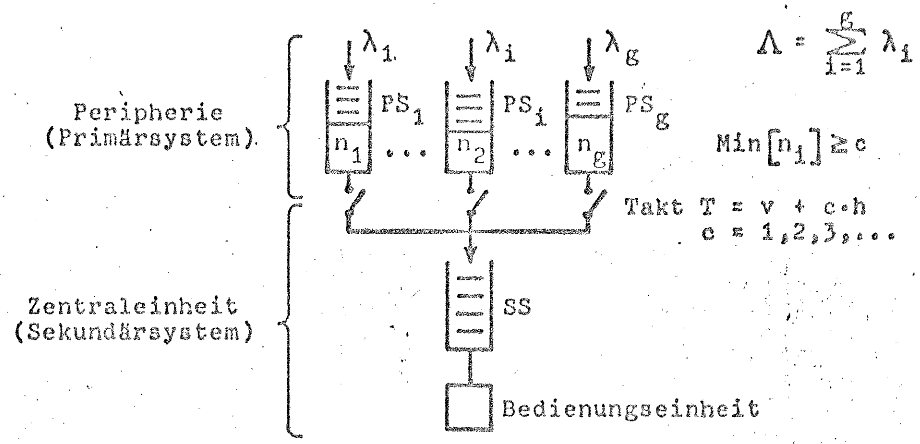


Bild 2: Warteschlangenmodell mit takt-gesteuerter Eingabe (Modell 2)

## 3. ANALYTISCHE BEHANDLUNG BEIDER MODELLE

### 3.1 Modell mit interrupt-gesteuerter Eingabe (Modell 1)

Bei Modell 1 (vgl. Bild 1) handelt es sich im Prinzip um ein Wartesystem mit 2 Prioritätsklassen. Die Prioritätsklasse p=1 enthält die Interrupt-Meldungen, welche unterbrechende Priorität gegenüber den Anforderungen in der Prioritätsklasse p=2 besitzen. Im folgenden werden die Interrupt-Meldungen deshalb allgemein als 1-Anforderungen bezeichnet und die eigentlichen Anforderungen als 2-Anforderungen.

Wegen der unterbrechenden Priorität der 1-Anforderungen gegenüber den 2-Anforderungen können sämtliche charakteristischen Verkehrsgrößen der 1-Anforderungen so bestimmt werden, als ob die 2-Anforderungen nicht vorhanden wären (Wartesystem M/D/1). Die mittlere Wartezeit aller 1-Anforderungen ist deshalb

$$w(1) = \frac{\Lambda v}{2(1-\Lambda v)}\cdot v = \frac{A(1)}{2(1-A(1))}\cdot v \qquad (1)$$

mit $A(1)=\Lambda v$=Angebot der Klasse p=1.

w(1) ist gleichzeitig diejenige Wartezeit, welche eine 2-Anforderung bis zu ihrer Übernahme in die Zentraleinheit im Mittel in der Peripherie warten muß (vgl. Bild 1a).

Die mittlere Wartezeit der 2-Anforderungen wird mittels der Momenten-Methode bestimmt (vgl. /1,2,3/). Dazu wird eine beliebige ankommende 2-Anforderung betrachtet und zunächst der Erwartungswert für ihre Durchlaufzeit $f(2)$ (Wartezeit + Bedienungszeit) ermittelt. Der Erwartungswert der Durchlaufzeit $f(2)$ setzt sich aus folgenden 5 Anteilen zusammen:

a) Mittlere Durchlaufzeit $f(1)$ der gleichzeitig mit der 2-Anforderung eintreffenden 1-Anforderung

$$f(1) = w(1) + v \tag{2}$$

b) Mittlere Restbedienungszeit $h_R$ einer 2-Anforderung, welche evtl. gerade die Bedienungseinheit belegt.

c) Mittlere Bedienungszeit $w_2(2)$ aller 2-Anforderungen, welche bei der Ankunft der 2-Anforderung bereits im System warten.

d) Bedienungszeit $h$ der betrachteten 2-Anforderung.

e) Bedienungszeit $w_1(2)$ aller während der mittleren Durchlaufzeit $f(2)$ der betrachteten 2-Anforderung im Mittel eintreffenden 1-Anforderungen.

Damit ist der Erwartungswert der Durchlaufzeit $f(2)$ von 2-Anforderungen:

$$f(2) = f(1) + h_R + w_2(2) + h + w_1(2) \tag{3}$$

In (3) müssen noch $h_R$, $w_2(2)$ und $w_1(2)$ berechnet werden.
Befindet sich bei der Ankunft einer 2-Anforderung eine 2-Anforderung in der Bedienungseinheit, so beträgt deren mittlere Restbedienungszeit $h/2$ (wegen Poisson-Ankunftsprozeß). Die Wahrscheinlichkeit, daß sich aber überhaupt eine 2-Anforderung in der Bedienungseinheit befindet, ist $A(2) = \Lambda h$. Damit ist

$$h_R = \frac{h}{2} \cdot A(2) \tag{4}$$

Zur Bestimmung von $w_2(2)$ muß man bei den wartenden 2-Anforderungen unterscheiden zwischen jenen, welche noch nicht unterbrochen wurden und jenen, die bereits einmal unterbrochen wurden. Die noch nicht unterbrochenen müssen jeweils noch ihre volle Bedienungsdauer $h$ absolvieren, während die bereits unterbrochenen im Mittel nur noch $h/2$ zur Bedienung benötigen. Der Anteil der unterbrochenen bzw. nicht unterbrochenen wartenden 2-Anforderungen kann wieder mit Hilfe der Momenten-Methode bestimmt werden, worauf hier allerdings nicht genauer eingegangen werden soll (vgl. /2/). Als Ergebnis erhält man:

$$w_2(2) = \left[f(2)-h\right] A(2) - \frac{1}{2}\,\frac{A(1)A(2)}{1-A(1)}\,h \tag{5}$$

Schließlich kommen während der mittleren Durchlaufzeit $f(2)$ einer 2-Anforderung im Mittel noch $\Lambda f(2)$ neue 1-Anforderungen an, d.h. es gilt

$$w_1(2) = \Lambda f(2) \cdot v \tag{6}$$

Setzt man (1), (2), (4), (5) und (6) in (3) ein, so kann die entstehende Gleichung nach $f(2)$ aufgelöst werden. Daraus folgt dann für die mittlere Wartezeit $w(2)=f(2)-h$ der 2-Anforderungen:

$$w(2) = \frac{h}{1-A(1)-A(2)}\left[\frac{A(1)}{2(1-A(1))}\left(\frac{v}{h} - A(2)\right) + A(1) + \frac{A(2)}{2} + \frac{v}{h}\right] \quad , \quad (7)$$

## 3.2 Modell mit takt-gesteuerter Eingabe (Modell 2)

Modell 2 (vgl. Bild 2) wurde ohne Verwaltungszeit, d.h. $v=0$, bereits in /4/ und /5/ analytisch behandelt. Deshalb soll hier nur der prinzipielle Lösungsweg angedeutet und die für den vorliegenden Bericht relevanten Ergebnisse eines Systems mit $v=0$ dargelegt werden. Darauf aufbauend werden die Ergebnisse für Systeme mit einer Verwaltungszeit $v>0$ abgeleitet.

Zur Lösung der charakteristischen Verkehrsgrößen dieses Systems wird die Methode der eingebetteten Markoff-Kette verwendet. Dabei wird der Zustand des Systems jeweils nur zu bestimmten Zeitpunkten betrachtet, im vorliegenden Fall z.B. jeweils kurz nach den Taktzeitpunkten. Mit Hilfe der Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Zustand $x_i$ nach dem Taktzeitpunkt $i$ in einen Zustand $x_{i+1}$ nach dem Taktzeitpunkt $i+1$ wird ein Gleichungssystem für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x)$ aufgestellt, mit welchem die erzeugende Funktion

$$G(z) = \sum_{x=0}^{\infty} p(x) z^x \; -$$

der Zustandswahrscheinlichkeiten ermittelt wird. Aus der erzeugenden Funktion $G(z)$ erhält man die mittlere Anzahl von Anforderungen im System als $dG(z)/dz$ an der Stelle $z=1$. Durch eine Rücktransformation der erzeugenden Funktion lassen sich explizite Formeln für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x)$ angeben.

Die charakteristischen Verkehrsgrößen eines einzelnen Primärspeichers $i$ hängen nur von der Ankunftsrate $\lambda_i$, der Abfrageplatzzahl $n_i$ und der Taktzeit $T$ ab. Somit können die entsprechenden Größen direkt von dem System ohne Verwaltungszeiten übernommen werden (vgl. /4/,/5/). Insbesondere sind hier die folgenden beiden Verkehrsgrößen für einen Primärspeicher $i$ von Interesse:

- Mittlere Anzahl von Informationen $E_{Pi}[x,T]$ in Primärspeicher $i$ kurz nach dem Takt:

$$E_{Pi}[x,T] = \sum_{\nu=1}^{n_i-1} \frac{1}{1-z_\nu} + \frac{(n_i-\lambda_i T)^2 - n_i}{2(\lambda_i T - n_i)} - \lambda_i T \quad (8)$$

wobei $z_\nu$ die n Nullstellen mit $|z_\nu| \leq 1$ der Bestimmungsgleichung $z^{n_i} e^{\lambda_i T(1-z)} - 1 = 0$ sind. ($z_0=1$ ist immer Nullstelle).

- Mittlere Wartezeit $w_{Pi}$ aller Anforderungen im Primärspeicher i:

$$w_{Pi} = \frac{1}{\lambda_i}\left[\sum_{\nu=1}^{n_i-1}\frac{1}{1-z_\nu} + \frac{n_i}{2}\left(\frac{1}{n_i-\lambda_i T} - 1\right)\right] \tag{9}$$

Über das Sekundärsystem bzw. Gesamtsystem (Sekundärsystem+Primärsystem) kann folgende Aussage gemacht werden:
In einem System mit Verwaltungszeiten (v>0) können wie in einem System ohne Verwaltungszeiten (v=0) zwischen 2 Taktzeitpunkten max. c Anforderungen bedient werden. Deshalb gelten im System mit v>0 für die Zustandswahrscheinlichkeiten und die direkt damit zusammenhängende mittlere Anzahl von Anforderungen kurz nach dem Takt dieselben Formeln wie im System mit v=0. Die mittlere Anzahl $E_G[x,T]$ von Anforderungen im Gesamtsystem kurz nach dem Takt ist dann nach /4/ bzw. /5/:

$$E_G[x,T] = \sum_{\nu=1}^{c-1}\frac{1}{1-z_\nu} + \frac{(c-\Lambda T)^2-c}{2(\Lambda T-c)} \tag{10}$$

wobei hier $z_\nu$ die c Nullstellen mit $|z_\nu| \leq 1$ der Bestimmungsgleichung $z^c \cdot e^{\Lambda T(1-z)} - 1 = 0$ sind ($z_0=1$ ist immer Nullstelle).

Die mittlere Anzahl von Anforderungen $E_S[x,T]$ im Sekundärsystem kurz nach dem Takt ist somit

$$E_S[x,T] = E_G[x,T] - \sum_{i=1}^{g} E_{Pi}[x,T] \tag{11}$$

Weiterhin erhält man nach /4/ bzw. /5/ für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p_S(x,T)$ des Sekundärsystems kurz nach dem Takt

$$p_S(x,T) = \frac{\Lambda T - c}{\prod_{\nu=1}^{c-1}(1-z_\nu)}(-1)^{c-x} S_{c-x} \qquad \underline{\text{für } x<c} \tag{12}$$

wobei $z_\nu$ wie bei Gl. (10)

und $S_1 = z_0+z_1+z_2+\ldots+z_{c-1} = \sum_{i=0}^{c-1} z_i$

$S_2 = z_0z_1+z_0z_2+\ldots+z_{c-2}z_{c-1} = \sum_{\substack{i1,i2=0\\(i1<i2)}}^{c-1} z_{i1}z_{i2}$

$\vdots$

$S_c = z_0z_1z_2\ldots z_{c-1}$

Zur Bestimmung der mittleren Speicherbelastung $\Omega_S$ des Sekundärspeichers dient nun folgende Überlegung:
Kurz nach dem Takt kann wegen der Verwaltungszeit keine Anforderung die Bedienungseinheit belegen, d.h. alle im Sekundärsystem enthaltenen Anforderungen befinden sich im Sekundärspeicher. Nach der Verwaltungszeit v kann eine Anforderung aus dem Sekundärspeicher in die Bedienungseinheit übernommen werden (falls vorhanden), nach einer Bedienungsdauer h die nächste usw. Die mittlere Schlangenlänge im Sekundärspeicher ist also eine Treppenfunktion in Abhängigkeit von der Zeit (vgl. Bild 3).

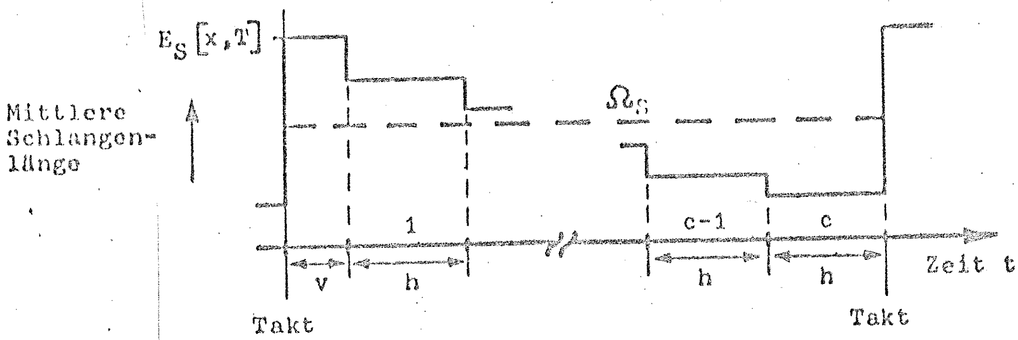


Bild 3: Mittlere Schlangenlänge im Sekundärspeicher über der Zeit

Die einzelnen Stufenhöhen der Treppenfunktion in Bild 3 werden durch die Zustandswahrscheinlichkeiten $p_S(x,T)$ kurz nach dem Takt bestimmt. Die mittlere Speicherbelastung $\Omega_S$ des Sekundärspeichers ist die über die Taktzeit T gemittelte mittlere Schlangenlänge:

$$\Omega_S = E_S[x,T] - \frac{h}{T} \sum_{j=1}^{c} \left[ j - \sum_{x=0}^{j-1} (j-x)\, p_S(x,T) \right] \tag{13}$$

$E_S[x,T]$ bzw. $p_S(x,T)$ sind aus (11) bzw. (12) bekannt.
Für die mittlere Wartezeit $w_S$ im Sekundärspeicher gilt allgemein:

$$w_S = \frac{\Omega_S}{\Lambda} \tag{14}$$

Die mittlere Gesamtwartezeit $w_G$ bezüglich aller Anforderungen im Gesamtsystem setzt sich zusammen aus der mittleren Wartezeit der Anforderungen im Primärsystem und der mittleren Wartezeit der Anforderungen im Sekundärsystem:

$$w_G = \sum_{i=1}^{g} \frac{\lambda_i}{\Lambda} w_{Pi} + w_S \tag{15}$$

Solange die Voraussetzung $\mathrm{Min}[n_i] \geq c$ erfüllt ist, ergibt sich für gleiche Gesamtankunftsrate $\Lambda$ immer die gleiche Gesamtwartezeit $w_G$, unabhängig von der Anzahl g der Primärspeicher sowie den Einzelwerten $n_i$. Die Paramter g und $n_i$ beeinflussen lediglich die Aufteilung der Gesamtwartezeit $w_G$ auf das Primär- und Sekundärsystem.

Von besonderem Interesse ist nun ein Vergleich der mittleren Wartezeit w(2) (vgl. Gl.(7)) des Modells 1 und der mittleren Wartezeit $w_G$ (vgl. Gl.(15)) des Modells 2. Dieser Vergleich wird in Abschnitt 4.1 durchführt. Ein Vergleich der Bedienungseinheitbelastung folgt in Abschn.4.2.

## 4. NUMERISCHE ERGEBNISSE UND VERGLEICH

### 4.1 Mittlere Wartezeit der Anforderungen

Im folgenden Vergleich numerischer Ergebnisse wurde davon ausgegangen, daß die Verwaltungszeiten v bei beiden Modellen gleich groß sind.

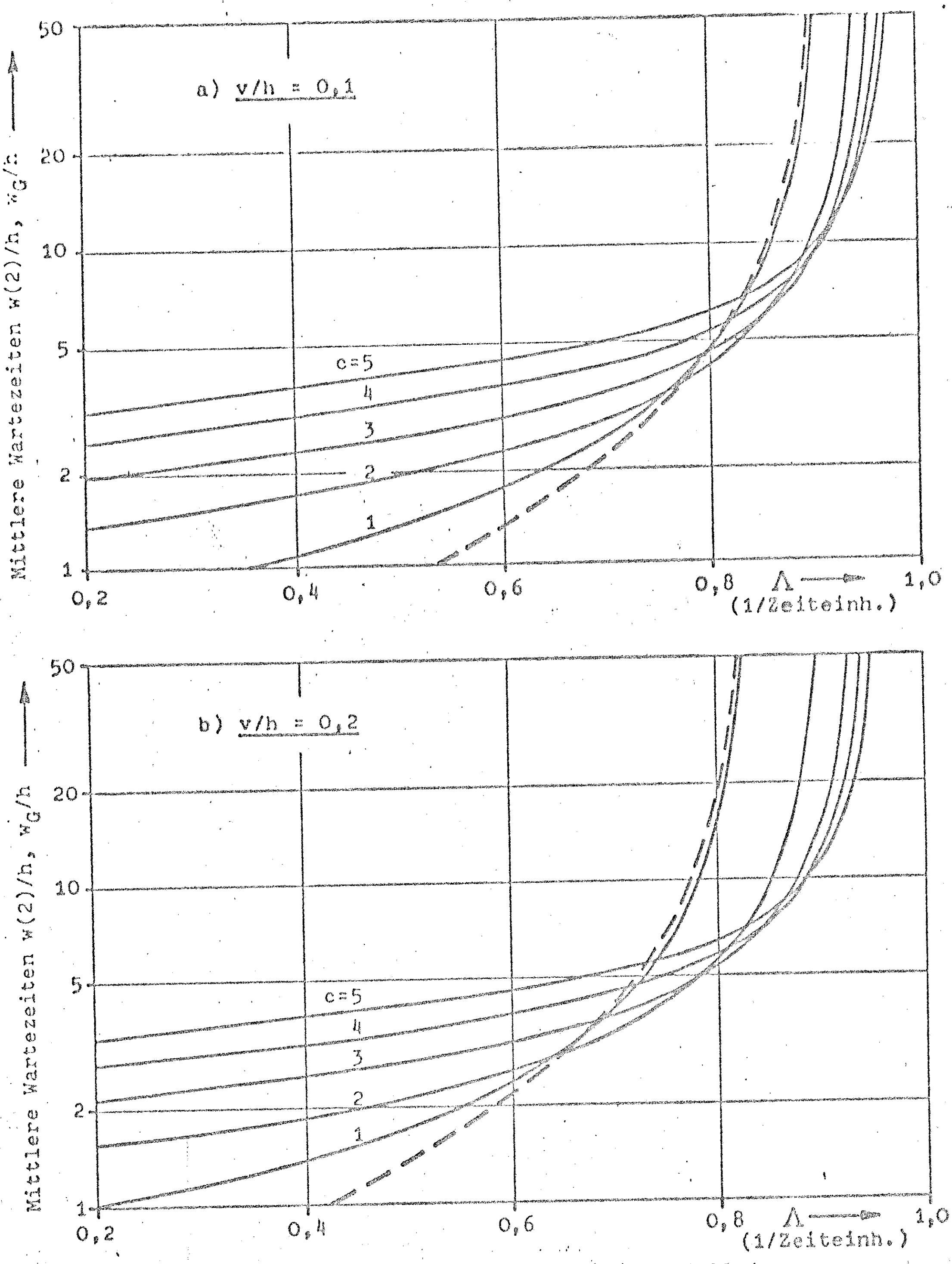


Bild 4: Mittlere Wartezeiten: — — — w(2) im Modell 1
——— $w_G$ im Modell 2
(jeweils h = 1,0 Zeiteinheiten)

Wie aus Bild 4 a),b) ersichtlich ist, liegt die mittlere Wartezeit im Modell 2 bei kleinen Ankunftsraten wesentlich höher als im Modell 1. Dies rührt daher, daß bereits die mittlere Wartezeit in der Peripherie (Primärsystem) schon $\geq T/2$ ist. Bei großen Ankunftsraten allerdings wirkt sich zu Gunsten des Modells 2 die geringere Anzahl von Verwaltungszeiten pro Zeiteinheit aus.

Da die Zentraleinheit von rechnergesteuerten Systemen meist mit hoher Belastung betrieben wird, kann aus den Diagrammen in Bild 4 gefolgert werden, daß ein Modell mit takt-gesteuerter Eingabe unempfindlicher gegen Überlastungen ist als ein Modell mit interrupt-gesteuerter Eingabe.

4.2 Belastung der Bedienungseinheit

Die Gesamtbelastung Y der Bedienungseinheit durch Anforderungen und Verwaltungszeiten ist

- bei Modell 1: $Y = A(1)+A(2) = \Lambda(v+h)$
- bei Modell 2: $Y = \frac{1}{T} v + \Lambda h$ .

Für beide Modelle ist die nur durch Anforderungen bedingte Belastung $Y_A$ der Bedienungseinheit: $Y_A = \Lambda h$

Bild 5 zeigt einen Vergleich dieser verschiedenen Belastungen.

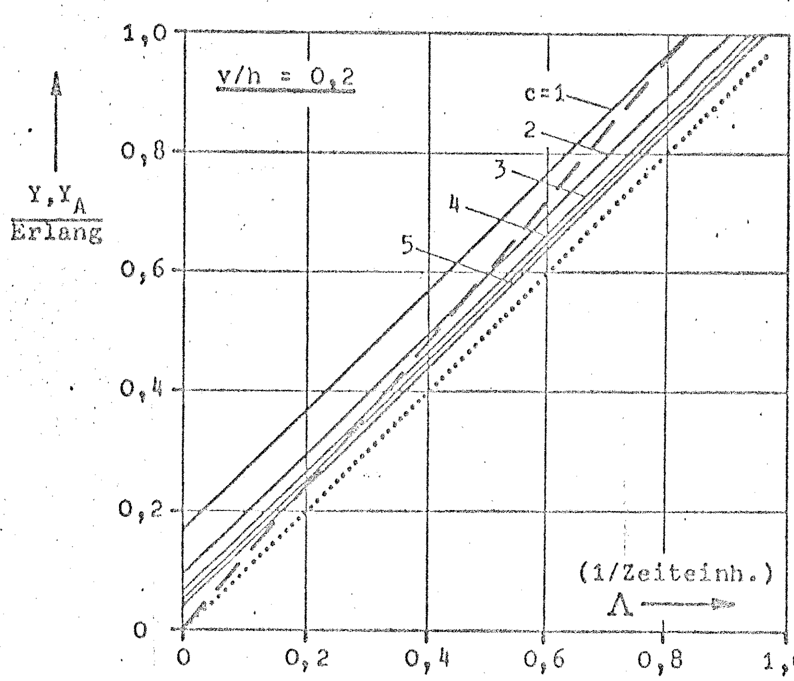


Bild 5: Belastung der Bedienungseinheit: (h=1,0 Zeiteinheiten)
— — — Y für Modell 1
——— Y für Modell 2
........ $Y_A$ für beide Modelle

Aus Bild 5 ist ersichtlich, daß im interessierenden Bereich der Ankunftsrate $\Lambda \geq 0{,}5$ die Belastung der Bedienungseinheit im Modell 2 für $c > 1$ geringer ist als im Modell 1. Das bedeutet, daß im Modell mit takt-gesteuerter Eingabe mehr Kapazitätsreserve der Bedienungseinheit z.B. für Hintergrundprogramme zur Verfügung steht.

## 5. ZUSAMMENFASSUNG

Es wurden 2 Warteschlangenmodelle für ein Realzeitrechnersystem vorgestellt, eines mit interrupt-gesteuerter und eines mit takt-gesteuerter Übernahme der Anforderungen aus der Peripherie. Bei beiden Modellen wurde eine konstante Verwaltungszeit für die Eingabeoperation vorgesehen. Nach einer Beschreibung der analytischen Behandlung beider Modelle folgte ein Vergleich der mittleren Gesamtwartezeiten von Anforderungen sowie der Belastung der Bedienungseinheit in beiden Modellen. Dabei zeigte sich, daß bei hohen Belastungen das Modell mit takt-gesteuerter Eingabe etwas günstigere Resultate aufwies als das Modell mit interrupt-gesteuerter Eingabe.

Der Autor dankt Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Lotze sowie den Herren Dr.-Ing. U. Herzog, Dr.-Ing. P. Kühn und Dipl.-Ing. H. Weisschuh für viele anregende und wertvolle Diskussionen bezüglich des behandelten Problemkreises.

## LITERATUR

/1/ Herzog,U.: Preemption-Distance Priorities in Real-Time Computer Systems. NTZ 25(1972)4, 201-203.

/2/ Herzog,U.: Verkehrsfluß in Datennetzen. Habilitationsschrift, Universität Stuttgart, 1973.

/3/ Herzog,U., Kühn,P., Zeh,A.: Klassifizierung und Analyse von Verkehrsmodellen für das Ablaufgeschehen in Rechnersystemen. Nachrichtentechnische Fachberichte, Band 44 (1972), 181-198.

/4/ Langenbach-Belz,M.: Two-Stage Queuing System with Sampled Parallel Input Queues. Congressbook "7th International Teletraffic Congress (ITC)", Stockholm, 1973, Paper 434.

/5/ Langenbach-Belz,M.: Getaktete Wartesysteme bei Rechnern und zentralgesteuerten Nachrichtenvermittlungsanlagen. Dissertationsschrift, Universität Stuttgart, 1973.