

# **Zeitdiskrete Leistungsanalyse von Zellen-Multiplexern mit begrenztem Warteraum**

Von der Fakultät für Informatik, Elektrotechnik und Informationstechnik  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde  
eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Klaus-Dieter Langer**

geb. in Grasleben

Hauptberichter:	Prof. em. Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. Paul J. Kühn
1. Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. Adam Wolisz, Techn. Universität Berlin
2. Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. Andreas Kirstädter
Tag der Einreichung:	11. Januar 2012
Tag der mündlichen Prüfung:	08. Januar 2013

Institut für Kommunikationsnetze und Rechnersysteme  
der Universität Stuttgart

2013



## Kurzfassung

Zellen-Multiplexer gehören zu den Schlüsselementen der paketorientierten Übertragungs- und Vermittlungstechnik. Vielfältige Anwendung finden sie in Kommunikationsnetzen, unter anderem in der Technik des Asynchronous Transfer Mode (ATM), sowie in den meisten paketbasierten Vermittlungseinrichtungen (Router, Switches, Gateways, etc.). Anzutreffen ist die Funktionen des Zellen-Multiplexens aber auch in vielen Bereichen außerhalb der Nachrichtentechnik.

Die Leistungsfähigkeit von Multiplexern ist in der Vergangenheit überwiegend mithilfe zeitkontinuierlicher Verfahren analysiert worden. Erkenntnisse aus Untersuchungen in diskreter Zeit, wie sie bei block- bzw. zellenweiser Übermittlung und Verarbeitung von Dateneinheiten eher angebracht wären, sind in weitaus geringerem Maße verfügbar. Solche Arbeiten basieren größtenteils auf idealisierten Annahmen, wie z.B. einem unbegrenzten Warteraum zum Zwischenspeichern von Zellen, oder sie berücksichtigen komplexe Verkehrsszenarien konkreter Telekommunikationsdienste – modelliert durch entsprechende Ankunftsprozesse auf Zellen- oder Büschelebene. Letzteres stellt für analytisch exakte Betrachtungen eine kaum überwindbare Hürde dar. So wurden die vorhandenen Ergebnisse bis auf wenige Ausnahmen mithilfe von analytischen Näherungsverfahren, numerischen Berechnungen oder Simulationen gewonnen.

Die vorliegende Arbeit widmet sich der zeitdiskreten Leistungsanalyse von Zellen-Multiplexern mit begrenzter Warteraumkapazität. Behandelt werden die drei bedeutendsten Ausführungsformen, d.h. das klassische Multi-Warteschlangen-Bediensystem – meistens als Polling-System bezeichnet, dessen Reduktion zum Bediensystem mit virtuellen Bedienpausen, und die Architektur mit gemeinsam genutztem zentralem Puffer.

Zunächst wird mit den wesentlichen Prinzipien, Architekturen und funktionalen Elementen moderner breitbandiger Kommunikationsnetze das Themengebiet umrissen, wobei sich die Bitübertragungsschicht von paketorientierten Systemen im Fokus befindet. Konzepte von Vermittlungsknoten werden grob verglichen und Protokollaspekte werden betrachtet, einschließlich Medienzugriff sowie Verkehrslenkung und -überwachung. Benannt werden schließlich die Problemstellungen der Bereiche, wo die Funktionalität des Zwischenspei-

chens und Multiplexens von Paketen bzw. Zellen eine zentrale Rolle spielt, d.h. bei der Ablaufplanung, dem Puffer- und Verkehrs-Management sowie dem thematischen Gesamtkomplex der Dienstgüte (QoS).

Der in dieser Arbeit verwendete analytische Ansatz hat zum Ziel, alle leistungsrelevanten Modellierungsaspekte, die sich aus der Zellennatur der Dateneinheiten ergeben, sorgfältig einzubeziehen. Die für Analysen in diskreter Zeit üblichen Early-Arrival- und Late-Arrival-Systemmodelle werden konsequent angewendet. Besondere Beachtung findet hierbei die Wiederverwendung des durch die laufende Abfertigung einer Zelle frei werdenden Warteplatzes. Die Analysen beruhen auf der Methode Markovscher Ketten, wobei die Systemzustände an den Zeitschlitzgrenzen beschrieben werden. Die Untersuchungen beschränken sich auf die Zellebene, und als Verkehrsmodell wird der Batch-Bernoulli-Prozess (BBP) verwendet, der symmetrische Verkehrslast an den Multiplexer-Eingängen nachbildet. Zu den grundsätzlich in den Kernkapiteln dieser Arbeit entwickelten Leistungsgrößen gehören die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Warteschlangenlänge und Wartedauer, sowie daraus abgeleitete Parameter, wie Wartedauervarianz, Systemauslastung und Zellenverlustwahrscheinlichkeit.

Die Polling-Systeme werden analysiert unter 1-begrenzter Abfertigung und verschiedenen Interqueue-Disziplinen. Systeme mit wenigen Eingängen offenbaren einen markanten Durchsatzeinbruch, der unabhängig von der (unparteiischen) Abfertigungsdisziplin kombinatorisch bedingt ist (Eingangs- und Warteplatzanzahl). Andererseits hat die Interqueue-Disziplin durchaus starken Einfluss auf den Durchsatz. Optimierungen sind möglich, indem man eine Basisstrategie mit Longest Queue First-Served (LQFS) kombiniert. Die Arbeit enthält eine analytische Lösung mit dieser in einfach gepufferten Polling-Systemen angewandten Disziplin. Bewiesen wird auch, dass bei sehr großer Eingangsanzahl die Pufferung von einer Zelle pro Eingang ausreicht, um einen Durchsatz von 100% zu erzielen.

Während sich Systeme mit zwei Eingängen unter (purer) LQFS-Abfertigung vollständig analysieren lassen, entziehen sich Polling-Systeme mit mehreren Eingängen und Warteplätzen je Puffer weitgehend einer exakten Analyse wegen des immens großen Zustandsraums zur Beschreibung des Gesamtsystems. Die Analyse erfolgt hier approximativ mithilfe eines neuartigen Details. Die exakt bestimmte Wartedauer eines äquivalenten Bediensystems mit begrenztem Zentralpuffer dient hierbei als Abfertigungsdauer für eine typische Warteschlange des Polling-Systems. Es wird gezeigt, dass dieser Ansatz in einem Szenario mit zufälliger Warteschlangenauswahl (Head of Line Service In Random Order, HoL-SIRO) sehr gute Resultate ermöglicht. Im Hinblick auf die zufallsbasierte HoL-Abfertigung wird auch der Einfluss der Interqueue-Disziplin auf die Wartedauervarianz untersucht. Eine exzellente Näherungslösung belegt, dass sich Systeme mit wenigen Eingängen sehr ähnlich verhalten wie unter First-Come First-Served-Abfertigung (FCFS). Andererseits nähern sich die Eigenschaften bei Vorhandensein von 16 oder mehr Eingängen dem Fall an, bei dem die Abfertigung per Zufalls-

auswahl aus allen wartenden Zellen erfolgt.

Für Polling-Systeme im synchronen TDM-Betrieb werden die primären Leistungsgrößen als Lösungen in geschlossener Form hergeleitet. Sie gelten für generell verteilte Verkehrslast und beliebige endliche Pufferkapazität. Der Zellen-Multiplexer mit einem zentralen Puffer begrenzter Kapazität wird ebenfalls analysiert, wobei als Abfertigungsdisziplinen FCFS und die zufällige Reihenfolge Berücksichtigung finden. Erneut werden für die Kenngrößen geschlossene, bei beliebiger Anzahl von Eingängen und Warteplätzen gelte Lösungen bereitgestellt. Die Analysen umfassen auch eine ausgiebige Untersuchung der Zusammenhänge zwischen Early-Arrival- und Late-Arrival-Analysemodellen. Sobald die Kennwerte eines der beiden Modelle bekannt sind, lassen sich daraus mit den gewonnenen Erkenntnissen die entsprechenden Parameter des anderen Modells gewinnen.

Schließlich wird der Aufwand an Warteplätzen für Polling- und Zentralpuffer-System bei bestmöglicher Übereinstimmung ihrer Performanz verglichen. Es zeigt sich, dass in Systemen mit zehn oder mehr Eingängen bei gleichmäßig aufgeteilter Verkehrslast und gemeinsamer Nutzung von Pufferressourcen durch den Effekt des statistischen Multiplexens ungefähr 60% der Pufferkapazität eingespart werden kann.

Insgesamt tragen die Ergebnisse dieser Arbeit und die aufgezeigten algebraischen Zusammenhänge zu einem vertieften Verständnis der zeitdiskreten Leistungsanalyse von Bediensystemen mit einer Bedienstation und begrenztem Warteraum unter einfacher Abfertigung bei. Die geschlossenen Lösungen sind ebenso wie daraus abgeleitete Größen für die Echtzeit-Berechnung geeignet und eröffnen damit ein weites Feld von Anwendungsmöglichkeiten, wie z.B. in-situ Konfigurationsänderungen von Multiplexer-Einrichtungen für zellenbasierten Verkehr.

## Summary

Cell multiplexers belong to the key elements of packet-oriented transmission and switching technology. They are widely applied in modern communication networks, e.g. in systems using the Asynchronous Transfer Mode (ATM), and in most of the packet-based switching units such as routers, switches, gateways, etc. Nevertheless, the cell multiplexing functionality is present also in numerous fields of application beyond communications.

In the past, the performance of multiplexers has been analyzed mainly using continuous-time evaluation methods. Findings from studies in discrete-time, which are more appropriate when considering transfer or processing of data units and cells, are available to far less extent. The related work relies mostly on idealistic simplifications such as infinite storage capacity for cell buffering, or it is based on complex traffic scenarios of certain communication services, which are modelled by suitable arrival processes on cell or burst level. When striving for exact analyses, the latter approach usually represents a prohibitive obstacle. Hence, with a few exceptions the available results have been achieved by analytical approximations, numerical calculations or simulations.

This thesis addresses the discrete-time performance analysis of cell multiplexers with finite buffer capacity. Hereby, the three most important types of implementation are examined, i.e. the classical multi-queue single-server system – often referred to as polling system, its reduction to a single-queue system with virtual server vacations, and the architecture based on a commonly shared centralized buffer.

In order to set the framework for the further analyses, the major principles, architectures and functions of modern broadband communication networks are discussed with emphasis on the physical layer of packet-oriented systems. Concepts of switching nodes are briefly compared and aspects of protocols are addressed including media access, routing and traffic control. Problem statements are made on subjects where cell buffering and multiplexing are of crucial importance, i.e. on scheduling, buffer management, traffic management, as well as on the entire quality of service (QoS) topic.

The analytical approach used in this thesis aims to include thoroughly all modelling aspects, relevant for system performance with respect to the nature of data cells. The Early Arrival and

Late Arrival models commonly used in discrete-time analysis are employed consistently. Hereby, careful attention is paid to the reuse of the buffer position, which is released while the related cell is being served. The analyses are carried out based on the Markov chain method, describing the system states at time-slot boundaries. The studies are performed entirely on cell level, using a batch Bernoulli process (BBP) as traffic model with symmetrically utilized multiplexer inputs. The strictly developed performance measures, obtained in the main chapters of this work, include probability distributions of queue length and waiting time, as well as parameters derived thereof such as waiting time variance, system utilization, and cell loss probability.

The polling systems are analyzed under limited-1 service and various interqueue disciplines. Systems with few inputs reveal a distinctive throughput fall-off due to combinatorial reasons (number of inputs and buffer locations) regardless of the (impartial) service discipline. On the other hand, in case of low buffer capacity the interqueue discipline has a strong effect on the throughput. Improvements can be achieved using a strategy, which combines the basic queue arbitration with Longest Queue First-Served (LQFS). The thesis provides an analytical solution with this policy applied to single-buffer polling systems. It also proves that, in case of a large number of inputs, queuing of a single cell per input is sufficient to achieve a throughput of 100%.

While systems with dual inputs can be completely analyzed using the (pure) LQFS strategy, polling systems with more inputs and several cell locations per buffer largely defy such analysis due to the huge state space describing the entire system. Here, the analysis of such systems is performed by means of an approximation using a novel detail. The waiting time exactly derived from an equivalent queueing system with limited central buffer is utilized as the service time in a typical queue within the polling system. It is shown that such approach achieves high-quality results in a scenario with random interqueue discipline (Head of Line Service In Random Order, HoL-SIRO). Furthermore, the influence of the interqueue discipline on the variation of waiting times is evaluated with respect to random HoL service. A solution obtained in form of an excellent approximation shows that systems with few inputs behave very similarly as under the First-Come First-Served (FCFS) regime. On the other hand if there are about 16 inputs or more their properties converge to the case where a cell is selected for service randomly out of all the present ones.

Regarding the polling system under synchronous TDM mode of operation, the primary figures of merit are derived in closed form. They are valid for general distributed traffic load and any finite buffer capacity. The cell multiplexer with central queue of finite capacity is also analyzed. Again, closed-form solutions for the key performance measures are provided for an arbitrary number of inputs and buffer locations, served randomly or in a FCFS fashion. The studies also include an extensive examination of relationships between the Early Arrival and

Late Arrival analytical models. If the figures of merit are available for one of these two models, the findings can be used to gain parameters for the other one.

Finally, the buffer requirements of polling systems are compared to the central buffer solution at best possible performance consistency. When sharing a common buffer, it is shown that the effect of statistical multiplexing can render savings of roughly 60% in terms of buffer capacity under heavy-duty traffic load evenly spread among ten or more inputs.

Both the conclusions drawn from analytical results and the algebraic relations revealed in this thesis contribute to deepening the insight into the subject of discrete-time performance analysis of single-server systems with limited queueing capacity and ordinary service. The closed-form solutions as well as parameters derived therefrom are suitable for real-time computation and thus enable a wide range of applications such as in-situ changes of configurations for multiplexing cell-based traffic.



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b> .....	i
<b>Summary</b> .....	iv
<b>Inhaltsverzeichnis</b> .....	vii
<b>Abkürzungen</b> .....	xi
<b>Formelzeichen</b> .....	xvii
<b>Kapitel 1 Einleitung</b> .....	1
1.1 Motivation .....	1
1.2 Gliederung der Arbeit .....	3
<b>Kapitel 2 Architekturen und Komponentenkonzepte für Hochgeschwindigkeitsnetze</b> .....	5
2.1 Transfermodi .....	5
2.2 Vermittlungsprinzipien .....	6
2.2.1 Leitungsvermittlung .....	6
2.2.2 Paketvermittlung .....	7
2.2.3 Zellenvermittlung .....	8
2.3 Knotenkonzepte .....	9
2.4 Protokollaspekte und Verkehrssteuerung .....	14
2.4.1 Medienzugang .....	15
2.4.2 Verkehrslenkung .....	16
2.4.3 Netzlastformung und Überwachung .....	21
2.5 Problemstellungen .....	22
2.5.1 Ablaufplanung .....	23
2.5.2 Puffer-Management .....	25
2.5.3 Verkehrs-Management .....	27
2.5.4 Dienstgüte und weitere wesentliche Parameter .....	30

<b>Kapitel 3</b>	<b>Modellierung und Analysemethodik</b>	37
3.1	Multiplexer-Modelle	37
3.1.1	Modellkomponenten	37
3.1.1.1	Puffer	38
3.1.1.2	Schalter	40
3.1.1.3	Bedieneinheit	41
3.1.1.4	Bedienstrategie	43
3.1.1.5	Verkehre	44
3.1.2	Schaltanordnungen	47
3.1.2.1	Multiplexer	47
3.1.2.2	Demultiplexer	48
3.1.2.3	Koppelnetze	49
3.1.3	Modellhierarchie und Systematik	50
3.1.3.1	Klassisches Polling-System	51
3.1.3.2	Polling-System mit Bedienpausen	52
3.1.3.3	Zentralpuffer-System mit Mehrfachzugang	52
3.2	Analysemethoden	53
3.2.1	Simulationstechnik	54
3.2.2	Warteschlangentheorie	56
3.2.2.1	Markovsche Ketten	59
3.2.2.2	Nicht-Markov-Methoden	62
3.2.2.3	Zeitdiskrete Methoden	65
3.3	Stand der Wissenschaft und Technik	73
3.3.1	Verkehrsmodelle für den Zellentransport	73
3.3.2	Wesentliche Ergebnisse der Klasse Polling-System	76
3.3.3	Wesentliche Ergebnisse zu Polling-Systemen im Zeitmultiplexbetrieb	78
3.3.4	Wesentliche Ergebnisse der Klasse Zentralpuffer-System	79
3.4	Offene Fragen	81
<b>Kapitel 4</b>	<b>Leistungsfähigkeit von Zellen-Multiplexern des Polling-Typs</b>	85
4.1	Annahmen für die Analyse in diskreter Zeit	85
4.2	Modelle für die Analyse	87
4.2.1	Late-Arrival-Modell mit sofortiger Warteplatznachbesetzung	88
4.2.2	Late-Arrival-Modell mit verzögerter Warteplatznachbesetzung	89
4.2.3	Early-Arrival-Modell mit sofortiger Warteplatznachbesetzung	89
4.2.4	Early-Arrival-Modell mit verzögerter Warteplatznachbesetzung	90
4.2.5	Gliederung der Analysen	90
4.3	Analyse des ungepufferten Systems	91

---

4.4	Analyse von Systemen mit einem Warteplatz je Warteschlange .....	92
4.4.1	Analyse mit dem Late-Arrival-Modell .....	94
4.4.1.1	Sofortige Warteplatznachbesetzung .....	94
4.4.1.2	Verzögerte Warteplatznachbesetzung .....	96
4.4.2	Analyse mit dem Early-Arrival-Modell .....	97
4.4.2.1	Warteschlangenauswahl in zyklischer Reihenfolge .....	97
4.4.2.2	Warteschlangenauswahl in Reihenfolge der Ankünfte .....	98
4.4.2.3	Warteschlangenauswahl in zufälliger Reihenfolge .....	98
4.4.2.4	Weitere Interqueue-Disziplinen .....	100
4.4.3	Analyse bei sehr großer Eingangsanzahl .....	101
4.4.4	Diskussion von Leistungsgrößen und Modellunterschieden .....	101
4.5	Performanz von Systemen mit beliebiger endlicher Warteplatzanzahl .....	104
4.5.1	Systeme mit zwei Eingängen .....	105
4.5.2	Systeme mit mehr als zwei Eingängen .....	107
4.6	Performanz von Systemen mit unbegrenztem Warteraum .....	109
4.6.1	Einfluss der Abfertigungsreihenfolge .....	110
4.6.2	Head-of-Line Service in zufälliger Reihenfolge .....	112
4.7	Analyse des Zellen-Multiplexers im synchronen Zeitmultiplexbetrieb .....	115
4.7.1	Early-Arrival-Modell mit sofortiger Warteplatznachbesetzung .....	118
4.7.2	Late-Arrival-Modelle .....	122
4.8	Fazit zur Analyse der Polling-Systeme .....	123
<b>Kapitel 5 Leistungsfähigkeit von Zellen-Multiplexern mit Zentralpuffer .....</b>		<b>127</b>
5.1	Modelle und Annahmen für die zeitdiskrete Analyse .....	127
5.2	Analyse mit dem Early-Arrival-Modell .....	129
5.2.1	Analyse der Warteschlangenlänge .....	130
5.2.2	Wartedauer bei Abfertigung in der Reihenfolge des Eintreffens .....	132
5.2.3	Wartedauer bei Service in zufälliger Reihenfolge .....	134
5.3	Analyse mit dem Late-Arrival-Modell bei sofortiger Warteplatznachbesetzung .....	136
5.4	Analyse mit dem Late-Arrival-Modell bei verzögerter Warteplatznachbesetzung ..	138
5.5	Vergleich der Multiplexer-Modelle anhand der Leistungsgrößen .....	139
5.6	Leistungsvergleich der Multiplexer-Architekturen .....	142
<b>Kapitel 6 Zusammenfassung .....</b>		<b>147</b>
6.1	Ergebnisse dieser Arbeit .....	147
6.2	Ausblick .....	152

---

<b>Anhänge</b> .....	153
Anhang A Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten eines $M$ -zu-1-Multiplexers .....	153
Anhang B Analysen vom Multiplexer des Polling-Typs .....	157
Anhang C Analysen vom Multiplexer mit zentraler Pufferung .....	165
Anhang D Warteschlangenlänge und Wartedauer bei unbegrenztem Warteraum .....	171
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	175
<b>Danksagung</b> .....	191

---

## Abkürzungen

$A/B/m/K$	Klassifikation von Bediensystemen mit $m$ Bedieneinheiten und $K$ Wartepätzen, wobei A und B den Typ des Ankunfts- bzw. Bedienprozesses kennzeichnen. <sup>1</sup> Bei fehlender Angabe von $K$ wird ein unbegrenzter Warteraum angenommen.
ABE	Alternative Best Effort
ABR	Available Bit Rate
AQM	Active Queue Management
ATDM	Asynchronous Time Division Multiplexing
ATM	Asynchronous Transfer Mode
BASTA	Bernoulli Arrivals See Time Averages
BBP	Batch Bernoulli Process
BGP	Border Gateway Protocol
B-ISDN	Broadband Integrated Services Digital Network
BMAP	Batch Markovian Arrival Process
BP	Bernoulli Process
CAC	Connection Acceptance Control
CBQ	Class-based Queueing
CBR	Constant Bit Rate
CDMA	Code Division Multiple Access
CIOQ	Combined Input Output Queueing
CPU	Central Processing Unit
CRC	Cyclic Redundancy Check
CSMA/CA	Carrier Sense Multiple Access – Collision Avoidance

---

<sup>1</sup> Nach einem Notationsvorschlag von D.G. Kendall – üblicherweise Kendallsche Notation genannt.

---

CSMA/CD	Carrier Sense Multiple Access – Collision Detection
CSMA/CR	Carrier Sense Multiple Access – Collision Resolution
CTM	Circuit Transfer Mode
D	Deterministic distribution
DA	Delayed Access
D-BMAP	Discrete-Time Batch Markovian Arrival Process
DFT	Discrete Fourier Transformation
DiffServ	Differentiated Services
D-MAP	Discrete-Time Markovian Arrival Process
DMUX	Demultiplexer
DP	Deterministic Process
DR	Delayed Replacement
DRP	Deterministic Renewal Process
DSI	Digital Speech Interpolation
DSPP	Doubly Stochastic Poisson Process
EA	Early Arrival
EDD	Earliest Due Date
EDF	Earliest Deadline First
EGP	Exterior Gateway Protocol
EPD	Early Packet Discard
FCFS	First-Come First-Served
FDDI	Fiber Distributed Data Interface
FDMA	Frequency Division Multiple Access
FFT	Fast Fourier Transformation
FIFO	First-In First-Out
FQ	Fair Queueing
G	General distribution
GASTA	Geometric Arrivals See Time Averages
Geo	Geometric distribution
Geo <sup>[X]</sup>	Bernoulli Batch Arrival Process

---

GI	General Independent distribution
GMDP	General Modulated Deterministic Process
G-SIRO	Global Service In Random Order
HoL	Head of Line
IA	Immediate Access
IBP	Interrupted Bernoulli Process
IDP	Interrupted Deterministic Process
IETF	Internet Engineering Task Force
IGP	Interior Gateway Protocol
IntServ	Integrated Services
IP	Internet Protocol
IPP	Interrupted Poisson Process
IR	Immediate Replacement
IS	Intermediate System
ISDN	Integrated Services Digital Network
ITU	International Telecommunication Union
LA	Late Arrival
LAN	Local Area Network
LCFS	Last-Come First-Served
LFI	Last File Indicator
LIFO	Last-In First-Out
LLC	Logical Link Control
LQFS	Longest Queue First-Served
LRD	Long Range Dependent
M	Negative exponential distribution (Markov property)
$M^{[X]}$	Poisson batch arrival process
MAC	Media Access Control
MAN	Metropolitan Area Network
MAP	Markovian Arrival Process
MIN	Multistage Interconnection Network

---

MLP	Message/Multilayer Link Protocol
MMBBP	Markov Modulated Batch Bernoulli Process
MMBP	Markov Modulated Bernoulli Process
MMDP	Markov Modulated Deterministic Process
MMPP	Markov Modulated Poisson Process
MPLS	Multi-Protocol Label Switching
MUX	Multiplexer
MVA	Mean Value Analysis
NPC	Network Parameter Control
OSI	Open Systems Interconnection
OSPF	Open Shortest Path First
PASTA	Poisson Arrivals See Time Averages
PDH	Plesiochronous Digital Hierarchy
PHB	Per Hop Behaviour
PPD	Partial Packet Discard
pPPD	Preemptive Partial Packet Discard
PON	Passive Optical Network
PQ	Priority Queueing
PTM	Packet Transfer Mode
QoE	Quality of Experience
QoS	Quality of Service
QoS SR	Quality of Service Routing
RA	Random Access
RAM	Random Access Memory
RCC	Routing Control Center
RCSP	Rate-Controlled Static Priority
RED	Random Early Detection
RIP	Routing Information Protocol
RO	Random Order
RPR	Resilient Packet Ring



---

RSTP	Rapid Spanning Tree Protocol
RSVP	Resource Reservation Protocol
RTP	Real-Time Transport Protocol
SAP	Service Access Point
SDH	Synchronous Digital Hierarchy
SDM	Space Division Multiplexing
SDP	Switched Deterministic Process
sGGeo	Shifted Generalized Geometric process
SICO	Service In Cyclic Order
SIRO	Service In Random Order
SMP	Semi-Markov-Process
S/P	Serial-Parallel (conversion)
SPF	Shortest Process First
SPP	Switched Poisson Process
SRD	Short Range Dependent
SRPT	Shortest Remaining Process Time
STD	Synchronous Time Division (multiplexing)
STE	Shortest Time to Extinction
STM	Synchronous Transfer Mode
STP	Spanning Tree Protocol
TASI	Time Assignment Speech Interpolation
TCP	Transmission Control Protocol
TDM	Time Division Multiplexing
TDMA	Time Division Multiple Access
UBR	Unspecified Bit Rate
UMTS	Universal Mobile Telecommunications System
UPC	Usage Parameter Control
VBR	Variable Bit Rate
VC	Virtual Channel
VOQ	Virtual Output Queue

VP	Virtual Path
WAN	Wide Area Network
WFQ	Weighted Fair Queueing
WRED	Weighted Random Early Detection
WWW	World Wide Web

## Formelzeichen

$A$	Diskrete Zufallsvariable für die Anzahl der in einem Zeitschlitz eintreffenden Aufträge
$a_i$	Auftrittswahrscheinlichkeit von $i$ (aus $M$ möglichen) gleichzeitigen Ankünften
$B$	Bündelungsgewinn
$D$	Übertragungsdauer einer Zelle
$d$	Fraktale Dimension
$E[X]$	Erwartungswert der Zufallsvariablen $X$ (Mittelwert oder erstes gewöhnliches Moment)
$E[X^2]$	Zweites gewöhnliches Moment der Zufallsvariablen $X$
$e$	Basis der natürlichen Logarithmen: $e = 2,71828\dots$
$f_b$	Pufferbandbreite, Bandbreite eines Puffereingangs bzw. -ausgangs
$G$	Diskrete Zufallsvariable für die vom System akzeptierte Auftragsanzahl einer Gruppenankunft
$H$	Hurst-Parameter
$I$	Indexmenge eines stochastischen Prozesses
$\mathbf{I}_{i \times i}$	Einheitsmatrix der Größe $i$
$i, j, k, m, n$	Ganze Zahlen, wie z.B. Indizes, sofern nicht speziell anders ausgewiesen
$K$	Anzahl der Wartplätze außerhalb von Bedieneinheiten (Pufferkapazität)
$K_p$	Gesamte Pufferkapazität eines Polling-Systems
$K_z$	Pufferkapazität eines Zentralpuffer-Multiplexers
$M$	Anzahl der Zubringerleitungen
$N$	Anzahl der Abnehmerleitungen
$P$	Matrix der Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten

---

$\mathbf{P}_{i \times i}$	Matrix der Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten (mit $i \times i$ Elementen)
$P\{X = x\}$	Auftrittswahrscheinlichkeit $x$ für das Ereignis $X$
$P_{i,j}$	Übergangswahrscheinlichkeit von einem Systemzustand $i$ in einen Zustand $j$ (am Zeitschlitzende)
$P_{i,k}^*$	Übergangswahrscheinlichkeit von einem Systemzustand $i$ in einen Zustand $k$ im EA-Modell zwischen Ankunftszeitpunkt und Abfertigungsbeginn
$P(i j)$	Wahrscheinlichkeit von $i$ unter der Bedingung $j$ (bedingte Wahrscheinlichkeit)
$p$	Wahrscheinlichkeit der Ankunft eines Auftrags an einem Multiplexer-Eingang in einem beliebigen Zeitschlitz
$p_v$	Verlustwahrscheinlichkeit für einen Auftrag
$Q$	Diskrete Zufallsvariable für die Anzahl der wartenden Aufträge an der Zeitschlitzgrenze
$Q^*$	Diskrete Zufallsvariable für die Anzahl der wartenden Aufträge am Ende eines aus $M$ Zeitschlitzten bestehenden Zeitrahmens
$q_0$	Wahrscheinlichkeit von 0 wartenden Aufträgen, Leerlaufwahrscheinlichkeit, $q_0 = P\{Q = 0\}$
$q_i$	Wahrscheinlichkeit von $i$ wartenden Aufträgen, $q_i = P\{Q = i\}$
$q_i^*$	Wahrscheinlichkeit von $i$ wartenden Aufträgen am Ende eines aus $M$ Zeitschlitzten bestehenden Zeitrahmens
$r$	Allgemeine Wahrscheinlichkeit
$S_i$	Zustand $i$ eines Markov-Prozesses
$s$	Service-Wahrscheinlichkeit für eine Warteschlange in einem gegebenen Zeitschlitz
$T$	Aufenthaltsdauer eines Auftrags im Bediensystem, Verweildauer
$T_A$	Zwischenankunftsintervall
$T_{\text{On}}, T_{\text{Off}}$	Zufallsvariablen für die Dauer von Aktivitäts- bzw. Ruhephase
$t$	Zeit (allgemein)
$t_s$	Abfertigungsdauer (eines Auftrags)
$v_i$	Übertragungsrate eines Kanals $i$ , der einen Multiplexer speist
$v_M$	Übertragungsrate in dem von einem Multiplexer gespeisten Multiplexkanal
$W$	Diskrete Zufallsvariable für die Wartedauer eines Auftrags (in Zeitschlitzten)

$W_0$	Zeitspanne zwischen Ankunft einer Auftragsgruppe und Abfertigungsbeginn des ersten Auftrags aus dieser Gruppe
$W_1$	Zeitspanne zwischen Abfertigungsbeginn einer Gruppenankunft und Abfertigungsbeginn eines typischen Auftrags aus dieser Gruppe
$w_i$	Wahrscheinlichkeit einer Wartedauer von $i$ Zeitschlitzen
$X$	Allgemeine Zufallsvariable
$x, y$	Allgemeine Variablen
$Y(t), Z(t)$	Stochastische Prozesse
$z$	Variable der $z$ -Transformation
$\det(\mathbf{P})$	Determinante der Matrix $\mathbf{P}$
$k!$	Fakultät
$\text{ld } x$	Zweierlogarithmus von $x$
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizienten
$\text{var}[X]$	Varianz der Zufallsvariablen $X$
$\lfloor x \rfloor$	Größte ganze Zahl, die nicht größer als $x$ ist <sup>2</sup> : $\lfloor x \rfloor = \max\{i \in \mathbb{Z} : i \leq x\}$
$\lceil x \rceil$	Kleinste ganze Zahl, die nicht kleiner als $x$ ist: $\lceil x \rceil = \min\{i \in \mathbb{Z} : i \geq x\}$
$\lceil x \rceil$	Nächste ganze Zahl zu $x$ : $\lceil x \rceil = \lfloor x + 1/2 \rfloor$
$\mathbb{A}, \mathbb{B}$	Allgemeine Mengen (auf Abfertigung wartender Aufträge)
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen: $\{0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}^+$	Menge der positiven natürlichen Zahlen: $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\alpha, \beta, \beta^*$	Allgemeine Faktoren für verschiedene Zwecke
$\Delta t$	Dauer eines Zeitschlitzes (Betrag 1)
$\lambda$	Gesamte Ankunftsrate an einem Multiplexer
$\lambda_i$	Ankunftsrate an einem Multiplexer-Eingang $i$ (von $M$ Eingängen)

<sup>2</sup> Auch Gauß-Klammer genannt nach C.F. Gauß, der das Symbol für die Abrundungsfunktion 1808 eingeführt hat.

$\lambda_x$	Allgemeine Ankunftsrate (mit kontextabhängigen Indizes)
$\mu$	Bedienrate
$\rho$	Systemauslastung (Abnehmerleitung) an der Zeitschlitzgrenze
$\tau, \tau_1, \tau_2$	Diverse (konstante) Transferdauern von Zellen in Multiplexer-Anordnungen

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Multiplexer sind Funktionseinheiten, die Nachrichten aus einer gegebenen Anzahl von Übertragungskanälen – gekennzeichnet durch Raum-, Zeit- und Frequenzlagen sowie Codierung – an eine andere Anzahl von Kanälen übergeben. So ermöglichen Multiplexer die Mehrfachnutzung eines Übertragungsmediums für verschiedene Nachrichtenströme. In der vorliegenden Arbeit wird von Nachrichtenblöcken mit einheitlichem Format (Zellen) ausgegangen, die zeitlich verschachtelt, d.h. im Zeitmultiplex, einen abgehenden Übertragungskanal speisen. Da von mehreren gleichzeitig ankommenden Zellen stets nur eine direkt zum Ausgang geleitet werden kann, müssen die übrigen zwischengespeichert werden. Insofern kommt dem hierfür notwendigen Pufferspeicher große Bedeutung zu.

Zellen-Multiplexer finden vielfältige Anwendung in Kommunikationsnetzen, unter anderem in der Technik des Asynchronous Transfer Mode (ATM), sowie in den meisten paketbasierten Vermittlungseinrichtungen (Router, Switches, Gateways, etc.). Sie können sowohl als explizite Komponente/Modul auftreten, oder auch als integraler Bestandteil eines Systems mit komplexerer Funktion. Üblicherweise sind Multiplexer in Hardware ausgeführt, Software-Implementierungen sind aber ebenso gut möglich. Zu den primären Anforderungen zählen hohe Performanz und adäquate Arbeitsgeschwindigkeit bei effizientem Umgang mit den Hardware-Ressourcen (insbesondere Speicher), sowie die vielfältige Anwendbarkeit bei einheitlichem Grundprinzip.

Für die Leistungsbewertung kommen typischerweise Messtechnik, Computer-Simulation und die theoretische Analyse in Betracht. Messungen setzen das Vorhandensein eines realen Systems voraus. In der Planungs- und Entwurfsphase ist dies natürlich nicht gegeben, sodass man auf Abstraktionen angewiesen ist. Gängige Praxis ist dann die Anwendung von Simulation oder Analyse. Beide Möglichkeiten haben ihre Vorzüge und Schwächen.

Heute werden Leistungsanalysen überwiegend per Simulation durchgeführt, denn die Rechenleistung moderner Computer ermöglicht eine Untersuchung an realitätsnahen Systemnachbildungen mit immer größerem Detaillierungsgrad. Ein gravierender Nachteil dieses Vorgehens ist, dass die Simulation keinerlei mathematische Zusammenhänge zwischen Leistungskenngrößen und den Eingangsparametern des Systems hervorbringen kann. Dementsprechend sind Systemsteuerungen in der Betriebsphase (d.h. in Echtzeit) in vielen Fällen auf Tabellen mit allen notwendigen Steuerungsparametern angewiesen, die vorab (off-line) ermittelt und zusammengestellt worden sind. Derartige Tabellen können sehr groß und komplex ausfallen, und sie sind stets gebunden an die betreffenden Ursprungsszenarien. An Grenzen stößt die Simulation bei der Untersuchung seltener Ereignisse, denn beliebig geringe Auftretswahrscheinlichkeiten lassen sich aus Zeitgründen per Simulation nicht ermitteln. Solche Defizite müssen in Kauf genommen bzw. mit Hilfsmaßnahmen entschärft werden, beispielsweise durch Extrapolation von Simulationsergebnissen mit genügend kleinem Konfidenzintervall.

Die analytische Leistungsbewertung bedient sich eines Systemmodells, dessen Realitätstreue hinreichend sein sollte, und das sich mit den Methoden der Verkehrstheorie untersuchen lässt. Oft sind hierzu aber starke Vereinfachungen notwendig, z.B. die Annahme unbegrenzten Warteraums. Aus Perspektive der Verkehrstheorie stellt der Zellen-Multiplexer ein Multi-Warteschlangen-Bediensystem mit einer einzelnen Bedieneinheit dar. Dem Zellencharakter entsprechend sind die Aufträge grundsätzlich gleichartig, und werden allesamt in konstanten Zeitintervallen abgefertigt. Verschiedene Ausführungsformen sind möglich, d.h. unterschiedliche Architekturen und Betriebsweisen. Klassisch ist die als Polling-System bezeichnete Architektur mit individuellen Warteschlangen an jedem Eingang, die von der Bedieneinheit per Sendeaufruf abgefertigt werden. Sind die Warteschlangen in einem zentralen Speicher mit einer entsprechenden Anzahl von Zugängen zusammengefasst, so ergibt sich eine bedeutende alternative Multiplexer-Architektur, wobei der Pufferausgang die Bedieneinheit repräsentiert.

Seit Erscheinen der ersten Publikationen über Polling-Systeme in den 1950er Jahren wurde eine immense Anzahl von Arbeiten publiziert. So umfasste das Literaturverzeichnis von Hideaki Takagi, einem Protagonisten der Analyse von Polling-Systemen, Mitte der 1990er Jahre rund 750 diesbezügliche Publikationen. Mittlerweile dürften es mehr als 1000 sein. Die meisten davon adressieren zeitkontinuierliche Systeme, berücksichtigen also nicht die besonderen Umstände von Ereignissen und Abläufen, die zu diskreten Zeitpunkten auftreten. Andererseits wurden viele Randbedingungen einbezogen, welche die Analysen erschweren und zum Teil einschränken, wie etwa asymmetrischer Verkehr, Umschaltzeiten, usw. Um solche Systeme analytisch handhaben zu können, wurde häufig ein unbegrenzter Warteraum angenommen. Zeitdiskrete Varianten von Polling-Systemen sind bislang nur in sehr begrenztem Maße untersucht worden, und kaum für den Fall, dass der Warteraum endliche Kapazität hat. Auch für den Multiplexer mit Zentralpufferarchitektur sind geschlossene Lösungen, z.B. be-



züglich Wartedauerverteilung und Verlustwahrscheinlichkeit, nur für wenige Sonderfälle bekannt geworden, meistens im Kontext von Koppellementen mit Ausgangspufferung.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein tiefgreifendes Verständnis der zeitdiskreten Leistungsanalyse des Zellen-Multiplexers, eines der zentralen Elemente der paketbasierten Vermittlungstechnik, zu erlangen. Eine herausragende Randbedingung hierbei ist – der Realität entsprechend – die endliche Kapazität des Warteraums. Nach Möglichkeit sollen formelmäßige Zusammenhänge hergeleitet oder identifiziert werden, die es erlauben, Leistungsgrößen, wie beispielsweise die Zellenverlustwahrscheinlichkeit, unmittelbar aus Verkehrslast und Systemparametern zu bestimmen. Damit wären im laufenden Betrieb schnelle und flexible Anpassungen von Systemkonfigurationen möglich. Untersucht werden soll auch die Frage, inwieweit sich aus den leistungsbeschreibenden Parametern, die auf eines von mehreren möglichen Multiplexer-Modellen zutreffen, Kennwerte für die übrigen Modellvarianten gewinnen lassen. Von Interesse ist darüber hinaus ein quantitativer Aufwandsvergleich der verschiedenen Ausführungsformen von Zellen-Multiplexern.

Der Ansatz zum Erreichen dieser Ziele beruht auf einer möglichst umfassenden Einbeziehung der leistungsrelevanten Modellaspekte. Um ein solches Systemmodell analytisch handhaben zu können, werden die Untersuchungen ausschließlich auf der Zellenebene durchgeführt, und es wird ein relativ einfaches Verkehrsmodell verwendet.

## 1.2 Gliederung der Arbeit

Aus den oben formulierten Zielen ergibt sich die Struktur der vorliegenden Arbeit; sie ist folgendermaßen aufgebaut.

**Kapitel 2** beleuchtet die wesentlichen Prinzipien, Architekturen und funktionalen Elemente moderner breitbandiger Kommunikationsnetze, wobei der Schwerpunkt auf der Bitübertragungsschicht von paketorientierten Systemen liegt. Vorgestellt und verglichen werden Konzepte von Vermittlungsknoten. Ferner werden Mediengriff, Protokollaspekte und die Verkehrssteuerung angesprochen. Breiten Raum nehmen die Problemstellungen bei der Ablaufplanung sowie beim Puffer- und Verkehrs-Management ein, denn dort spielt die Funktionalität des Zwischenspeicherns und Multiplexens von Paketen bzw. Zellen eine zentrale Rolle. Hervorgehoben werden dabei Funktionsbereiche, in denen eine schnelle, exakte Berechnung von Leistungsgrößen, wie Warteschlangenlänge, Zellenverlustwahrscheinlichkeit etc. notwendig ist oder zweckmäßig erscheint – beispielsweise um während des laufenden Betriebs auf sich ändernde netz- oder anwenderseitige Anforderungen effizient reagieren zu können. Zum Anwendungsfeld des Zellen-Multiplexens gehört auch der im letzten Teil dieses Kapitels erörterte große Themenkomplex der Dienstgüte.

**Kapitel 3** widmet sich der Multiplexer-Modellierung und den Methoden zur Analyse der

Leistungsfähigkeit. Die Komponenten eines Zellen-Multiplexers werden ebenso erläutert wie Architekturvarianten, Bedienstrategien, Verkehrsaspekte und mögliche Einsatzorte, z.B. in Koppelnetzen. Vorgenommen wird ferner eine Typisierung der Zellen-Multiplexer in zwei Klassen, nämlich dem Polling-System einschließlich dessen Abstraktion zum Bediensystem mit (virtuellen) Bedienpausen, und dem Multiplexer mit zentralem, gemeinsam genutztem Warteraum. Des Weiteren werden die in Betracht kommenden Untersuchungsmethoden – Simulationstechnik und Warteschlangentheorie – beleuchtet, wobei das Augenmerk auf die systematische, konsequente Modellierung als Bediensystem mit endlichem Warteraum gerichtet ist, und auf die entsprechende zeitdiskrete Analyse. Der zweite Teil dieses Kapitels schildert den Stand von Wissenschaft und Technik auf dem Gebiet der zeitdiskreten Leistungsbewertung von Multiplexern und anderer Systeme mit Relevanz für Teilaspekte dieser Schlüsselkomponente. Diskutiert werden Verkehrsmodelle für den Zellentransport, und es wird ein Überblick gegeben über deren Anwendung in der immensen Anzahl analytischer Untersuchungen, die mit verschiedensten Zielstellungen in den vergangenen Dekaden durchgeführt worden sind. Das Kapitel schließt mit einer Darlegung der offenen Punkte bei zeitdiskreten Analysen von Multiplexern mit endlichem Puffer.

Als erstes von zwei Kernkapiteln der vorliegenden Arbeit widmet sich **Kapitel 4** der Analyse des Zellen-Multiplexers mit eingangsseitiger Pufferung in Gestalt von zeitdiskreten Polling-Systemen und von Multiplexern im synchronen Zeitmultiplexbetrieb. Die Anwendung der Systemmodelle für die zeitdiskrete Analyse wird eingehend betrachtet, insbesondere für den Sonderfall mit einem Warteplatz je Puffer. Mithilfe verschiedener Modellvarianten werden die Leistungsanalysen unter der Randbedingung balancierten Verkehrs ausgeführt. Die Untersuchungen konzentrieren sich auf den Einfluss von Abfertigungsdisziplin und Reihenfolge der Abfertigung, sowie auf die Analyse bei beliebigem endlichem Warteraum. Ein weiterer Teil dieses Kapitels widmet sich der Analyse des Multiplexers im Zeitmultiplexbetrieb. Zusammenfassend wird diskutiert, welche Auswirkungen die verwendeten Modelle, die Anzahl von Multiplexer-Eingängen und Warteplätzen je Warteschlange, sowie die Reihenfolge der Warteschlangenauswahl auf die Multiplexer-Leistungsfähigkeit und deren Analyse haben.

**Kapitel 5** behandelt die Architektur mit zentralem Puffer am Multiplexer-Ausgang. Die Analysen werden für die Fälle einer Abfertigung in der Reihenfolge des Eintreffens und einer Bedienung in zufälliger Reihenfolge durchgeführt. Auf der Basis identischer Performanz wird darüber hinaus der Warteraumbedarf im Vergleich zum Polling-System untersucht. Die Ergebnisse beider Kernkapitel stützen sich teilweise auf analytische Betrachtungen in den **Anhängen** dieser Arbeit, oder sie werden dort ergänzt.

Die vorliegende Arbeit schließt in **Kapitel 6** mit einer Zusammenfassung und Wertung der wesentlichen Ergebnisse. Darüber hinaus wird ein kurzer Ausblick auf denkbare Erweiterungen und zukünftige Untersuchungsmöglichkeiten gegeben.

## Kapitel 2

# Architekturen und Komponentenkonzepte für Hochgeschwindigkeitsnetze

### 2.1 Transfermodi

Der Begriff Transfermodus (*transfer mode*) bezeichnet Übermittlungsverfahren, die zum Übertragen, Multiplexen und Vermitteln von Nachrichten in Kommunikationsnetzen einheitlich verwendet werden. Transfermodi sind also Netztechniken und betreffen infolgedessen im OSI-Schichtenmodell die Vermittlungsschicht (Schicht 3, siehe z.B. [Tanenbaum98]). Die International Telecommunication Union (ITU) unterscheidet zwischen Circuit und Packet Transfer Mode (CTM, PTM), sowie zwischen synchronen und asynchronen Transfermodi (STM, ATM), [ITU97]. Wesentliche Merkmale dieser Verfahren sind in **Tabelle 2.1** zusammengefasst. So werden Übertragungs- und Vermittlungsfunktionen beim CTM durch permanente Belegung von Kanälen oder Bandbreite zwischen den Endpunkten erreicht, während der STM Dateneinheiten fester Länge periodisch (im synchronen Zeitmultiplex) überträgt. Mit dem Ziel, Netzressourcen dynamisch auf eine Vielzahl von Verbindungen aufteilen zu können, realisiert PTM Übertragungs- und Vermittlungsfunktionen mit Hilfe paketorientierter Techniken. Hier ist der Sonderfall ATM charakterisiert durch den Informationstransport

	CTM	STM	PTM	ATM
Zeitmultiplexverfahren	---	synchron	asynchron (variable Dateneinheiten)	asynchron (fixe Dateneinheiten)
Vermittlungstechnik	Leitungsvermittlung	Leitungsvermittlung	Paketvermittlung bzw. Speicher- vermittlung	Zellenvermittlung
Verbindungsdienst	verbindungsorientiert (physikalische Verbindung)	verbindungsorientiert (quasi-physikalische Verbindung)	verbindungsorientiert (virtuelle Verbindung)	verbindungsorientiert (virtuelle Verbindung)
Anwendungsbeispiel	Leased Line	ISDN	Frame Relay	B-ISDN

**Tabelle 2.1:** Charakteristische Merkmale der Transfermodi.

mittels gekennzeichneten Zellen fester Größe. Der Begriff der Asynchronität bezieht sich darauf, dass die von einer individuellen Quelle stammenden Zellen nicht notwendigerweise periodisch auftreten.

## 2.2 Vermittlungsprinzipien

In modernen Kommunikationsnetzen werden entsprechend **Tabelle 2.1** drei Vermittlungsarten unterschieden: die für CTM und STM relevante Leitungsvermittlung, sowie die Paketvermittlung und die Zellenvermittlung für den PTM bzw. ATM. Die folgenden drei Abschnitte geben hierzu einen Überblick.

### 2.2.1 Leitungsvermittlung

Mit der Leitungsvermittlung<sup>1</sup> (*line switching*) verknüpft ist die verbindungsorientierte Kommunikation. Für eine Nachrichtenverbindung wird hier ein durchgehender physikalischer Kanal etabliert. Das wesentliche Merkmal dieses Übermittlungskanals ist seine streng periodische Verfügbarkeit, sodass eine bestimmte Informationsmenge isochron von der Quelle über die betreffenden Netznoten bis zum Endgerät des Ziels transportiert werden kann. Die Übertragungsdauer einer Nachricht ist mithin konstant und minimal. Am Anfang einer Kommunikationsbeziehung wird in der Regel eine Wählleitung aufgebaut (*switched circuit*) und an deren Ende wieder abgebaut. So ist Wegelenkung jeweils nur einmal erforderlich – zum Verbindungsaufbau. Die exklusive Verfügbarkeit des Kanals während der gesamten Verbindungsdauer gewährleistet per se ein hohes Maß an Dienstgüte. Die Abrechnung der Verbindungskosten erfolgt in der Regel nach Verbindungsdauer und nicht nach übertragener Datenmenge. Für den Telefondienst ist die Leitungsvermittlung nach wie vor von großer Bedeutung. Aus Netzbetreibersicht interessant ist das Optimierungspotential, was sich aus der gewöhnlich unvollständigen Ausnutzung der Ressourcen ergibt, z.B. bei Sprachdiensten während der Sprechpausen.

Bei der schnellen Durchschaltevermittlung (*fast circuit switching*) werden die Kanalabschnitte nur solange verknüpft, wie ein zusammenhängender Teil einer Nachricht übertragen wird [ITG96a]. Ein weiterer Sonderfall der Leitungsvermittlung ist die Standleitung (Mietleitung, leased line). Sie wird im Allgemeinen vom Netzbetreiber fest (für einen längeren Zeitraum) zwischen den Endstellen eingerichtet.

Der netzbetreiberseitige Wunsch, Übertragungssysteme effizienter zu nutzen und zugleich Verbindungen mit unterschiedlicher Bitrate zu ermöglichen, führte zur Entwicklung der im nächsten Abschnitt behandelten Paketvermittlung.

---

<sup>1</sup> Synonym: Durchschaltevermittlung (*circuit switching*).

### 2.2.2 Paketvermittlung

Im Gegensatz zur Durchschaltvermittlung wird bei der Speichervermittlung (*store-and-forward-switching*) keine durchgehende physikalische Verbindung zwischen den Endstellen aufgebaut. Die zu übertragende Ursprungsnachricht wird hier in Pakete zerteilt, d.h. in Dateneinheiten beschränkter Länge, die sequenziell in das Übertragungsnetz eingespeist werden.<sup>2</sup> Auf ihrem Weg vom Sender zum Empfänger müssen sie in den zu passierenden Netzknoten zwischengespeichert werden, damit ein Weg durch den jeweiligen Netzknoten etabliert werden kann (Store-and-Forward). Der Empfänger setzt die Nachricht aus den empfangenen Paketen wieder zusammen.

Dieses Prinzip ermöglicht es, die verfügbare Übertragungskapazität für mehrere Kommunikationsbeziehungen gleichzeitig bedarfsgerecht zu nutzen, alternative Routen für Pakete der gleichen Kommunikationsbeziehung zu verwenden und unterschiedliche Dienstgüteprofile zu definieren. Bezogen auf eine einzelne Kommunikationsbeziehung ergeben sich daraus unter anderem eine nicht garantierte Bandbreite sowie eine variable, möglicherweise erhebliche Verzögerung des Nachrichtentransfers. Überlastete, fehlerhafte oder vorübergehend ausgefallene Netzabschnitte und Vermittlungsknoten können bei der Speichervermittlung zu diversen Fehlern führen.<sup>3</sup> So können Pakete einer Kommunikationsbeziehung (natürlich) verloren gehen, aber auch in veränderter Reihenfolge beim Empfänger ankommen, bzw. mehrfach (als Duplikat). Grundsätzliche Eigenschaften der Speichervermittlung sind:

- Dateneinheiten haben eine begrenzte Länge (ganze Nachricht oder Segmente davon),
- Dateneinheiten tragen eine Kennung, die zur Adressierung dient,
- die Vermittlung erfolgt mit Hilfe von Puffern,
- Zwischenleitungen werden für mehrere Verbindungen im Multiplex genutzt,
- Verkehrslenkung (*routing*) erfolgt anhand der zuvor erwähnten Kennung.

Das Prinzip der Speichervermittlung bildet die Basis der modernen Kommunikationsnetze. Zahlreiche Sonderformen haben sich unter dem Oberbegriff Paketvermittlung (*packet switching*) versammelt. Die unterschiedlichen Ausprägungen betreffen hauptsächlich Paketlänge und -anzahl sowie den Verbindungstyp. Hierbei muss grundsätzlich unterschieden werden zwischen verbindungslosen und verbindungsorientierten Verbindungen. Im verbindungslosen Fall geschieht der Nachrichtentransport in Form von Datagrammen, die einzeln und unabhängig voneinander übertragen werden. Die verbindungsorientierte Paketübertragung nutzt hingegen virtuelle Verbindungen, die – ähnlich wie bei der Leitungsvermittlung – auf- und abgebaut werden.

---

<sup>2</sup> Die Begriffe *Dateneinheit* und *Paket* werden häufig synonym verwendet. Mit Steuerungs- und Sicherheitsinformation versehen bilden Dateneinheiten (bzw. Pakete) sogenannte Datagramme.

<sup>3</sup> Für die Beseitigung dieser Fehler ist meistens die Transportschicht im OSI-Schichtenmodell zuständig.

Den Sonderfall der Paketvermittlung, bei dem die Nachricht aus einem einzelnen Paket besteht, nennt man Sendungsvermittlung<sup>4</sup> (*message switching*). Nachrichten werden hierbei en bloc verbindungslos übermittelt. Da die gesamte Nachricht in jedem Vermittlungsknoten zwischengespeichert werden muss, ergeben sich ein sehr hoher Pufferbedarf und eine lange Gesamtübermittlungsdauer. Dieses Prinzip ist daher nur für zeitunkritische Anwendungen geeignet. Auf weitere Sonderformen der Paketvermittlung wird im nächsten Abschnitt näher eingegangen. **Tabelle 2.2** fasst die Merkmale der Vermittlungsprinzipien grob zusammen.

Vermittlungsprinzip	Länge einer Dateneinheit	Pufferung	Transferrdauer	Beispiel
Leitungsvermittlung	beliebig (transparenter Kanal)	entfällt	minimal	ISDN
Sendungsvermittlung	variabel	Store-and-Forward	hoch	DSI-Systeme <sup>5</sup>
Paketvermittlung			mittel	IP
Rahmenvermittlung		Hold-and-Forward	gering	LAN-LAN-Kopplung
Zellenvermittlung			sehr gering	ATM
	fix (mit geringer Länge)			

**Tabelle 2.2:** Hauptsächlichste Charakteristika der Vermittlungsprinzipien.

### 2.2.3 Zellenvermittlung

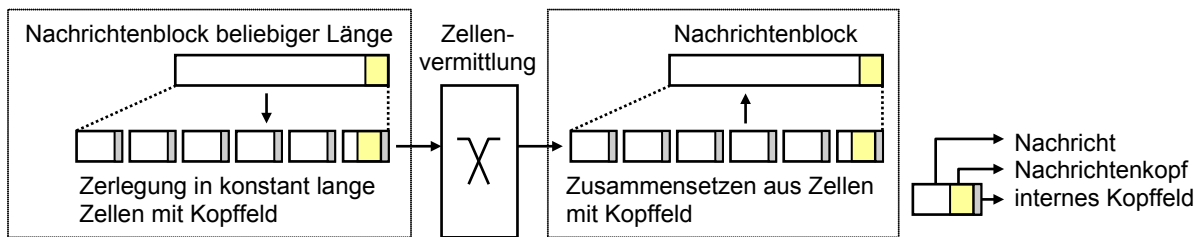
Beim Prinzip des Store-and-Forward müssen die Pakete auf dem Transportweg in den Vermittlungsknoten vollständig gepuffert, Adressen ausgewertet und Prüfsummen verifiziert bzw. neu berechnet werden. Hierdurch verläuft der Vermittlungsprozess relativ langsam. Zur Verringerung der effektiven Übermittlungsdauer wurden mehrere Konzepte mit der Grundidee entwickelt, Pakete in den Netzknoten so schnell wie möglich weiterzuleiten. Eine wesentliche Voraussetzung hierfür sind einfache Paketstrukturen, bei denen nur wenige Inhalte ausgewertet werden müssen. Ein weiteres Designziel ist die möglichst umfassende Realisierbarkeit der Routing-Funktion in Hardware. So entstand mit Hilfe technologischer Weiterentwicklungen die schnelle Paketvermittlung (*fast packet switching*), die häufig mit dem Begriff *Hold-and-Forward* vom Store-and-Forward abgegrenzt wird (siehe **Tabelle 2.2**). Die Vermittlungsvorgänge werden hierbei durch Hardware-Unterstützung (z.B. schnelle Halbleiterspeicher zur Pufferung) und vereinfachte Protokollfunktionen zeitlich besonders effektiv realisiert. Eine Sonderform der schnellen Paketvermittlung ist die Rahmenvermittlung (*frame switching*), wobei Rahmen der Schicht 2 verbindungsorientiert übermittelt werden. Eine spezielle Ausprägung davon mit weiter vereinfachten Protokollfunktionen (nur Fehlererkennung, keine Sicherung der Reihenfolge, keine Datenflusssteuerung) ist Frame Relay [ITG96a].

Ein weiterer Sonderfall der schnellen Paketvermittlung im Asynchronen Transfermodus ist

<sup>4</sup> Synonym: Nachrichtenvermittlung.

<sup>5</sup> Sprachübertragung mittels *Digital Speech Interpolation* (DSI), angewendet in Netzen der 1980er Jahre.

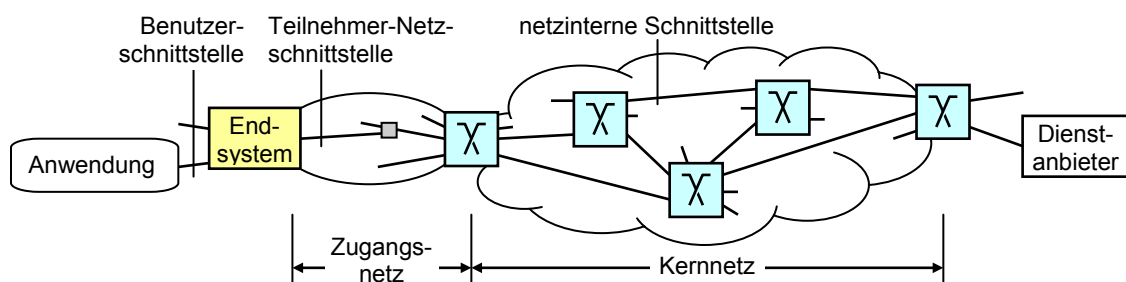
die Zellenvermittlung (*cell switching*)<sup>6</sup>. Sie setzt auf eine schnelle Verarbeitung in den Netzknoten, indem ausschließlich kurze Dateneinheiten mit konstanter Länge – sogenannte Zellen – verwendet werden. Zur Behandlung von Dateneinheiten größerer bzw. variabler Länge werden diese nach dem in **Bild 2.1** dargestellten Schema in eine Folge von Zellen gegliedert. Insofern stellt die Zellenvermittlung eine Basistechnik für sämtliche Paketvermittlungsarten dar. Es sei angemerkt, dass sich der Begriff *Zelle* in der Regel auf Dateneinheiten der OSI-Schicht 1 bezieht, während Rahmen der Schicht 2 und Pakete der Schicht 3 zuzuordnen sind.



**Bild 2.1:** Vermittlung von Nachrichtenblöcken unterschiedlicher Länge mittels Gliederung und Verarbeitung einheitlicher Zellen.

### 2.3 Knotenkonzepte

Kommunikationsnetze wie das Internet bestehen aus vielen Teilnetzen, die untereinander vernetzt sind und häufig – entstehungsgeschichtlich bedingt – stark unterschiedliche Eigenschaften aufweisen. Zur Verbindung solcher Subnetze (*internetworking*) dienen Zwischensysteme; die in den Subnetzen neben weiteren Zwischensystemen vorhandenen Systeme werden Endsysteme genannt, **Bild 2.2**. Über diese werden den Anwendern Telekommunikationsdienste angeboten, wobei sich ein homogen wirkendes Netz präsentiert, mit einheitlichem Adressraum und identischen Protokollen (zumindest auf einigen OSI-Schichten). Als Zwischensysteme treten Repeater, Konverter und Gateways auf, sowie Hubs, Brücken (*bridge*), Router und andere Vermittlungsknoten (siehe z.B. [ITG96b]). Dem Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit



**Bild 2.2:** Kommunikationsmodell mit Schnittstellen und Netzkomponenten.

<sup>6</sup> Synonym: Cell relaying.

entsprechend befinden sich Netzelemente mit Vermittlungs- und Speicherfunktion im Fokus dieses Abschnitts, d.h. die vier letztgenannten Knotentypen.

Gemeinsame Merkmale von Vermittlungsknoten und Gateways sind die Adressierbarkeit von Objekten (Ports, Endgeräte, etc.) und die Organisation der auszuführenden Steuerungsaufgaben. Die Grundfunktionen dieser Knoten werden im Folgenden grob skizziert. Näher eingegangen wird dann auf die Konzepte zur Realisierung der Schalt- und Speicherfunktionen in solchen Netzknoten.

- Brücken sind Netzübergangseinrichtungen, die Rahmen auf OSI-Schicht 2 vermitteln und für den Zusammenschluss lokaler Netze – bzw. Segmenten davon – zu einem Gesamtnetz sorgen. Man unterscheidet zwischen der MAC-Brücke, die auf Unterschicht 2a Netze mit identischen Zugriffsverfahren verbindet, und der LLC-Brücke (*logical link control*). Dieser auch Translation Bridge genannte Typ wird verwendet, um zwei Teilnetze mit verschiedenen Zugriffsverfahren (z.B. CSMA/CD und Token-Passing, siehe Kapitel 2.4.1) zu koppeln. Brücken sind unabhängig von den höheren Protokollschichten. Sie dienen primär dem Verkehrs-Management mit dem Ziel, lokalen Verkehr auch lokal zu begrenzen.
- Router sind Vermittlungsknoten, die zur Kopplung von Teilnetzen auf der OSI-Vermittlungsschicht (Schicht 3) arbeiten. Sie führen Verkehrslenkungen aus und behandeln die Subnetze logisch getrennt, was die Kenntnis der Netztopologie voraussetzt. Sie sind vom eingesetzten Netzprotokoll abhängig und können auch mehrere Netzprotokolle gleichzeitig bearbeiten (Multiprotokoll-Router, z.B. TCP/IP- und OSI-Protokolle). Im Allgemeinen unterscheidet man drei Router-Typen: (i) Router mit zentraler Prozessoreinheit und einheitlichen Leitungsmodulen, die mit einem Bus verbunden sind, **Bild 2.3** (links); (ii) Router mit ebensolcher Architektur, jedoch mit zusätzlichen CPUs in den Leitungsmodulen zum verteilten Ausführen der Verkehrslenkungenfunktion; (iii) Hochleistungs-Router, die über dezidierte ein- und ausgangsseitige Leitungsmodulen mit eigener Rechenleistung verfügen. Die Vermittlung geschieht hier mit einem asynchronen Koppelnetz [Chao01], [Chiussi03]. Alle übergeordneten Funktionen wie Aktualisieren der Routing-Tabellen führt eine zentralisierte Recheneinheit (*network processor*) aus. Meistens beruhen solche Systeme auf dem in **Bild 2.3** (rechts) dargestellten Grundprinzip.
- Switches vermitteln im einfachsten Fall Rahmen auf OSI-Schicht 2, können dazu aber auch Information von den höheren Schichten (3-7) heranziehen. Dementsprechend spricht man von Layer-2-Switches usw. In der Fachliteratur gibt es keine eindeutige technische Differenzierung zwischen Bridges und Layer-2-Switches.<sup>7</sup> Der Layer-3-

---

<sup>7</sup> Bridges werden zum Segmentieren (Verkleinern der Kollisionsdomäne) von Netzen und zum Verbinden unterschiedlicher Architekturen (z.B. Ethernet – Token-Ring) eingesetzt. Switches wurden erst später entwickelt.

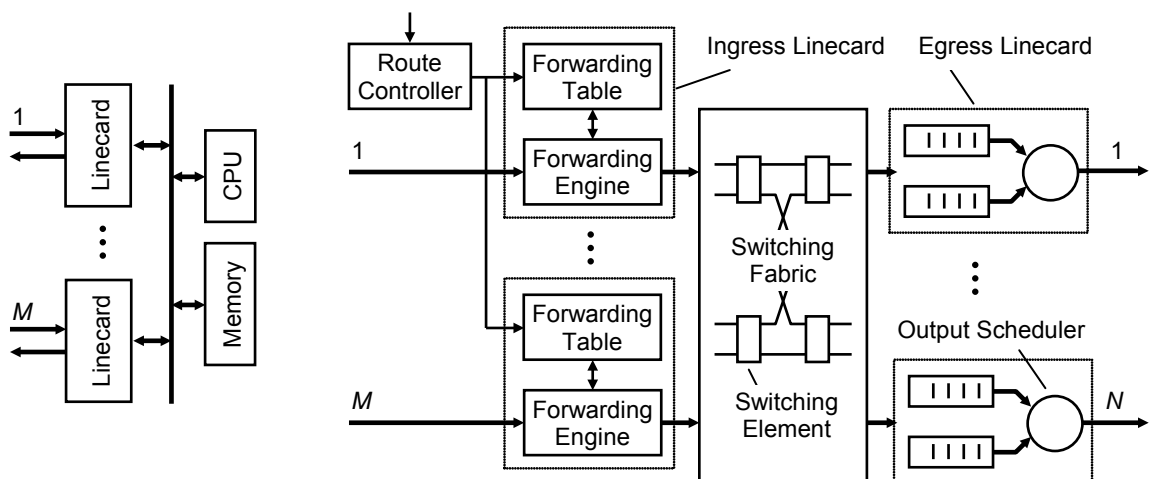


Switch beinhaltet Bridge- und Router-Funktionen, die Unterschiede sind für dieses Unterkapitel unwesentlich.<sup>8</sup>

- Gateways bearbeiten Nachrichten meistens auf Schicht 4. Sie verbinden Netze zu einem Gesamtsystem und ermöglichen die Kommunikation ggf. auch mittels unterschiedlicher Transportprotokolle. Zur Protokollübersetzung werden unter Umständen Informationen der höheren Schichten herangezogen (*transport-relay*).

Auf weitere Knotentypen wie Cross-connects<sup>9</sup>, Konzentratoren und diverse Multiplexer (z.B. mit Add-Drop-Funktion) wird hier nicht eingegangen, denn deren Funktionen sind im Wesentlichen in der obigen Übersicht inbegriffen. Router, Switches und Gateways werden in Local Area Networks (LAN) ebenso wie in MANs und WANs eingesetzt, Bridges ausschließlich in LANs. Je nach Leistungsfähigkeit basieren diese Netzknoten auf unterschiedlichen Architekturen. Grundsätzliches Ziel der Architekturen ist das Erreichen einer vorgegebenen Leistungsfähigkeit mit möglichst geringem Einsatz an Hardware-Ressourcen und Steuerungsaufwand (primär in Gestalt von Rechenleistung, Pufferkapazität, Pufferbandbreite sowie Schaltelementen). Zellen-Multiplexer spielen hier eine Schlüsselrolle.

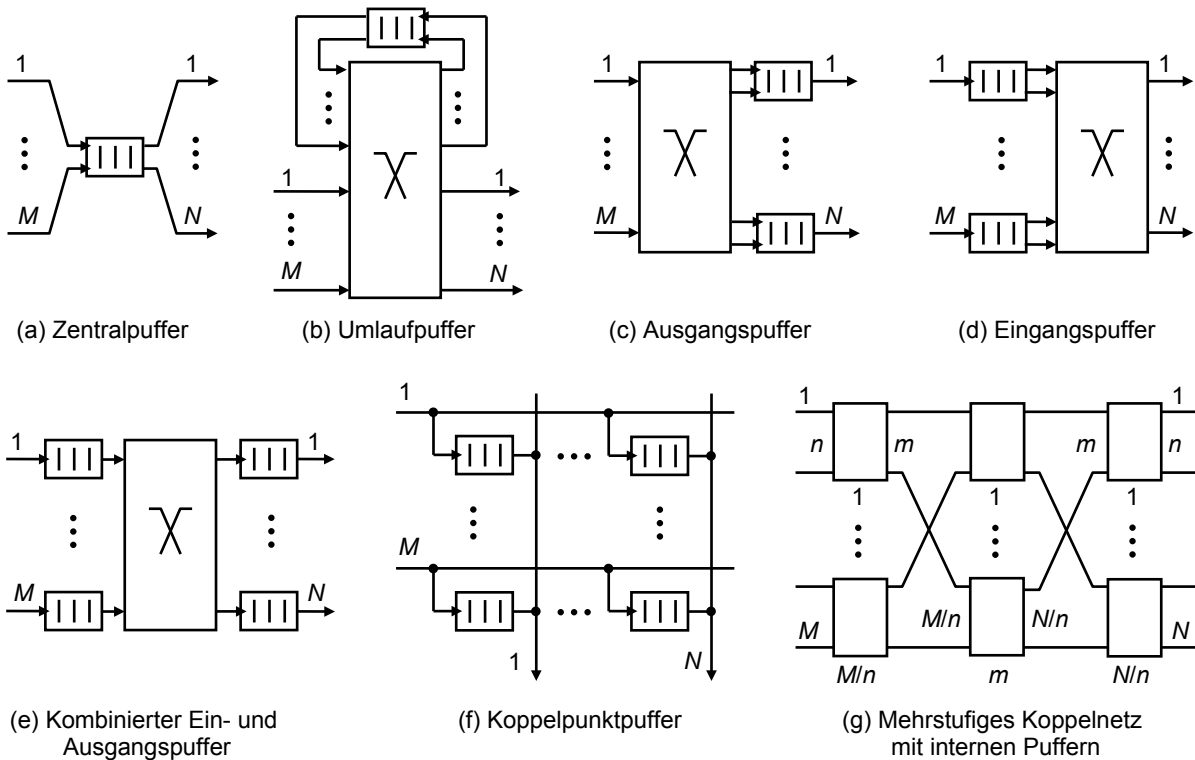
Die Basiskonzepte der Zellenpufferung in Vermittlungsknoten illustriert **Bild 2.4**. Bei der Architektur mit zentralem Puffer werden sämtliche Aufträge über eine oder mehrere logische Warteschlangen geführt. Der zentrale Warteraum kann hierbei einzelnen Ausgängen oder Verbindungen mehr oder weniger flexibel zugeordnet sein, was eine höchst effiziente Nut-



**Bild 2.3:** Strukturen von Vermittlungsknoten. Im einfachsten Fall (links) handelt es sich um ein System mit zentralem Prozessor und einem Bus zur Verbindung der Leitungsmodule (linecards). Ein- und Ausgangszahl sind hier identisch. Bei leistungsfähigeren Systemen verfügen die Linecards über eigene Rechenleistung (Multi-processor-system). In Hochleistungssystemen (rechts) unterscheiden sich die Anschlussgruppen entsprechend ihrer eingangs- und ausgangsseitigen Funktion. Zur Verbindung dient hier ein Koppelnetz (switching fabric).

<sup>8</sup> Ein Layer-3-Switch behandelt z.B. das erste IP-Paket einer Verkehrsbeziehung wie ein Router, analysiert aber dabei Absender- und Empfänger-IP-Adressen. Nachfolgende Pakete werden dann auf Schicht 2 weitergeleitet.

<sup>9</sup> Ein Cross-connect verbindet physikalische oder virtuelle Kanäle über ein Verbindungsnetzwerk.



**Bild 2.4:** Pufferkonzepte für Vermittlungsknoten. Fundamental sind (a) zentrale Pufferung, (b) Umlaufpufferung sowie (c) Ausgangs- und (d) Eingangspufferung (FIFO oder virtuelle Ausgangswarteschlangen). Das Konzept (e) resultiert aus der Kombination von Ein- und Ausgangspufferung. Durch Verteilung der Puffer auf die Schaltelemente ergibt sich eine netzinterne Pufferung. Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Koppelpunkt-Pufferung (f)<sup>10</sup>. Die Anwendung der Basiskonzepte in mehrstufigen Koppelnetzen resultiert in Strukturen wie (g).

zung der Pufferkapazität erlaubt [Hluchyj88]. Der Puffer muss imstande sein, simultan bis zu  $M$  Zellen aufzunehmen und bis zu  $N$  Zellen auszugeben. Koordination von Gruppenankünften bzw. -abgängen, Warteschlangenbetrieb und Puffer-Management erfordern insgesamt komplexe Steuerungsmechanismen. Einen Überblick hierzu gibt z.B. [Arpaci00]. Die Umlaufpufferung (*recirculating buffer*) löst einen Teil dieser Steuerungsaufgaben mit Hilfe eines Batch-Banyan-Sortier-Netzes, das dem Zentralpuffer alle Aufträge zuführt, die an den Ausgängen Konflikte hervorrufen würden. Die aus dem Puffer zum Transfer angebotenen Aufträge können im Kollisionsfall erneut aussortiert werden und somit wiederholt in den Puffer gelangen [Huang84], [Giacopelli91], [Zegura93].

Das Konzept der Ausgangspufferung ist durch individuelle Warteschlangen zur Auflösung von Zugriffskonflikten an den abgehenden Übertragungssystemen gekennzeichnet. Je nach Ziel müssen simultan bis zu  $M$  Ankünfte in denselben Puffer, d.h. in eine Warteschlange gelangen. Die einzelnen Warteschlangen fungieren als statistische Multiplexer, sie können parallel und unkoordiniert z.B. mit der „natürlichen“ Bediendisziplin First-Come First-Served (FCFS) betrieben werden. Entsprechend einfach gestalten sich Puffer-Management und Abfertigungsprozess (first-in-first-out-Puffer, FIFO). Wie beim Zentralpuffer beschränkt auch

<sup>10</sup> Die Koppelpunkt-Pufferung kann bei zeilenweiser Gruppierung der Puffer als Eingangspuffer-System aufgefasst werden bzw. bei spaltenweiser Gruppierung als Ausgangspuffer-System.

hier die notwendige Anzahl der Warteschlangeneingänge (bzw. die entsprechende Erhöhung der Verarbeitungsgeschwindigkeit) die Skalierbarkeit. Die Ausgangspuffer können auch physikalisch oder virtuell in mehrere Warteschlangen für unterschiedliche Dienstgüteklassen unterteilt sein.

Beim Eingangspuffer-System verfügt jeder Eingang über einen separaten Warteraum zur Aufnahme ankommender Aufträge, die aufgrund von Ausgangskollisionen nicht unmittelbar weitergeleitet werden können. Im einfachsten Fall enthält jeder Puffer eine Warteschlange. Das System stellt dann einen eingangsgepufferten  $M \times N$ -Crossbar dar, bei dem die Übertragungsgeschwindigkeit auf allen Datenpfaden mit der Geschwindigkeit auf den Zubringer- bzw. Abnehmerleitungen identisch sein kann. Dies macht die Architektur interessant für Hochgeschwindigkeitsanwendungen. Zur Abfertigung der Warteschlangen kommen mehrere Disziplinen in Frage. Der Elementarfall ist die Zuteilung der Zellen auf den Kopfpositionen der Warteschlangen (*head-of-line*, HoL), sodass jeder Puffer als FIFO-Speicher ausgeführt sein kann. Kennzeichnend für dieses einfache Verfahren ist seine mäßige Leistungsfähigkeit aufgrund der Warteschlangenblockierung (HoL-Blockierung), die den Durchsatz je nach Systemgröße auf 75,0% - 58,6% begrenzt [Hui87], [Karol87].

Es gibt aber eine Reihe von Techniken und Verfahren, mit denen die Leistungsfähigkeit deutlich gesteigert werden kann [Langer91]. Prominentestes Beispiel sind virtuelle Ausgangswarteschlangen (*virtual output queues*, VOQ), wobei der Puffer zwecks Vermeidung der HoL-Blockierung ausgangsorientiert gegliedert wird [McKeown97]. Vorteilhaft bezüglich der Skalierbarkeit des Systems ist der Umstand, dass die Pufferbandbreite unabhängig ist von der Systemgröße. Begrenzendes Element ist hier die Zuteilungseinheit, weil die Gesamtanzahl der Warteschlangen die Dauer der Zuteilung bestimmt. Ansätze mit aufgeweiteten Pufferausgängen entschärfen diese Problematik auf Kosten eines größeren Koppelnetzes [Koliass99].

Auf den zuvor genannten Elementen aufbauende hybride Knotenarchitekturen – insbesondere mit kombinierter Ein- und Ausgangspufferung (*combined input output queue*, CIOQ) – setzen hier an, um mit moderat erhöhter (z.B. doppelter) interner Verarbeitungsgeschwindigkeit Optimierungen zu erzielen. So arbeiten viele kommerzielle Systeme gemäß **Bild 2.4** (e) mit kombinierten Ein- und Ausgangswarteschlangen (siehe beispielsweise [Minkenberg00], [Iyer02], [Chiussi03]).

Das Platzieren der Warteschlangen unmittelbar an den Koppelpunkten eines einstufigen Verbindungsnetzes (*crossbar*) gemäß **Bild 2.4** (f) wird häufig als eigenständige Architektur mit netzinterner Pufferung betrachtet, [Goli92], [Zhou97], [Oki00]. Aus funktionaler Sicht ist dies der Sonderfall eines Systems mit  $N$  parallelen ausgangsspezifischen Warteschlangen an jedem Eingang (VOQ). Ebenso gut lassen sich die Puffer auch zu einer Architektur mit  $M$  parallelen eingangsspezifischen Warteschlangen pro Ausgang gruppieren, sodass sich der Sonderfall eines Ausgangspuffersystems ergibt. Die Puffer können als FIFO-Speicher mit eingangsseiti-

gem Adressfilter ausgeführt sein [Nojima87]. Das Auslesen muss dann von ausgangsorientierten Zuteilungseinheiten gesteuert werden.

Systeme mit einer großen Anzahl von Ein- und Ausgängen lassen sich durch Verknüpfung mehrerer Elemente der oben genannten Art – wie in **Bild 2.4** (g) dargestellt – als mehrstufige Anordnungen konzipieren. Allerdings können innere Blockierungseffekte die Leistungsfähigkeit solcher Koppelnetze mit interner Pufferung einschränken [Awdeh95]. Falls für die Nachrichtenblöcke einer Verkehrsbeziehung in dieser Anordnung unterschiedliche Wege benutzt werden, muss die korrekte Reihenfolge der betreffenden Blöcke wiederhergestellt werden, z.B. am Systemausgang oder im Endsystem [Chaney97], [Turner98].

Eine Schlüsselrolle spielen Zellen-Multiplexer bei allen Pufferkonzepten. Die wichtigsten Merkmale der Basisanordnungen sind in **Tabelle 2.3** zusammengefasst. Eine ausführliche Übersicht gibt beispielsweise [Awdeh95]. Üblicherweise verwenden IP-Router und Switches die zellenbasierte Vermittlung. Dies legt einen synchronen Betrieb von Verbindungsnetz und Puffer nahe [Chiussi03].

Pufferkonzept	Zentralpuffer	Ausgangspuffer	Eingangspuffer	Eingangspuffer (VOQ) <sup>11</sup>	Ein- u. Ausgangspuffer <sup>12</sup>
Pufferanzahl	1	$N$	$M$	$M$	$M + N$
Bandbreite Einzelpuffer	$(M + N) f_b$	$(M + 1) f_b$	$2 f_b$	$(N + 1) f_b$	$3 f_b$
Wartepplatzgranularität	1	$N$	$M$	$MN$	$M$ bzw. $N$
Pufferausnutzung	sehr hoch	gering	hoch	moderat	moderat
Verbindungsnetzaufwand	sehr hoch	hoch	gering	hoch	moderat
Steuerung	komplex	einfach	komplex	moderat	moderat
Skalierbarkeit	schlecht	schlecht	gut	gut	gut

**Tabelle 2.3:** Charakteristische Merkmale der wichtigsten Pufferkonzepte (Pufferressourcen sind gleichmäßig auf alle  $M$  Ein- bzw.  $N$  Ausgänge aufgeteilt; spezielle pufferinterne Gliederungen sind nicht berücksichtigt).  $f_b$  bezeichnet die erforderliche Bandbreite eines Puffereingangs oder -ausgangs zur Aufnahme bzw. Abgabe von Dateneinheiten bei einer gegebenen, an Ein- und Ausgang einheitlichen Übertragungsrate.

## 2.4 Protokollaspekte und Verkehrssteuerung

Protokolle sind die Basis der Zusammenarbeit von Instanzen der gleichen Funktionsschicht in unterschiedlichen Teilen eines Kommunikationsnetzes. Als Kernprotokolle verwendet das Internet beispielsweise TCP/IP (*transmission control protocol/ internet protocol*). Reservierungsprotokolle für den Medienzugang werden im folgenden Abschnitt grob adressiert. Die weiteren Unterkapitel widmen sich der Verkehrslenkung mit den zugehörigen Protokollen sowie dem Thema Netzlastformung und Überwachung.

<sup>11</sup> Puffer mit ausgangsseitiger Aufweitung auf  $N$  Ausgänge.

<sup>12</sup> Mit doppelter interner Verarbeitungsgeschwindigkeit (*speed-up*).

### 2.4.1 Medienzugang

Der Medienzugang umfasst die physikalische Inanspruchnahme eines (Übertragungs-)Mediums und die damit zusammenhängenden organisatorischen Maßnahmen. Soll von mehreren unabhängigen Stellen aus zugegriffen werden (*multiple access*), so erfordert dies ein entsprechendes Medienzugriffsverfahren (*media access control*, MAC)<sup>13</sup>. Dessen Kernaufgabe ist die Bewerkstelligung eines konfliktfreien Medienzugangs, d.h. die Lösung von Zugriffskonflikten, sofern Kollisionen nicht auszuschließen sind. Aufbauend auf diesen Verfahren müssen geeignete Zugriffsprotokolle für eine Anpassung an das Übertragungsmedium und die betreffenden Systemanforderungen (LAN, WLAN, PON, UMTS usw.) sorgen. Die Organisationsform ermöglicht eine grobe Einteilung in Verfahren mit Reservierung, mit zentraler bzw. dezentraler Zuteilung, sowie mit konkurrierendem Zugriff, **Tabelle 2.4**. Der Medienzugang erfolgt (fast) immer mithilfe von Varianten oder Kombinationen dieser Basismechanismen.

Grundsätzlich gestatten Verfahren der Kategorien Reservierung und Zuteilung einen geordneten, konfliktfreien Zugriff. Reservierungsverfahren bedienen sich der Multiplextechniken, Polling arbeitet nach dem Prinzip des zentralen Sendeaufrufs (siehe Kapitel 3). Dezentrale Zuteilung wird häufig mit Token-basierten Mechanismen realisiert. So hat der *Token Ring* als bekanntester Vertreter der ersten LAN-Generation eine Vielzahl von Abkömmlingen hervorgebracht. Beim Buffer-Insertion-Verfahren verwenden beispielsweise die Stationen jeweils einen Puffer für den Verkehrsstrom auf dem Medium und einen für den einzufügenden Verkehr. Konkurrierende Verfahren beruhen auf dem Prinzip des stochastischen Zugriffs und sind grundsätzlich konfliktbehaftet. Sie arbeiten mit einem direkten Zugriffsversuch, der bei Erfolg verzögerungsfreien Medienzugang bietet, und einer geordneten Konfliktlösung im Kollisionsfall. Zu nennen sind hier Protokolle wie ALOHA und Carrier Sense Multiple Access (CSMA) sowie deren Varianten<sup>14</sup> (siehe z.B. [Tanenbaum98], [Eberspächer02]).

Ein wichtiges Kriterium für den Einsatz eines Verfahrens ist die auf dem Medium aufbauende Netztopologie. So ist Polling prädestiniert für eine Sternstruktur, Ringe werden oft mit dezen-

Reservierung	Zentrale Zuteilung	Dezentrale Zuteilung	Konkurrierender Zugriff
TDMA FDMA CDMA	Sendeaufruf (Polling)	Token Ring/Bus; z.B. Fiber Distributed Data Interface (FDDI, ANSI X3T9.5) Buffer-Insertion; z.B. Resilient Packet Ring (RPR, IEEE 802.17)	ALOHA in mehreren Ausprägungen CSMA in mehreren Ausprägungen

**Tabelle 2.4:** Klassifizierung häufig verwendeter Medienzugriffsverfahren.

<sup>13</sup> Der Medienzugriff ist Bestandteil von Schicht 2, d.h. der Sicherungsschicht im OSI-Modell. Dazu gehört ferner die logische Verbindungssteuerung (*logical link control*, LLC). Deren Aufgaben sind das Ergänzen von Prüfdaten (Parity-Bits, CRC-Prüfsummen), Wiederholung bei fehlerhafter Übertragung, Behandlung des Verlustes von Quittungen, Flusskontrolle (Verhindern von Pufferüberlauf) und Duplexbetrieb.

<sup>14</sup> Die ALOHA-Weiterentwicklung CSMA/CD (*collision detection*) ist sehr verbreitet (z.B. Ethernet), weitere Varianten unterscheiden sich in der Art der Konfliktlösung (z.B. *collision resolution*, *collision avoidance*).

tralen Verfahren betrieben, und Konkurrenzverfahren erfordern Stern- bzw. Busstrukturen. Im Allgemeinen sind Zuteilungs- und Reservierungsverfahren bei hoher Verkehrslast im Vorteil, denn sie ermöglichen dank ihrer koordinierten Arbeitweise einen hohen Durchsatz bei moderater Wartedauer. Konkurrierender Zugriff kann bei geringem Verkehrsangebot (die Wahrscheinlichkeit von Kollisionen ist dann gering) den Vorteil des sofortigen Medienzugriffs ausspielen. Ein weiterer Aspekt ist die Robustheit. So kann eine zentrale Instanz (z.B. beim Polling) im Defektfall das Gesamtsystem zum Erliegen bringen, während sich dezentrale Methoden durch höhere Fehlertoleranz auszeichnen.

Bei allen Formen des Medienzugangs spielt die Funktion des Multiplexens mit Pufferung eine wesentliche Rolle. Die Bemessung der Warteraumkapazität beim Systemdesign und der dynamische Umgang damit während des Betriebs erfordern eine möglichst genaue Kenntnis des Leistungsverhaltens in Abhängigkeit der vorhandenen Pufferkapazität.

### 2.4.2 Verkehrslenkung

Verkehrslenkung (*routing*) bezeichnet den Prozess der Wegebestimmung für eine Verkehrsbeziehung.<sup>15</sup> Bei verbindungsorientierter Kommunikation erfolgt die Verkehrslenkung beim Verbindungsaufbau, während sie bei verbindungslosen Verkehrsbeziehungen für jede Dateneinheit erneut stattfinden muss. Dies hat großen Einfluss auf die Dienstgüte; man kann die Funktion als Teil des Verkehrs-Managements ansehen (siehe Abschnitt 2.5.3).

Eine einfache Möglichkeit für kleine Netze wie z.B. LANs bietet das *Spanning Tree Protocol* (STP). Mit dessen Hilfe wird aus einer beliebig vermaschten Struktur ein virtuelles Baumnetz konstruiert, in dem sich dank eindeutiger Wege ein algorithmisches Routing erübrigt. Zur schnelleren Neuberechnung des Baumes, z.B. bei Änderungen der Netztopologie, wurde das *Rapid Spanning Tree Protocol* (RSTP) entwickelt [IEEE01]. Da die Baumkonstruktion für viele Verbindungen nicht den kürzesten Weg bieten kann, eignen sich diese Verfahren hauptsächlich für kleine Netze, z.B. Ethernet [IEEE02] und Token Ring [IEEE98].

Existieren für das Einrichten einer Endsystemverbindung mehrere Wege, so ist anhand geeigneter Kriterien eine Auswahl zu treffen. Bei dieser Kernaufgabe der Verkehrslenkung muss zwischen dem Verkehrslenkungsschema und der Wegeauswahl differenziert werden. Im Allgemeinen legt das Lenkungsschema in größeren Zeitabständen (vor der eigentlichen Nachrichtenübermittlung) auf einer höheren Ebene fest, welche Wege im Netz nutzbar sind. Zur Ermittlung der Wege werden Routing-Protokolle eingesetzt, die zum Sammeln von Informationen über Netztopologie und -zustand dienen. Die Konstruktion der Wege erfolgt dann an-

---

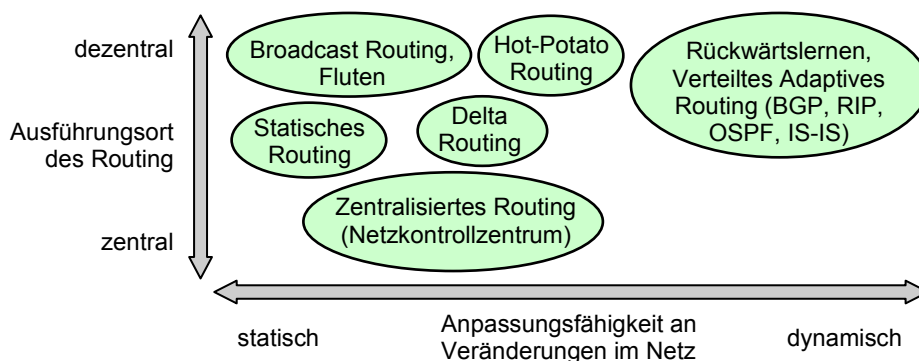
<sup>15</sup> Im Falle der Leitungsvermittlung wird auch von Wegelenkung gesprochen.

hand dieser Informationen und bestimmter Metriken<sup>16</sup> mit einem geeigneten Routing-Algorithmus. Die so ermittelte Wegeinformation wird schließlich in entsprechende Verkehrslenkungstabellen (*routing tables*) der Netzknoten eingetragen. Die Wegeauswahl in den einzelnen Knoten findet dann in engem Zusammenhang mit dem Nachrichtentransfer durch Weiterleitung gemäß Routing-Tabelle statt. Die Art der Aktualisierung und Verwaltung der Verkehrslenkungstabellen ist abhängig vom Verkehrslenkungsschema.

In großen Netzen wie dem Internet ist die Verkehrslenkung hierarchisch organisiert und beruht auf einer Aufteilung des Netzes in sogenannte autonome Systeme. Unterschieden wird grundsätzlich zwischen Verfahren, die innerhalb eines autonomen Systems arbeiten (*interior gateway protocols*, IGP)<sup>17</sup>, und solchen, die autonome Systeme als Einheiten betrachten und nur die Verkehrslenkung zwischen diesen behandeln (*exterior gateway protocols*, EGP).<sup>18</sup> De facto ist das *Border Gateway Protocol* (BGP) heute das einzige EGP [Handley06].

Grob gliedern lassen sich die vielen existierenden Verkehrslenkungsverfahren in statische und adaptive Verfahren, welche sich an Zustandsänderungen im Netz anpassen. Des Weiteren kann als Gliederungskriterium die Frage dienen, ob es sich um einen zentralisierten oder verteilten Lenkungsmechanismus handelt. Eine Illustration hierzu gibt **Bild 2.5**. Es folgt eine grobe, keinesfalls vollständige Übersicht der dargestellten Verfahren und weiterer Ansätze.

Häufig kommt statisches – d.h. nicht adaptives – Routing zum Einsatz, denn es arbeitet sehr einfach. Jeder Netzknoten unterhält hierbei eine Tabelle mit festgelegten Wegen zu allen Zielknoten. Üblicherweise ist als Ausfallschutz auch ein Alternativweg angegeben.



**Bild 2.5:** Grobe Einordnung wichtiger Routing-Verfahren (BGP: Border Gateway Protocol, RIP: Routing Information Protocol, OSPF: Open Shortest Path First, IS: Intermediate System).

<sup>16</sup> Statische Metriken sind z.B. Entfernung und Übertragungskapazität. Bei der aktuellen Verkehrslast und Übertragungsdauer handelt es sich um dynamische Metriken, bei der Anzahl der zu passierenden Netzknoten um eine additive Metrik. Zur Kategorie der restriktiven Metriken gehört z.B. die verfügbare Bandbreite.

<sup>17</sup> Im IP-Umfeld, wo meistens protokolltechnische Aspekte im Vordergrund stehen, wird bei der Verkehrslenkung stets von einem Verkehrslenkungsprotokoll (*routing protocol*) gesprochen, auch wenn damit nicht nur das Verfahren zur Verteilung von Verkehrslenkungsinformationen gemeint ist.

<sup>18</sup> Autonome Systeme werden auch als Domänen (*domain*) bezeichnet. Demgemäß spricht man auch von Intradomain Routing bzw. Interdomain Routing.

Zentralisiertes Routing findet in einem Netzkontrollzentrum (*routing control center*, RCC) statt, an das sämtliche Netzknoten periodisch Zustandsinformationen senden (z.B. Liste aller aktiven Nachbarknoten, aktuelle Warteschlangenlänge, Verkehrsvolumen, usw.). Das RCC berechnet auf Basis dieser Informationen die optimale Weglänge zwischen allen Knoten des Netzes. Danach übermittelt es jedem Netzknoten eine individuelle Routing-Tabelle zur einfachen und schnellen Ausführung der Verkehrlenkung. Prinzipiell lassen sich so perfekte Entscheidungen treffen. Allerdings kann die Aktualisierung eines großen Netzes mit dieser adaptiven Verfahrensweise unter Umständen sehr lange dauern. Durch geeignete Redundanzen im RCC muss für hinreichende Netzausfallsicherheit gesorgt werden.

Beim isolierten Routing entscheidet jeder Netzknoten nur aufgrund selbst gesammelter Informationen; ein expliziter Austausch von Routing-Information findet nicht statt. Die Anpassung an Änderungen des Verkehrs oder der Netztopologie (z.B. durch Knotenausfall) kann deshalb nur in beschränktem Maße erfolgen. Zu den isolierten Routing-Verfahren zählen (i) *Delta Routing*, (ii) *Broadcast Routing*, (iii) *Hot-Potato Routing* und (iv) *Rückwärtslernen*.

Delta Routing ist eine Kombination vom isolierten Routing mit dem zentralisierten Routing. Jeder Knoten informiert hierbei das RCC periodisch über den Netzzustand. Das RCC berechnet auf dieser Basis die aktuellen Routing-Tabellen für alle Knoten und verteilt Listen mit äquivalenten Wegen. Jeder Netzknoten kann dann autonom entscheiden, auf welchem dieser Wege eine Nachricht weitergeleitet werden soll. Das namensgebende Delta stammt aus der Funktion, mit der ermittelt wird, ob Wege als äquivalent anzusehen sind.<sup>19</sup>

Beim Broadcast Routing wird die zu transferierende Nachricht an sämtliche Netzknoten gesendet. Zu unterscheiden ist das sogenannte *Fluten* von der Variante, bei der für jeden Knoten gesondert eine Kopie der Nachricht versandt wird. Das Fluten ist ein sehr einfaches nicht adaptives Verfahren, wobei Kopien jeder eingehenden Nachricht auf alle Ausgänge weitergegeben werden. Auch in unbekanntem Netzen werden so alle Netzknoten erreicht. Zur Eindämmung der hierdurch ausgelösten hohen Netzlast und vagabundierender Nachrichten dienen Maßnahmen wie (i) Erkennung von Duplikaten, (ii) Kontrolle der Lebensdauer von Nachrichten, (iii) selektives Fluten (Weiterleitung nur auf einigen Ausgängen) und (iv) die zufällige Auswahl eines Ausgangs (*random walk*). Dabei ergibt sich eine Aufteilung der Verkehrslast.

Beim Hot-Potato-Routing versucht jeder Knoten, eingehende Nachrichten schnellstmöglich weiterzuleiten, d.h. über die kürzeste Warteschlange [Boehm64].<sup>20</sup> Nach diesem Verfahren transferierte Nachrichten erreichen ihren Zielknoten unter Umständen erst spät und über große Umwege. Deshalb wird es in der Praxis meist mit dem statischen Routing kombiniert. Generell gibt es dann gemäß statischer Router-Einstellung zu jedem Zielknoten bevorzugte Aus-

---

<sup>19</sup> Bei  $\Delta \rightarrow 0$  ist dies ein zentrales Routing-Verfahren, bei  $\Delta \rightarrow \infty$  tendiert es zu einem dezentralen Verfahren.

<sup>20</sup> Nachrichten werden in einem Netzknoten im übertragenen Sinn wie „heiße Kartoffeln“ behandelt.



gänge. Solche Verfahren zeichnen sich durch eine schnelle Entscheidungsfindung bei geringem Rechenaufwand aus und sorgen für eine optimale Leitungsauslastung. Mit steigender Last entfernen sich die Routing-Ergebnisse allerdings vom Optimum, denn wenn mehrere Pakete gleichzeitig für denselben Ausgang anstehen, werden auch andere freie Ausgänge benutzt und somit ungünstige Wege beschritten.

Rückwärtslernen (*backward learning*) ist ein dynamisches Verkehrslenkungsschema, bei dem durch Beobachtung der ankommenden Nachrichten auf die vorhandenen Wege zu deren Ursprungsnetzknotten geschlossen wird. Die Nachrichten führen zu diesem Zweck die Wegeinformation mit sich. Problematisch sind hier die Lernphasen, weil dann kein optimales Routing möglich ist. Zudem gilt das Anpassungsverhalten an Veränderungen im Netz als schwach.

Bei der quellengesteuerte Verkehrslenkung (*source routing*) legt der Ursprungsknoten den kompletten Pfad durch das Netz fest und gibt der Nachricht die Wegeinformation mit. Transitknoten müssen diese lediglich auswerten, und ein schleifenfreier, zielführender Pakettransport ist garantiert. Änderungen des Netzzustands bleiben hierbei allerdings prinzipiell unberücksichtigt. In entsprechender Weise arbeitet zielgesteuertes Routing (*destination routing*), wobei Zielknoten der Quelle die Wegeinformation vor dem Nachrichtentransport mitteilen.

Beim verteilten adaptiven Routing tauscht jeder Knoten periodisch Routing-Informationen mit seinen Nachbarknoten aus. Jeder Knoten unterhält eine Routing-Tabelle, die den bevorzugten Weg zu jedem anderen Netzknoten enthält sowie Schätzwerte bezüglich (i) Anzahl der Hops, (ii) Verzögerungszeit, (iii) Gesamtanzahl von Nachrichten, die entlang des Weges warten. Diese Schätzungen werden gewonnen aus der Zeit/Entfernung zu den Nachbarn (z.B. mittels spezieller Echo-Pakete mit Zeitstempel) und/oder Schätzungen der Nachbarn. Ein Austausch der Routing-Informationen kann entweder synchron in bestimmten Aktualisierungsintervallen erfolgen oder asynchron bei signifikanten Änderungen. Zu diesem Verfahren gehören unter anderem (i) das *Distance Vector Routing* und (ii) das *Link State Routing*.

Distance Vector Routing wird in Form des *Routing Information Protocol* (RIP) aus der Gruppe der IGP-Verfahren seit Langem verwendet und ist weit verbreitet.<sup>21</sup> Als Routing-Metrik dient hier die Distanz zu allen Zielknoten, und die Berechnung erfolgt in der Regel mit einer verteilten Variante des Bellman-Ford-Algorithmus<sup>22</sup>. Ein stationärer Zustand der Netzknoten ist mit diesem Verfahren in der Praxis nur schwer zu erreichen [Elmeleegy09]. Als kritisch gilt diese Klasse von Verfahren auch bezüglich der Skalierbarkeit [Bodamer04].

Eine Alternative hierzu sind die so genannten *Link-State-Protokolle*. Dabei gibt jeder Router Informationen über den Status der von ihm abgehenden Links per Flutung an die übrigen

---

<sup>21</sup> RIP wurde bis 1979 im Internet verwendet und später abgelöst von Link-State-Verfahren.

<sup>22</sup> Nach seinen Erfindern R. Bellman und L. Ford benannter Algorithmus der Graphentheorie. Er dient zur Berechnung der kürzesten Wege ausgehend von einem Startknoten in einem kantengewichteten Graphen.

Router seiner Domäne, die somit eine Gesamtsicht auf die Netztopologie erhalten. Auf dieser Basis kann dann jeder Router den kürzesten Weg zu beliebigen Zielen innerhalb des Zuständigkeitsbereichs des Verkehrslenkungsprotokolls bestimmen, z.B. mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra<sup>23</sup>. Bekanntester Vertreter dieser Klasse von Verkehrslenkungsverfahren in IP-Netzen ist das OSPF-Protokoll (*open shortest path first*). Dieses Verfahren gilt allgemein als sehr rechenaufwändig. Ein ähnliches Protokoll mit minimalistischer und dadurch sehr einfach zu implementierender Architektur ist das *Intermediate System to Intermediate System Protocol* (IS-IS). Spezifiziert ist es durch IETF und die ISO/IEC [ISO02], [Koch02].

Dienstgüteorientierte Verkehrslenkung (*QoS routing*, QoSR) dient der Bereitstellung differenzierter Dienstgüte. Wenn absolute Garantien gegeben werden sollen, muss sich das Routing an harten Randbedingungen in Form konkreter Dienstgüteanforderungen orientieren. QoSR stellt dann einen Spezialfall der anforderungsbezogenen Verkehrslenkung (*constraint-based routing*) dar, wobei jede Route die relevanten Kriterien erfüllen muss. Im einfachsten Fall werden z.B. nur Bandbreiteneanforderungen berücksichtigt, weitergehende Lösungen können auch Maximalwerte der Verzögerung einhalten. Differenziert werden muss zwischen Anforderungen, die sich auf einzelne Verbindungsabschnitte beziehen (*link constraint*) und solchen, die Ende-zu-Ende-Bedingungen darstellen (*path constraint*). Die Erfüllung derartiger Anforderungen, verbunden mit dem Ziel einer effizienten Nutzung der verfügbaren Ressourcen, mündet in einer hochkomplexen Optimierungsaufgabe. Zusätzlich gilt es, einen Kompromiss zwischen Effizienz und Realisierungsaufwand zu finden. Neben der Komplexität gibt es eine Reihe weiterer Nachteile, die gegen eine ausschließliche Abstützung von Dienstgütearchitekturen auf QoSR sprechen: Um eine dynamische Anpassung an die Lastsituation zu ermöglichen, sind häufige Wegänderungen erforderlich, was Oszillationseffekte zur Folge haben kann. Zugleich wächst die Gefahr, dass sich Pakete überholen, was insbesondere im Fall von TCP-Verkehr zu signifikanten Leistungseinbußen führt [Blanton02]. Auch Umwege, die im Fall unterschiedlicher Verkehrsklassen zwangsläufig beschritten werden müssen, können zu einem schlechteren Gesamtverhalten führen. Zudem erhöht sich das Verkehrsaufkommen, da die Verkehrslenkung zusätzlichen Informationsaustausch benötigt [Bodamer04]. QoSR ist allgemein als Ergänzung entsprechender Bedien- und Pufferverwaltungsstrategien in Netzknoten (siehe Abschnitte 2.5.1 und 2.5.2) zu sehen [Bodamer04]. Eine Übersicht und Klassifizierung von QoSR-Verfahren ist in [Chen98] zu finden.

Verteilte Verfahren sind generell schwerer beherrschbar als zentralisierte. So wird bei verteiltem und adaptivem Routing ein stabiler Netzzustand mitunter nur langsam erreicht. Gegenmaßnahmen sind beispielsweise Einschränkung der Adaptivität sowie die Kombination von zentralen und verteilten Mechanismen. Getrieben durch verbesserte Möglichkeiten der Echt-

---

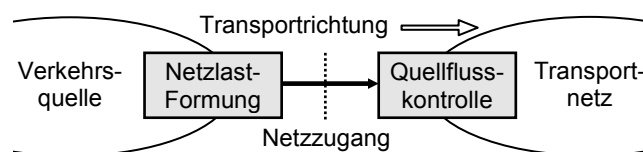
<sup>23</sup> Algorithmus zur Berechnung des kürzesten Pfades zwischen zwei Knoten in kantengewichteten Graphen; benannt nach seinem Erfinder, dem niederländischen Computer-Wissenschaftler E.W. Dijkstra (1930-2002).

zeitberechnung in den Netzknoten und durch neue wissenschaftliche Erkenntnisse auf dem Gebiet der Algorithmen befindet sich die Verkehrslenkung in einem anhaltenden Prozess der Weiterentwicklung, mit einem deutlichen Trend zu dezentralen Techniken [Eberspächer02], [Menth08]. Eine umfassende Betrachtung und Klassifizierung von Verkehrslenkungsverfahren für verschiedene Netztypen liefern z.B. [Späth02] und [Burgstahler09].

### 2.4.3 Netzlastformung und Überwachung

Quellflusskontrolle (*source policing*) und Netzlastformung (*traffic shaping*) sind Funktionen des Verkehrs-Management (siehe Abschnitt 2.5.3). Beide wirken auf der Vermittlungsschicht des OSI-Modells und verwenden ähnliche Mechanismen, die sich auf einzelne Verkehrsflüsse oder aggregierte Verkehrsströme beziehen können. Die Zielsetzungen sind aber unterschiedlich. So ist es Aufgabe der Quellflusskontrolle, die beim Verbindungsaufbau festgelegten Verbindungsparameter zu überwachen. In Netzen, die definierte Dienstgüte bereitstellen (siehe Abschnitt 2.5.4), ist dies ein unverzichtbares Instrument. Typischerweise wird unterschieden zwischen der Parameterüberwachung am Netzzugang (*usage parameter control*, UPC) und einer an Netzübergängen stattfindenden Kontrolle (*network parameter control*, NPC) [ITU96b]. Zu überwachende Parameter sind primär Spitzenrate und dauerhafte Rate (*sustainable rate*) von Verkehrsströmen. Hierfür eignen sich beispielsweise Verfahren, die auf dem Konzept des *Leaky Bucket* bzw. *Token Bucket* beruhen [Rathgeb97]. Es basiert auf der Vorstellung eines Flüssigkeitsspeichers mit definierter Kapazität und Abflussrate. Konformität liegt in diesem Modell solange vor, wie der Speicher nicht überläuft [Roberts96]. Stellt die Quellflusskontrolle fest, dass die Charakteristik des gemessenen Verkehrs nicht mit den beim Verbindungsaufbau vereinbarten Parametern übereinstimmt, werden Pakete der betreffenden Verbindung entweder verworfen oder einer Dienstgütekategorie mit geringerer Priorität zugeordnet. In IP-Netzen findet meist eine Herabstufung in die niedrigste Prioritätsklasse statt (Best-Effort-Verkehr).

In Kombination mit der Quellflusskontrolle tritt meistens auf Seiten der Verkehrsquelle (beim Netzzugang oder -übergang) die Netzlastformung auf, **Bild 2.6**. Dort wird versucht, die Cha-



**Bild 2.6:** Orte von Verkehrsformung und Quellflusskontrolle am Zugang zu einem Transportnetz. Gleiches gilt für den Übergang von einem Ursprungsnetz zum Zielnetz.

rakteristik des abgehenden Verkehrs bei Bedarf so zu beeinflussen, dass die Quellflusskontrolle auf der Gegenseite keine Pakete markieren<sup>24</sup> oder verwerfen muss. Erforderlich wird dies, wenn ankommende Verkehrsströme unzulässig hohe Lastspitzen aufweisen, beispielsweise hervorgerufen durch temporäre Überlastsituationen im Netz, oder wenn Anwender die ihnen zugestandenen Datenraten überschreiten. Netzlastformung ist mithin eine präventive Maßnahme zum Vermeiden von Stausituationen und Paketverlusten. So kann beispielsweise die Varianz der Abstände aufeinander folgender Dateneinheiten durch gezieltes Puffern und verzögertes Weiterleiten (*spacing* genannt) verringert werden, um eine bestimmte mittlere Rate einzuhalten. Wie bei der Quellflusskontrolle eignet sich hier ein Leaky-Bucket-Mechanismus zur Bestimmung der Zeitpunkte, an denen gepufferte Pakete weitergeleitet werden.

## 2.5 Problemstellungen

Die zunehmende Bedeutung des Internet sowie die Vielzahl paketbasierter Kommunikationsdienste und -anwendungen machen eine Unterstützung von Dienstgüteanforderungen immer wichtiger. Die Netzknoten spielen hierbei eine herausragende Rolle. Sie müssen generell imstande sein, höchste Übertragungsraten zu verarbeiten, um Engpässe im Netz zu vermeiden. Zudem muss der Pakettransfer durch jeden Knoten mit geringer Latenz und definierter Varianz der Durchlaufdauer erfolgen, z.B. zur Unterstützung von Echtzeitverkehr. Hierfür ist es erforderlich, dass neben der Verkehrsformung auch Steuerungstechniken wie Ablaufplanung (*scheduling*) und Puffer-Management in die Netzknotentechnik einfließen [Chao01]. Insbesondere bei elastischem Verkehr, zu dem auch der im Internet dominierende WWW-Verkehr zählt, reichen aber diese bereits als klassisch geltenden Techniken der Vermittlungsschicht, und Metriken wie z.B. die Verlusthäufigkeit von Paketen, allein nicht aus. Vielmehr müssen bei der Definition geeigneter Dienstgütemaße auch Einflüsse von den höheren Schichten des OSI-Modells (z.B. der Transportschicht) berücksichtigt werden [Chao01], [Bodamer02].

Die folgenden Unterkapitel widmen sich der Ablaufplanung und dem Puffer-Management, die zu den wichtigsten Steuerungstechniken (Management von Pufferressourcen und Übertragungsbandbreite, Überlastverhalten usw.) in den Netzknoten zählen. Die im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stehende Leistungsbewertung von Zellen-Multiplexern liefert hierzu essentielle Beiträge. Elemente des Verkehrs-Managements innerhalb von Netzknoten und weitere fundamentale Voraussetzungen für eine definierte Dienstgüte werden anschließend grob adressiert.

---

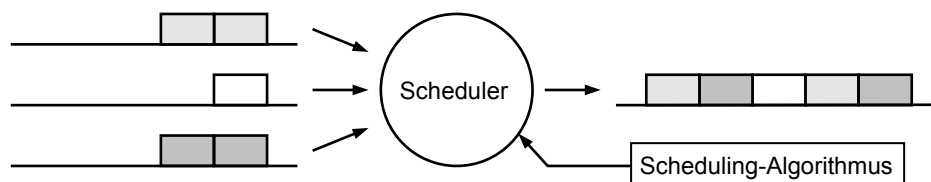
<sup>24</sup> Zur Überlastanzeige, beispielsweise im Netzwerkprotokoll TCP/IP.

### 2.5.1 Ablaufplanung

Innerhalb des Operations Research stellen Ablaufplanung und die Entwicklung von Reihenfolgemodellen eine Problemklasse dar, für die eine eigene Theorie existiert [Conway67].<sup>25</sup> Für Breitbandnetze (ATM) wurden Scheduling-Verfahren Anfang der 1990er Jahre entwickelt. Sie bestimmen, wie die Übertragungsbandbreite der von Netzknoten abgehenden Transportsysteme auf die betreffenden dort wartenden Pakete aufgeteilt wird. Des Weiteren legen sie die Reihenfolge fest, in der die gepufferten Pakete versandt werden. Wie in **Bild 2.7** exemplarisch dargestellt ist, geschieht dies anhand eines Scheduling-Algorithmus, d.h. einer Bedienstrategie. Die Ablaufplanung zählt somit zur Basis jeder QoS-Architektur. Da Pakete stets als Einheit übertragen werden, kommen insgesamt nur Verfahren mit nichtunterbrechender Abfertigung (*non-preemptive*) infrage.

Scheduling-Verfahren verwalten in der Regel mehrere (meist virtuelle) Puffer, denen sie die verfügbare Speicher- und Abfertigungskapazität flexibel zuweisen können. Die zahlreichen Scheduling-Mechanismen unterscheiden sich durch die angewendeten Methoden. Wird die Bedienrate einer Verkehrsklasse dynamisch der Lastsituation angepasst, spricht man von ratenbasierten Verfahren. Werden hingegen zeitabhängige Prioritäten vergeben, handelt es sich um eine fristenbasierte Methode. Ein weiteres Charakteristikum der Ablaufplanung ist die Art des dynamischen Umgangs mit freien Ressourcen. Werden diese auf die vorhandenen Forderungen aufgeteilt, spricht man von arbeitserhaltendem Betrieb (*work conserving*). Bleiben freie Ressourcen ungenutzt, handelt es sich um ein nicht arbeitserhaltendes Prinzip (*non-work conserving*). Im letztgenannten Fall wird das Netz nicht maximal ausgelastet, was sich aber vorteilhaft auf die Transferdauervarianz auswirkt, z.B. bei Jitter-sensitivem Echtzeitverkehr [Zhang95]. Bei der Mehrzahl der nachfolgend kurz vorstellten Verfahren handelt es sich um arbeitserhaltende Mechanismen.

Die wichtigsten Anforderungen an den Scheduler sind (i) Leistungsgarantien (schnelle Bearbeitung), (ii) Fairness zwischen gleichberechtigten Aufträgen und (iii) Beachtung von QoS-Parametern.



**Bild 2.7:** Prinzip der Ablaufplanung am Beispiel der Abarbeitung von Pufferinhalten mit einem zentralen Betriebsmittel.

<sup>25</sup> Zu den klassischen Anwendungsgebieten gehören Produktionsplanung und Logistik. Besondere Bedeutung haben Scheduling-Verfahren in der Rechnertechnik erlangt (z.B. Zuweisung von Prozessorressourcen zu Prozessen durch das Betriebssystem).

Das einfachste und am weitesten verbreitete Scheduling-Prinzip ist die Abarbeitung wartender Aufträge in der Reihenfolge ihrer Ankunft (FCFS). Ist der Puffer vollständig belegt, so werden ankommende Pakete verworfen. Dieses einfach umzusetzende Prinzip lässt allerdings keine Unterscheidung einzelner Datenströme zu, und damit auch keine Dienstgütedifferenzierung.<sup>26</sup> Die Überlastkontrolle wird letztlich an die Endsysteme des Netzwerkes verschoben, d.h. Erkennung und Behandlung von Stausituationen obliegen dem TCP-Protokoll. Eingesetzt wird FCFS heute in der Regel in IP-Routern.

In Kombination mit anderen Verfahren, die z.B. eine Klassifizierung nach Prioritäten ermöglichen, wird FCFS ebenfalls verwendet. Warteschlangen werden dabei entsprechend ihrer Priorität ausgewählt, während warteschlangenintern FCFS gilt. Garantien innerhalb der einzelnen Prioritätsklassen sind hiermit aber nicht möglich.

Grundidee des *Fair Queueing* (FQ) ist Fairness bezüglich der Bandbreite, d.h. gleichmäßige Bandbreitenaufteilung auf die bestehenden Verbindungen. Hierfür unterhält jeder Netzknoten pro Kommunikationsbeziehung individuelle Warteschlangen, die nach dem Round-Robin-Verfahren abgefertigt werden. Auf diese Weise lässt sich gewährleisten, dass eine bestimmte Mindestbandbreite pro Verbindung verfügbar ist, und dass beispielsweise unfaire Verkehrsquellen andere Verbindungen nicht belasten. Schwer handhabbar ist die Vielzahl von Warteschlangen. Zu beachten ist ferner, dass ein Betrieb mit unterschiedlichen Paketlängen ungleiche Bedienung hervorrufen würde.

Eine Weiterentwicklung des FQ stellt *Weighted Fair Queueing* (WFQ) dar. Ein komplexer Scheduling-Mechanismus sorgt hier für eine gewichtete Verteilung der Übertragungsbandbreite. WFQ garantiert einen Mindestdurchsatz und eine obere Grenze der gesamten Transferdauer (Ende-zu-Ende). Erzielt wird auch eine geringe Transportdauervarianz. Aus diesen Gründen sind WFQ und Varianten davon insgesamt sehr populär [Eberspächer02].

Fristen-basierte Verfahren zielen auf eine begrenzte Transferdauer. Ein Beispiel hierfür ist *Earliest Deadline First* (EDF)<sup>27</sup>. Für jede Klasse können unterschiedliche maximale Verzögerungen definiert werden. Bei Ankunft erhält jedes Paket einen Zeitstempel mit der verbleibenden Zustellungsfrist. Der Scheduling-Mechanismus versucht, eine Überschreitung der maximalen Verzögerung zu verhindern. Damit eignen sich solche Verfahren besonders für die Behandlung von echtzeitkritischem Verkehr. Nachteilig ist die komplexe Implementierung.

Ratengesteuerte Bedienstrategien sind nicht-arbeitserhaltend. Sie führen vor dem Scheduling zwecks ggf. nötiger Ratenbegrenzung eine Verkehrsformung aus (siehe Abschnitt 2.4.3). Danach erfolgt z.B. bei dem Verfahren *Rate-Controlled Static Priority* (RCSP) ein Service auf der Basis statischer Prioritäten. So ermöglicht RCSP Bandbreite- und Verzögerungsgarantien.

<sup>26</sup> Weitere, in der Praxis weniger bedeutende Bedienstrategien ohne Differenzierung sind *Last-Come First-Served* (LCFS) und die zufällige Auswahl eines wartenden Auftrags (*Service In Random Order*, SIRO).

<sup>27</sup> Eine ebenfalls häufig verwendete Bezeichnung ist *Earliest Due Date* (EDD), Jackson 1955.

Da es kaum sinnvoll ist, für alle Verkehrsarten gleiche Kriterien anzuwenden, wurde auf dem Wege der Kaskadierung einzelner Scheduler das Hierarchische Scheduling entwickelt. Ein Beispiel der zahlreichen Ausprägungen davon ist das weit verbreitete *Class-Based Queueing* (CBQ). Bei diesem Verfahren sorgen die Scheduler auf den oberen Hierarchie-Ebenen für eine gewichtete Aufteilung der Übertragungsbandbreite. Auf der unteren Hierarchie-Ebene können verschiedene bekannte Scheduling-Verfahren eingesetzt werden [Bodamer04].

Einen Überblick über die bekanntesten Scheduling-Verfahren geben beispielsweise [Zhang95], [Guérin99] und [Bodamer04]. Scheduling-Verfahren können auch zum Einsatz kommen, wenn es – je nach Architektur des Vermittlungsknotens – um die Vermeidung knoteninterner Engpässe geht, z.B. aufgrund eines blockierenden Koppelnetzes [McKeown95].

### 2.5.2 Puffer-Management

Zusätzlich zur Ablaufplanung muss in den Netzknoten auch die Zuteilung von Warteraumressourcen in einer auf die Bedienstrategie abgestimmten Weise gesteuert werden, um beispielsweise Durchsatz- oder Transferdaueranforderungen einhalten zu können. Für die Strategie, nach der Warteraum unterschiedlichen Anforderungsklassen zugeteilt wird, ist der Begriff *Puffer-Management* gebräuchlich. Die Klassen können sich z.B. durch Dienste, Prioritäten, oder durch die Ziele unterscheiden, zu denen die Anforderungen weiterzuleiten sind [ITG97]. Anforderungsklassen zu ignorieren und den Warteraum im Sinne einer gemeinsamen Nutzung nach dem augenblicklichen Bedarf zu vergeben würde bedeuten, Pakete bei temporär vollem Puffer willkürlich abweisen zu müssen. Dies kann je nach Art der betroffenen Verbindung durch Paketwiederholungen zu einer erheblichen „Blindlast“ im Netz führen. Andererseits wäre der Nutzungsgrad der (stets begrenzten) Speicherressourcen bei fester Aufteilung nach Anforderungsklassen sehr gering. So besteht die Aufgabe des Puffer-Managements darin, für eine effiziente Nutzung des Warteraums insgesamt zu sorgen, und analog zum Scheduling bei Paketverlusten entsprechend der Verkehrsklassen zu differenzieren. Besonders im Hinblick auf Echtzeitanforderungen ist es darüber hinaus wünschenswert, die Warteschlangenlänge und damit die Übermittlungsdauer zu begrenzen. Entsprechende Management-Strategien werden seit Langem ausgiebig untersucht. Einige davon entfernen wartende Pakete ggf. präventiv (*active queue management*, AQM), um beispielsweise Fairness zu wahren oder Verlustwahrscheinlichkeiten einzuhalten. Das ist naturgemäß komplizierter, als ankommende Pakete unmittelbar zu verwerfen, wenn der Puffer einen gewissen Füllstand aufweist. Zweckmäßig ist ein solches Vorgehen jedoch nur dann, wenn die Anwendungen in den Endgeräten Paketverluste feststellen und ihre Übertragungsrate reduzieren können. Transportprotokolle für Echtzeit- und Datenverkehre wie das *Real-Time Transport Protocol* (RTP) bzw. das *Transmission Control Protocol* (TCP) unterstützen derartige Mechanismen.

Mit dem Puffer-Management werden in diesem Abschnitt QoS-Maßnahmen des sensibelsten Bereichs von Netzknoten angesprochen. Im Wesentlichen geht es hier um Regeln zur gezielten Abweisung von Forderungen. Insofern ist die Pufferverwaltung auch als ein Teil der Überlastabwehrstrategie anzusehen [ITG96a], die bei der Gesamtoptimierung der Netzbetriebsmittel unter beliebigen Lastsituationen eine bedeutende Rolle spielt. Natürlich kann die lokale Pufferverwaltungsstrategie nur bedingt zur Optimierung des Gesamtnetzes beitragen. Einige wichtige Verfahren werden im Folgenden kurz erläutert. Ausführliche Übersichten finden sich unter anderem in [Kröner95] und [Bodamer04].

Grob unterschieden werden kann zwischen Verfahren mit und ohne Verlustdifferenzierung. Zur letztgenannten Klasse gehört die einfachste und zugleich am weitesten verbreitete Pufferverwaltungsmethode *Drop From Tail*. Ankommende Pakete werden hierbei schlicht verworfen, wenn die Pufferkapazität erschöpft ist. Alternativ dazu können Pakete vom Kopf der Warteschlange (*Drop From Front*) [Kumar98] oder zufällig ausgewählte (*Random Drop*) zugunsten ankommender Pakete entfernt werden. Vorteilhaft kann dies z.B. bei TCP-Verkehr sein, um die TCP-Überlaststeuerungsmechanismen frühzeitig auszulösen.

Große Bedeutung in IP-Netzen hat vor allem das Verfahren *Random Early Detection* (RED) erlangt [Floyd93], das von der IETF als Standardverfahren in Routern vorgeschlagen wird [Braden98]. Die Grundidee von RED ist, durch zufälliges Verwerfen ankommender Pakete mit einer vom Pufferfüllstand abhängigen Wahrscheinlichkeit die mittlere Warteschlangenlänge und damit die mittlere Wartedauer gegenüber *Drop From Tail* zu reduzieren. Gleichzeitig soll RED Synchronisationseffekte, wie sie durch die Rückkopplungsmechanismen von TCP prinzipiell entstehen können, verhindern sowie für bessere Link-Auslastung und Fairness sorgen.

Seit der Vorstellung von RED hat es eine Vielzahl von Vorschlägen zur Erweiterung und Modifikation gegeben, z.B. die Wahrscheinlichkeit des Verwerfens aus anderen Größen als der mittleren Warteschlangenlänge abzuleiten. Hierzu zählen auch selektive Verwerfungsmechanismen, wie sie eingesetzt werden, wenn IP-Pakete über ein ATM-Netz übertragen werden. Strategien wie *Early Packet Discard* (EPD), *Partial Packet Discard* (PPD) oder *preemptive Partial Packet Discard* (pPPD) haben zum Ziel, bereits frühzeitig – d.h. bei Ankunft der ersten Zelle eines IP-Pakets – eine Entscheidung über die Annahme zu treffen und diese möglichst auf alle zugehörigen Zellen anzuwenden. Die Entscheidung erfolgt dabei in der Regel anhand von Schwellwerten, die auf der Pufferbelegung basieren [Bach02], [Bodamer04].

Verfahren, die eine Verlustdifferenzierung ermöglichen, sind im Hinblick auf Dienstgüte besonders interessant. Drei klassische Prioritätsmechanismen (der ATM-Technik) sind (i) Puffertrennung, (ii) Verdrängung und (iii) das Schwellwertverfahren [Kröner95]:



- Bei der Puffertrennung wird für jede Warteschlange ein physikalisch oder logisch separierter Teilpuffer verwendet. Sinnvoll ist dies vor allem in Kombination mit einem differenzierenden Scheduling-Mechanismus. Die Verlustdifferenzierung kann durch unterschiedlich dimensionierte Puffer erreicht werden; Einfluss nehmen aber auch das Verkehrsangebot und die Scheduling-Parameter der jeweiligen Klasse.
- Der Verdrängungsmechanismus lässt sich als Analogon zu den statischen Verzögerungsprioritäten beim Scheduling ansehen, d.h. jeder Klasse ist eine feste Verlustpriorität zugeordnet. Findet ein ankommendes Paket keinen Platz im Puffer, wird hier versucht, wartende Pakete mit geringerer Priorität zu verdrängen.
- Beim Schwellwertverfahren stehen den einzelnen Klassen unterschiedlich große Teilbereiche des Puffers zur Verfügung. Die Abgrenzung wird über klassenspezifische Schwellwerte der Pufferbelegung erreicht. Wie beim Verdrängungsmechanismus weisen die Klassen eine Rangfolge auf, es findet aber keine strikte Priorisierung statt. Der Mechanismus arbeitet präventiv, denn Pakete können verworfen werden, obwohl der Puffer insgesamt noch Raum bietet (für eine andere Klasse). Eine Variante dieses Verfahrens verwendet klassenspezifische Schwellwerte anstelle der auf den gesamten Pufferfüllstand bezogenen.

Neben diesen klassischen Strategien gibt es Verfahren, die als Basismechanismus RED verwenden, aber zugleich eine differenzierte Behandlung erlauben. Primär zu nennen ist hier *Weighted Random Early Detection* (WRED, siehe z.B. [Eberspächer02]). Schließlich existieren etliche Mechanismen, die Puffer-Management und Scheduling kombinieren. Dazu gehören z.B. *Shortest Time to Extinction* (STE) und *Alternative Best Effort* (ABE). Der STE-Mechanismus arbeitet wie EDF (siehe Abschnitt 2.5.1) mit Fristen, verwirft aber Pakete, deren Frist abgelaufen ist. Das ABE-Verfahren dient zur Trennung von Echtzeitverkehr und elastischem Verkehr. Dem Echtzeitverkehr wird damit eine begrenzte Paketverzögerung garantiert, allerdings auf Kosten höherer Paketverluste. Elastischer Verkehr hat hier die gleiche Verlustwahrscheinlichkeit wie im Fall des FCFS-Scheduling [Bodamer04].

Pufferschranken spielen bei den meisten Strategien des Puffer-Managements eine wichtige Rolle. Von großer Bedeutung ist es daher, diese z.B. anhand von Verlustwahrscheinlichkeiten dynamisch während des Betriebs schnell und möglichst präzise bemessen zu können.

### 2.5.3 Verkehrs-Management

Ziel des Verkehrs-Management (*traffic management*) in Kommunikationsnetzen ist der bestmögliche Umgang mit allen denkbaren Verkehrssituationen [ITG96a]. Insofern schließt es sämtliche Steuerungsmaßnahmen zur Verbindungsannahme, Verkehrslenkung, Überlastabwehr und Ressourcenplanung ein. Enthalten ist somit auch die Summe aller Funktionen, die

zum Bereitstellen von Dienstgüte innerhalb des Netzes beitragen. Mit Rücksicht auf den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit konzentriert sich dieser Abschnitt auf jene Mechanismen des Verkehrs-Management, mit denen ein Nachrichtenpaket auf seinem Weg durch einen (einzelnen) Netzknoten in Berührung kommen kann (Forwarding).

In ATM-Netzen wird das Verkehrs-Management häufig gegliedert in präventive Aufgaben zur Stauvermeidung, die von der *Verkehrssteuerung (traffic control)* wahrgenommen werden, und reaktive Maßnahmen zur *Überlastbehandlung (congestion control)* [ITU96b]. Die Verkehrssteuerung umfasst

- Verbindungsannahmesteuerung (*connection admission control, CAC*), Verkehrslenkung (siehe Abschnitt 2.4.2) und Ressourcenvergabe (primär Bandbreite auf den Ausgangs- und Zwischenleitungen sowie Warteraum in den Puffern),
- Verkehrsüberwachung (UPC, siehe Abschnitt 2.4.3),
- Verkehrsformung (traffic shaping, siehe Abschnitt 2.4.3),
- Ablaufplanung (siehe Abschnitt 2.5.1), sowie
- Puffer-Management im Zeitmaßstab von Verkehrsbeziehungen.

Die Überlastbehandlung betrifft alle Verkehrsströme eines Netzknotens. Dazu zählen

- Puffer-Management im Zeitmaßstab des Zellentransports (schnelles selektives Verwerfen von Zellen, siehe Abschnitt 2.5.2), und
- Verfahren zur mittel- bis langfristigen Steuerung des Verkehrsflusses (*flow control*), ggf. mit Rückkopplung über mehrere Netzsegmente hinweg (siehe weiter unten).<sup>28</sup>

In IP-Netzen können die meisten Funktionen des Verkehrs-Managements – insbesondere Ressourcen-Management in Netzknoten und Routing – sowohl präventive als auch reaktive Komponenten enthalten. Ein weiterer Unterschied zum ATM ist, dass hier parallel zu den Mechanismen im Netz ein wesentlicher Teil der Überlastbehandlung aufgrund der TCP-Flusssteuerung in den Endgeräten stattfindet (siehe z.B. [Tanenbaum98]); hierauf wird weiter unten eingegangen. Gleichzeitig zielen diese Mechanismen noch auf eine möglichst hohe Auslastung der Verbindung ab und tragen somit selbst zu einer Überlastung bei. Mithin stellt sich in IP-Netzen Überlast oft als Normalfall ein, während sie in ATM-Netzen eher eine Ausnahmesituation ist. Im Rahmen der IETF Standardisierung von QoS-Architekturen (siehe Abschnitt 2.5.4) wurde der Begriff des *Traffic Conditioning* geprägt [Blake98]. Er umfasst die Prozesse (i) der Klassifizierung (*classifying*) und Kennzeichnung, wobei Pakete einem Dienst und IP-Flow zugeordnet werden, (ii) der Überwachung von IP-Flows hinsichtlich festgelegter Verkehrsprofile, sowie (iii) des Formens von IP-Flows auf jeweils ein bestimmtes Verkehrsprofil.

---

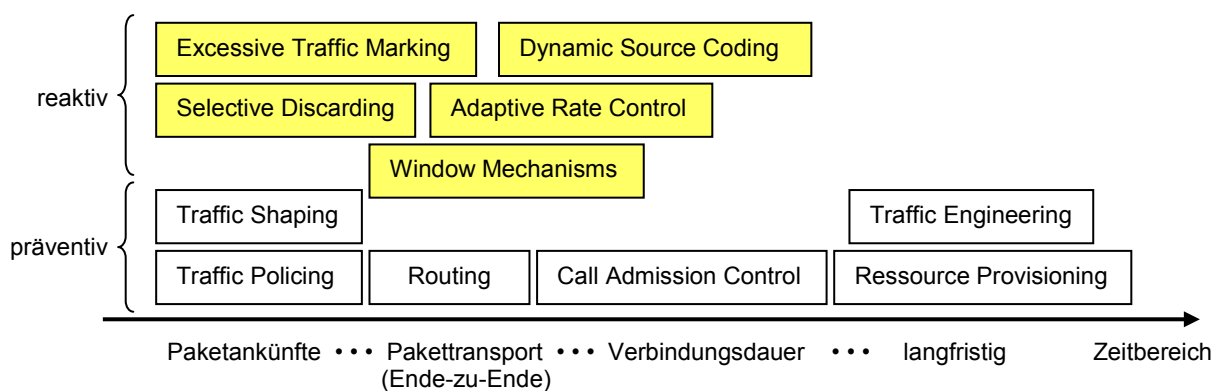
<sup>28</sup> Darüber hinaus können auch Netztopologie und Tarifgestaltung zur Überlastabwehr beitragen.

Diese Mechanismen sind aus dem ATM bekannt<sup>29</sup>; eine Definition der Begriffe ist z.B. in [Blake98] zu finden.

Typischerweise werden Anwendungen mit qualitativ ähnlichen Anforderungen in Dienstklassen zusammengefasst. Kennzeichen einer Dienstklasse sind definierte Sätze von Verkehrsparametern (z.B. Spitzenrate, durchsetzbare Rate, maximale Burst-Größe und maximale Paketgröße), Qualitätsparametern (bzw. einer QoS-Klasse, siehe Kapitel 2.5.4), sowie ggf. bestimmte Verkehrssteuerungsverfahren. Die Verkehrs- und Qualitätsparameter der Dienstklassen bilden mithin die Eingangsgrößen für die Verkehrssteuerung. Für den ATM wurden beispielsweise fünf Klassen definiert (CBR, rt-VBR, nrt-VBR, ABR, UBR) [ATMForum99], und für UMTS vier Klassen (Conversational, Streaming, Interactive, Background).

Die Funktionen des Verkehrs-Management arbeiten auf unterschiedlichen Zeitebenen. So findet das Management von Knotenressourcen und Verkehrsformung eher im Zeitbereich von Paketankünften statt, während die weiteren Mechanismen auf eine längerfristige Wirkung ausgelegt sind. Eine Übersicht dieser Maßnahmen, entsprechend der zeitlichen Größenordnung ihres Einsatzes bzw. ihrer Wirkung, zeigt **Bild 2.8**. Größtenteils sind die für das Verkehrs-Management relevanten Funktionen bereits in den vorherigen Unterkapiteln adressiert worden. Im Folgenden wird auf die Überlastbehandlung eingegangen, während das Ressourcen-Management im Rahmen des nächsten Abschnitts behandelt wird.

Grundsätzlich muss bei der paketorientierten Übermittlung die Empfangsseite vor einem übermäßigen Paketzufuss, der zum Pufferüberlauf führen könnte, geschützt werden. Dies ist Aufgabe der Flusssteuerung, die zum Überlastungsschutz von Übermittlungsabschnitten auf der Sicherungsschicht arbeitet – zum Schutz von Verbindungen auch auf höheren Schichten des OSI-Modells (Schicht 3 und 4). Häufig angewendete Mechanismen mit geschlossenem Regelkreis sind der Halt-Weiter-Betrieb (z.B. XON/XOFF Protokoll) und kreditbasierte Ver-



**Bild 2.8:** Mechanismen des Verkehrs-Management über dem Zeitbereich ihrer „Wirkdauer“.

<sup>29</sup> Entsprechende Standards für IP-Netze wurden nicht definiert; vielmehr orientieren sich die Aussagen zum Verkehrs-Management in IETF-Dokumenten oft an konkreten Router-Implementierungen [Braden98].

fahren mit Fenstermechanismus (*sliding window protocol*), meistens kombiniert mit der Fehlererkennung. So verwendet TCP, das dominante Transportprotokoll im Internet, eine fensterbasierte Flusssteuerung [Koch02]. Eine alternative Methode arbeitet mit einem offenen Regelkreis, wobei die Verkehrsparameter vorab zwischen Quelle, Senke und Netz ausgehandelt sowie entsprechende Ressourcenreservierungen vorgenommen werden. In der Verbindungsphase findet dann eine Überwachung des Verkehrsstroms statt (Verkehrssteuerung). Auf diese Weise lässt sich z.B. eine ratenbasierte Flusssteuerung erreichen. Ein Austausch von Steuerungsinformationen ist hierbei nur dann nötig, wenn Verfahrensparameter geändert werden sollen [Eberspächer02]. Strategiebereiche der Überlastbehandlung sind alles in allem Flusssteuerung, Puffer-Management, Scheduling und Routing.

Zusammenfassend ist festzustellen, dass in der Regel eine Technik allein für reale Netz- und Dienstszenarien kein akzeptables Verkehrs-Management liefern kann. Notwendig ist vielmehr eine kombinierte Anwendung verschiedener Techniken. Prinzipiell kann die notwendige Performanz im Netz auch mittels Überdimensionierung der Bandbreite zur Verfügung gestellt werden, was allerdings eine maximale Verkehrsauslastung aller Verkehrsklassen von ca. 30% bedeutet [Bricklin03]. Andererseits können begrenzte Netzwerkressourcen durch geschickten Einsatz statischer und dynamischer Verkehrs-Management-Funktionen aber durchaus optimal genutzt werden. Dabei gibt es zwei kritische Ressourcen, die intelligent verwaltet werden müssen: Speicherplatz und Bandbreite [Schott02]. Hierfür sind Scheduling sowie Puffer-Management zuständig. Der Ableitung von Performanz-Parametern aus den aktuell verfügbaren Pufferressourcen in Echtzeit (Zellentransferdauer innerhalb eines Netzknotens) kommt mithin eine herausragende Bedeutung zu.

#### 2.5.4 Dienstgüte und weitere wesentliche Parameter

Dienstgüte (*quality of service*, QoS) sind Metriken zur Kennzeichnung der Güte, mit der ein Dienst erbracht wird. Ursprünglich wurde QoS als vom Benutzer wahrgenommene Güte eines Dienstes definiert [ITU94]. In der Internet-Welt wird seit Längerem dafür der Begriff *Quality of Experience* (QoE) benutzt. Streng genommen beeinflussen Güte Merkmale in den unteren Schichten des OSI-Modells die Dienstgüte; die zugehörigen Metriken wurden deshalb in den ITG-Empfehlungen als *Netzgüte* (*network performance*) eingeführt (z.B. Zellenverlustwahrscheinlichkeit, Jitter, usw.) [ITG97].

QoS bezieht sich auf bestimmte Eigenschaften einer Transportverbindung am sogenannten Dienstzugangspunkt (*service access point*, SAP). Die beschreibenden QoS-Parameter werden zwischen den Benutzern und Erbringern von Transportdiensten ausgehandelt und sind an jeweils eine Transportverbindung geknüpft. Übertragungsgüte und Verkehrsgüte (*grade of service*) sind QoS-Kategorien, die ausschließlich auf der Qualität des Netzes beruhen. Während

die Übertragungsgüte auf der Übertragungstechnik fußt, bezeichnet die Verkehrsgüte jenen quantifizierbaren QoS-Anteil, der von der Ressourcendimensionierung abhängt. In diesem Sinne gehen in die Verkehrsgüte eines Kommunikationsnetzes unter anderem die Anzahl der Netzknoten (z.B. Router) sowie die Kapazität der Übertragungswege und Steuerungseinrichtungen ein. Die quantitative Beschreibung der QoS als Aggregation von Leistungsmerkmalen aller netzseitigen Subsysteme geschieht mit Hilfe von Parametern der Verkehrstheorie, wie z.B. der Wartewahrscheinlichkeit, der mittleren Wartedauer oder der Verlustwahrscheinlichkeit. Die fünf wichtigsten Leistungsmerkmale sind:

- **Verfügbarkeit:** Idealerweise wäre ein Netz zu 100% der Betriebsdauer verfügbar. 99,9999% bedeutet beispielsweise eine Ausfalldauer von 2,6 Sekunden pro Monat.
- **Durchsatz:** Dies ist der Quotient aus der Anzahl bearbeiteter Forderungen und der dafür benötigten Zeitdauer (z.B. während des Datentransfers). Die Angabe erfolgt relativ oder absolut. Aufgrund der Vielzahl möglicher Betrachtungsweisen sind die verwendeten Parameter und Orte stets genau zu definieren.
- **Paketverlustwahrscheinlichkeit:** In paketvermittelnden Netzen ist dies die Wahrscheinlichkeit, dass eine Dateneinheit auf ihrem Weg zwischen Quelle und Senke zu Verlust geht. Das kann mangels freier Betriebsmittel passieren (Pufferüberlauf), aufgrund nicht korrigierbarer Übertragungsfehler im Kopffeld, oder weil die Forderung wegen zu langen Aufenthalts aus dem Netz entfernt wird.
- **Durchlaufdauer (Latenz):** Dies ist die Zeitspanne für den Transfer einer Nachricht durch das Kommunikationsnetz (Ende-zu-Ende). Für interaktive Dienste ist sie extrem wichtig. Für Sprache wurde z.B. ein Maximum von 150 ms definiert [ITU96a].
- **Variabilität der Durchlaufdauer:** Ursachen für ungleiche Transferdauer von Paketen einer Verbindung sind beispielsweise variierende Warteschlangenlängen in den Netzknoten oder unterschiedliche Verarbeitungsdauer von Dateneinheiten (korrektes Zusammensetzen von Paketen, die z.B. unterschiedliche Wege durch das Netz benutzt haben). Als *Jitter* wird die Differenz zwischen einer minimalen und maximalen Transferdauer bezeichnet.

Die Anforderungen von Diensten an solche Qualitätsparameter sind sehr unterschiedlich. So ist für den Dateitransfer üblicherweise der Durchsatz eine entscheidende Größe, während Latenz und Verlustrate von untergeordneter Bedeutung sind. Für Echtzeitkommunikation wie z.B. Voice-over-IP spielen hingegen Latenz, Jitter und Verlustrate eine dominierende Rolle, weil sie die Sprachverständlichkeit maßgeblich beeinflussen. IP-TV stellt schließlich hohe Anforderungen an die gesamte Dienstgüte, da bereits kleine Qualitätsmängel der Übertragung die Bilddarstellung beeinträchtigen können. **Tabelle 2.5** gibt einige Beispiele hierzu.

Anwendung	Transferdauer	Jitter	Verlust	Durchsatz
Sprache	++	++	+	-
E-mail	-	--	++	-
File Transfer	-	-	++	+
WWW-Recherche	+	-	++	+
Videokonferenz	++	++	+	++

**Tabelle 2.5:** Empfindlichkeit einiger Dienste bezüglich ausgewählter QoS-Parameter; ++ = hoch, + = mittel, - = gering, -- = sehr gering.

Folglich ist es zweckmäßig, eine Einteilung der Dienste in QoS-Klassen vorzunehmen. Für eine grobe Klassifizierung kann man drei Kategorien unterscheiden: (i) die deterministische Klasse gibt Schranken der QoS-Parameter vor, die strikt eingehalten werden. Hierfür müssen der betreffenden Verbindung alle nötigen Ressourcen exklusiv zur Verfügung stehen, sodass Konflikte ausgeschlossen sind – abgesehen vom „Besetztfall“ beim Verbindungsaufbau<sup>30</sup>. (ii) Die statistische Klasse, bei der vorgegebene Schranken mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eingehalten werden, z.B. dass die Ende-zu-Ende-Transportdauer für 95% der Pakete 150 ms nicht überschreitet. Ressourcen können hierbei bis zu einem gewissen Grad überbelegt werden, d.h. Konflikte sind im Rahmen einer bestimmten Wahrscheinlichkeit möglich. (iii) Die Best-Effort-Klasse („bestmöglich“) arbeitet ohne jede Garantie zur Einhaltung von Dienstgüteparametern, d.h. es erfolgt keine explizite Ressourcenreservierung für einzelne Verbindungen. Je nach Art des Netzes sind feiner gegliederte Dienstklassen üblich.

In leitungsvermittelnden Netzen zeichnen sich Verbindungen durch fixe Datenraten und spezifizierte Werte für alle QoS-relevanten Parameter aus. Infolgedessen ist QoS hier systemimmanent. Paketvermittelnde Netze arbeiten hingegen im ursprünglichen Ansatz nach dem Best-Effort-Prinzip. So gibt es keine garantierten Datenraten, keine definierbaren Übertragungsdauern usw. In IP-Netzen gibt es ferner die Besonderheit, dass die QoS vom Endgerät mit beeinflusst werden kann.

Um in IP-Netzen ein gewisses Maß an QoS-Unterstützung zu erzielen, gibt es verschiedene Möglichkeiten, zu denen Überdimensionierung der Netzressourcen (siehe Kapitel 2.5.3), Verwendung spezieller Protokolle, und das Ressourcen-Management gehören. Das letztgenannte Gebiet spielt für QoS-Architekturen, d.h. den Aufbau der Dienstgüteunterstützung in (Teil-)Netzen, eine maßgebliche Rolle. Relevant sind die Ressourcen des Gesamtnetzes in Gestalt von Übertragungskapazität bzw. Kanalanzahl (Bandbreite, indirekt auch Übertragungsdauer). Hinzu kommen die Zwischen- bzw. Endsystemressourcen – im Wesentlichen in Form von Puffer- und Prozessorkapazität. Die Verwaltung dieser Ressourcen ist Aufgabe des Ressourcen-Management. Es führt den Reservierungsprozess aus, wozu Belegung, Überwachung, und Freigabe der betreffenden Ressourcen zählen. Ferner verteilt es die entsprechenden Reservie-

<sup>30</sup> Verbindungswünsche werden abgewiesen, sofern die notwendigen Ressourcen (temporär) nicht verfügbar sind.

rungsnachrichten mithilfe eines Signalisierungsprotokolls zur Ressourcenreservierung. So reserviert es Betriebsmittel entlang des (durch Routing bestimmten) Weges. Zu nennen ist hier das *Resource Reservation Protocol* (RSVP) [Braden97]. RSVP verfolgt einen empfängerorientierten Ansatz, d.h. der Empfänger muss die Dienstgüte beantragen. Der Reservierungszustand gilt nur für begrenzte Zeit und muss daher periodisch erneuert werden. Eine konzeptionell ähnliche Erweiterung, bei der Sender oder Empfänger Reservierungen veranlassen können, wird derzeit beim IETF erarbeitet [Manner10].

Als Beispiele seien hier QoS-Architekturen der ATM- und IP-Netze genannt. In ATM-Netzen handelt das Endsystem beim Verbindungsaufbau mit dem Dienstanbieter eine der folgenden Dienstklassen/QoS-Klassen aus. Constant Bit Rate (CBR), Realtime Variable Bit Rate (rt-VBR), Non-realtime Variable Bit (nrt-VBR), Unspecified Bit Rate (UBR) und Available Bit Rate (ABR). Definiert sind zahlreiche QoS Parameter, die nicht (in ihrer Gesamtheit) auf alle Dienstklassen anwendbar sind (siehe z.B. [Tanenbaum98]). Während das ATM-Modell strikt auf Verbindungen basiert, weichen QoS-Architekturen für IP-Netze zum Teil hiervon ab. So gibt es hier für die Zuteilung von Ressourcen zwei grundlegend unterschiedliche Philosophien: Ein fein-granularer, auf Datenflüssen basierender (*flow-based*) Ansatz (*Integrated Services*, IntServ) und ein Klassen-basierter (*class-based*), grob-granularer Ansatz (*Differentiated Services*, DiffServ).

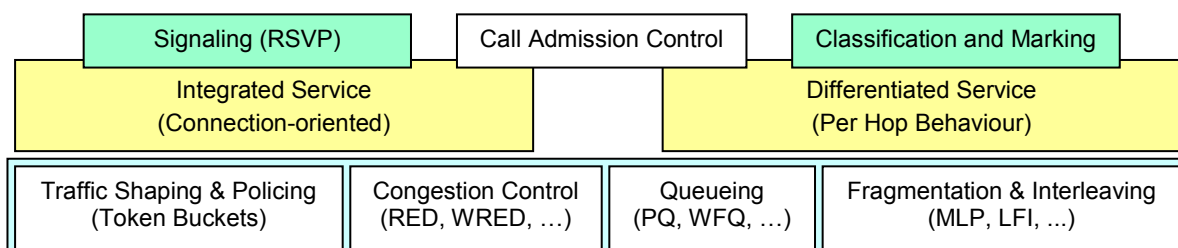
IntServ geht davon aus, dass Ressourcen grundsätzlich knapp sind, sodass man sie reservieren muss, um QoS-Anforderungen erfüllen zu können. Die Reservierung erfolgt anhand von Dienstklassen, wobei sämtliche Netzknoten zwischen Quelle und Senke für einen Datenfluss Ressourcen reservieren müssen. Bei erfolgreicher Reservierung kann IntServ Garantien für den Transport bieten. Dabei werden nur die tatsächlich benötigten Ressourcen verwendet, da durch periodische Auffrischung eine unnötige Ressourcenbelegung unterbleibt. Jede Verbindung erfordert eine individuelle Reservierung (Einträge in jedem Netzknoten), wodurch der Verwaltungsaufwand recht hoch ist. Die Skalierung ist mithin problematisch, sodass IntServ eher für lokale Netze geeignet ist.

Dem DiffServ-Ansatz [Blake98] liegt die Annahme zugrunde, dass Ressourcen in ausreichendem Maße verfügbar sind und auf der Basis von Dienst- bzw. Prioritätsklassen verteilt werden können. An den Netzgrenzen findet eine Einteilung der IP-Pakete in (wenige) netzinterne QoS-Klassen und eine entsprechende Markierung für den Transport statt. Jede Klasse verfügt über einen Satz von Zuteilungsregeln – *Per Hop Behaviour* (PHB) genannt. Nach diesen Regeln werden die Datenflüsse gleicher (netzinterner) Dienstklassen auf jedem Übertragungsabschnitt aggregiert und entsprechende Ressourcen (statisch) reserviert. Daraus ergibt sich freilich eine über die Lebensdauer einzelner Flüsse hinausgehende Ressourcenreservierung. Das Verfahren zeichnet sich durch geringen Verwaltungsaufwand und gute Skalierbarkeit aus. Absolute QoS-Garantien kann DiffServ allerdings nicht bieten, denn es wird immer nur eine re-

lative Dienstgüte erreicht bzw. aufrechterhalten. Damit ist DiffServ eher geeignet für WANs.

Eine Zusammenstellung der Funktionsblöcke von beiden QoS-Architekturen für IP-Netze zeigt **Bild 2.9**. Auf einen schnelleren Transport von IP-Paketen zielt das *Multiprotocol Label Switching* (MPLS) ab. IP-Pakete werden hierbei – abgeleitet vom ATM Overlay Modell – mit einem zusätzlichen Label versehen, das sich in den Netzknoten einfach und schnell auswerten lässt (siehe z.B. [Schott02]). Umfassende Übersichten zu QoS-Architekturen finden sich unter anderem in [Glasmann03] und [Meddeb10].

QoS-Anforderungen von Anwendungen wurden in der Vergangenheit zwar häufig definiert, allerdings sind bislang kaum QoS-Implementierungen im Einsatz, d.h. eine flächendeckende Unterstützung von QoS ist nicht gegeben. So arbeitet das Internet heute noch weitgehend nach dem Best-Effort-Prinzip. Die Gründe sind vielfältiger Natur. Gravierend ist, dass Dienstgüte in IP-Netzen ein Verbindungsparadigma erfordert, mit Reservierung von Ressourcen entlang eines jeden verwendeten Pfades, was vom Routing Eindeutigkeit verlangt. Reservieren und/oder Verwalten vorhandener Ressourcen allein stellen jedoch – selbst in einer sinnvollen Kombination – noch keine befriedigende Lösung dar. Hinzu kommt dass es gilt, neue Protokolle, d.h. Hardware und Software, in sämtliche Netzelemente einzuführen. Mitentscheidend für ein flächendeckendes QoS-Angebot sind ferner Faktoren wie das bislang fehlende Gebührenerfassungs- und Abrechnungswesen sowie die Frage einer garantierten Ende-zu-Ende-QoS in einem komplexen Umfeld mit zahlreichen beteiligten Anbietern und Betreibern [Burgstahler03]. In [Meddeb10] wird konstatiert, dass die heutige QoS-Technik nicht reif ist für den kommerziellen Einsatz. Mehr Bandbreite anzubieten [Bricklin03], sei vermutlich ökonomischer. Entsprechend kontrovers diskutiert wird nach wie vor die Frage, inwieweit harte QoS Garantien überhaupt nötig sind bzw. ob Aufwand und Nutzen (für möglicherweise wenige relevante Anwendungen) in einem angemessenen Verhältnis stehen. QoS-Vorschläge werden unter anderem auch im Rahmen von Clean-Slate-Ansätzen diskutiert (siehe z.B. [Hanka09]). Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass es zwar einige Ansätze mit harter QoS-Garantie gibt, diese jedoch außerordentlich komplex sind und in eine bestehende Systemumgebung nur sehr schwer eingeführt werden können [Glasmann03].



**Bild 2.9:** Bausteine der Dienstgüte in IP-Netzen, in Anlehnung an [DuttaRoy00].  
(MLP: Message/Multilayer Link Protocol, LFI: Last File Indicator)



Für das Gebiet der Dienstgüte insgesamt gilt, dass Nachrichtenpufferung und damit verbunden das Separieren und Zusammenfassen von Verkehrsströmen (letztlich auf Zellenbasis) funktional und ganz besonders bezüglich quantitativer Performanz in fast jedem Betriebsmittel von immenser Bedeutung ist. Neben den oben erläuterten wichtigsten QoS-Leistungsgrößen sind für die Leistungsbewertung bzw. Dimensionierung des in dieser Arbeit behandelten Zellen-Multiplexers weitere leistungsbeschreibende Parameter heranzuziehen. Im Wesentlichen sind dies:

- Systemauslastung: Sie gibt den Auslastungsgrad einer Ressource an, und lässt sich leicht vom Modell auf das reale System übertragen.
- Frei- und Arbeitsperioden: Dies sind die Zeitintervalle, in denen ein Betriebsmittel frei oder belegt ist.
- Transferdauer: Dies ist die Zeitspanne, die zur vollständigen Übermittlung einer Forderung (z.B. Transfer einer Nachricht durch ein Kommunikationsnetz) benötigt wird.
- Warte- und Durchlaufdauer: Diese Dienstgüteparameter beschreiben Verzögerungen der Pakete in einem Betriebsmittel. Die Wartedauer gibt an, wie lange eine Forderung z.B. in einer Warteschlange verbringt. Die Durchlaufdauer ist die Aufenthaltsdauer in einem Wartesystem; sie setzt sich aus Warte- und Abfertigungsdauer zusammen.
- Warteschlangenlänge: Die Warteschlangenlänge beschreibt die Auslastung eines Puffers zum Zwischenspeichern von Anforderungen. Auf die Dienstgüte wirkt sie sich indirekt aus, z.B. in Form von Paket- bzw. Zellenverlusten oder -verzögerungen.



## Kapitel 3

### Modellierung und Analysemethodik

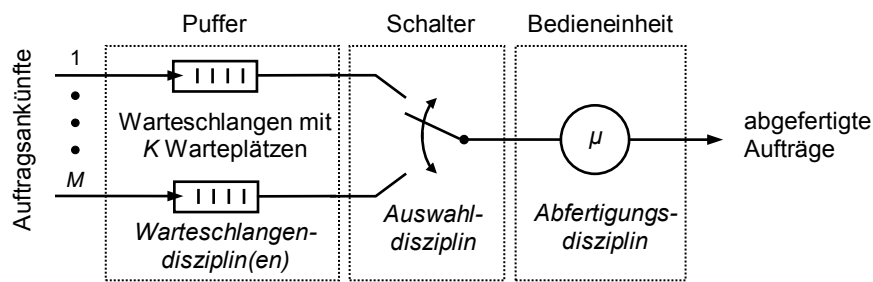
Mit dem Ziel der verkehrstheoretischen Modellbildung werden in diesem Kapitel die Funktionsblöcke von Zellen-Multiplexern betrachtet, und die Multiplexer-Modelle werden systematisiert. Vorgestellt werden ferner die wichtigsten Ansätze zur Untersuchung des Leistungsverhaltens mit Schwerpunkt auf zeitdiskrete Methoden, wobei Stärken und Schwächen diskutiert werden. Dem Wissensstand auf dem Gebiet der zeitdiskreten Leistungsbewertung von Zellen-Multiplexern, zu denen auch Polling-Systeme zu zählen sind, widmet sich ein weiterer Abschnitt. Hier werden schließlich auch offene Punkte der zeitdiskreten Analyse von Zellen-Multiplexern mit endlichem Warteraum aufgezeigt.

#### 3.1 Multiplexer-Modelle

Zunächst werden in den zwei folgenden Abschnitten die Funktionsblöcke von Multiplexer-Modellen aus der Bediensystem-Perspektive betrachtet und es werden die wichtigsten darauf basierenden Schaltanordnungen behandelt. Im Hinblick auf die Leistungsanalyse folgt eine Systematisierung der Modelle.

##### 3.1.1 Modellkomponenten

Zellen-Multiplexer bestehen aus der für die Auftragsbearbeitung (zeitlich koordinierter Zellentransfer von den Eingängen zum Ausgang) zuständigen Bedieneinheit und einer Puffereinheit zum Zwischenspeichern von solchen Aufträgen, die bei ihrer Ankunft an einem der  $M$  Multiplexer-Eingänge nicht unmittelbar abgefertigt werden können. Eine Schaltereinheit sorgt für die Verbindung jeweils eines Puffers mit der Bedieneinheit. Anhand einer beispielhaften Multiplexer-Architektur illustriert **Bild 3.1** die maßgeblichen Elemente. Jede Systemkomponente arbeitet nach einem bestimmten Prinzip (Disziplin), woraus sich eine Gesamtstrategie



**Bild 3.1:** Komponenten eines  $M:1$ -Zellen-Multiplexers, hier beispielhaft dargestellt als Architektur mit eingangsspezifischen Warteschlangen.

der Auftragsabfertigung ergibt – häufig Bedienstrategie genannt. Modellvarianten resultieren aus der Architektur, d.h. aus den verschiedenen Möglichkeiten der Komponentenkonstruktion und ihrer Zusammenschaltung sowie aus der Art der Auftragsbehandlung innerhalb der einzelnen Modellkomponenten.

### 3.1.1.1 Puffer

In Bediensystemen wie dem Zellen-Multiplexer ist ein Warteraum zur temporären Aufnahme von Aufträgen, die nicht unmittelbar bei Ankunft bedient werden können, z.B. im Falle von Gruppenankünften, unerlässlich. Meistens wird der Warteraum mit einer endlichen Anzahl von  $K \in \mathbb{N}$  Wartepätzen<sup>1</sup> – im Allgemeinen Puffer genannt – als Warteschlange organisiert. Dies ist aber nicht zwingend erforderlich, sondern hängt von der konkreten Anwendung des Systems ab (denkbar ist z.B. auch eine ungeordnete Abfertigung wartender Aufträge nach dem Zufallsprinzip).

Bedeutsam für die vorliegende Arbeit sind Puffer auf der Basis von Halbleiterspeichern. Sie existieren in zwei Ausführungsformen: (i) Als Random Access Memory (RAM) mit Steuereinheit zur (ggf. veränderbaren) Realisierung der Warteschlange, sowie (ii) als unveränderliche Hardware-Implementierung eines bestimmten Warteschlangentyps, z.B. in Gestalt eines *First-in-first-out*-Speichers (FIFO). Der Puffer eines Multiplexers kann aus individuellen (eingangsbezogenen) Modulen aufgebaut sein (wie im **Bild 3.1** skizziert), oder als zentrale Einheit. Einen Spezialfall des FIFO-Speichers stellen Warteschleifen dar, bestehend aus konfigurierbaren Kaskaden von Verzögerungselementen (Laufzeitspeicher), welche die physikalische Signallaufzeit einer Leitung als Speicherfunktion (einfachster Art) nutzen.<sup>2</sup>

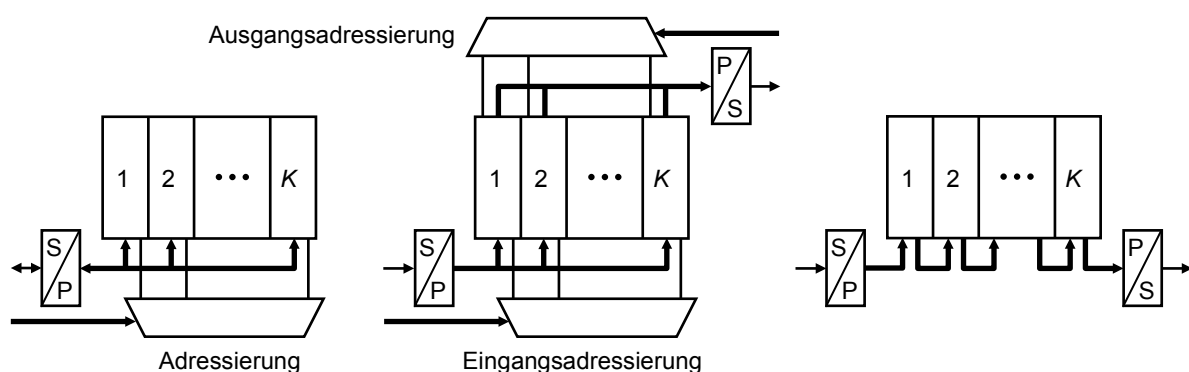
Bei Puffern auf der Basis elektrischer Halbleiterspeicher wird von zellenweise organisierten Wartepätzen ausgegangen. Unterschieden werden muss zunächst zwischen Eintor- und Zwei-

<sup>1</sup> Im Falle  $K = 0$  handelt es sich um ein Verlustsystem, das Warten auf Abfertigung nicht vorsieht, im Falle  $K \rightarrow \infty$  um die Idealvorstellung eines Wartesystems, das keinen Auftrag abweist (siehe Abschnitt 3.1.1.5).

<sup>2</sup> Mangels alternativer Speichertechniken sind Verzögerungselemente trotz der notwendigen relativ aufwändigen Steuerung primär bei optischer Signalübertragung interessant, wenn z.B. opto-elektrische Wandlungen zwecks Einsatzes elektrischer Puffer nicht in Betracht kommen.

tor-Puffern. Beim Eintor-Puffer (**Bild 3.2** links) erfolgen Schreib- und Lesezugriffe im Zeitmultiplex. Dementsprechend lassen sich pufferinterner Datenbus und Warteplatzadressierung für beide Vorgänge gleichermaßen nutzen. Beim Zweitor-Puffer (**Bild 3.2** Mitte) sind Zu- und Abgang entkoppelt, sodass simultanes Schreiben und Lesen auf unterschiedlichen Warteplässen möglich ist. Diese Verdoppelung der Pufferbandbreite<sup>3</sup> (bei kollisionsfreiem Zugriff) erfordert ein- und ausgangsseitig separate Datenwege mit der zugehörigen Adressierung. Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal ist die Art des Zugriffs auf die Warteplässe. Hierdurch ergibt sich eine Gliederung in *Random Access* (RA) Puffer mit wahlfreier Zugriffsmöglichkeit auf beliebige Plätze, und in spezielle Organisationsformen. RA-Puffer benötigen eine externe Steuereinheit zur Umsetzung des Warteschlangenkonzepts. Bekanntester Vertreter des anderen Puffertyps ist der FIFO-Speicher. Hierbei handelt es sich um eine direkte Implementierung der FCFS-Warteschlangendisziplin, typischerweise ausgeführt als Zweitor-System gemäß **Bild 3.2** (rechts). Weil das Befüllen und Auslesen nach einem vorgegebenen Schema erfolgt, bedarf es keiner externen Wartepplatzverwaltung. Derartige Pufferimplementierungen arbeiten also quasi selbststeuernd. Auf RAM-Basis lassen sich FIFO-Puffer ebenfalls implementieren. Der Speicher wird dazu als logischer Ringpuffer organisiert, mit zwei Zeigern auf den ältesten Eintrag und auf den Platz des nächstmöglichen Eintrags. Unnötige Kopier- oder Schiebeoperationen werden mit diesem Konzept vermieden.

Maßgeblichen Einfluss auf die Leistungsfähigkeit von Warteschlangensystemen haben zum einen die Pufferkapazität, und zum anderen die Bandbreite der verwendeten Speicher. Die realisierbare Speicherkapazität begrenzt die möglichen Warteschlangenlängen, was sich z.B. auf die Überlaufwahrscheinlichkeit auswirkt. Zwar nehmen Integrationsdichte und Kapazität



**Bild 3.2:** Ausführungsformen von Puffern mit  $K$  Warteplässen. Pufferintern werden parallele Datenwege (z.B. im Zellenformat) angenommen, Serien-Parallelwandler (S/P) bilden die Schnittstelle nach außen. Der Eintor-Puffer (links) ermöglicht wahlfreies Lesen oder Schreiben im Zeitmultiplex. Mit dem Zweitor-Puffer (Mitte) sind Schreib- und Leseoperationen unabhängig voneinander möglich (sofern unterschiedliche Warteplässe angesprochen sind). Bei einer fest implementierten Speicherorganisation (z.B. FIFO, rechts) erlaubt der Zweitor-Puffer ebenfalls simultanes Schreiben und Lesen, wobei eine externe Adressierung der Warteplässe entfällt.

<sup>3</sup> Unter Pufferbandbreite wird in dieser Arbeit der Kehrwert der Zeitspanne verstanden, die der komplette Transfer einer Dateneinheit zu bzw. von einem beliebigen Wartepplatz (Schreib- bzw. Lesevorgang) incl. etwaiger Erholdauern des Speichers benötigt. Hierbei werden identische Schreib- und Lesedauern angenommen.

von hochintegrierten Halbleiterspeichern jährlich um rund 60% zu (Moore'sches Gesetz<sup>4</sup>), gleichwohl ist die Pufferdimensionierung ein wesentliches Kriterium beim Systemdesign.

Die Geschwindigkeitsanforderungen an den Puffer hängen vom verwendeten Warteschlangenprinzip sowie von der Anzahl der Zubringer- und Abnehmerleitungen ab, und von deren Übertragungsrate. Bezüglich der Verarbeitungsgeschwindigkeit (Dauer des Zugriffs auf einzelne Speicherzellen) kann die Speichertechnologie mit der Geschwindigkeitsentwicklung von Übertragungssystemen kaum mithalten, denn der technische Fortschritt führt bei Halbleiterspeichern lediglich zu Geschwindigkeitssteigerungen von ca. 8% pro Jahr. Mithin ist z.B. beim Design hochratiger Vermittlungssysteme eine Optimierung von Speicherarchitektur und -effizienz erforderlich. Von herausragender Bedeutung ist die Speicherzugriffszeit, sie ist als begrenzender Faktor anzusehen. In dieser Arbeit wird angenommen, dass die Puffer auf Zweitor-Halbleiterspeichern (RA oder Hardware-organisiert) basieren, und dass die Zugriffsbedingungen im Wesentlichen von Pufferkapazität (Adressdekodierung) sowie -bandbreite bestimmt werden.

Je nach Systemarchitektur und Betriebsmodus, in dem ein Puffer angewendet wird, bedarf es für den Umgang mit den Warteplatzressourcen einer Pufferverwaltung und einer Strategie, nach der Warteplätze unterschiedlichen Klassen von Aufträgen (Zellen) zugeteilt werden (Ablaufplanung und Puffer-Management, siehe Kapitel 2.5.1 und 2.5.2). Bedeutende Strategien sind (i) die vollständige gemeinsame Nutzung (keine Differenzierung nach Klassen), (ii) die teilweise gemeinsame Nutzung (Reservierung von Teilbereichen für einzelne Klassen gemäß einer Reservierungsstrategie, im Übrigen gemeinsame Nutzung) und (iii) die vollständige Gliederung. Der Ablaufplanung (*scheduling*) obliegt das Einhalten einer definierten Reihenfolge, in der Aufträge zur Abfertigung aus einer im Puffer etablierten Warteschlange entnommen werden. Als Beispiele seien FCFS und Random Order genannt. Sofern Zellen zur selben (virtuellen) Verbindung gehören ist es zweckmäßig, deren Reihenfolge auch bei der Pufferung zu erhalten. Bei der FCFS-Warteschlangendisziplin ist dies per se gegeben.

### 3.1.1.2 Schalter

Mit Hilfe der Schaltereinheit können der Bedieneinheit Aufträge von sämtlichen Multiplexer-Eingängen bzw. Warteschlangen zugeführt werden. Implementierungen sind sowohl in Hardware (z.B. basierend auf elektronischen Koppelpunkten) als auch in Software denkbar. Je nach technischer Ausführung des Schalters unterscheidet man Systemmodelle mit vernachlässigbaren von solchen mit signifikanten Umschaltdauern. Die Umschaltdauer kann auch innerhalb eines Systems variieren, z.B. in Abhängigkeit vom ausgewählten Eingang. In der vorlie-

---

<sup>4</sup> Die von G.E. Moore, einem der Firmengründer von Intel, 1964 aufgestellte These besagt, dass sich die Anzahl der Transistoren auf einem Halbleiter-Chip durch den technologischen Fortschritt rund alle 1½ Jahre verdoppeln lässt. Diese Prognose ist bislang annähernd zutreffend; sie wird allgemein *Moore'sches Gesetz* genannt.

genden Arbeit werden elektronische  $M : 1$ -Halbleiterschalter angenommen, deren Umschalt-dauer im Vergleich zu Auftragsabfertigungsdauer vernachlässigbar ist.

Von Relevanz sind des Weiteren die Disziplin zur Warteschlangenauswahl und die Art der Schalteransteuerung. Die Warteschlangenauswahldisziplin (*interqueue discipline*) definiert die Strategie, nach der eine aus mehreren Warteschlangen zur Abfertigung ausgewählt wird. Beispiele hierfür sind die zyklische Reihenfolge (*cyclic order*), die Aufzug-Strategie (*elevator scan*)<sup>5</sup>, die zufällige Reihenfolge (*random order*), die räumliche Priorität (z.B. längste Warteschlange) und die situationsabhängige Priorität (z.B. Typ oder Wartedauer von Zellen in den Warteschlangen). Die Ansteuerung erfolgt typischerweise durch eine zentrale Instanz anhand der zu beachtenden Entscheidungskriterien. Bei bestimmten Disziplinen ist auch autonomes Handeln denkbar, unabhängig von anderen Systemmodulen. Die Schaltersteuerung hängt eng zusammen mit der Bedienstrategie des Gesamtsystems (siehe Abschnitt 3.1.1.4).

### 3.1.1.3 Bedieneinheit

Der Bedieneinheit (*server*) obliegt das sequentielle Bearbeiten von Aufträgen. Sie nimmt einzelne Forderungen an, bearbeitet sie (einheitlich oder auftragsspezifisch) und führt sie schließlich dem Ausgang zu – entfernt sie also aus dem System. Denkbar sind auch mehrere Einheiten, die auf verschiedene Weise kooperieren, z.B. in Lastteilung. Grundsätzlich zu unterscheiden sind mithin Einzel- und Gruppenabfertigung. Diese Arbeit beschränkt sich auf Bediensysteme mit einer einzelnen Bedieneinheit (*single server systems*), die ein abgehendes Übertragungssystem modelliert und alle Forderungen einheitlich abfertigt, d.h. Zellen vom Puffer zu einem Übertragungssystem transferiert.

Die Strategie, nach der Anforderungen aus einer Warteschlange der Bedienung zugeführt werden, heißt Abfertigungsdisziplin. Je nach konkreter Aufgabenstellung sind nahezu beliebig viele Abfertigungsdisziplinen denkbar. Allgemein üblich ist die folgende Kategorisierung.

- Bei der getakteten Abfertigung (*clocked*) beginnt der Bedienprozess stets zu bestimmten, periodischen Zeitpunkten.
- Bei der zeitscheibengesteuerten Abfertigung (*time sharing*) wird eine Anforderung während mehrerer Zeitintervalle (Zeitscheiben) bedient, ggf. mit mehrfachen Unterbrechungen. Eine Sonderform des Timesharings ist das Rundlauf-Verfahren (*round-robin*, siehe z.B. [Bolch89]). Für den Grenzfall infinitesimal kleiner Zeitscheiben ist der Begriff *processor sharing* üblich.
- Bei der prioritätsgesteuerten Abfertigung haben bestimmte Forderungen gegenüber anderen ein Anrecht auf bevorzugte Abfertigung oder auch Pufferung. Die Priorität kann

---

<sup>5</sup> Aufzugtypisch ist die Abfragereihenfolge hierbei wechselweise „aufwärts/abwärts“.

z.B. für bestimmte Arten von Aufträgen fest vorgeschrieben oder situationsabhängig sein. Gebräuchlich ist auch das Festlegen einer Rangfolge für die Bearbeitung unterschiedlicher Auftragsstypen mit Hilfe von Prioritätsklassen. Zu differenzieren ist ferner zwischen der Abfertigung mit nichtunterbrechender (*non-preemptive*) und unterbrechender (*preemptive*) Priorität. Im erstgenannten Fall darf ein neu eintreffender Auftrag die gerade laufende Abfertigung eines Auftrags mit niedrigerer Priorität nicht unterbrechen. Bei unterbrechender Priorität ist dies jedoch möglich. Anstelle von unterbrechender Priorität wird mitunter auch die verdrängende Priorität (*displacing priority*) verwendet, wobei der Auftrag mit geringerer Priorität ggf. verworfen oder in die Warteschlange zurückgeführt wird.

Während die genannten Disziplinen generell bei Bediensystemen anwendbar sind, betreffen die nun folgenden Abfertigungsstrategien ausschließlich Multi-Warteschlangensysteme.<sup>6</sup> Ein wesentliches Ziel neben dem verkehrsgerechten Einsatz der Ressourcen ist bei diesen Systemen die Optimierung des Zeitaufwands für das Umschalten von einer Warteschlange zur nächsten (signifikante Umschaltdauern vorausgesetzt).

- Eine erschöpfende Abfertigung (*exhaustive*) findet in Bediensystemen mit mehreren Warteschlangen statt, falls zunächst sämtliche Aufträge aus einer Warteschlange abgearbeitet werden, bevor die Bedieneinheit zu einer anderen Warteschlange wechselt. Hierbei werden auch solche Anforderungen bedient, die erst nach Abfertigungsbeginn (eines bereits wartenden Auftrags) in der betreffenden Warteschlange eintreffen.
- Die torgesteuerte Abfertigung (*gated*) berücksichtigt im Gegensatz zur erschöpfenden Abfertigung nur jene Anforderungen, die sich bereits bei Abfertigungsbeginn in der betreffenden Warteschlange befanden.
- Die begrenzte Abfertigung (*limited*)<sup>7</sup> definiert eine obere Grenze für die Abfertigung von Aufträgen, die nacheinander aus derselben Warteschlange entnommen werden dürfen. Bezieht sich diese Schranke auf die Auftragsanzahl  $k$ , so spricht man von  $k$ -begrenzter Abfertigung. Bei  $k > 1$  muss man präzisieren, ob auch Anforderungen berücksichtigt werden, falls sie nach dem Zeitpunkt des Abfertigungsbeginns in der betreffenden Warteschlange eintreffen. Bezieht sich das Limit auf die Summe der Bediendauern, handelt es sich um eine zeitbegrenzte Abfertigung (*time-limited*). Gegebenenfalls muss näher spezifiziert werden, wie Aufträge behandelt werden, deren Bedienung bei Erreichen der Zeitschranke noch nicht abgeschlossen ist. Diesem Prinzip kommt in der Praxis der FDDI-Standard sehr nahe.

<sup>6</sup> Da es sich bei Multi-Warteschlangensystemen häufig um Polling-Systeme handelt (siehe Abschnitt 3.1.3), ist für die entsprechenden Abfertigungsdisziplinen auch der Begriff *Polling-Disziplin* gebräuchlich (siehe beispielsweise [Choudhury96]).

<sup>7</sup> Gebräuchlich ist auch der Begriff *non-exhaustive* (siehe z.B. [Kühn79]).



- Eine autonome Abfertigung kommt in Betracht, wenn die Bedieneinheit ohne von außen einwirkende Steuerungsgrößen operieren kann. Denkbar ist beispielsweise ein autonomer Server, der eine zuvor definierte Zeitdauer für jede Warteschlange reserviert, unabhängig von der Anzahl der darin befindlichen Aufträge. Anwendungen gibt es unter anderem bei drahtlosen Ad-hoc-Netzen, wo bewegliche Objekte als Zwischenstationen für die Kommunikationspfade dienen [DeHaan09]. Die dieser Variante vermutlich am Nächsten stehende Disziplin ist die zeitbegrenzte Abfertigung.

Der in dieser Arbeit behandelte Zellen-Multiplexer wird als Bediensystem mit getakteter 1-begrenzter Abfertigung ohne Prioritäten modelliert.

### 3.1.1.4 Bedienstrategie

Die Bedienstrategie von Multiwarteschlangen-Bediensystemen setzt sich aus den Betriebsmodi der drei beteiligten Funktionsblöcke gemäß **Bild 3.1** zusammen, d.h. (i) der Warteschlan-

	Disziplin	Bemerkung
Warteschlange	Reihenfolge des Eintreffens	FIFO, Local FCFS
	Umgekehrte Ankunftsreihenfolge	Last-In First-Out (LIFO)
	Zufällige Reihenfolge	
	Nach Bediendauer	falls Bediendauer variabel ist, z.B. Shortest Process First (SPF), Shortest Remaining Process Time (SRPT)
Warteschlangen- auswahl	Zyklische Reihenfolge ( <i>cyclic order</i> )	
	Aufzug-Strategie ( <i>elevator scan</i> )	
	Zufällige Reihenfolge ( <i>random order</i> )	z.B. Markovian Routing
	Räumliche Priorität	Zuordnung fest oder situationsabhängig, z.B. LQFS
	Situationsabhängige Priorität	z.B. nach Warteschlangeninhalt (Realisierung v. Global FCFS)
Warteschlangenabfertigung	Einzel- bzw. Gruppenabfertigung	grundsätzliches Merkmal für alle Abfertigungsdisziplinen
	Getaktet	z.B. TDMA
	Torgesteuert	
	Erschöpfend	
	$k$ -begrenzt	max. $k$ Aufträge; bei Bernoulli-Service ist $k$ eine Zufallsvariable
	Zeitbegrenzt	z.B. FDDI
	Prioritätsgesteuert	
	Zeitscheibengesteuert	Unterbrechung des Bedienprozesses ist möglich
	Autonom	z.B. willkürliche variable Zeitbegrenzung pro Warteschlange
Warteschlan- genwechsel	Geduldig bzw. ungeduldig	falls Warteschlange leer ist bzw. geleert wird
	Ruhende bzw. wandernde Abfrage	falls gesamtes System leer ist

**Tabelle 3.1:** Beispiele für Disziplinen (von oben nach unten) zum Umgang mit Aufträgen innerhalb der einzelnen Warteschlangen, zur Warteschlangenauswahl zwecks Bedienung, zur Abfertigung der Aufträge aus ein und derselben Warteschlange und zum Abfragewechsel im Falle leerer Warteschlangen.

gendisziplin im Puffer, (ii) der Disziplin des Schalters zur Warteschlangenauswahl und (iii) der Abfertigungsdisziplin der Bedieneinheit. Neben der generellen Disziplin des Schalters spielt (iv) auch sein Verhalten an leeren Warteschlangen – in dieser Arbeit Warteschlangenwechselfdisziplin genannt – eine wichtige Rolle. Sehr verbreitet ist die *ungeduldige Bedieneinheit* (*impatient server*), die sofort weiterschaltet, wenn die besuchte Warteschlange leer ist. Im Gegensatz dazu wartet die *geduldige Bedieneinheit* (*patient server*) in diesem Fall eine definierte Zeitspanne, bevor sie die Abfrage bei der nächsten Warteschlange fortsetzt. Treffen während dieser Phase Forderungen ein, so können sie unmittelbar abgefertigt werden.

Der Fall, dass sämtliche Warteschlangen leer sind, muss gesondert betrachtet werden. Zu differenzieren ist hier zwischen dem *wandernden Server* (*roving server*) und der *ruhenden Bedieneinheit* (*dormant server*, *stopping server*) [Borst93], [Eisenberg94]. Während der Erstgenannte ständig im vorgegebenen Schema von Warteschlange zu Warteschlange wandert, wartet der ruhende Server z.B. an der zuletzt bedienten Warteschlange oder an einer festgelegten Heimatposition auf die Ankunft von Aufträgen.

Beispiele für diese vier (Teil-)Disziplinen, die im Zusammenwirken die Abfertigungsstrategie eines Bediensystems ergeben, sind in **Tabelle 3.1** zusammengefasst. Anzumerken ist, dass die Disziplinen einer Gruppe auch kombiniert auftreten und in Sonderfällen Identitäten aufweisen können.

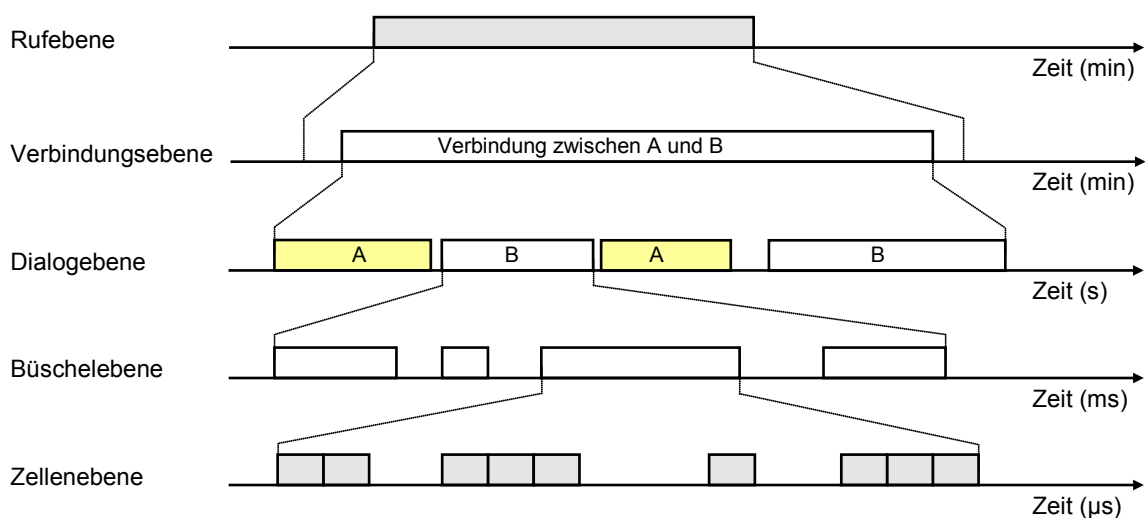
### 3.1.1.5 Verkehre

Paket- bzw. zellenbasierte Übermittlung kommt in vielen Bereichen moderner Kommunikationsnetze und deren Netzelementen vor. Konventionelle Dienste arbeiten mit konstanter Bitrate (CBR), d.h. die betreffenden Verkehrsquellen liefern Zellen in äquidistanten Zeitabständen. Fortschrittliche Quellenkodierung führt zu Verkehr mit variabler Bitrate (VBR), wobei die Zellen sporadisch auftreten können, beispielsweise bei Sprachquellen nur während der Sprechphasen und nicht während der Sprechpausen. Die Überlagerung vieler VBR-Verkehrsströme ermöglicht die Ausnutzung von Effekten des statistischen Multiplexens. Zusätzlich zur VBR-Codierung verspricht dies – verglichen mit einer Orientierung an der Spitzenbitrate – einen für die Dimensionierung der Verkehrswege bedeutsamen Gewinn. Um diese Effekte nutzbar machen zu können, muss die Natur der VBR-Quellen erfasst werden. Ein allgemein anerkanntes Hilfsmittel für die Verkehrsmodellierung ist die Verwendung eines Modells mit hierarchisch angeordneten Aktivitätsebenen zur Beschreibung der zeitlichen Abläufe von Kommunikationsvorgängen [ITG97]. Entsprechend der Darstellung in **Bild 3.3** weist jede dieser Ebenen einen eigenen zeitlichen Detaillierungsgrad auf.

- Die Rufebeine beschreibt die zeitliche Abfolge von Rufen. Ein Ruf repräsentiert eine Kommunikationsbeziehung, die eine oder auch mehrere Verbindungen bzw. eine zeit-

liche Abfolge von Verbindungen umfassen kann. Der Zeitmaßstab bewegt sich in der Regel im Bereich von Minuten oder auch Stunden.

- Die Verbindungsebene stellt den zeitlichen Ablauf bei Kommunikationsverbindungen dar, typischerweise mit den Phasen Verbindungsaufbau, Datentransfer und Verbindungsabbau. Von Bedeutung ist diese Betrachtungsebene für die Netzdimensionierung. Als Zeitmaßstab ist meistens der Minutenbereich zutreffend.
- Die Dialogebene kennzeichnet die zeitliche Abfolge von Interaktionen (meistens im Sekundenbereich) zwischen Kommunikationspartnern auf einer bidirektionalen Verbindung. Näher beschreiben lässt sich der Dialog zwischen zwei Partnern (A, B) durch die Zustände (i) keiner der Partner sendet, (ii) Partner A sendet, (iii) Partner B sendet, (iv) beide Partner senden. Entsprechend wird der Begriff auch bei Interaktionen zwischen mehr als zwei Partnern verwendet.
- Auf der Büschelebene (*Burst-Ebene*) werden – typischerweise im Millisekundenbereich – zeitliche Intensitätsänderungen der Dateneinheiten im Verkehrsstrom betrachtet. Derartige Verkehre stammen beispielsweise von Sprachquellen mit Sprechpausen-erkennung, oder von Videoquellen mit variabler Bitrate. Von Bedeutung ist die Burst-Ebene, wenn es um statistisches Multiplexen geht, mit dem ein Effizienzgewinn im Kommunikationsnetz erzielt werden soll.
- Die Zellenebene beschreibt den zeitlichen Ablauf der Übermittlung einzelner Dateneinheiten fester Länge. Zellen werden z.B. verwendet, um eine effiziente Nutzung des Kommunikationsnetzes und zugleich eine zum Anwendungsprozess zeitnahe Informationsübermittlung zu ermöglichen (Begrenzung der Latenzzeit für das Paketieren bzw.



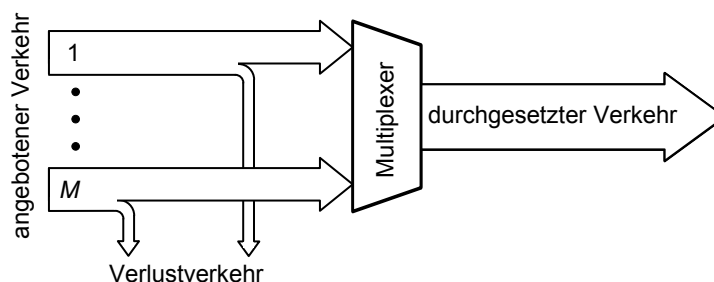
**Bild 3.3:** Hierarchisch angeordnete Aktivitätsebenen zur Beschreibung des zeitlichen Ablaufs von Kommunikationsvorgängen. Zwecks Verallgemeinerung wird anstelle der Zellenebene häufig auch eine Ebene der Dateneinheiten dargestellt.

Auspacken). Ferner ist das Zerlegen von unterschiedlich langen Bursts in Zellen eine gängige Aufbereitungsmethode für den Vermittlungsprozess [Keshav98], [Wolf01]. Je nach Zellenlänge und Übertragungsrate bewegt sich die Übermittlungsdauer grob im unteren Mikrosekundenbereich (etwa bei 10-Gigabit-Ethernet).

Nicht jede dieser Ebenen muss bei Kommunikationsvorgängen eines bestimmten Dienstes ausgeprägt sein. Anzumerken ist, dass die oberen drei Aktivitätsebenen den höheren Schichten (4-7) des als Basis für Kommunikationsstandards geltenden ISO/OSI-Referenzmodells zuzuordnen sind [Tanenbaum98]. Auf Bündel- und Zellenebene werden Nachrichtenpakete bzw. Teile davon betrachtet; folglich korrespondieren diese Aktivitätsebenen mit der Vermittlungs-, der Sicherungs- und der Bitübertragungsschicht im ISO/OSI-Modell.

Für analytische Untersuchungen ist es kaum möglich und auch nicht zweckmäßig, die Abfolge sämtlicher Aktivitäten einer realen Verkehrsquelle einzubeziehen. Üblich ist vielmehr die Berücksichtigung von ein bis zwei Aktivitätsebenen – z.B. Zellen- und Bündelenebene. Demgemäß wird das Systemverhalten im Sinne eines Dekompositionsansatzes auf unterschiedlichen Ebenen separat untersucht [Kühn96]. Den Zeitmaßstab für die in dieser Arbeit im Fokus stehenden einzelnen Ereignisse beim Transport von Informationszellen liefert die Zellenebene. Die Darstellung der interessierenden Abläufe erfordert geeignete Verkehrsquellen (z.B. sporadische Quellen, siehe auch Kapitel 3.3.1). Zu beachten ist ferner, dass reale Verkehrsmuster Zeitabhängigkeiten aufweisen können. So ist IP-Verkehr in LANs und Weitverkehrsnetzen durch Langzeitabhängigkeiten (*long-range dependence*, LRD) über große Zeitbereiche hinweg gekennzeichnet. Derartiger Verkehr hat einen selbstähnlichen Charakter (siehe z.B. [Paxson95]). Ziel ist stets eine möglichst realitätsnahe Verkehrsmodellierung.

Typischerweise interessieren bei der Verkehrsbetrachtung an Netzelementen Größen wie Verkehrsangebot, Ankunftsrate und durchgesetzter Verkehr – häufig dargestellt in Ursprung-Zielbezogenen Verkehrsmatrizen<sup>8</sup> – sowie weitere Kenngrößen, z.B. die Verlustwahrscheinlichkeit. Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Verkehrsmodell wird angenommen, dass der Teil des angebotenen Verkehrs, der von dem System nicht aufgenommen wird, zu Verlust geht, **Bild 3.4**. Für den Verlustverkehr im hier betrachteten Szenario gibt es zwei grundsätzlich un-



**Bild 3.4:** Verkehrsströme an einem Netzknoten, hier beispielhaft an einem  $M:1$ -Multiplexer.

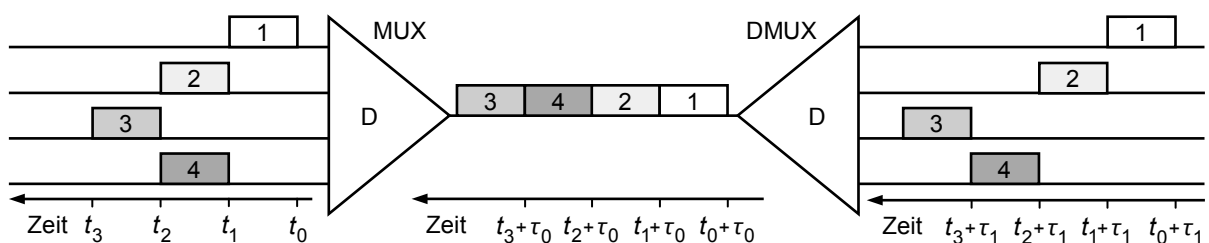
<sup>8</sup> Beim Zellen-Multiplexer reduziert sich die Verkehrsmatrix zu einem Vektor.

terschiedliche Ursachen: (i) verfälschte Routing-Information im Steuerungsfeld der Zelle aufgrund fehlerhafter Übertragung oder (ii) Pufferüberlauf. Vermeidung bzw. Korrektur (physikalischer) Übertragungsfehler sind Sache der Übertragungstechnik, die in dieser Arbeit nicht näher betrachtet wird. Maßgebliche Gründe für den Pufferüberlauf sind eine Überbuchung des verwendeten Pfades durch das Transportnetz, eine unzureichende Zugangsüberwachung (*source policing*), oder zu knapp bemessene Pufferressourcen für die zugelassene Verkehrscharakteristik. Grundsätzlich ausschließen lässt sich ein Pufferüberlauf nur durch sehr groß dimensionierten Warteraum, d.h.  $K \rightarrow \infty$ , was Netzknoten zu reinen Wartesystemen machen würde. Aus Aufwandsgründen ist dies nicht realistisch, Einrichtungen wie Zellen-Multiplexer werden also in der Praxis mit  $0 < K < \infty$  als Warte-Verlustsysteme oder in Sonderfällen mit  $K = 0$  auch als reine Verlustsysteme auftreten.

### 3.1.2 Schaltanordnungen

#### 3.1.2.1 Multiplexer

Multiplexverfahren dienen dem Ziel, eine optimale Ausnutzung von Transportressourcen<sup>9</sup> zu erreichen. Mithin handelt es sich bei dem in dieser Arbeit behandelten Zellen-Multiplexer (MUX) um ein Schlüsselement der Informations- und Kommunikationstechnik. Seine Aufgabe ist es, die aus unterschiedlichen Quellen einfallenden Verkehrsströme zusammenzufassen und ohne gegenseitige Beeinflussung im Zeitmultiplex – d.h. durch zeitliche Verschachtelung von Nachrichtenblöcken – einem gemeinsamen physikalischen Übertragungskanal zuzuführen, **Bild 3.5**. Auf diese Weise können Übertragungstrecken wirtschaftlicher und zuverlässiger betrieben werden als solche ohne Multiplex – vorausgesetzt, sie verfügen über die entsprechenden physikalischen Eigenschaften. Auf den Demultiplexer (DMUX) zum Separieren der Verkehrsströme am fernen Ende eines Multiplexabschnitts wird im nächsten Unterkapitel eingegangen. Multiplexer bzw. Demultiplexer können sich z.B. an den Ausgängen von Vermittlungseinrichtungen befinden (siehe Kapitel 3.1.2.3), aber auch an den Kanten von



**Bild 3.5:** Beispiel einer Multiplexer-Demultiplexer-Kombination zur Übermittlung von vier Verkehrsströmen im zellenorientierten Zeitmultiplex.  $\tau_0$  repräsentiert die hier als konstant angenommene Zeitspanne für den Multiplexvorgang.  $\tau_1$  beinhaltet neben  $\tau_0$  die physikalische Übertragungsdauer sowie die Dauer des Demultiplexens. D: Übertragungsdauer einer Zelle

<sup>9</sup> In der Informations- und Kommunikationstechnik sind dies z.B. Übertragungswege oder Leitungen. Am häufigsten ausgenutzt werden hierfür Raum, Zeit und Frequenz.

Kommunikationsnetzen, z.B. zur Konzentration von Verkehrsströmen, die einzelne Teilnehmer betreffen.

Die Grundfunktion des räumlichen Schaltens lässt sich mit einem  $M:1$ -Schalter ausführen – z.B. in Gestalt einer  $M \times 1$ -Koppelpunktmatrix. Steuerungsinformation bezüglich des Zellenziels wird beim Multiplexen natürlich nicht benötigt; nur im Fall eines prioritätsgesteuerten Betriebs sind Informationen aus dem Steuerungsfeld der Zellen erforderlich. Zu unterscheiden sind zunächst statische und dynamische Multiplexer. Im statischen Betrieb besteht eine feste Zuordnung zwischen der Anzahl  $i$  der Einzelkanäle, deren Übertragungsraten  $v_i$  und der Übertragungsrate im Multiplexkanal  $v_M$ , d.h.  $v_M = \sum_i v_i$ . Im dynamischen Betrieb ist die Zuordnung der Gesamtkapazität des Multiplexsystems zu den Einzelkanälen variabel und geschieht nach einem von der Belegung abhängigen Schema. Der Multiplexer hat dann mit  $v_M < \sum_i v_i$  zugleich Konzentratorkfunktion. Bei diesen deterministischen Schemata erfolgt die Verbindungsannahme gemäß Spitzenrate der einfallenden Zellenströme. Zum Auffangen von Variationen der einzelnen Zellenströme wird hier ein Puffer benötigt, der Zugriffskonflikte am Multiplexer-Ausgang mittels Zwischenspeicherung gleichzeitig eintreffender Zellen auflöst. Im komplementären Fall des statistischen Multiplexens kann die Rate ankommender Zellen die Rate abgehender Zellen übersteigen. Während solcher Phasen temporärer Überlast füllt sich der Puffer des Multiplexers mit den überschüssigen Zellen. Insbesondere dann können Zellen beachtliche Verzögerungen erfahren oder müssen im Falle erschöpfter Pufferressourcen abgewiesen werden, was in der Regel Zellenverlust bedeutet. Folglich sind Überlastphasen beim statistischen Multiplexen von besonderem Interesse. Statistisches Multiplexen ermöglicht eine effizientere Nutzung der Übertragungskapazität als im deterministischen Betrieb, denn die Übertragungsrate im Multiplexkanal ist sehr viel geringer als die Summe in den Einzelkanälen,  $v_M \ll \sum_i v_i$ . Der Preis hierfür sind z.T. längere Wartedauern und Zellenverluste, sofern Puffer unzureichend dimensioniert sind oder eine exzessive Überbuchung der Verkehrswege vorliegt.

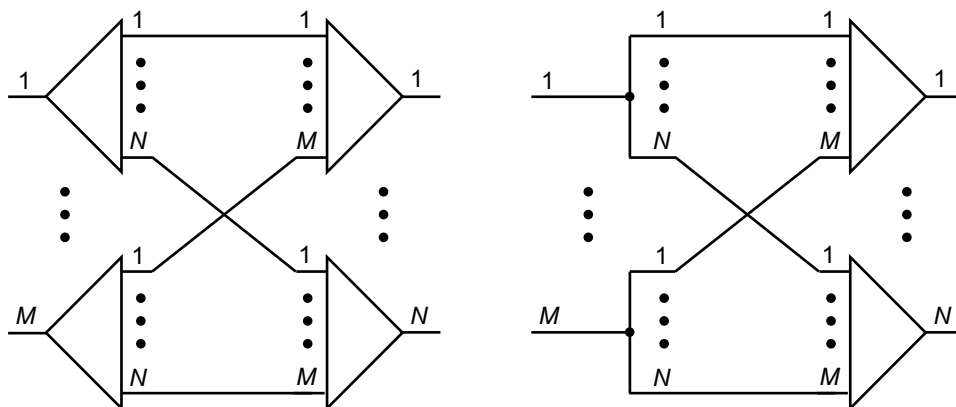
### 3.1.2.2 Demultiplexer

Das Gegenstück zum Multiplexer ist der Demultiplexer. Er entbündelt den ankommenden Verkehrsstrom, indem er die Zellen sequentiell gemäß der zugehörigen Steuerinformation im Falle eines  $1:M$ -Demultiplexers auf einen von  $M$  Ausgängen schaltet (Schaltfunktion). Eine alternative Betriebsart ist *Broadcast-and-Select*, wobei ankommende Zellen im Sinne einer Vervielfältigung auf sämtliche Ausgänge verteilt werden. Die Auswahl erfolgt erst am gewünschten Zielort, während die Zellen an den übrigen Zielorten verworfen werden (Verteilfunktion). Die Grundfunktion des Demultiplexens besteht mithin aus dem räumlichen Schalten bzw. Verteilen – z.B. mittels  $1 \times M$ -Koppelpunktmatrix – nebst der zeitlichen Koordination. Eine Warteschlange ist erforderlich, falls der Demultiplex-Prozess (Ermittlung des loka-

len Ziels aus dem Steuerfeld der Zellen und Transfer zum betreffenden Ausgang bzw. Vervielfältigung/Verteilung auf die gewünschten Ausgänge) nicht innerhalb der Zwischenankunftszeit ausgeführt werden kann. Im Falle des Broadcast-and-Select-Betriebs besteht die Aufgabe ausschließlich aus dem Vervielfältigen von Zellen und deren Verteilung auf sämtliche Ausgänge, wofür im Demultiplexer keinerlei Steuerungsinformation nötig ist.

### 3.1.2.3 Koppelnetze

Koppelnetze sind mehrstufige Anordnungen, deren Grundelemente – die Koppellemente – über Verbindungssysteme miteinander verknüpft werden. Die Realisierung der Koppellemente (Eingangspuffer-, Ausgangspuffer- oder Zentralpufferarchitektur bzw. verteilte Pufferung, siehe z.B. [Awdeh95], [Turner98]) ist unabhängig von der Koppelnetzanordnung. Zu den Grundformen von Koppelnetzen zur Zellenvermittlung gehören unter anderem Banyan-Netz<sup>10</sup> und Beneš-Netz<sup>11</sup> (siehe z.B. [Zhou02], [Radusinovic02] bzw. [Beneš65]). Je nach Architektur können Koppellemente oder ganze Koppelnetze mit  $M$  Eingängen und  $N$  Ausgängen ( $M \times N$ -Matrix) aus Multiplexern, Demultiplexern oder aus deren Kombination aufgebaut sein. So können sich Zellen-Multiplexer z.B. am Ausgang der Koppelanordnung befinden [Roberts96]. Ein Beispiel mit eingangsseitigen Demultiplexern und Multiplexern an den Ausgängen zeigt **Bild 3.6** in zwei Ausführungsformen. Bei Anwendung des Broadcast-and-Select-Prinzips muss jeder Multiplexer prüfen, welche der einfallenden Zellen tatsächlich für den betreffenden Ausgang bestimmt sind. Diese Funktion wird auch Adressfilter genannt



**Bild 3.6:** Links: Koppelnetz mit eingangsseitigen Demultiplexern und Multiplexern an den Ausgängen. Wird die Zielinformation der Zellen in den Demultiplexern ausgewertet, so benötigen die Multiplexer keinerlei Steuerungsinformation bezüglich des Zellenziels. Rechts: Alternatives Konzept nach dem Broadcast-and-Select-Prinzip. Die einfallenden Verkehrsströme werden allen Multiplexern zugänglich gemacht (broadcast), diese müssen dann gemäß Zellenziel selektieren. Jeder Demultiplexer besteht hier aus einer starren Signalverteilung.

<sup>10</sup> Wegen der Gestalt ihrer grafischen Darstellung wurden Netze dieses Typs nach dem Banyan-Baum, einer südasiatischen Feigenbaumart mit mächtigem Wuchs, benannt. Banyan-Netze bestehen aus einheitlichen  $2 \times 2$ -Elementen und zeichnen sich durch die Selfrouting-Eigenschaft aus [Goke73], [Widjaja94].

<sup>11</sup> Klasse von Verbindungsnetzen, die aus  $n \times n$ -Elementen bestehen und bei synchroner Zellenvermittlung intern blockierungsfrei sind; benannt nach dem tschechisch-amerikanischen Mathematiker V.E. Beneš (1930).

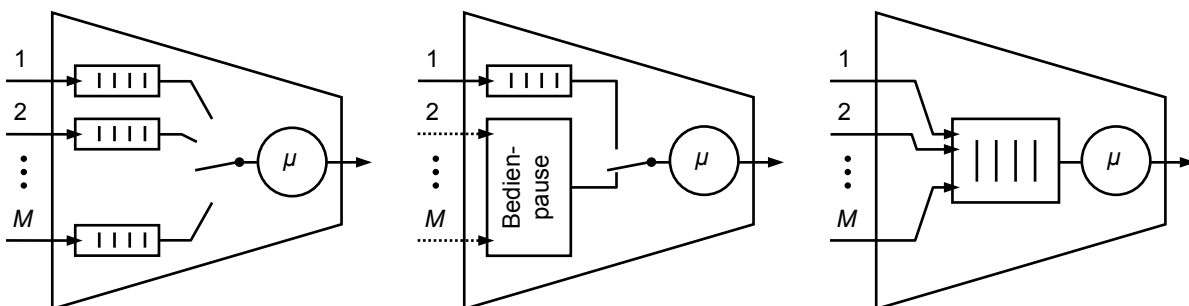
(siehe z.B. [Zegura93], [Chao01]). Den Sonderfall mit Zellen-Multiplexern ohne Warteraum ( $K = 0$ ) repräsentiert die Klasse der reinen, ungepufferten Verbindungsnetze [Richter97].

### 3.1.3 Modellhierarchie und Systematik

Zellen-Multiplexer können in zwei grundsätzlich unterschiedlichen Architekturen auftreten: (i) Systeme mit individuellen Puffern an jedem Multiplexer-Eingang und einem Schalter zur wahlfreien temporären Verbindung jeweils eines Puffers mit der Bedieneinheit, **Bild 3.7** (links). Derartige Konfigurationen werden allgemein als Multiwarteschlangen- oder auch Polling-Systeme bezeichnet. (ii) Systeme mit einem zentralen Puffer, der durch sämtliche Eingänge (auch simultan) betreten werden kann, und fest mit der Bedieneinheit verbunden ist, **Bild 3.7** (rechts). Solche Systeme gehören zur Klasse der einlinigen Bediensysteme mit Mehrfachzugang zu einer zentral organisierten Warteschlange. Die Warteplätze können den Systemeingängen analog zum Polling-System fest zugeordnet sein, oder es findet eine dynamische Zuweisung statt. Die Funktion des Schalters zur Warteschlangenauswahl (siehe **Bild 3.1**) ist hier Bestandteil der Pufferorganisation bzw. der Steuerung von Zellenein- und -austritt. Da aus Sicht der Leistungsanalyse die feste Warteplatzzuordnung zu den Systemeingängen durch das Polling-System abgedeckt ist, wird bei der Zentralpufferarchitektur ausschließlich die dynamische Warteplatzvergabe betrachtet.

Generell kann sich die analytische Untersuchung von Polling-Systemen in ihrer Gesamtheit je nach Randbedingungen als sehr komplex bis unmöglich erweisen. Abhilfe schafft die Annahme von Vereinfachungen mit dem Ziel, das Multiwarteschlangensystem in ein einfacheres, meist einliniges System zu überführen. Für diese Sonderform von Polling-Systemmodellen hat sich die Bezeichnung Abfragesystem mit Bedienpausen (*vacations*) etabliert. Aus Sicht der Leistungsanalyse nimmt dieser Systemtyp neben den beiden Architekturvarianten den Rang einer eigenen Modellklasse ein.

Es folgt eine nähere Betrachtung der drei Modelle und der Aufgabenstellungen mit Anmerkungen zu immanenten Vereinfachungen, Unschärfen, zu treffenden Annahmen, usw.



**Bild 3.7:** Systematik der Multiplexer-Modelle. Links: Modell eines klassischen Polling-Systems; Mitte: vereinfachtes Modell mit Bedienpausen; Rechts: Modell eines Zentralpuffer-Multiplexers mit Mehrfachzugang.



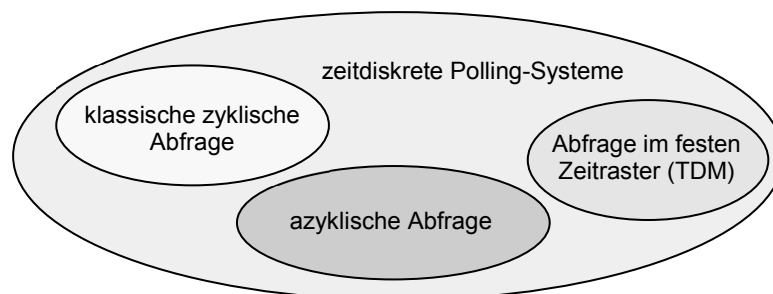
### 3.1.3.1 Klassisches Polling-System

Polling-Systeme bestehen aus einer Anzahl von  $M \geq 2$  Warteschlangen und einer Bedieneinheit für deren Abfertigung, **Bild 3.7** (links). Gebräuchlich ist auch die Bezeichnung *Multi-Warteschlangensystem*. Sowohl für die Abfragereihenfolge der Warteschlangen als auch für die Abarbeitung der darin befindlichen Aufträge gelten vorab festgelegte Schemata (siehe auch Abschnitt 3.1.1.3). Typischerweise besucht der Server eine Warteschlange, bietet die Abfertigung eines oder mehrerer darin wartender Aufträge an, und schaltet nach Erledigung zur nächsten Warteschlange weiter. Die nähere Detaillierung führt zu einer immensen Anzahl sehr unterschiedlicher Abfragesysteme. Grob unterscheiden sich Polling-Modelle durch

- den Prozess der Ankunft von Aufträgen am Bediensystem,
- die Service-Anforderungen der Aufträge an das Bediensystem,
- die Bedienstrategie (gleiche oder unterschiedliche Disziplinen innerhalb der Warteschlangen, bei deren Auswahl, der Auftragsabfertigung und beim Wechsel der Bedieneinheit von einer zur nächsten Warteschlange, siehe **Tabelle 3.1**).

Exzellente Übersichten hierzu bieten [Takagi90], [Grillo90], [Takagi97], [Takagi00].

In ihrer klassischen Form sind Polling-Systeme gekennzeichnet durch die zyklische Abfragereihenfolge (siehe z.B. [Takagi90]). Ein in dieser Hinsicht zunehmend weiter gefasstes Verständnis etablierte sich seit den 1980er Jahren. So verwenden seitdem zahlreiche Autoren den Begriff *Polling* auch für solche Systeme, deren Eingänge azyklisch abgefragt werden, z.B. anhand einer Polling-Tabelle<sup>12</sup>, per Zufallsauswahl unter allen nichtleeren Stationen, nach dem Aufzugschema oder gesteuert durch den Systemzustand<sup>13</sup> [Levy90], [Grillo90], [Bunday91], [Takagi00]. Zur Klasse der Polling-Systeme lassen sich unter bestimmten Randbedingungen auch Zeitmultiplexsysteme (*time division multiplexing*, TDM) zuordnen. Werden beispielsweise Umschaltdauern vernachlässigt und 1-begrenzte Abfertigung angenommen, so stellt die



**Bild 3.8:** Gruppe der zeitdiskreten Polling-Systeme, die in dieser Arbeit zur Modellierung und Analyse von Zellen-Multiplexern mit eingangsseitigen Warteschlangen verwendet werden.

<sup>12</sup> Die Polling-Tabelle definiert eine Reihenfolge der Bedienung, die in einen übergeordneten Polling-Zyklus wiederholt angewendet wird. Einzelne Stationen können hierbei auch mehrmals pro Polling-Zyklus abgefertigt werden. Die rein zyklische Bedienung stellt einen Sonderfall der Polling-Tabelle dar.

<sup>13</sup> Kriterium kann z.B. die Länge der Warteschlangen sein, oder die Ankunftszeitpunkte der Forderungen.

deterministische Betriebsweise solcher Systeme die einzige Besonderheit im Vergleich zum klassischen Polling-System dar [Takagi90], [Christl97]. Bei TDM-Systemen verweilt die Bedieneinheit an jeder Station bzw. jedem Puffer für eine konstante Zeitdauer (Zeitschlitz des TDM-Systems), selbst wenn dort kein Auftrag auf Abfertigung wartet.

Die Gruppe der in dieser Arbeit als zeitdiskrete Polling-Systeme bezeichneten Multiplexer illustriert **Bild 3.8**.

### 3.1.3.2 Polling-System mit Bedienpausen

Dem Ziel, zu einfachen, analytisch gut handhabbaren Modellen von Polling-Systemen zu gelangen, dient die Anwendung des Prinzips der virtuellen Bedienpausen. Hierbei wird nur eine der  $M$  Warteschlangen betrachtet und eine aus Sicht dieser Warteschlange virtuelle Bedienpause des Servers (*server vacation*) eingeführt, in der die übrigen Warteschlangen abgefertigt werden, **Bild 3.7** (Mitte). Aus dieser Grundidee hat sich ein sehr großes Teilgebiet der Leistungsanalyse von Polling-Systemen entwickelt (siehe z.B. [Fiems04]). In der Regel liefern derartige Analysen approximative Resultate, weil sie ohne exakte Kenntnis des Inhalts der weiteren (nicht betrachteten) Warteschlangen auskommen. Andererseits ermöglicht das Modell analytische Einblicke auch in komplizierte Systeme, was sonst kaum möglich wäre. In dieser Arbeit wird das Modell für einen Sonderfall von Polling-Systemen verwendet, der auch eine exakte Beschreibung der Bedienpause erlaubt.

### 3.1.3.3 Zentralpuffer-System mit Mehrfachzugang

Ein von allen Multiplexer-Eingängen gespeister und gemeinsam genutzter Puffer (Zentral- bzw. Ausgangspuffer) lässt sich als einliniges Bediensystem modellieren, **Bild 3.7** (rechts). Grundsätzlich können hier sämtliche Einzelheiten eines Polling-Systems durch entsprechende Pufferorganisation und -steuerung nachgebildet werden. Die technische Herausforderung bei dieser Architektur liegt in der Implementierung des Pufferzugangs, der die eigentliche Multiplexer-Funktion ausführt. Das System muss Ankünfte von sämtlichen Eingängen im Extremfall simultan aufnehmen können, wofür der Zugang zum Puffer eine entsprechend hohe Bandbreite benötigt (siehe auch Kapitel 3.1.1.1).

Die Möglichkeit einer dynamisch gesteuerten gemeinsamen Nutzung der Pufferressourcen (*buffer-sharing*) verspricht bei diesem System einen Multiplex- bzw. Bündelungsgewinn und insofern gegenüber der Architektur mit eingangsseitigen Warteschlangen einen Vorteil bezüglich Pufferbedarf bzw. Überlaufwahrscheinlichkeit. Fiedler unterscheidet aufgrund dessen in [Fiedler98] zwischen dem statischen Multiplexer (d.h. dem Polling-System mit fester Puffergliederung) und dem dynamischen Multiplexer.

Der dynamische Multiplexer verzichtet auf die bei Polling-Systemen typische Puffergliederung. Der Verkehr wird über eine gemeinsame Warteschlange geführt, deren Abfertigung z.B. nach der FCFS-Disziplin erfolgt. Festgelegt werden muss, in welcher Weise bzw. Reihenfolge gleichzeitig eintreffende Zellen in die zentrale Warteschlange aufgenommen werden. Diese Disziplin entspricht der Warteschlangenauswahl beim Polling-System. Eine wesentliche Voraussetzung für die Realisierung von Multiplexgewinnen ist die unverzügliche Bedienung wartender Zellen im Sinne einer erschöpfenden Abfertigung. Am wirkungsvollsten ist dies, wenn das abgehende Übertragungssystem asynchron genutzt wird, d.h. Zellen ohne Ansehen ihrer Herkunft im nächstmöglichen Zeitschlitz weitergeleitet werden. Zwar ist auch ein synchroner TDM-Rahmen am Ausgang denkbar, die dann unvermeidbaren Verzögerungen einzelner Zellen würden aber dem Grundgedanken des dynamischen Multiplexens entgegenwirken. Ein solches Szenario erscheint kaum sinnvoll und wird hier nicht weiter betrachtet.

### 3.2 Analysemethoden

Untersuchungen des Leistungsverhaltens können in verschiedenen Phasen des Lebenszyklus (Entwurf, Konfigurierung, Betrieb, Erweiterung) von Rechen- und Kommunikationssystemen eine Rolle spielen. Ziel ist stets die Abwägung zwischen Ressourcenaufwand und Güte des erbrachten Dienstes. Beispiele für den Einsatz der Leistungsbewertung sind (i) die Vorhersage der Leistungsfähigkeit von Systemen, (ii) die Auswahl geeigneter Komponenten für den Systemaufbau, sowie (iii) die Einstellung bzw. Optimierung von bereits im Betrieb befindlichen Systemen. Bewerten lässt sich die Leistung von Rechen- oder Kommunikationssystemen nur unter Berücksichtigung der Systemressourcen und der Last in Gestalt von Aufträgen. Die Leistungsbewertung besteht aus der Ermittlung charakteristischer Güteerkmale (Leistungskenngrößen) wie z.B. Durchsatz, Antwortzeit oder Auslastung einzelner Module bzw. des Gesamtsystems. Die von außen erkennbare „Wirksamkeit“ eines Systems beschreiben sogenannte Effektivitätsmaße. Hierzu gehören z.B. Dienstabwicklungsdauern, Antwortzeiten und Durchsätze (externe Leistungsmaße). Die nur intern beobachtbare „Ausnutzung“ von Ressourcen beschreiben Effizienzmaße, zu denen beispielsweise Prozessor- und Speicherauslastung (interne Leistungsmaße) zählen.

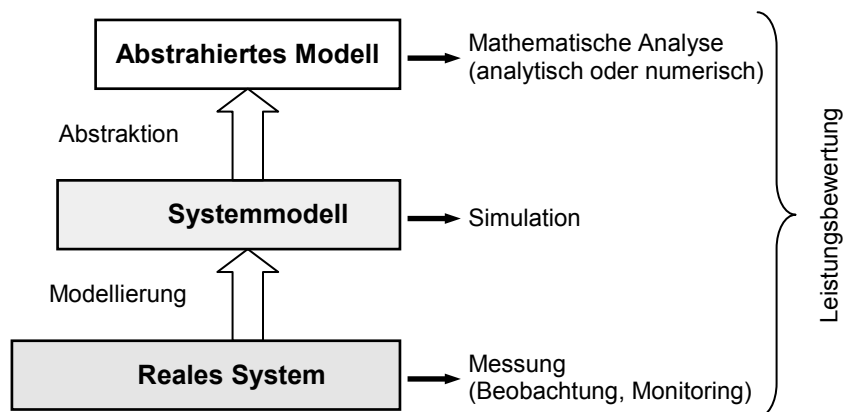
Der direkte Weg zur Feststellung der Leistungsfähigkeit in Betrieb befindlicher Systeme ist die messtechnische Untersuchung am realen Objekt. Hierbei können die relevanten Größen durch Messung (Hardware- oder Softwaremonitore) bestimmt werden; wahrscheinlichkeitstheoretische Konzepte sind nicht erforderlich [Bolch89], [TranGia05].

Wenn die Analyse im Systembetrieb nicht möglich ist (z.B. in der Entwicklungsphase, bevor ein reales System existiert), oder zu aufwändig wäre, müssen die Untersuchungen an einem Modell erfolgen. Die verfügbaren Methoden gliedern sich entsprechend **Bild 3.9** in die Simu-

lation und mathematische Analyseverfahren.

In der Konzeptionsphase von Systemen können Leistungsuntersuchungen anhand von detaillierten Systemmodellen oder abstrakteren Verkehrsmodellen durchgeführt werden. Dabei steigt der Rechenaufwand für die Systemsimulation mit der Detailtreue des nachgebildeten Systems. Viele Rechen- und Bediensysteme können gut durch Warteschlangenmodelle modelliert werden. Diese lassen sich auf einer im Vergleich zum Simulationsmodell meist etwas höheren Abstraktionsebene auch mathematisch behandeln, numerisch oder analytisch. Die analytische Vorgehensweise versucht auf mathematischem Wege Beziehungen zwischen fundamentalen Systemgrößen und relevanten Leistungsgrößen herzuleiten. Oft existieren für die abstrakten Verkehrsmodelle analytische Methoden, die eine exakte oder approximative Untersuchung von vielen Realisierungsalternativen über weite Parameterbereiche hinweg ermöglichen, und zwar im Vergleich zur Simulation mit erheblich günstigerem Rechenaufwand, bei gleicher oder sogar größerer Genauigkeit.

Die auf Modellierung basierenden Untersuchungsmethoden werden in den folgenden Abschnitten näher betrachtet. Zunächst wird auf die Simulationstechnik eingegangen, anschließend auf die Methoden der Warteschlangentheorie mit Schwerpunkt auf die Analyse zeitdiskreter Systeme, die in der vorliegenden Arbeit von besonderem Interesse ist.



**Bild 3.9:** Klassifizierung der Methoden zur Leistungsbewertung von Systemen und Funktionseinheiten.

### 3.2.1 Simulationstechnik

Simulation ist ein Verfahren zur Untersuchung des Verhaltens von Systemen oder Systemteilen – beispielsweise der Nachrichtentechnik – anhand einer modellhaften Nachbildung, dem Simulationsmodell. Simulationstechniken versuchen die Realität detailliert zu imitieren, um daraus Eigenschaften abzuleiten. Hierzu sind spezielle Simulationsprogramme erforderlich, deren Läufe (Simulationsläufe) das zeitliche Systemverhalten, d.h. die Dynamik, nachbilden.

Das Simulationsmodell muss alle wesentlichen Systemmerkmale einschließlich der von außen einwirkenden Arbeitslast nachempfinden. Dementsprechend umfasst die Modellierung

- die Systemmodellierung, d.h. das Erfassen der Komponenten und Funktionen,
- die Modellierung der Betriebsabläufe, d.h. die modellhafte Darstellung des Ablaufgeschehens (z.B. mit Warteschlangenmodellen), und
- die Lastmodellierung, d.h. die Nachbildung von Ankunfts- und Bedienprozessen (mittels geeigneter, künstlich erzeugter stochastischer Prozesse), sowie ggf. weiterer Merkmale, wie z.B. Auftragsklassen usw.

Einerseits müssen die Systemeigenschaften so genau wie möglich erfasst werden, das Modell muss aber zum Anderen simulationstechnisch handhabbar sein. So bedingt eine hohe Modellkomplexität in der Regel sehr viele Systemzustände, was zu nicht vertretbarem Rechenaufwand führt (meistens extrem lange Ausführungsdauer). Andererseits können stark vereinfachende Annahmen sehr ungenaue Ergebnisse liefern. Die Kernaufgabe ist mithin das Berücksichtigen wesentlicher und das Fortlassen unwesentlicher Parameter. Generell müssen Simulationstechniken mit folgenden Aufgaben umgehen:

- Simulationsparameter: Je nachdem, welche Kenngrößen eines Systems nachgebildet werden sollen, sind geeignete Simulationsparameter auszuwählen.
- Simulationsmodell: Umsetzung in Software, deren Verifikation und die Ausführung, meistens in mehreren voneinander unabhängigen Simulationsläufen.
- Einschwingdauer: Bei der Auswertung von Simulationsläufen muss eine Einschwingphase von meist unbekannter Dauer berücksichtigt werden. Dies birgt ein gewisses Fehlerpotential.
- Rechendauer: Simulationsläufe können sehr viel Zeit beanspruchen, insbesondere bei der Erfassung seltener Ereignisse.
- Ergebnisüberprüfung: Bei komplexen Systemen kann es unter Umständen sehr schwierig sein, Resultate auf Korrektheit bzw. Plausibilität zu prüfen. Hinweise hierzu finden sich z.B. in [Kobayashi09].
- Ergebnisqualität: Die Ergebnisse aus Simulationen hängen stark von der auftretenden Anzahl der interessierenden Ereignisse ab. Eine große Anzahl von Ereignissen liefert präzisere bzw. zuverlässigere Resultate als eine geringe Anzahl. Üblich ist deshalb die Angabe von Konfidenzintervallen; einen Standardansatz beschreibt z.B. [Welch83].

Insgesamt vorteilhaft sind die Anwendungsbreite und die nahezu beliebigen Freiheitsgrade bei der Systemmodellierung und der Definition von Randbedingungen.

Je nach Art der Zustandsübergänge unterscheidet man zwischen kontinuierlicher und diskreter

Simulation. Der überwiegende Teil praktischer Aufgabenstellungen fällt in den Bereich der diskreten Simulation (*discrete event simulation*), die oft auch ereignisgesteuerte Simulation genannt wird. Die Modellzustände ändern sich hier sprunghaft zu diskreten Zeitpunkten von Ankunfts- oder Bediendeereignissen.

### 3.2.2 Warteschlangentheorie

Die Warteschlangentheorie – häufig auch Bedientheorie genannt – verwendet zur Beschreibung einzelner Bedienstationen und zur mathematischen Analyse von Bediensystemen ein einfaches Grundmodell. Es besteht aus der Bedieneinheit und einem Warteraum. Eintreffende Kunden werden bedient, sofern die Bedieneinheit über freie Abfertigungskapazität verfügt, andernfalls müssen sie sich in einer Warteschlange einreihen. Erstmals angewandt worden ist die Warteschlangentheorie 1909 von dem Mathematiker A.K. Erlang zur Dimensionierung von Telefonvermittlungsanlagen. Mithilfe elementarer Grundmodelle können vernetzte Systeme gebildet werden.

Für die analytische Untersuchung lässt sich das Verhalten von Bediensystemen in vielen Fällen mithilfe stochastischer Prozesse modellieren. Ein stochastischer Prozess ist ein Zufallsprozess, der sich über einem Parameterbereich (in verkehrstheoretischen Anwendungen meistens die Zeit  $t$ ) verändert. Darstellen lässt er sich durch eine Menge von Zufallsvariablen  $\{X(t), t \in I\}$  über dem Parameterbereich  $I$  (Indexmenge). Der Parameterbereich kann eine endliche bzw. unendliche Menge diskreter Werte sein oder eine Teilmenge der reellen Zahlen. Wertebereiche von  $X$  sind beispielsweise die natürlichen Zahlen, die reellen Zahlen oder Vektoren. Sofern  $X$  endlich oder abzählbar ist, spricht man von wertediskreten Prozessen. Die Elemente des Wertebereichs von  $X$  repräsentieren die Prozesszustände (Zustandsraum). Besteht  $I$  aus diskreten Werten, so handelt es sich um einen diskret stochastischen Prozess, andernfalls spricht man vom zeitkontinuierlich stochastischen Prozess. **Tabelle 3.2** veranschaulicht die Kombinationen diskreter und kontinuierlicher Werte für Parameterbereich und Zustandsraum am Beispiel der Kundenabfertigung in einem Bediensystem.

		Zustandsraum	
		diskret	kontinuierlich
Parameterbereich (Zeit)	diskret	wartende Kundenanzahl z.B. am Ende eines Bedienvorgangs	Wartedauer eines bestimmten Kunden
	kontinuierlich	wartende Kundenanzahl zu einem (beliebigen) Zeitpunkt	geleisteter Service-Aufwand für alle Kunden zu einem beliebigen Zeitpunkt

**Tabelle 3.2:** Typisierung der stochastischen Prozesse in Abhängigkeit der Definition von Parameterbereich (Zeit) und Wertebereich (Zustandsraum). Zustandsdiskrete Prozesse werden auch Kette, zeitdiskrete Prozesse auch Folge genannt. Als Beispielprozess wurde die Abfertigung in einem Bediensystem gewählt.

Das Hauptkriterium zur weiteren Klassifizierung von stochastischen Prozessen ist die Art, wie die einzelnen Zufallsvariablen voneinander abhängen. Grob unterschieden werden kann zwischen Markov-Prozessen<sup>14</sup> und nicht-Markov-Prozessen (siehe z.B. [Bolch89]). Das Charakteristikum der Markov-Prozesse ist die Gedächtnislosigkeit – auch Markov-Eigenschaft genannt. Diese besagt, dass das zukünftige Prozessverhalten ausschließlich vom Zustand zu einem beliebigen Zeitpunkt (in der Gegenwart) abhängt, und keinesfalls vom Verhalten zu einem zurückliegenden Zeitpunkt. Nicht-Markov-Prozesse haben hingegen keine Markov-Eigenschaft. Es sei angemerkt, dass die Exponentialverteilung die einzig mögliche kontinuierliche Verteilung mit Markov-Eigenschaft ist. Dies bedeutet, dass eine Exponentialverteilung stets dann vorliegt, wenn die einzelnen Ereignisse eines Prozesses unabhängig voneinander sind. Das diskrete Pendant hierzu ist die geometrische Verteilung als einzig mögliche diskrete gedächtnislose Verteilung.

Genauer betrachtet prägen einen Markov-Prozess die zwei folgenden Bedingungen.

- i. Die Zustandsbedingung: Ein Übergang von Zustand  $X_i$  zum Zustand  $X_{i+1}$  hängt nur vom gegenwärtigen Zustand  $X_i$  ab und nicht von Zuständen der Vergangenheit.
- ii. Die Zeitbedingung: In einem hinreichend kleinen Zeitintervall  $\{t + \Delta t\}$  hängt ein Zustandsübergang nur von Zeitpunkt  $t$  ab, und nicht von weiter zurück liegenden Zeitpunkten (Gedächtnislosigkeit).

Je nachdem, welche dieser Bedingungen auf einen stochastischen Prozess zutreffen, gliedern sich die Markov-Prozesse in homogene und in Semi-Markov-Prozesse (SMP), **Tabelle 3.3**. Zeitlich homogen heißt ein Markov-Prozess, wenn die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten nicht vom Zeitparameter abhängen. Finden jedoch die Zustandsübergänge bei einem stochastischen Prozess mit abzählbarem Zustandsraum (z.B. einer Markov-Kette) zeitabhängig statt, so wird er Semi-Markov-Prozess oder Markovscher Erneuerungsprozess genannt. Die Markov-Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit ist dann nicht gegeben, obwohl es sich um einen Markov-Prozess handelt. Ausführlicher widmet sich das nächste Unterkapitel den Markov-Prozessen mit diskretem Zustandsraum, da sie in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen.

Prozesstyp	Zustandsbedingung	Zeitbedingung
Homogener Markov-Prozess	erfüllt (bei hinreichend kleinem Zeitintervall tritt nur ein stochastischer Übergang auf)	erfüllt
Semi-Markov-Prozess	erfüllt	nicht erfüllt
Nicht-Markov-Prozess	nicht erfüllt	nicht erfüllt (wegen Nichterfüllung der Zustandsbedingung)

**Tabelle 3.3:** Gliederung der Markov-Prozesse anhand der Zustands- und der Zeitbedingung.

<sup>14</sup> Benannt nach dem russischen Mathematiker A.A. Markov (1856-1922), der maßgeblich zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Analysis beigetragen hat. In dieser Arbeit wird anstelle der ins Deutsche übertragenen Namensvarianten *Markow* und *Markoff* die in der englischsprachigen Literatur übliche Schreibweise verwendet.

Ankunfts- und Abfertigungsprozesse werden in der Warteschlangentheorie häufig durch die statistischen Eigenschaften (Wahrscheinlichkeitsverteilung, Korrelation) der Ankunftsabstände bzw. Bediendauern beschrieben. Eine wesentliche Rolle spielen hierbei Punktprozesse und Erneuerungsprozesse<sup>15</sup> (*renewal process*). Ein Punktprozess ist eine endliche oder abzählbar unendliche Folge von zufälligen Ereigniszeitpunkten auf der reellen Zeitskala, charakterisiert durch eine Zufallsvariable  $X_i, i \in \mathbb{N}$ .

Um einen Erneuerungsprozess handelt es sich, wenn die Abstände aufeinanderfolgender Ereigniszeitpunkte (z.B. Zwischenankunftsintervall) stochastisch unabhängig und identisch verteilt sind.<sup>16</sup> Weicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung des ersten Zeitintervalls von der Verteilungsfunktion der übrigen Intervalle ab, wird der Prozess modifizierter Erneuerungsprozess genannt [TranGia05]. Erneuerungsprozesse lassen sich auch als Zählprozesse begreifen. Diese sind weiter gefasst und beinhalten auch Punktprozesse mit stochastisch abhängigen und ungleich verteilten Zwischenankunftsintervallen. Ein Zählprozess gibt die Anzahl der in einem Zeitintervall aufgetretenen Ereignisse an – im Falle eines Erneuerungsprozesses die Anzahl der Erneuerungen (siehe z.B. [Viertl03]).

Zur Klasse der Erneuerungsprozesse gehört der Poisson-Prozess<sup>17</sup>  $\{Y(t), t \geq 0\}$  mit Zustandsraum  $\mathbb{N}$  und Intensität  $\lambda$ . Dieser zustandsdiskrete, zeitkontinuierliche stochastische Prozess<sup>18</sup> ist von großer Bedeutung, denn er bildet den Ausgangspunkt für die Modellierung zahlreicher Zufallsprozesse. Die Anzahl der punktförmigen Ereignisse ist bei ihm in beliebigen disjunkten Zeitintervallen stochastisch unabhängig und stets Poisson-verteilt.<sup>19</sup>

Ist die Intensitätsfunktion  $\lambda$  konstant, so handelt es sich um einen *homogenen* Poisson-Prozess. Die Abstände der punktförmigen Ereignisse sind dann negativ-exponentiell verteilt mit dem Parameter  $\lambda$ . Daraus folgt, dass homogene Poisson-Prozesse die Markov-Eigenschaft haben. Aus der Exponentialverteilung folgt auch die sogenannte *Poisson-Eigenschaft*. Diese besagt, dass bei exponentiell verteilten Abständen aufeinanderfolgender Ereigniszeitpunkte die Zufallsvariable für die Anzahl der Ereignisse, die in einem festen Zeitintervall auftreten, Poisson-verteilt ist [Bolch89]. Aus der Poisson-Eigenschaft leiten sich zwei weitere wichtige Besonderheiten ab: das Zusammenfassen und Aufteilen von Poisson-Prozessen. Werden  $n$  Poisson-Prozesse mit Zwischenankunftsintervallverteilung  $1 - e^{-\lambda_i t}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , zu einem einzigen Prozess zusammengefasst, so ergibt sich wiederum ein Poisson-Prozess mit Zwischenan-

<sup>15</sup> Erneuerungsprozesse stammen aus dem Gebiet der Erneuerungstheorie, die sich mit Ausfall, Reparatur und Erneuerung von Systemkomponenten beschäftigt, deren Lebensdauer begrenzt ist. Zu den Aufgaben der Erneuerungstheorie gehört die Entwicklung geeigneter Wartungsstrategien.

<sup>16</sup> Ein derartiger Prozess wird in der Kendall'schen Notation als *General Independent* (GI) gekennzeichnet.

<sup>17</sup> Benannt nach dem französischen Physiker und Mathematiker S.D. Poisson (1781-1840).

<sup>18</sup> Das zeitdiskrete Gegenstück zum Poisson-Prozess ist der Bernoulli-Prozess, benannt nach dem schweizer Mathematiker und Physiker J.I. Bernoulli (1655-1705).

<sup>19</sup> Der Poisson-Prozess ist mit seinen unabhängigen und stationären Zuwächsen der einfachste Zählprozess. Jede Realisierung beginnt in 0 und springt zu jedem nachfolgenden Ereigniszeitpunkt in der Höhe um den Wert 1.



kunftsintervallverteilung  $1 - e^{-\lambda t}$  und  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ . Wird ein derartiger Prozess in  $n$  Prozesse aufgeteilt, sodass dem  $i$ -ten Teilprozess Ankünfte mit der Wahrscheinlichkeit  $r_i$  zugeführt werden, dann ist jeder dieser Teilprozesse wieder ein Poisson-Prozess mit Zwischenankunftsintervall-Verteilungsfunktion  $1 - e^{-r_i \lambda t}$ .

Ein Punktprozess, dessen Intensitätsfunktion ein stochastischer Prozess  $Y(t)$  ist, und dessen bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung bei gegebener Intensität  $Y(t) = \lambda(t)$  einen Poisson-Prozess mit der Intensitätsfunktion  $\lambda(t)$ ,  $t \geq 0$  darstellt, wird *Doppelt Stochastischer Poisson-Prozess* (DSPP) genannt.  $Y(t)$  heißt auch die *zufällige Intensitätsfunktion* des DSPP. Hervorgehen kann ein DSPP aus dem Poisson-Prozess durch eine zufällige Zeittransformation [ITG97]. Beispiele für DSPP sind der Markov-modulierte Poisson-Prozess (MMPP) und der Geschaltete Poisson-Prozess (*switched Poisson process*, SPP). Beim SPP wird die zufällige Intensitätsfunktion  $Y(t)$  des doppelt stochastischen Prozesses als Funktion eines weiteren stochastischen Prozesses  $Z(t)$  mit abzählbarem Zustandsraum beschrieben:  $Y(t) = f(Z(t))$ . Dies lässt sich als Steuerung der Intensitätsfunktion  $Y(t)$  durch den Prozess  $Z(t)$  interpretieren. Dementsprechend wird  $Z(t)$  auch steuernder, modulierender oder Generator-Prozess genannt. Häufig ist dies ein Semi-Markov-Prozess. Der MMPP ist ein Spezialfall eines SPP, wobei der modulierende Prozess  $Z(t)$  eine Markov-Kette ist. Hat diese genau zwei Zustände, wobei die Intensität in einem der Zustände den Wert Null annimmt, so handelt es sich um einen unterbrochenen Poisson-Prozess (*interrupted Poisson process*, IPP). Im Gegensatz zum SPP und MMPP, die nicht zur Klasse der Erneuerungsprozesse gehören, ist der IPP ein Erneuerungsprozess. Die Verteilung der Zwischenankunftsintervalle entspricht einer Hyperexponentialverteilung mit zwei Phasen ( $H_2$ -Prozess) [Kühn96].

### 3.2.2.1 Markovsche Ketten

Ein Markov-Prozess mit diskretem Zustandsraum ( $S = \mathbb{N}$  oder  $S = \mathbb{N}^+$ ) heißt Markov-Kette. Ist die Parametermenge abzählbar, so handelt es sich um eine diskrete Markov-Kette, andernfalls um eine kontinuierliche. Markov-Ketten sind in vielen Bereichen von Wissenschaft und Technik anwendbar; sie stellen ein Modell von fundamentaler Bedeutung für sequentielle, und insbesondere für zeitabhängige stochastische Vorgänge dar. Mit Blick auf den Schwerpunkt dieser Arbeit konzentriert sich der folgende Abschnitt auf zeitdiskrete Markov-Ketten. Die Begriffsbildung ist bei Markov-Ketten mit kontinuierlicher Zeit in vielen Punkten analog.

Die zeitliche Entwicklung einer diskreten Markov-Kette verläuft in Schritten. Der Zustand zur Zeit  $n \in \mathbb{N}$  ist der Zustand nach  $n$  Übergängen, d.h. nach  $n$  Schritten. Zur Veranschaulichung eignet sich ein gerichteter Graph, bei dem die Zustände durch Knoten und die Übergänge von einem Zustand  $S_i$  zu einem Zustand  $S_j$  durch Kanten – gewichtet mit den bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten – repräsentiert werden. Die weiteren Ausführungen beschränken

sich auf homogene Markov-Ketten – auch Markov-Ketten mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten genannt, weil ihre einstufigen Übergangswahrscheinlichkeiten nicht vom Parameter *Zeit* abhängen. Sofern die Übergänge lediglich durch *eine* Zufallsvariable bestimmt werden, handelt es sich um eine Markov-Kette *erster Ordnung*. Bei Markov-Ketten *m*-ter Ordnung wird das zukünftige Geschehen durch *m* Zufallsvariablen bestimmt.

Ziel der Untersuchung von Markov-Ketten ist die Ermittlung der Zustandswahrscheinlichkeiten, d.h. der Wahrscheinlichkeit, mit welcher sich der abgebildete Prozess zu einem gegebenen Zeitpunkt in einem bestimmten Zustand befindet.

Darstellen lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten in einer Wahrscheinlichkeitsübergangsmatrix  $\mathbf{P}$ , kurz auch Übergangsmatrix genannt. Für *n* Zustände einer Markov-Kette hat die Übergangsmatrix die Dimension  $n \times n$ . Für die Übergangswahrscheinlichkeiten gilt

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{1,1} & \cdots & P_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n,1} & \cdots & P_{n,n} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq P_{i,j} \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n P_{i,j} = 1, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Damit ist die Übergangsmatrix eine *stochastische Matrix*. Sie enthält alle Daten über den Zufallsprozess mit Ausnahme der Anfangsverteilung. Diese muss in Form eines sogenannten Anlaufvektors vorgegeben werden, der die Anfangswahrscheinlichkeiten für jeden Zustand festlegt. Durch die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten und die initiale Verteilung der Zustände ist eine Markov-Kette vollständig definiert.

Die Beobachtung einer Markov-Kette kann schrittweise erfolgen oder auch über mehrere Schritte hinweg. Bei der Berechnung von mehrschrittigen Übergangswahrscheinlichkeiten müssen sämtliche Wege berücksichtigt werden, die von einem Zustand  $S_i$  zu einem Zustand  $S_j$  über eine beliebige Anzahl von Zwischenzuständen führen. Dies geschieht, indem man die Wahrscheinlichkeiten für jeden Weg individuell durch Multiplikation der Übergangswahrscheinlichkeiten seiner Segmente ermittelt und für die Gesamtanzahl der existierenden Wege summiert. Ausgedrückt wird diese Beziehung durch die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen für Markov-Ketten.<sup>20</sup>

Das Langzeitverhalten einer Markov-Kette wird durch drei Größen charakterisiert.

- i. Die Grenzverteilung: Eine zeitdiskrete Markov-Kette besitzt eine (stationäre) Grenzverteilung, wenn nach genügend langer Zeit jeder Zustand – unabhängig vom Anfangszustand – mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auftritt.
- ii. Die stationären Verteilungen (Gleichgewichtsverteilungen): In einer endlichen Markov-Kette sind dies die Eigenvektoren der Übergangsmatrix zum Eigenwert eins.

<sup>20</sup> Benannt nach dem britischen Mathematiker S. Chapman (1888-1970) und dem russischen Mathematiker A.N. Kolmogorov (1903-1987). Die Chapman-Kolmogorov-Gleichungen gelten für jede Art von Markov-Ketten.

Stationäre Verteilungen sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Für endliche Markov-Ketten existiert immer eine stationäre Verteilung.

- iii. Die Eigenschaft der Ergodizität: Hierzu, sowie zur Angabe der Bedingungen, unter denen stationäre Verteilungen oder Grenzverteilungen in Markov-Ketten existieren, sind zunächst detaillierte Betrachtungen der Zustände und ihres Zusammenwirkens nötig.

Die Zustände einer Markov-Kette lassen sich hinsichtlich ihres möglichen Verhaltens wie folgt klassifizieren.

- Zustände, die nicht mehr verlassen werden können, werden *absorbierend* genannt oder auch *Rand des Zustandsraums*. Alle übrigen nicht-absorbierenden Zustände heißen *reflektierend*.
- Ein Zustand ist *rekurrent*, wenn er im weiteren Prozessverlauf mit Sicherheit (beliebig oft) wieder erreicht wird. Ist die Wahrscheinlichkeit hierfür  $< 1$ , so nennt man ihn *transient*. Bei rekurrenten Zuständen unterscheidet man zwischen (i) *positiv-rekurrenten* und (ii) *null-rekurrenten* Zuständen, je nachdem ob die mittlere Anzahl von Prozessschritten bis zur Rückkehr in diesen Zustand endlich ist oder unendlich.
- Einen (rekurrenten) Zustand nennt man *periodisch*, wenn eine Rückkehr in diesen Zustand nur nach einer bestimmten Anzahl von Prozessschritten – dem Vielfachen von  $\{2, 3, 4, \dots\}$  – möglich ist. Ein Zustand wird als *aperiodisch* bezeichnet, wenn seine Periode genau eins oder unendlich ist.

Unter Einbeziehung der zuvor genannten Zustandstypen gilt für Markov-Ketten Folgendes.

- Eine Markov-Kette ist *absorbierend*, wenn sie mindestens einen absorbierenden Zustand aufweist.
- Eine Markov-Kette heißt *rekurrent* bzw. *transient*, falls sämtliche Zustände rekurrent bzw. transient sind.<sup>21</sup>
- Eine Markov-Kette heißt *aperiodisch*, wenn sämtliche Zustände aperiodisch sind.
- Eine Markov-Kette ist *irreduzibel*, wenn von einem beliebigen Zustand ausgehend alle übrigen Zustände in einer endlichen Anzahl von Schritten erreichbar sind.
- Eine Markov-Kette heißt *ergodisch*, wenn sie irreduzibel, positiv-rekurrent und im Falle diskreter Zeit auch aperiodisch ist. In diesem Fall kann aus einer einzigen genügend langen Realisierung des Prozesses schon die gesamte Information über den Prozess gewonnen werden. Die ergodischen Markov-Ketten sind mithin für die Prozessanalyse von besonderer Bedeutung.

<sup>21</sup> Markov-Ketten können durchaus zugleich rekurrente und transiente Zustände haben. So weisen z.B. endliche Markov-Ketten – sofern sie nicht positiv-rekurrent sind – neben transienten mindestens auch einen positiv-rekurrenten Zustand auf.

Der Markovsche Ergodensatz besagt, dass jede (endliche und unendliche) ergodische Markov-Kette unabhängig von ihrem Startzustand in eine eindeutige stationäre Verteilung konvergiert, welche die Grenzverteilung ist. Nicht-ergodische Markov-Ketten (und stochastische Matrizen) haben grundsätzlich keine von der Anfangsverteilung unabhängige Grenzverteilung. Dies bedeutet, dass nicht-ergodische Markov-Ketten ggf. existierende stationäre Verteilungen<sup>22</sup> unter Umständen nur mit geeigneten Startwerten erreichen können.

### 3.2.2.2 Nicht-Markov-Methoden

Sofern ein Prozess keine Markov-Eigenschaft hat, gehört er zur Klasse der nicht-Markov-Prozesse. Die entsprechenden Systemmodelle beinhalten eine gedächtnisbehaftete Komponente – z.B. ein „Langzeitgedächtnis“. Im Vergleich zu Modellen mit Markov-Eigenschaft ist die Analyse solcher Systeme in der Regel wesentlich komplizierter. Die bedeutendsten Analysemethoden hierfür sind

- die eingebettete Markov-Kette,
- die Phasenmethode,
- die Mittelwertanalyse und
- die Analyse mittels selbstähnlichen Verkehrs.

Diese Methoden und einige weitere werden im Folgenden grob charakterisiert.

Sehr große Bedeutung und zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten hat die *Methode der eingebetteten Markov-Kette*. Ein Verkehrsmodell wird hierbei zu bestimmten (eingebetteten) Zeitpunkten betrachtet, an denen seine zukünftige Entwicklung nur vom gegenwärtigen Zustand abhängt. Die Folge der Zustände zu den eingebetteten Zeitpunkten bildet dann eine Markov-Kette. Mithin lässt sich das Verhalten des Verkehrsmodells an den eingebetteten Zeitpunkten durch eine Matrix der Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten, die eine bestimmte Blockstruktur aufweist, eindeutig bestimmen. Ein Analyseverfahren für Verkehrsmodelle, die auf einer eingebetteten Markov-Kette beruhen, ist die *Matrixanalytische Methode* (siehe Abschnitt 3.2.2.3).

Die *Phasenmethode* besteht aus dem Ersetzen von beliebig verteilten Zeitdauern durch phasenverteilte Intervalle, die einem Netzmodell aus gedächtnislosen Teilphasen entsprechen. Die Methode beruht auf der Tatsache, dass sich jede Verteilungsfunktion beliebig genau durch ein Netzmodell aus negativ-exponentiell verteilten – d.h. gedächtnislosen – Teilphasen darstellen lässt.<sup>23</sup> Eine momentan erreichte Teilphase repräsentiert dabei das Gedächtnis. Die

<sup>22</sup> Für irreduzible, positiv-rekurrenente, periodische Markov-Ketten existiert z.B. genau eine stationäre Verteilung.

<sup>23</sup> Gedächtnisbehaftete stochastische Prozesse lassen sich so als mehrdimensionale Markov-Prozesse auffassen.

Phasenmethode kann z.B. auf Ankunftsabstände oder Belegungsdauern angewendet werden. Zu beachten ist, dass der Zustandsraum hierbei stark anwachsen kann.

Mithilfe der *Mittelwertanalyse* (Mean Value Analysis, MVA [Reiser80]) lassen sich Leistungsgrößen auf der Basis von Mittelwerten berechnen, die über einen sehr langen Zeitraum gewonnen werden, bzw. durch Beobachtung endlich langer Intervalle und Verallgemeinerung auf „typisches Verhalten“. Es wird davon ausgegangen, dass ein ankommender Auftrag den stationären Systemzustand vorfindet. Anwendung finden dann das Little'sche Gesetz und das Theorem über die Verteilung der im System befindlichen Forderungen zum Ankunftszeitpunkt – Ankunftstheorem genannt. Die MVA ermöglicht die Realisierung von Analysealgorithmen für alle Warteschlangennetze, die das lokale Gleichgewicht erfüllen, also z.B. Bediensysteme wie das M/G/1-System mit allgemeiner Verteilung der Abfertigungsdauer. Neben relativ aufwändigen Algorithmen, die exakte Resultate liefern, wird häufig mit Näherungsverfahren gearbeitet, die hinreichende Genauigkeit bieten. Damit stellt die MVA eine Alternative zur Simulation dar und eignet sich insgesamt für ein weites Anwendungsfeld.

Eine große Gruppe von Methoden zur Analyse von nicht-Markov-Prozessen stützt sich auf den Gauß-Prozess<sup>24</sup>, der in der Praxis als Modell für zahlreiche räumliche oder zeitliche Abläufe dient. Gauß-Prozess wird ein stochastischer Prozess auf einer beliebigen Indexmenge (Parameterbereich) genannt, wenn es sich bei seinen (endlichdimensionalen) Verteilungen um (mehrdimensionale) Normalverteilungen handelt. Der Gauß-Prozess lässt sich als Verallgemeinerung der Gauß-Verteilung interpretieren. Er ist definiert durch eine Erwartungswertfunktion (häufig die Nullfunktion) und eine Kovarianzfunktion. Klassisches Beispiel für einen Gauß-Prozess ist die Brownsche Bewegung – ein zeitstetiger stochastischer Prozess (zur Familie der Markov-Prozesse gehörend) mit normalverteilten, stochastisch unabhängigen Zuwächsen, auch bekannt als Wiener-Prozess<sup>25</sup>. Der Wiener-Prozess ist eine zu jedem Zeitpunkt  $t$  normalverteilte Funktion mit Erwartungswert 0 und Varianz  $t$ . Da die Verteilung der Funktion bezüglich des Zeitparameters invariant ist, nennt man den Wiener-Prozess *skaleninvariant* oder *selbstähnlich* (*self similar*) (siehe z.B. [Hassler07]). Selbstähnliche Prozesse unterscheiden sich stark von solchen wie dem Poisson- oder dem generellen Erneuerungsprozess. So ist ein selbstähnlicher Verkehrsstrom beispielsweise im Sekundenbereich ähnlich gestaltet wie im Stundenbereich, während bei Poisson-artigem Verkehr vorhandene Lastbüschel bei einer derartigen Skalierung geglättet werden. Häufig werden mit Wiener-Prozessen stochastische Einflüsse auf ansonsten deterministische Systeme beschrieben. Dies ist legitim, solange die zufälligen Einflüsse stochastisch unabhängig sind (oder der zugrunde liegende nicht-Markov-Prozess ein sehr schwaches Gedächtnis hat).

<sup>24</sup> Benannt nach dem deutschen Mathematiker, Astronomen, Geodäten und Physiker J.C.F. Gauß (1777-1855).

<sup>25</sup> Benannt nach dem amerikanischen Mathematiker N. Wiener (1894-1964). Sehr oft wird der Begriff *Brownsche Bewegung* synonym für dieses stochastische Systemmodell verwendet.

Ein bewährtes Mittel, bei einem Wiener-Prozess zeitliche Abhängigkeiten zu berücksichtigen, ist das Konzept der *fraktalen Brownschen Bewegung*. Hierbei handelt es sich um die von Mandelbrot und van Ness entwickelte Verallgemeinerung des Wiener-Prozesses [Mandelbrot68]. Die fraktale Brownsche Bewegung hat stationäre, abhängige Zuwächse, sodass sie für die Analyse von nicht-Markov-Prozessen auf vielen Gebieten interessant ist, z.B. in Finanzmathematik oder Verkehrstheorie. Häufig wird dieser selbstähnliche Prozess als Modell für Verkehre mit Langfristabhängigkeit (LRD) verwendet.

Die Prozessdarstellung erfolgt in Trajektorien (Pfad), die im Falle der fraktalen Brownschen Bewegung stetig, aber nirgendwo differenzierbar sind. Die Kovarianzfunktion kann mit Hilfe des sogenannten Hurst-Parameters<sup>26</sup>  $H \in (0,1)$  verändert werden. Von besonderem Interesse sind Werte  $H > \frac{1}{2}$ , die eine Langzeitkorrelation kennzeichnen. Werte  $H < \frac{1}{2}$  lassen sich als Antikorrelation deuten. Für den Wiener-Prozess gilt  $H = \frac{1}{2}$ . Während er zur Gruppe der Markov-Prozesse zählt, handelt es sich bei fraktaler Brownscher Bewegung mit  $H \neq \frac{1}{2}$  stets um nicht-Markov-Prozesse. Der Zusammenhang mit der fraktalen Dimension  $d$  (Selbstähnlichkeit) ergibt sich aus  $d = 2 - H$ . In [Leland94] wurde nachgewiesen, dass Ethernet LAN-Verkehr statistisch selbstähnlich ist und dass der Grad der Selbstähnlichkeit (in Form von  $H$ ) typischerweise eine Funktion der Ethernet-Gesamtauslastung ist. Mithin stellt  $H$  ein Maß der Bündelhaftigkeit von selbstähnlichem Verkehr dar.

Im Bestreben, Systeme mit fehlender Markov-Eigenschaft möglichst genau analysieren zu können, wurden verschiedene Approximationsmethoden entwickelt. Die wichtigsten sind die *Fluidapproximation* und die *Diffusionsapproximation*. Erste Beschreibungen derartiger Verfahren finden sich z.B. in [Cox65] oder [Feller66]. Die Fluidapproximation verwendet als Ersatzmodell ein Flussmodell<sup>27</sup>, in dem der Verkehr durch einen kontinuierlichen Flüssigkeitsstrom mit zufallsabhängiger Intensität nachgebildet wird. Anwendung findet dieser Ansatz beispielsweise in der Verkehrsanalyse auf Büschelebene (siehe Abschnitt 3.1.1.5), wobei meist zeitkontinuierliche Zufallsvariablen die Größe der Verkehrsbüschel beschreiben. Die stochastische Qualität des Ausgangsproblems wird auf diese Weise vernachlässigt.

Bei der Diffusionsapproximation wird der stochastische Ursprungsprozess durch den (physikalischen) Prozess der Diffusion approximiert. Grundlage hierbei ist die Integration eines Gedächtnisterms in die den Diffusionsprozess beschreibende Fokker-Planck Gleichung<sup>28</sup>, sodass diese auch für einen nicht-Markovschen Prozess gültig wird.

<sup>26</sup> Kennzahl aus der Chaostheorie bzw. der Fraktalgeometrie, benannt nach dem englischen Hydrologen H.E. Hurst (1880-1978). Der Hurst-Parameter (auch Hurst-Exponent genannt) ist ein allgemeines Maß für das Gedächtnis eines Prozesses; er gibt eine skalierte Spannweite einer Zeitreihe an. In [Hurst65] wurde erstmalig belegt, dass sich damit statistische Zeitreihen realitätsnah beschreiben lassen.

<sup>27</sup> Gebräuchlich sind auch Bezeichnungen wie *Flüssigkeitsflussmodell* (*fluid flow model*) oder Uniform Arrival and Service Model.

<sup>28</sup> Partielle Differentialgleichung, die üblicherweise die räumlich-zeitliche Strömung in diffusen Gasen beschreibt. Sie entspricht der Kolmogorovschen Vorwärtsgleichung.

Für die Modellierung und Analyse von Systemen und Prozessen eignen sich auch *Petri-Netze*. Hierbei handelt es sich um graphisch ausgestaltete formale Konstrukte, mit denen sich diskrete, verteilte Systeme einschließlich Nebenläufigkeiten und Parallelitäten sehr gut modellieren lassen [Priese03]. Durch ihre Fähigkeit, nebenläufige Ereignisse darzustellen, verallgemeinern sie die Automatentheorie. Die ursprüngliche Form der Petri-Netze, auch Bedingungs- oder Ereignisnetz genannt, wurde von C.A. Petri in den 1960er Jahren definiert. Seitdem sind zahlreiche Erweiterungen eingeführt worden, z.B. zeiterweiterte und stochastische Petri-Netze. So verfügen zeiterweiterte Petri-Netze zusätzlich zu den zeitlosen Transitionen der klassischen Variante auch über solche, die beim Schalten Zeit benötigen. In stochastischen Petri-Netzen sind sämtliche Transitionen zeitbehaftet, wobei für die Schaltdauer eine exponentiell-verteilte Zufallsvariable verwendet wird. Die allgemeinen stochastischen Petri-Netze arbeiten im Gegensatz dazu mit beliebigen Schaltdauerverteilungen. Darüber hinaus existieren zahlreiche Mischformen mit deterministischen und stochastischen Schaltdauern.

Mit der praktischen Einführung diensteintegrierender Netze wurden deterministische Methoden zur Analyse des „ungünstigsten Falls“ entwickelt, aus denen in den 1990er Jahren der *Netzwerkkalkül* (*network calculus*) als Rahmenwerk für deterministische Gütegarantien in Kommunikationsnetzen hervorgegangen ist. Network Calculus basiert auf der Min-Plus Algebra (Min-Plus Dioid). Die zugrunde liegende Idee ist, mit Hilfe von Verkehrsbeschränkungen (Verkehrsregulierung, Scheduling, Zugangskontrolle) deterministische Dienstgütegarantien einzuhalten, z.B. hinsichtlich Übertragungsrate, Transferdauer oder Verlust [Cruz95], [LeBoudec01]. Mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Erweiterungen wird der Netzwerkkalkül auch für die Analyse von Paketnetzen und entsprechenden Warteschlangensystemen interessant. Dieser Ansatz befindet sich derzeit noch im Entwicklungsstadium.

Für bestimmte Fragestellungen kann es sinnvoll sein, analytische Lösung und Simulation zu kombinieren. Wird beispielsweise die Verweildauer eines Auftrags im Warteschlangensystem gesucht, und ist die Verteilung der Bediendauer bekannt, so kann die Warteschlange simuliert und mit der Bedienung analytisch kombiniert werden. Diese Vorgehensweise ist weit weniger rechenaufwändig und präziser als die Simulation des gesamten Warteschlangensystems.

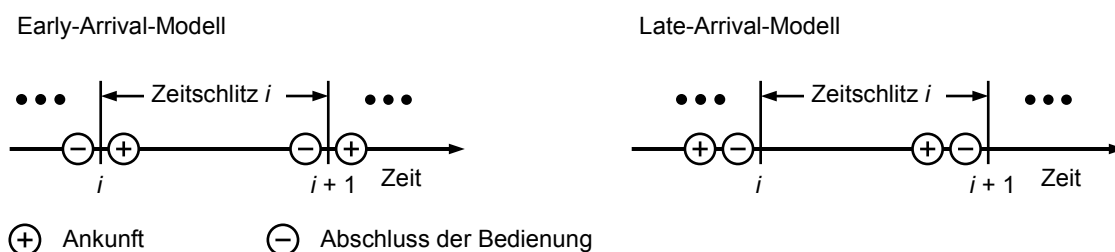
### 3.2.2.3 Zeitdiskrete Methoden

Bei der zeitdiskreten Modellierung von Bediensystemen wird grundsätzlich angenommen, dass die Zeit in feststehende, gleichlange Intervalle bzw. Zeitschlitze  $\Delta t$  eingeteilt ist. Diese äquidistanten Zeitpunkte auf der diskreten Zeitskala bilden die Indexmenge der zu analysierenden stochastischen Prozesse. Mithin sind die Zustandsprozesse in dieser Modellumgebung zeit- und zustandsdiskret. Bei den betrachteten Bediensystemen kommen Aufträge in den aufeinanderfolgenden Zeitschlitzen an, die Abfertigung beginnt und endet aber stets an Zeit-

schlitzgrenzen, d.h. der Bedienprozess erfolgt synchron zum gewählten Zeitraster. Daraus ergeben sich Abfertigungsdauern von ganzzahligen Vielfachen der Zeitschlitzlänge. Üblicherweise orientiert sich die diskrete Zeitskala an der Natur der zu modellierenden Anwendung, z.B. der Taktperiode eines Rechensystems, oder seiner Dateneinheiten fester Länge in einem Kommunikationskanal (Bits, Bytes, Zellen, ...). Bei hinreichend kurzen Zeitschlitzen können zeitdiskrete Warteschlangenmodelle auch als Approximation des entsprechenden Modells in kontinuierlicher Zeit dienen. Tatsächlich kann man Resultate für zeitkontinuierliche Systeme direkt aus den entsprechenden zeitdiskreten Größen gewinnen.

Während bei zeitkontinuierlichen Bediensystemen Zeitpunkte von Auftragsankunft und Bedienung praktisch niemals zusammen fallen, können bei zeitdiskreten Systemen beide Ereignisse durchaus im selben Zeitschlitz auftreten. Eine Möglichkeit des Umgangs mit dieser Situation besteht darin, die Auflösung der Zeitachse hinreichend fein zu wählen, damit z.B. Gruppenankünfte an einem  $M:1$ -Multiplexer als eine Folge von Einzelankünften darstellbar werden. Die Anzahl der Systemzustände begrenzt die analytische Untersuchung allerdings stark. Beispielhafte vergleichende Untersuchungen von Systemen mit der (zeitaufgelösten) Überlagerung von Zellenströmen ( $M \cdot \text{Geo}/D/1$ ) und Gruppenankunftssystemen ( $\text{Geo}^{[x]}/D/1$ ) haben gezeigt, dass der erhöhte analytische Aufwand zur verbesserten zeitlichen Auflösung gegenüber einer idealisierten Annahme synchroner Ankünfte keine nennenswerten Vorteile bei der Leistungsanalyse bringt [Hébuterne96].

Es bedarf aber einer Festlegung, in welcher Reihenfolge gleichzeitige Ereignisse wie z.B. Gruppenankünfte innerhalb eines Zeitschlitzes (und damit auch in der Abfolge von Zeitschlitzen) behandelt werden. Hunter, Takagi und Andere unterscheiden hierbei zwei Varianten [Hunter83], [Takagi93], sowie dort genannte Zitate. Treffen Forderungen unmittelbar zu Beginn von Zeitschlitzen ein, so spricht man von einem *Early-Arrival* (EA) System, **Bild 3.10**. Dieser Bezeichnung liegt die Betrachtung einzelner autonomer Zeitschlitze zugrunde, deren Grenzen zugleich Beobachtungszeitpunkte sind. Dementsprechend wird der andere Fall, bei



**Bild 3.10:** Modellierung der zeitlichen Abfolge von Zu- und Abgängen bei getakteten Bediensystemen. Die Bedienung von Aufträgen sei grundsätzlich am Ende von Zeitschlitzen abgeschlossen. Beim Early-Arrival-Modell (links) können Ankünfte unmittelbar nach dem Zeitschlitzwechsel auftreten, und werden im günstigsten Fall schon im Zeitschlitz der Ankunft bedient. Beim Late-Arrival-Modell (rechts) liegen die Ankunftszeitpunkte am Zeitschlitzende, sodass Aufträge stets über die Grenze des Ankunftszeitschlitzes hinaus auf den Servicebeginn warten müssen.



dem Ankünfte am Zeitschlitzende eintreffen, *Late-Arrival* (LA) System genannt.<sup>29</sup> Beim EA-Modell wird angenommen, dass der Bedienprozess unmittelbar nach dem Ankunftszeitpunkt einsetzen kann. Ein Auftrag, der bei seiner Ankunft ein leeres System vorfindet und direkten Zugang zur Bedieneinheit hat (*immediate access*), kann folglich sofort abgefertigt werden. Wenn ein Auftrag direkt in die Bedieneinheit gelangen kann, kommt dieses Modell im Extremfall ohne Warteraum außerhalb der Bedieneinheit aus, es gilt somit  $K \in \mathbb{N}$ .

Ein EA-Modell mit verzögertem Zugang zur Bedieneinheit eines leeren Systems (*delayed access*) widerspricht zum einen der Grundidee dieses Modells, dass nämlich Ankünfte möglichst schnell bearbeitet werden können. Zum anderen ergibt sich bei dieser Modellvariante eine konstante Verzögerung von einem Zeitschlitz zwischen Ankunft und frühestem Abfertigungsbeginn, was bei einer alternativen Verwendung des LA-Modells leicht berücksichtigt werden könnte (siehe unten; ein verzögerter Zugang würde das Modell in die LA-Variante überführen).

Ebenso wie beim EA-Modell beginnen Bedienprozesse auch beim LA-Modell am Anfang von Zeitschlitz und sind an einem Zeitschlitzende abgeschlossen (siehe z.B. [Bose02]). Die Ankünfte treten hier aber am Ende von Zeitschlitz auf, ggf. unmittelbar vor Abschluss des laufenden Bedienprozesses. Die Bedienung eines Auftrags kann also frühestens im Zeitschlitz nach seiner Ankunft beginnen (*delayed access*). Dies bedeutet, dass außerhalb der Bedieneinheit zumindest ein Warteplatz vorhanden sein muss, d.h.  $K \in \mathbb{N}^+$ . Die Zeitspanne zwischen Ankunft und Zeitschlitzgrenze wird bei dieser Betrachtung vernachlässigt, der Ankunftszeit-schlitz bleibt also bei der Bestimmung der Wartedauer unberücksichtigt.

Wenig Sinn ergibt die Behandlung des LA-Modells mit sofortigem Zugang zur Bedieneinheit [Hunter83], [Takagi93], weil der Bedienprozess dann entgegen der oben genannten Annahmen bereits am Zeitschlitzende beginnen würde, während sich im Übrigen ein Äquivalent zum EA-Modell ergäbe. Die Modellvarianten des sofortigen und verzögerten Zugangs zur Bedieneinheit in einem zuvor leerlaufenden System sind in der **Tabelle 3.4** gegenübergestellt.

Zu beachten ist, dass in der Literatur das LA-Modell auch in einer anderen Variante vorkommt, die sich von der hier verwendeten in folgendem Punkt unterscheidet. Die Zeitschlitzgrenzen werden dort zwischen die potenziellen Ankunfts- und Abgangszeitpunkte gelegt, so dass im Vergleich zum EA-Modell lediglich Ankunfts- und Abgangszeitpunkte vertauscht sind (siehe z.B. [Chaudhry97]). Am grundsätzlichen Umgang mit dem LA-Modell ändert dies nichts, allerdings ist der Systeminhalt an den Zeitschlitzgrenzen unterschiedlich.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Systeminhalts ist beim LA-Modell identisch zur Verteilung in einem zeitkontinuierlichen Modell, weil ein beliebig gewählter Beobachtungszeit-

<sup>29</sup> Ebenfalls üblich sind die Bezeichnungen *Departures-First* bzw. *Arrivals-First* System, die sich aus einer Fokussierung auf Zeitschlitzgrenzen und deren unmittelbaren Umgebung ergeben [Gravey92].

	Zugang	Early-Arrival-Modell	Late-Arrival-Modell
zur freien Bedieneinheit	sofort	Bei Ankunft im leeren System sofortiger Bedienbeginn	Betrachtung ist nicht sinnvoll (Bedienbeginn ist stets am Zeitschlitzanfang) <sup>30</sup>
	verzögert	Betrachtung ist kaum sinnvoll (Abfertigung verzögert sich konstant um einen Zeitschlitz)	Bei Ankunft im leeren System beginnt Abfertigung im anschließenden Zeitschlitz
zum nicht leeren Puffer	sofort	Nachbesetzung ist bei Ankunft (d.h. zu Beginn des aktuellen Bedienvorgangs) möglich	Nachbesetzung ist bei Ankunft (d.h. am Ende des aktuellen Bedienvorgangs) möglich
	verzögert	Bedienter Auftrag hinterlässt am Zeitschlitzende einen freien Wartepplatz, Nachbesetzung ist jedoch erst im darauf folgenden Zeitschlitz möglich	

**Tabelle 3.4:** Varianten für die Behandlung von Ankünften im leeren und (beliebig) gefüllten Bediensystem bei Anwendung des Late- bzw. Early-Arrival-Modells. Bei Ankünften im leeren System ist eine Differenzierung zwischen sofortigem und verzögertem Zugang zur Bedieneinheit kaum zweckmäßig. Ist der Warteraum begrenzt, so führt die Nachbesetzungsart frei werdender Wartepplätze zu jeweils zwei weiteren Modellvarianten.

punkt auf der kontinuierlichen Zeitachse nach deren Diskretisierung stets zwischen zwei Zeitschlitzgrenzen fällt, d.h. in einen Zeitschlitz. Im LA-Modell kann sich zwischen dem Beginn dieses Zeitschlitzes und dem zuvor erwähnten Beobachtungszeitpunkt am Systeminhalt nichts verändern; der Systemzustand bleibt also in diesem Intervall erhalten. Daher trifft für das LA-Modell die BASTA-Eigenschaft<sup>31</sup> zu, was sich bei der Leistungsanalyse ausnutzen lässt. Beim EA-Modell kann sich der Systeminhalt allerdings zwischen Zeitschlitzbeginn und beliebigem Beobachtungszeitpunkt (vor einem möglichen Bedienende) durch Ankünfte verändern, weshalb die BASTA-Eigenschaft hier nicht gilt.

Werden – wie in dieser Arbeit – Warteschlangen mit endlicher Kapazität betrachtet, ist es auch unerlässlich, das Betreten und Verlassen des Warteraums innerhalb eines Zeitschlitzes näher zu betrachten. Von großer Bedeutung ist der Prozess der Wartepplatznachbesetzung, wenn z.B. eine Ankunft einen voll besetzten Warteraum vorfindet, den ein bereits wartender Auftrag gleichzeitig zwecks Abfertigung verlässt. In [Schmookler70] wird beim EA-Modell<sup>32</sup> zwischen sofortiger und verzögerter Nachbesetzung unterschieden (*immediate/delayed replacement*). Takagi unterscheidet in [Takagi93] beim LA-Modell in gleicher Weise. In

<sup>30</sup> Beschrieben wird diese Systemvariante in [Hunter83], für das Gebiet der Kommunikationssysteme ist eine praktische Bedeutung jedoch kaum erkennbar [Takagi93].

<sup>31</sup> Analog zur PASTA-Eigenschaft (*Poisson-arrivals see time averages*) bei zeitkontinuierlichen Markov-Systemen existiert in zeitdiskreten Systemen die BASTA-Eigenschaft (*Bernoulli-arrivals see time averages*) [Takagi93], auch GASTA (*Geometric-arrivals see time averages*) genannt [Halfin83].

<sup>32</sup> Das dort verwendete Modell ist jedoch nicht explizit als EA-Modell ausgewiesen.

[Rego88] und [Takine88] werden die Prinzipien der verzögerten und sofortigen Wiederverwendung eines Warteplatzes als *Restricted* bzw. *Relaxed Buffer* bezeichnet.

Zusammenfassend ergeben sich für die Analyse zeitdiskreter Systeme mit unbegrenztem Warteraum zwei bedeutende Modelle: das LA-Modell mit verzögertem Zugang und das EA-Modell mit sofortigem Zugang zur (freien) Bedieneinheit. Ist der Warteraum endlich, so muss darüber hinaus bei beiden Modellen zwischen sofortiger und verzögerter Nachbesetzung unterschieden werden. **Tabelle 3.4** gibt hierzu eine Übersicht. Die Analysen in den Kapiteln 4 und 5 dieser Arbeit beruhen auf den resultierenden vier Modellvarianten, wobei die Bezeichnungen LA und EA stets *Delayed Access* bzw. *Immediate Access* implizieren<sup>33</sup>.

Bezüglich der Zeitpunkte, zu denen ein zeitdiskretes System von außen beobachtet wird, gilt Folgendes. Ein zeitdiskreter Prozess darf nur zu diskreten Zeitpunkten betrachtet werden. Für die Konstruktion der ggf. interessierenden Rückwärts- und Vorwärtsrekurrenzen<sup>34</sup> sind im diskreten Zeitbereich zwei verschiedene Festlegungen möglich: der Beobachtungszeitpunkt kann unmittelbar vor oder nach einem diskreten Zeitpunkt – z.B. der Zeitschlitzgrenze – liegen. Die beiden Betrachtungsweisen führen zu unterschiedlichen Rekurrenzzeitverteilungen [TranGia05].

Für die Leistungsbewertung von Bediensystemen wurden verschiedene Methoden entwickelt. Zwei Hauptrichtungen sind die *Matrixanalytische Methode*<sup>35</sup> (siehe z.B. [Neuts84]) und die *Transformationsmethode* (siehe [Kleinrock75] und [Takagi91] für zeitkontinuierliche bzw. [Bruneel93] und [Takagi93] für zeitdiskrete Analysen). Die erstgenannte Methode beschreibt das Warteschlangenproblem im stationären Fall in einer Matrixengleichung, für deren Lösung effiziente Algorithmen unter Ausnutzung der strukturellen Eigenschaften der betreffenden Matrix entwickelt wurden.<sup>36</sup> Die Theorie dieser bedeutenden methodischen Entwicklung zur Modellanalyse basiert auf Arbeiten von M.F. Neuts; umfassende Erläuterungen hierzu finden sich in [Neuts84] und [Lucantoni93]. Die Matrixanalytische Methode stellt eine Verallgemeinerung der Analysemethoden für Markovsche Prozesse dar. Es besteht somit auch ein Zusammenhang mit der Phasenmethode (siehe Abschnitt 3.2.2.2). Begrenzt wird die Anwendung allerdings häufig durch den mit zunehmender Systemkomplexität „explodierenden“ Zustandsraum. Eine Ausnahme bilden Fälle in denen es gelingt, für den verwendeten Parameterraum allgemeingültige Lösungen zu entwickeln.

Die Transformationsmethode bedient sich der erzeugenden Funktionen. Für viele wichtige zeitdiskrete Verteilungen (z.B. Geometrisch, Binomial, Poisson) existiert die erzeugende

---

<sup>33</sup> Auf Ausnahmen wird ggf. besonders hingewiesen.

<sup>34</sup> Vorwärtsrekurrenzzeit ist die Zeitspanne von einem zufälligen Beobachtungszeitpunkt  $t$  bis zum nächsten Ereigniszeitpunkt.

<sup>35</sup> Die Bezeichnung resultiert aus der matrizenorientierten Prozessbeschreibung und den entsprechenden Analyseverfahren. Gebräuchlich ist auch der Begriff *matrix-geometrische Methode*.

<sup>36</sup> Dies gilt auch für Analysen in kontinuierlicher Zeit.

Funktion in einfacher Gestalt. Nützlich ist hierbei der Umstand, dass die erzeugende Funktion einer Summe von zwei unabhängigen Zufallsvariablen gleich dem Produkt der erzeugenden Funktionen beider Zufallsvariablen ist. Der Übergang in den Transformationsbereich hat zur Folge, dass man von den interessierenden Zufallsvariablen, wie z.B. Systeminhalt oder Wartedauer, erzeugende Funktionen erhält, und nicht Wahrscheinlichkeits- oder Dichtefunktionen. Die momentenerzeugende Eigenschaft dieser Transformationen ermöglicht es dann, Leistungsgrößen wie Erwartungswerte oder Varianzen der Zufallsvariablen zu ermitteln [Michiel97], [Haßlinger99].<sup>37</sup> Ferner lassen sich mit Hilfe der Singularitätsanalyse Approximationsausdrücke für Extremwerte bestimmen. Wichtig für die numerische Auswertung sind mithin Transformationsmethoden für diskrete Zeitfunktionen, d.h. die Diskrete Fourier-Transformation (DFT) und die zugehörige schnelle Fourier-Transformation (FFT). Für die Klasse endlicher Verteilungen kann die DFT anstelle der  $z$ -Transformation verwendet werden. Entsprechend kann die inverse  $z$ -Transformation durch die diskrete Fourier-Rücktransformation ersetzt werden (Nutzung von Algorithmen aus der digitalen Signalverarbeitung) [TranGia05]. Weitere bedeutende Hilfsmittel – z.B. zur expliziten Pol- und Nullstellenbestimmung von erzeugenden Funktionen oder Transformaten – sind die Polynom- und die Wiener-Hopf-Faktorisierung [Haßlinger99], [TranGia05]. Beispielsweise kann die letztgenannte Methode zur zeitdiskreten Wartedaueranalyse von (unbegrenzten) GI/GI/1- und SMP/GI/1-Bedienssystemen angewendet werden [Haßlinger99], [TranGia00].

Allerdings kann auch die Transformationsmethode bei komplexen Warteschlangenproblemen leicht an ihre Grenzen stoßen. In solchen Fällen müssen zur Leistungsbewertung Simulationstechniken herangezogen werden (siehe Abschnitt 3.2.1).

Bei Leistungsanalysen von Bediensystemen ist es ein generelles Ziel, Ankunfts- und Abfertigungsprozesse möglichst realistisch nachzubilden. Eine wesentliche Rolle spielt somit das sorgfältige Erfassen und Modellieren der charakteristischen Merkmale des Verkehrsstroms, z.B. Verteilung der Zeitintervalle zwischen den Ankünften. Es handelt sich hierbei um die Eingangsgrößen des zu analysierenden Systemmodells; die gewonnenen Resultate sind folglich deren Funktionen. Für die Nachbildung der Verkehrslast kommen zahlreiche stochastische Modelle in Betracht (siehe z.B. [Kühn96]). Bei den zeitdiskreten Analysen reflektieren die Quellenmodelle das Auftreten von Ereignissen wie Zellenankunft und -abgang in Zeitschlitzten. Die wichtigsten diesbezüglichen Prozesse werden im Folgenden grob skizziert.

- Deterministischer Prozess (DP): Zellen treten äquidistant in festen (deterministischen) Zwischenankunftsintervallen von  $T_A = i \Delta t$  Zeitschlitzten auf,  $i \in \mathbb{N}^+$ , wobei die Zeitschlitzdauer  $\Delta t$  beliebig sein kann.

---

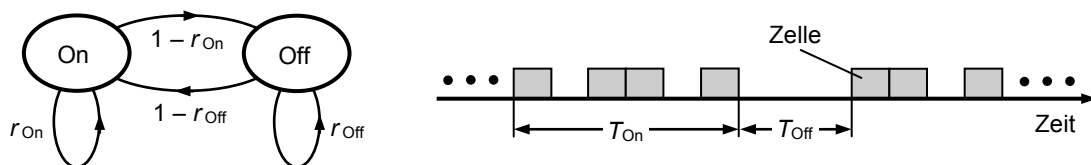
<sup>37</sup> Zurückzuführen ist die Bezeichnung *momentenerzeugende Funktion* auf die einfache Berechnungsmöglichkeit für Erwartungswerte und höhere Momente.

- Bernoulli-Prozess (BP): Zu jedem Auftrittszeitpunkt trifft eine Zelle mit konstanter Wahrscheinlichkeit  $r$  ein, und zwar unabhängig von vorherigen Zeitpunkten, d.h. der BP ist gedächtnislos. Das Zwischenankunftsintervall folgt damit der geometrischen Verteilung<sup>38</sup>. Häufig wird der BP zur Darstellung bzw. Charakterisierung gedächtnisloser Verkehrsströme eingesetzt. Er lässt sich leicht zum Gruppenankunftsprozess (*batch Bernoulli process*, BBP) erweitern. Dieser entspricht der Überlagerung  $n$  individueller und identischer BPs, die Anzahl der Ankünfte pro Zeitschlitz folgt dann der Binomialverteilung mit dem Mittelwert  $nr$ . Abhängig von der Wahl der Ereigniszeitpunkte lassen sich zwei gedächtnislose Prozesstypen angeben:  $P\{T_A = i \Delta t\} = r(1-r)^{i-1}$ ,  $i \in \mathbb{N}^+$  (Startwert 1); das Zwischenankunftsintervall  $T_A$  folgt hier der geometrischen Verteilung (Geo) mit dem Minimalwert von  $\Delta t = 1$  Zeitschlitz.  $P\{T_A = i \Delta t\} = r(1-r)^i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  (Startwert 0) mit einem Minimalwert von  $\Delta t = 0$  Zeitschlitzen. Welche Variante man *geometrische Verteilung* nennt, wird entweder vorab festgelegt, oder man wählt diejenige, die im konkreten Fall zweckmäßiger ist.
- Allgemein (*general*) modulierter deterministischer Prozess (GMDP): Dies ist ein doppelt stochastischer zeitdiskreter Punktprozess, bei dem die Intensität durch einen anderen stochastischen Prozess mit endlichem Zustandsraum gesteuert wird. Der steuernde Prozess heißt Generator- oder modulierender Prozess. Die Zustandsdauer des Generatorprozesses folgt einer allgemeinen Verteilung, und in jedem Zustand werden Zellen gemäß eines DP erzeugt. Charakteristisch sind hierbei einerseits die Verweildauern in den einzelnen Zuständen des modulierenden Prozesses, das Übergangsverhalten zwischen den Zuständen (Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten) sowie der jeweilige Ankunftsprozess in den einzelnen Zuständen (modulierter Prozess).
- Markov-modulierter deterministischer Prozess (MMDP): Dies ist ein bedeutender Spezialfall des GMDP, bei dem der Generatorprozess eine endliche zeitdiskrete Markov-Kette ist. Somit folgt die Aufenthaltsdauer des modulierenden Prozesses im jeweiligen Zustand einer geometrischen Verteilung. Häufig dient der MMDP als Quellenmodell für kombinierte Untersuchungen auf Zellen- und Büschelebene. Anstelle der deterministischen Zellenerzeugung wird oft auch ein BP verwendet, d.h. ein MMBP-Quellenmodell<sup>39</sup>. Die steuernde Markov-Kette ist hierbei vom BP stochastisch unabhängig. Ausführliche Darstellungen finden sich z.B. in [Fiedler98].
- Geschalteter (*switched*) deterministischer Prozess (SDP): Hierbei handelt es sich um den wichtigen Sonderfall eines MMDP mit zwei Zuständen. Das entsprechende Quellenmodell kennzeichnen Ankunftsraten  $\{\lambda_1, \lambda_2\} \neq 0$ .

<sup>38</sup> Dies ist die einzig mögliche diskrete gedächtnislose Verteilung.

<sup>39</sup> Der MMBP ist das zeitdiskrete Pendant zum MMPP.

- Unterbrochener (*interrupted*) deterministischer Prozess (IDP): Dies ist wiederum ein Spezialfall des SDP, wobei einer der beiden Zustände den Ruhezustand der Quelle (Off) darstellt. Ereignisse treten in diesem Zustand nicht auf. Der zweite Zustand (On) repräsentiert die aktive Phase, in der Zellen der Rate  $\lambda_{\text{On}}$  nach einem vorgegebenen Prozess generiert werden. Gebräuchlich für dieses Modell ist die Bezeichnung On-Off-Quelle.<sup>40</sup> Die Parametrisierung kann auf unterschiedliche Weise erfolgen, eine Möglichkeit zeigt **Bild 3.11**. Dabei sind  $T_{\text{On}}$  und  $T_{\text{Off}}$  Zufallsvariablen für die Dauer der Aktivitäts- bzw. Ruhephase in Zeitschlitzen. Die Wahrscheinlichkeit des Wechsels vom On- in den Off-Zustand beträgt hier  $r\{T_{\text{On}} = k\} = r_{\text{On}}^{k-1}(1 - r_{\text{On}})$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ . Analoges gilt für den Zustandswechsel in Gegenrichtung. Derartige Modelle eignen sich folglich zur Beschreibung von büschelartigem Verkehr. Zur Modellierung realer Quellen muss das Modell ggf. auf mehr als zwei Zustände erweitert werden.
- Zeitdiskreter Markovscher Ankunftsprozess (D-MAP): Dieser stochastische Prozess beruht auf einer endlichen zeitdiskreten Markov-Kette mit  $m$  Zuständen. Die Übergänge werden durch eine Übergangsmatrix gesteuert, deren Elemente aus Wahrscheinlichkeiten „Ankunft“ und „keine Ankunft“ bestehen. Ankunftsereignisse werden also bei Zustandsübergängen der Markov-Kette generiert, wobei die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gruppengröße vom Zustandsübergang abhängig ist. Entsprechend lässt sich der D-MAP zum zeitdiskreten Markovschen Gruppenankunftsprozess (D-BMAP) verallgemeinern.<sup>41</sup> Erstmals definiert wurde der D-BMAP in [Blondia92]; er kann eine Vielzahl von Ankunftsprozessen repräsentieren, wozu auch die Sonderfälle BP, MMBP und D-MAP (D-BMAP mit Gruppengröße 1) sowie deren Überlagerungen gehören. D-MAP und D-BMAP sind Semi-Markov-Prozesse. Die vielfältigen Konfigurierungsmöglichkeiten derartiger Prozesse erlauben eine Nachbildung komplexer Quellen, die der Realität recht nahe kommen [Herrmann01], [Gupta07], [Samanta07].
- Diskreter Erneuerungsprozess (DRP): Hier treten Ankünfte mit Zwischenankunftsintervallen auf, die voneinander unabhängig und identisch verteilt sind. Die Intervalle folgen somit einer generellen Verteilung.



**Bild 3.11:** Zustandsdiagramm einer On-Off-Quelle und Beispiel eines damit generierten Datenstroms.

<sup>40</sup> In der Literatur wird dieses Quellenmodell auch sporadische Quelle, Burst-Silence- oder Talkspurt-Silence-Modell genannt.

<sup>41</sup> Der D-BMAP-Prozess ist die zeitdiskrete Version des vielseitigen, von Neuts eingeführten Markovschen Punktprozesses [Neuts79], des N-Prozesses von Ramaswami [Ramaswami80] und des BMAP von Lucantoni [Lucantoni91], [Lucantoni93].

### 3.3 Stand der Wissenschaft und Technik

Zeitdiskrete Bediensysteme sind seit mehreren Dekaden Gegenstand der Forschung. Frühe Untersuchungen stammen unter anderem vom Meisling und Birdsall [Meisling58], [Birdsall62]. Auch Hunter betrachtet in [Hunter83] zeitdiskrete Warteschlangenmodelle. Zu den einschlägigen Monographien zählen [Bruneel93], [Woodward93], [Takagi93] sowie aus der jüngeren Vergangenheit [Daduna01] und [Vishnevskii06].

Der Kenntnisstand zu den Besonderheiten bei der Modellierung zeitdiskreter Systeme aufgrund der diskretisierten Zeitachse ist im Kapitel 3.2.2.3 dargelegt. Entsprechend der Modellhierarchie von Zellen-Multiplexern, wie sie im Abschnitt 3.1.3 eingeführt wurde, geben die folgenden Unterkapitel einen Überblick über den Kenntnisstand der zeitdiskreten Leistungsanalyse von Systemen

- mit eingangsseitigen Warteschlangen – im Allgemeinen Polling-Systeme genannt,
- mit Bedienpausen und Schwerpunkt auf den Sonderfall des Polling-Systems im TDM-Betrieb, sowie
- mit zentraler (d.h. ausgangsseitiger) Warteschlange und mehreren Zugängen bei dynamischer Verwaltung der Warteplätze.

Im Fokus stehen dabei Bediensysteme mit endlicher Warteraumkapazität und 1-begrenzter Abfertigung.

Alle betrachteten Systeme gleichermaßen betrifft die Modellierung des Verkehrs. Zunächst soll deshalb im nächsten Abschnitt eine grobe Übersicht zu den Ankunftsprozessen gegeben werden, die bei den publizierten Analysen von Zellen- bzw. Paket-Multiplexern in diskreter Zeit hauptsächlich Verwendung fanden.

#### 3.3.1 Verkehrsmodelle für den Zellentransport

Zur analytischen Behandlung der interessierenden Konfigurationen von Zellen-Multiplexern dient üblicherweise das Single-Server-Modell mit diskreter Bediendauer ( $\bullet/D/1$ -System) unter diversen Ankunftsprozessen. Entsprechend der Betrachtungs- bzw. Modellierungsebene kann man differenzieren zwischen Quellenmodellen für (i) die Büschelebene, (ii) die Zellenebene sowie (iii) die Kombination beider Ebenen [Roberts96] (siehe Abschnitt 3.1.1.5).

Analysen auf Büschelebene werden meistens im kontinuierlichen Zeitbereich durchgeführt (z.B. mit dem Flüssigkeitsflussansatz), da hierbei Langzeitabhängigkeiten (LRD, siehe auch Kapitel 3.1.1.5) stärker interessieren als die Übertragungsdauer einzelner Zellen. So werden zur Modellierung von IP-Verkehr Quellen auf der Basis selbstähnlicher Prozesse verwendet [Leland94], oder entsprechende On-Off-Quellen, beispielsweise mit Pareto-verteilter Büschel-

länge (Cox-Modell, M/Pareto-Modell [Cox84]). Dass durch Überlagerung unendlich vieler On-Off-Quellen (mit zunehmender Periodendauer) ein zeitdiskretes Modell mit LRD-Charakter entsteht, wird in [Daniëls97] gezeigt.

Kurzzeitabhängigkeiten (*short range dependency*, SRD) haben ihren Ursprung (naturgemäß) auf der Zellebene. Die entsprechenden Verkehrsmodelle für die Zellebene basieren meistens auf periodischen Einzelquellen (häufig BP). Für aggregierten Verkehr werden zum einen unabhängige, gleichartige periodische Einzelquellen überlagert (d.h. konstante Bitrate). Hierbei sind die ankommenden identischen Zellenströme zeitlich um zufällige Beträge versetzt, und die Zwischenankunftszeiten aufeinander folgender Zellen sind negativ korreliert [Roberts91a], [Hébuterne96], [Petersen97], [Mieghem06]. Zum anderen wird auch ein heterogener Mix von periodischen Quellen ( $\sum_i D_i$ ) verwendet, die sich durch individuelle Periodizitäten  $D_i$  auszeichnen [Eckberg79], [Petersen93], [Bažanowski95], mitunter auch Markovmodulierte Quellen [Roberts96] (siehe Kapitel 3.2.2.3). Ohne zeitlichen Versatz der Ankünfte

	Ankunftsprozess	Bemerkung	Charakteristische Referenzen
Zellebene	Deterministic Renewal Process (DRP)		[Hübner90], [Hébuterne96], [Hübner91], [Dor67], [Rudin71]
	$n \cdot D; \sum_i D_i$	Überlagerung $n$ unabhängiger identischer bzw. verschiedener periodischer Quellen	[Eckberg79], [Petersen93], [Bažanowski95], [Roberts96], [Daniëls97]
	Bernoulli Process (BP), Batch Bernoulli Process (BBP)	Kendallsche Notation: Geo bzw. Geo <sup>[X]</sup>	[Chiang02], [TranGia88b], [Hübner90], [Roberts91a], [Hébuterne96], [Petersen97], [Mieghem06], [Bruneel93], [Kruskal88], [Eckberg79]
	Shifted Generalized Geo (sGGeo)	Alternative zum BBP	[Fretwell02]
	General Independent Process (GI)		[Haßlinger95], [Chaudhry98], [Linwong04], [Laevens98]
Zellen- und Büschebene kombiniert	Markov Modulated Deterministic Process (MMDP)		[Laface05]
	Markov Modulated Bernoulli Process (MMBP) und MMBBP	zeitdiskretes Pendant zum MMPP	[Jou93], [Christl97], [Ng99], [Ulrich98]
	Interrupted Deterministic Process (IDP)	auch On-Off-, Burst-Silence- oder Talkspurt-Silence-Modell genannt	[Zhang92], [Ishizaki99], [Fiedler98]
	Interrupted Bernoulli Process (IBP)	zeitdiskretes Pendant zum IPP	[Bolla97], [Fiedler98], [Cosmas94]
	Discrete-time Markovian Arrival Process (D-MAP)	Semi-Markov-Prozess	[Chaudhry03], [Gupta07]
	Discrete-time Batch Markovian Arrival Process (D-BMAP)	Semi-Markov-Prozess, einschließlich D-MAP, BP, MMBP, d.h. auch relevant für die Zellebene	[Blondia92], [Samanta07], [Herrmann01], [Ishizaki02], [Kim02b]

**Tabelle 3.5:** Häufig verwendete Ankunftsprozesse für Analysen von Multiplexern in diskreter Zeit. Der obere Teil enthält Prozesse für eine Modellierung auf Zellebene. Die im unteren Teil zusammengestellten Prozesse zielen auf eine integrierte Modellierung von Zellen- und Büschebene ab.

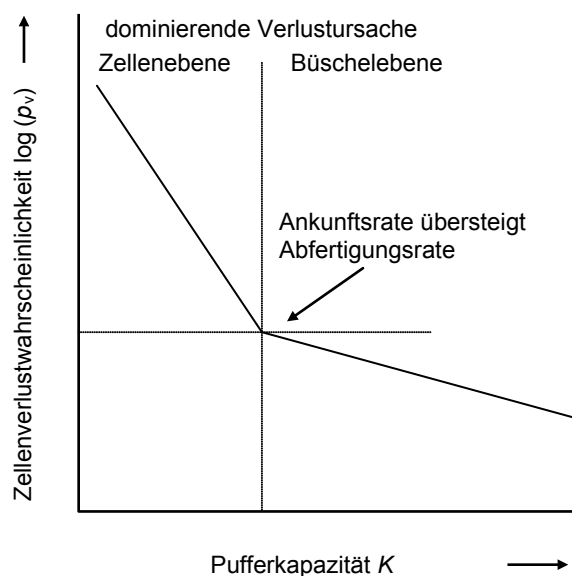


handelt es sich um Gruppenankünfte, die innerhalb eines Abfertigungsintervalls auftreten und deren Gruppengröße einer diskreten Verteilung folgt. Des Weiteren werden in zahlreichen Analysen spezielle zeitdiskrete Modelle verwendet, z.B. mit verschiedenen Prioritäts-Disziplinen [Brázio06], oder Superposition verschiedenartiger Ankunftsprozesse [Takine95]. Insgesamt üblich ist die Annahme, dass überlagerte heterogene Zellenströme ebenso wie Gruppenankünfte voneinander unabhängig sind.

Der BP eignet sich gut für Studien von zeitdiskreten Systemen und wird sehr häufig für Leistungsanalysen von Vermittlungssystemen eingesetzt [Robertazzi00]. Er beschreibt die Überlagerung von vielen individuellen Zellenankunftsprozessen (Verkehrswert  $< 1$ ) hinreichend gut<sup>42</sup>, solange keiner der einzelnen Ankunftsprozesse dominiert, und keine Selbstähnlichkeits-effekte vorhanden sind [Kühn96].

Die wichtigsten Ankunftsprozesse für zeitdiskrete Analysen auf Zellenebene fasst **Tabelle 3.5** zusammen, versehen mit Hinweisen auf entsprechende einschlägige Arbeiten. Auch für die kombinierte Betrachtung von Zellen- und Büschelebene gibt die Tabelle eine grobe Übersicht wichtiger Ankunftsprozesse. Eine Übersicht zu Quellenmodellen für die verschiedenen Verkehrstypen geben beispielsweise [Roberts96], [TranGia00], [Brázio06] und [Suri07].

Die zahlreichen Untersuchungen von Zellen-Multiplexern mit begrenzter Kapazität zeigen unter verschiedensten Annahmen und Verkehrslasten, dass die Zellenverlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Pufferkapazität einen charakteristischen Verlauf aufweist. Er setzt sich bei logarithmisch-linearer Darstellung gemäß **Bild 3.12** grob aus zwei Geradenabschnitten



**Bild 3.12:** Typisches Verhalten der Zellenverlustwahrscheinlichkeit (logarithmische Skala) in Abhängigkeit der (linear skalierten) Puffergröße [Roberts91b], [Boyer93], [Chandra03]. Bei geringer Pufferkapazität werden die Verluste hauptsächlich durch die Zellenebene bestimmt, während mit zunehmender Puffergröße primär Büscheeffekte den Pufferüberlauf verursachen.

<sup>42</sup> Die Überlagerung von Punktprozessen resultiert wiederum in einem Punktprozess.

zusammen [Roberts91b]. Der linke, steil verlaufende Bereich der Funktion ist durch den Verkehr auf Zellebene geprägt, d.h. durch die Dynamik simultaner Ankünfte von unabhängigen Quellen. Relevant ist dieser Effekt für kurze Warteschlangen bzw. geringen Warteraum. Der rechte Kurvenbereich mit geringerer Steigung resultiert aus der Zellenakkumulation im Puffer während solcher Phasen, in denen die überlagerten Ankünfte die Multiplexer-Kapazität übersteigen. Dieser Effekt ist der Büschelebene zuzuordnen. Er ruft in einem hinreichend großen Warteraum lange Warteschlangen hervor, wobei Fluktuationen auf Zellebene eine deutlich untergeordnete Rolle spielen [Mignault96]. Infolgedessen lässt sich mit Pufferung allein keine beliebig geringe Zellenverlustwahrscheinlichkeit erreichen. Vielmehr sind hierfür geeignete Entscheidungsmechanismen für die Verbindungsannahme erforderlich (siehe z.B. [Kühn96]).

Alles in allem stellt sich die gleichzeitige Betrachtung von Zellen- und Büschelebene an einem Multiplexer, wo eine Überlagerung von Verkehrsströmen stattfindet, als erhebliche Hürde heraus, an der viele analytisch exakte Betrachtungen scheitern [Fiedler98].

### 3.3.2 Wesentliche Ergebnisse der Klasse Polling-System

Bedeutende Anwendungsgebiete von Polling-Systemen sind die Daten- und die Telekommunikation sowie eine kaum überschaubare Anzahl weiterer Gebiete. Dementsprechend umfangreich ist die Literatur, die seit Erscheinen der ersten Leistungsanalysen solcher Systeme in den späten 1950er Jahren publiziert worden ist. Adressiert wurden zumeist zeitkontinuierliche Systeme unter verschiedenen Verkehrslastverhältnissen (symmetrisch, asymmetrisch) und oft unter Berücksichtigung von Umschaltintervallen zwischen den Abfragen einzelner Stationen. Prominente Beispiele sind [Konheim74], [Kühn79], [Cohen87]. Eine umfassende Übersicht zum diesem Gebiet geben [Takagi86], [Takagi90] und [Takagi97].

Die zeitdiskreten Varianten von Polling-Systemen sind hingegen bislang nur in sehr begrenztem Maße untersucht worden [Samanta07]. Gleichwohl haben auch derartige Analysen ein sehr breites Anwendungsgebiet und sind heute<sup>43</sup> allgemein anerkannt. Zeitdiskrete Warteschlangenmodelle ermöglichen akkuratere Aussagen zur Leistungsfähigkeit, wenn beispielsweise die relevanten Prozesse taktgesteuert sind oder mit Dateneinheiten fester Länge (Bits, Bytes, Zellen) arbeiten. Zeitdiskrete Polling-Systeme tauchten erstmals auf bei der Analyse des Problems von Überwachung und Reparatur mehrerer gleichartiger Maschinen durch einen Servicetechniker [Mack57]. Die meisten Studien von Polling-Systemen in diskreter Zeit gehen von zyklischer Abfertigung aus.

---

<sup>43</sup> Noch Mitte der 1980er Jahre wurde die Methode der Zeitdiskretisierung sehr skeptisch betrachtet (siehe beispielsweise [Fersch186]).

Ein großes Einsatzgebiet von Polling-Systemen stellen Ringnetze mit umlaufender Berechtigung (Token-Ring) oder mit Zeitraster (Slotted Ring) dar. Eine der ersten zeitdiskreten Analysen solcher Systeme stellten Konheim und Meister 1974 vor [Konheim74].<sup>44</sup>

Zeitdiskrete Systeme mit unbegrenztem Warteraum und zyklischer bzw. tabellengesteuerter Abfrage wurden in [Boxma88] und [Boxma90] analysiert. Eine geschlossene Lösung für Systeme mit zyklischer Abfrage sowie mit Abfertigung in Reihenfolge der Ankünfte präsentiert [Petersen93]. Polling in dynamischer Reihenfolge wird in [Fabian93] betrachtet.

Für die sehr viel kompliziertere Analyse der Systeme mit begrenztem Warteraum wurden größtenteils approximative Ansätze verwendet. Beispiele für die Untersuchung von Ringsystemen mit Zeitraster enthalten [Lee92] und [Jung92]. Des Weiteren wurden in [Ganz88] und [Ganz90] Token-basierte getaktete Systeme mit endlicher Anzahl von Stationen und Wartepätzen unter symmetrischer Last betrachtet. Ferner widmeten sich zahlreiche approximative Analysen dem Polling-System mit einer auf  $k$  Aufträge pro Warteschlange begrenzten Abfertigung ( $k$ -limited). Tran-Gia verwendet für seine Untersuchungen einen generellen Erneuerungs-Ankunftsprozess [TranGia92], während in [Jou93] und [Christl97] korrelierte Büschelankünfte angenommen werden, d.h. MMBP/D/1/K-Systeme. Weitere approximative Analysen finden sich beispielsweise in [Borst95] und [Dittmann93], wo Systeme mit Polling-Tabelle bzw. mit Torsteuerung und individuellen Limits unter zyklischer Abfrage behandelt werden. Ein Verfahren zur approximativen Analyse von Systemen mit endlichem Warteraum, unsymmetrischer Last und zyklischer Abfrage wird in [TranGia88a] präsentiert. Es basiert auf der Methode der eingebetteten Markov-Kette (siehe auch Kapitel 3.2.2.2). Gegenstand mehrerer Analysen waren ferner spezielle Systeme mit zwei Warteschlangen, verschiedenen Auftragsklassen, zustandsabhängiger Abfrage und  $k$ -begrenzter Polling-Strategie [Han94], [Stavrakakis97], [Winands09].

Im Gegensatz zu den zuvor genannten Arbeiten ist die Anzahl exakter Analysen von Abfragesystemen mit endlicher Pufferkapazität sehr überschaubar. Takagi untersuchte Systeme mit einzelnen Wartepätzen an den Eingängen [Takagi95], wobei symmetrische Last, unabhängige Ankünfte, zyklische Abfrage und Beobachtungszeitpunkte am Ende der Polling-Zyklen angenommen wurden. [Lee96] enthält für ein derartiges Polling-System unter asymmetrischer bzw. symmetrischer Last bei zufälliger Abfragereihenfolge eine exakte numerische Analyse. Für den sehr speziellen Fall zweier Warteschlangen mit je einem Wartepplatz finden sich exakte Ausdrücke der Warteschlangenlänge in [Dickey94]. In jüngerer Vergangenheit erschien in [Lin05] eine Simulationsstudie über eine Crossbar-Matrix, bestehend aus Multiplexer-Elementen mit einer beliebigen Anzahl einfach gepufferter Eingänge. Des Weiteren liefert

---

<sup>44</sup> Die zeitdiskreten Ergebnisse wurden durch Annäherung des Zeitintervalls  $\Delta t \rightarrow 0$  in den kontinuierlichen Zeitbereich übertragen.

[Menth04] einen Rahmen zur rekursiven numerischen Behandlung endlicher diskreter Markov-Modelle.

Mit dem Ziel, Analysen von Polling-Systemen – insbesondere jenen mit begrenztem Warte-  
raum – handhabbar zu gestalten, entstand durch Herauslösen eines Puffers mit Bedieneinheit  
aus der Gesamtanordnung ein einliniges Warteschlangenmodell. Hierbei werden die Phasen,  
in denen die Bedieneinheit aus Sicht der betrachteten Warteschlange alle weiteren Warte-  
schlangen des Gesamtsystems abfertigt, als (virtuelle) Bedienpausen modelliert (siehe  
Abschnitt 3.1.3.2). Neben einer Vielzahl zeitkontinuierlicher Analysen sind auch etliche  
zeitdiskrete Untersuchungen von Systemen mit begrenztem Warteraum publiziert worden.  
[Kang97] enthält z.B. eine Approximation der Zellenverlustwahrscheinlichkeit anhand eines  
zeitdiskreten Modells mit unabhängigen Ankünften, deterministischer Bediendauer und pe-  
riodischen Bedienpausen. Zeitdiskrete Analysen der D-MAP/G/1/K- und D-BMAP/G/1/K-  
Systeme mit begrenzter Abfertigung findet man ferner in [Gupta07] bzw. [Samanta07]. Einen  
umfassenden Überblick über die Analyse von Wartesystemen mit Bedienpausen geben  
[Doshi90], [Takagi93] und [Fiems04]; weitere zeitdiskrete Leistungsanalysen sind dort eben-  
falls zu finden. Fast immer handelt es sich bei den auf diesem Modelltyp beruhenden Untersu-  
chungen um approximative Analysen, weil sich die Bedienpausen in der Regel kaum exakt  
modellieren lassen. Eine Ausnahme bildet der Sonderfall des synchronen TDM-Betriebs, der  
unter bestimmten Voraussetzungen eine exakte Analyse erlaubt.

### 3.3.3 Wesentliche Ergebnisse zu Polling-Systemen im Zeitmultiplexbetrieb

TDMA ermöglicht es mehreren Teilnehmern bzw. Sendestationen, einen einzelnen Kommu-  
nikationskanal gemeinsam und ohne gegenseitige Beeinflussung zu benutzen, indem jedem  
Nutzer Zeitschlitzte fest zugewiesen werden. Konzipiert wurde TDMA ursprünglich für die  
digitale Satellitenkommunikation. Das Verfahren wird heute in unzähligen Bereichen verwen-  
det, unter anderem in der Telekommunikation. Dementsprechend wurden während der ver-  
gangenen vier Dekaden Systemmodelle in verschiedensten Varianten extensiv untersucht. So  
analysierten beispielsweise Rubin und Zhang in [Rubin91] die Warteschlangenlänge und die  
Wartedauer für ein leitungsvermittelndes TDMA-Modell mit unbegrenztem Puffer. Allerdings  
sind wegen der Komplexität exakter Analysen von Systemen mit endlichem Warteraum auch  
in diesem Fall erst wenige Resultate bekannt geworden [Neuts05].

[Birdsall62] und [Dor67] sind die ersten Arbeiten über zeitdiskrete endliche Warteschlangen  
in TDMA-Systemen (Multiplexern). Motiviert durch die Anwendung des TASI-Verfahrens  
(*time assignment speech interpolation*) auf transatlantischen Übertragungsstrecken wird in  
[Birdsall62] ein System mit endlichem Puffer, Gruppenankünften und Einzelabfertigung bei  
konstanter Bediendauer analysiert. [Dor67] präsentiert eine numerische Studie der Warte-

schlangenlänge für ein derartiges System, während [Clare83], [Shikata98] und [Neuts05] die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer ermitteln. Eine (numerische) Analyse der Pufferüberlauf-Wahrscheinlichkeit findet sich in [Hillier87], und in [Simonot95] wird neben der Einzelabfertigung auch die Abfertigung konstanter Gruppen betrachtet. Alle zitierten Untersuchungen gehen davon aus, dass die Anzahl der während eines Abfertigungszyklus (TDM-Rahmen konstanter Zeitdauer) eintreffenden Forderungen der Poisson-Verteilung folgt. Das Verkehrsmodell geht also von einer unendlichen Quellenanzahl aus. Analytische Resultate für diese Systemklasse unter Verkehrslasten, die sich auf eine beliebige (endliche) Quellenanzahl stützen, sind allerdings kaum verfügbar.

### 3.3.4 Wesentliche Ergebnisse der Klasse Zentralpuffer-System

Das ausgeprägteste Merkmal des Bediensystems mit zentralem Warteraum ist der Gruppenankunftsprozess. Zeitdiskrete Gruppenankunftssysteme wurden in relativ großer Zahl untersucht, meistens allerdings bei unbegrenztem Warteraum. Für den Fall endlicher Kapazität existieren größtenteils simulative, numerische und approximative Analysen. Sie wurden überwiegend für Multiplexer-Anwendungen in Koppелеlementen und Koppelnetzen zur Zellenvermittlung durchgeführt. Infolgedessen gehören Dateneinheiten fester Größe und eine konstante Bediendauer zu den gebräuchlichsten Annahmen. Ferner wird im Allgemeinen davon ausgegangen, dass die Mitglieder einer Gruppenankunft beim Betreten des gemeinsamen Warteraums eine zufällige Reihenfolge einnehmen, und dass Zellen verloren gehen, falls sie mangels freier Wartplätze nicht im System aufgenommen werden können. Typisch ist darüber hinaus die Annahme einer dynamischen Warteraumverwaltung mit dem Ziel, Pufferressourcen möglichst effizient zu nutzen.

Die bekannt gewordenen Analysen von Zellen-Multiplexern mit unbegrenztem Warteraum gehen in der Regel von überlagerten Eingangsströmen oder von Poisson- bzw. geometrischen Ankunftsprozessen aus [Bruneel93], [Roberts96]. Dementsprechend wurden für die Leistungsuntersuchung neben dem klassischen M/D/1-Warteschlangenmodell auch Geo/D/1-, Geo<sup>[X]</sup>/D/1- und M•Geo/D/1-Modelle verwendet [Eckberg79], [Karol87], [Kruskal88], [Roberts91a], [Norros91], [Bruneel93], [Roberts96], [Petersen97]. Während üblicherweise symmetrischer Verkehr angenommen wurde, ist in [Bażanowski95] ein Multiplexer mit unterschiedlicher Verkehrslast an den Eingängen zum zentralen Warteraum analysiert worden.

Bei den publizierten Analysen von Multiplexern mit endlichem Warteraum und konstanter Bediendauer werden im Folgenden die Arbeiten nach Art der verwendeten Zellenankunftsprozesse unterschieden. Zahlreiche numerische Analysen des •/D/1/K-Modells basieren auf der Annahme überlagerten Ankunftsströme. So werden in [Hübner90] und [Hübner91] die einzelnen Verkehrsströme durch Erneuerungsprozesse mit deterministischen Zwischenankunfts-

tervallen modelliert. Häufiger verwendet werden Markov-modulierte Ankunftsprozesse. In [Ng99] werden MMBP-Quellen benutzt, um verschiedene Lösungsansätze für die numerische Ermittlung der Zellenverlustwahrscheinlichkeit zu vergleichen. Eine Analyse der Zellenverluste aus MMPP-Quellen liefert [Baiocchi91], wobei das Verkehrsmodell (in kontinuierlicher Zeit) Zellen- und Büschelebene gleichermaßen abdecken soll. Ferner finden sich in [Zhang92] und [Ishizaki99] Zellenverlustanalysen unter Verwendung von überlagerten heterogenen On-Off-Quellen.

Erste numerische Studien von Gruppenankunftssystemen des Typs  $D^{[G]}/D/1/K$  mit endlichem Puffer und konstanter Servicedauer wurden bereits in den späten 1960er Jahren in [Dor67] publiziert. In [Rudin71] und [Hébuterne96] findet man numerische Untersuchungen der  $Geo^{[X]}/D/1/K$ -Warteschlange, und [TranGia88b] stellt eine numerische Methode zur Analyse dieses Systems bei allgemeiner Verteilung der Gruppengröße bereit. Weitere numerische Lösungen für die Verteilung der Warteschlangenlänge sowie für die Zellenverlustwahrscheinlichkeit sind auch in [Hluchyj88] zu finden. Darüber hinaus widmen sich etliche Publikationen wie [Schulzrinne91], [Schulzrinne92], [Kouvatsos95], [Takine95], [Moltchanov03], [Lee97] und [Fretwell02] dem Zellenverlustprozess in zeitdiskreten einlinigen Bediensystemen mit endlichem Warteraum und deterministischer Abfertigungsdauer, wobei Gruppenankunftsmodelle verschiedener Komplexität verwendet wurden. Für den Sonderfall eines Systems mit  $M = 2$  Eingängen und Bernoulli-Quellen findet sich eine exakte Analyse in [Chiang02], während [Dickey94] eine explizite Lösung des Einzelfalls zweier Warteplätze liefert. Des Weiteren enthält [Choi98] einen Ansatz zur numerischen Analyse des Multiplexers unter einer gemischten, gleichförmigen und büschelförmigen Verkehrslast, generiert von Bernoulli- sowie On-Off-Quellen. Eine Verallgemeinerung hierzu mit heterogenen MAP-Quellen wird in [Kim02b] vorgenommen.

Eine Methode zur numerischen Analyse von  $MMBP^{[X]}/D/1/K$ -Systemen wird in [Ulrich98] aufgezeigt. Ferner behandelt Fiedler den Multiplexer mit endlicher Kapazität unter verschiedenen Annahmen, hauptsächlich mit überlagerten On-Off-Quellen [Fiedler98].<sup>45</sup> Schließlich präsentiert Ishizaki für Gruppenankunftssysteme nach dem EA-Modell eine Methode zur numerischen  $D-BMAP_n/D/1/K$ -Warteschlangenanalyse, die beispielsweise auch auf die in [Kang97], [Choi98] und [Ishizaki99] verwendeten Ankunftsmodelle anwendbar ist [Ishizaki02].

Darüber hinaus sind Gruppenankunftssysteme mit endlichem Warteraum auch für unterschiedliche Bediendauerverteilungen analysiert worden. Chaudhry et al. analysieren beispielsweise in [Chaudhry98] die  $GI^{[X]}/Geo/1/K$ -Warteschlange in der Late-Arrival-Variante ebenso

<sup>45</sup> Wegen der allgemeinen Nutzung der Pufferressourcen für sämtliche Ankünfte wird der Multiplexer dort als *dynamisch* bezeichnet und vom statischen Typ unterschieden, bei dem die Warteplätze den Multiplexer-Eingängen nach einem Schema fest zugeordnet sind (siehe auch Abschnitt 3.1.3.3).

wie im Early-Arrival-Fall. Für das  $GI^{[X]}/G/1/K$ -System mit genereller Verteilung der Bedienungsdauer präsentiert [Linwong04] eine Approximation der Verlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Warteraumkapazität. Ein Ansatz zur Matrix-algebraischen Behandlung solcher Systeme durch günstige Anordnung der Übergangswahrscheinlichkeiten in der Zustandsübergangsmatrix wird in [Alfa03] vorgestellt. Ferner analysiert Herrmann das D-BMAP/G/1/K-System umfassend in [Herrmann01], während sich in [Chaudhry03] numerische Resultate der Warteschlangenlänge für dieses System unter dem D-MAP-Ankunftsprozess finden.

Weitere Arbeiten setzen sich mit Zusammenhängen von Leistungsgrößen bei unbegrenztem und begrenztem Warteraum bzw. bei Verwendung unterschiedlicher Modelle dieser Systemklasse auseinander [Bisdikian93], [Ishizaki99], [Kim02a].

### 3.4 Offene Fragen

Zellen-Multiplexer mit endlichem Warteraum sind in diskreter Zeit noch nicht ausgiebig untersucht. Verfügbar sind überwiegend Simulationsergebnisse sowie approximative und numerische Resultate, während geschlossene Lösungen kaum existieren. Dies gilt für Polling- und TDM-Systeme ebenso wie für den Multiplexer-Typ mit Zentralpufferarchitektur. Die Ursachen hierfür sind im Detail vielgestaltig, eine insgesamt wesentliche Rolle spielt die Komplexität der analytischen Modelle. Diese resultiert maßgeblich aus der Modellierung (i) der Ereignisse innerhalb einzelner Zeitschlitze (z.B. Ankünfte, Abfertigungsbeginn, Neubesetzung von Wartepätzen), (ii) des Pufferüberlaufs bei begrenztem Warteraum sowie (iii) der Verkehrsquellen für die betrachtete Aktivitätsebene der Kommunikation.

Die bekannt gewordenen Analysen stammen überwiegend aus Untersuchungen zu ATM-Netzen [Roberts96], [Fiedler98].<sup>46</sup> Infolgedessen standen Fragestellungen bezüglich Admission Control, statistischem Multiplexgewinn etc. im Vordergrund, und somit das Bestreben, für die Untersuchungen möglichst realistische Modelle von Verkehrsströmen aus der Telekommunikation zu verwenden. Allein derartige Quellenmodelle bestimmen schon maßgeblich den Komplexitätsgrad von Multiplexer-Modellen und gestalten selbst in den einfacheren Fällen homogenen Verkehrs exakte Analysen sehr schwierig. So sind, abgesehen von einigen Sonderfällen, nahezu immer Approximationen erforderlich. Zuzuschreiben sind die Schwierigkeiten den auf zwei unterschiedlichen Zeitskalen existierenden Korrelationen: einer negativen Korrelation auf der Kurzzeitskala (Zellenebene) aufgrund periodischer Zellenauftitte innerhalb der einzelnen Zellenbüschel, und einer positiven Langfrist-Korrelation der Ankünfte von Zellenbüscheln (Büschelebene). Diese Korrelationen führen im Falle überlagerter Verkehrsquellen zu dem in **Bild 3.12** dargestellten charakteristischen Kurvenverlauf der Zellenverlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Warteraumkapazität.

<sup>46</sup> In der einschlägigen Literatur ist eine Vielzahl weiterer Quellen verfügbar.

Insofern wurde die von vornherein schwierige Aufgabe der zeitdiskreten Analyse von Zellen-Multiplexern unter büschelartiger Verkehrslast in der Fachliteratur nicht mit weiteren verkomplizierenden Randbedingungen (z.B. Ereigniszeitpunkte, Pufferüberlauf) befrachtet. Typisch sind diverse Approximationen und vereinfachende Annahmen, wie z.B. unbegrenzter Warteraum anstelle von endlichem. In dieser Arbeit wird ein alternativer Ansatz verfolgt, der die relevanten Modellaspekte möglichst umfassend einbezieht. Um das Systemmodell dennoch analytisch handhaben zu können, werden die Untersuchungen ausschließlich auf Zellen-ebene mit einem relativ einfachen Verkehrsmodell durchgeführt.

Ein Themenkomplex mit offenen Fragen ist die Behandlung gleichzeitiger Ereignisse. So offenbart die einschlägige Literatur [Takagi93], [Bose02], [Chaudhry97] beispielsweise, dass bei den Basismodellen zur Analyse zeitdiskreter Bediensysteme (EA- und LA-Modell) kein völlig einheitliches Verständnis über die Festlegung der Zeitpunkte von Auftragsankünften und -abgängen existiert. Weitere Fragen resultieren aus der begrenzten Pufferkapazität, wie z.B. die Behandlung von Ankünften an einem vollständig belegten Puffer bei gleichzeitigem Servicebeginn eines wartenden Auftrags. Nur in sehr wenigen Arbeiten ist eine exakte Modellierung von Multiplexern mit endlichem Warteraum zu finden – und stets nur für eine von mehreren möglichen Varianten der zeitlichen Behandlung von Auftragsankünften, Abfertigungsbeginn und Wiederverwendung frei gewordener Warteplätze (LA, EA, IR, DR). Selbst bei Annahme einfacher Ankunftsprozesse sind unter systematischer Beachtung der gleichzeitig auftretenden Ereignisse kaum geschlossene Lösungen verfügbar. Ausführungen zur Systematik der Ereigniszeitpunkte enthält Abschnitt 3.2.2.3.

Unklar ist bislang auch, welche der möglichen Modellalternativen eine bessere mathematische Handhabbarkeit verspricht. Hier knüpft die Frage an, inwieweit sich aus den leistungsbeschreibenden Parametern eines bestimmten Multiplexer-Modells Kennwerte für alternative Modelle gewinnen lassen. Über die Zusammenhänge der auf unterschiedlichen zeitdiskreten Modellen basierenden Analysen von Bediensystemen ist trotz einiger vorhandener Publikationen ([Gravey92], [Kouvatsos94], [Kim02a], [Miyoshi02], [Kim04], [Dattatreya05]) insgesamt erst wenig bekannt.

Weitere offene Fragen betreffen die Multiplexer-Architekturen mit beliebigem endlichem Warteraum im Einzelnen. So ist bei Polling-Systemen unklar, wie stark unterschiedliche (faire) Abfragedisziplinen auf den erreichbaren Durchsatz Einfluss nehmen. Des Weiteren wurden Multiplexer im Zeitmultiplexbetrieb fast ausschließlich unter Poisson-verteilter Verkehrslast analysiert. Exakte Resultate für die wesentlichen Leistungskenngrößen (Warteschlangenlänge, Verteilung der Wartedauerwahrscheinlichkeit, Zellenverlustwahrscheinlichkeit) auf der Basis einer beliebigen (endlichen) Quellenanzahl sind folglich nicht verfügbar. Auch für den Multiplexer mit Zentralpufferarchitektur sind geschlossene Lösungen, z.B. für die Wartedauerverteilung und Verlustwahrscheinlichkeit, nur für wenige Sonderfälle bekannt.



Schließlich fehlen auch quantitative Leistungsvergleiche der verschiedenen Ausführungsformen von Zellen-Multiplexern.

Vor diesem Hintergrund widmen sich die zwei folgenden Kapitel dieser Arbeit der exakten und systematischen Leistungsanalyse von Zellen-Multiplexern. Durchgeführt werden die Untersuchungen auf Zellenebene in diskreter Zeit und unter der Annahme eines relativ einfachen, aber analytisch meistens handhabbaren Verkehrsmodells, mit dem sich geschlossene Lösungen für viele Leistungsgrößen ermitteln lassen. Die Ergebnisse können unter anderem auch als Referenz für den Leistungsvergleich bei unterschiedlichen Verkehrsannahmen, Abfertigungsdisziplinen usw. dienen.



## Kapitel 4

# Leistungsfähigkeit von Zellen-Multiplexern des Polling-Typs

### 4.1 Annahmen für die Analyse in diskreter Zeit

Ziel dieses Kapitels ist die Leistungsanalyse von Zellen-Multiplexern mit begrenzten eingangsseitigen Puffern unter verschiedenen (fairen) Betriebsweisen des Multiplexens. Hierfür wird der Multiplexer auf Zellenebene als Polling-System aufgefasst und als Ganzes betrachtet. Dies ermöglicht es, den Einfluss der betrachteten Betriebsarten auf die Leistungsfähigkeit des Systems exakt zu quantifizieren. Allerdings erfordert eine Gesamtsicht auf das Polling-Bediensystem vereinfachende Annahmen, die das System-Modell analytisch handhabbar machen. Hier muss ein geeigneter Kompromiss eingegangen werden, bei dem die praxisrelevanten Randbedingungen möglichst weitgehend erhalten bleiben. Angenommen wird ein Polling-System, dessen Kenngrößen nicht von individuellen Stationen abhängen. Symmetrie bzw. Gleichartigkeit herrsche in folgenden Punkten:

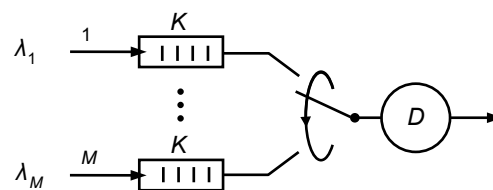
- Die Kapazität der Puffer an den Eingängen ist identisch und beträgt  $K \in \mathbb{N}$  Zellen. Die Bedieneinheit hat keine Pufferfunktion, d.h. sie ist beim Zeitschlitzwechsel stets leer.
- Die Zellen haben eine einheitliche und unveränderliche Größe.
- Die Verkehre sind gleichartig.
- Ankünfte treten an den Systemeingängen synchron auf.<sup>1</sup>
- Ankünfte, die mangels Warteraum nicht aufgenommen werden können (Pufferüberlauf), gehen verloren.
- Die Warteschlangendisziplin ist für alle Puffer einheitlich FCFS.
- Es wird stets 1-begrenzte Abfertigung angenommen.

---

<sup>1</sup> Diese Annahme ist nicht bei allen verwendeten Analysemodellen notwendig.

Die FCFS-Warteschlangendisziplin bewirkt, dass die zeitliche Reihenfolge der Zellen gleichen Ursprungs erhalten bleibt.<sup>2</sup> Dies erleichtert z.B. am Ziel das Reassemblieren, falls die Zellen Bestandteil größerer Datenpakete sind. Andere Szenarien, die beispielsweise „Überholvorgänge“ innerhalb einer Warteschlange zulassen, werden in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet. Bei der FCFS-Warteschlange kommen zur Abfertigung nur Aufträge vom Kopf der Warteschlangen in Betracht, sodass mit der Warteschlangenauswahl zugleich auch der abzufertigende Auftrag feststeht. Verschiedene Disziplinen der Warteschlangenauswahl (Interqueue-Disziplinen) werden in den Analysen betrachtet.

Die getroffenen Annahmen und die daraus resultierenden Bediendisziplinen sind für Schaltanordnungen, Multiplex-Systeme usw. relevant. Das Systemmodell ist in **Bild 4.1** dargestellt.



**Bild 4.1:** Zellen-Multiplexer des Polling-Typs mit  $M$  identisch ausgelasteten Warteschlangen endlicher Kapazität  $K$ .  $\lambda_1 \dots \lambda_M$  bezeichnen die Ankunftsraten von Forderungen in einem beliebigen Zeitschlitz. Die Warteschlangenabfrage erfolgt entsprechend einer Abfragedisziplin durch die Bedieneinheit. Der Service ist beschränkt auf eine Forderung pro Warteschlange.

Für die Analyse wird die Zeitachse in äquidistante Zeitschlitze eingeteilt, d.h. in Abschnitte, die der konstanten Übertragungsdauer einer Zelle entsprechen. Auch die Abfertigung einer Zelle, d.h. deren Auswahl aus einer der Warteschlangen sowie ihr Transport zum Multiplexer-Ausgang, erfolgt innerhalb eines Zeitschlitzes. Der Zeitschlitz  $i$  ist gekennzeichnet durch das Zeitsegment  $\{i, i+1\}$  von der Dauer  $\Delta t$ . Der absolute Betrag hängt ab von der (konstanten) Zellengröße  $k \in \mathbb{N}^+$  (Anzahl von Dateneinheiten, z.B. Bit oder Byte) und der Übertragungsrate  $v$  (Dateneinheiten pro Zeiteinheit) auf den Zubringer- bzw. Abnehmerleitungen. Für die Zellenebene ergeben sich daraus Zeitschlitze vom Betrag  $\Delta t = k/v$ . Für die Analysen in dieser Arbeit wird die Zeitschlitzdauer  $\Delta t$  als Bezugsgröße verwendet, soweit dies angebracht ist.

Die zeitliche Lage der Abschnitte auf der Zeitachse wird derart gewählt, dass sich das System an den Zeitschlitzgrenzen in einem quasi-stationären Zustand befindet. Die Zeitschlitzgrenzen dienen für die Leistungsanalysen zugleich als Beobachtungszeitpunkte. Ankünfte treten hierbei am Anfang oder am Ende von Zeitschlitzen auf, entsprechend der EA- bzw. LA-Modelle. Der Service einer Zelle beginnt stets am Zeitschlitzanfang und ist am Ende desselben Zeitschlitzes abgeschlossen. Im nachfolgenden Zeitschlitz findet bei diesem *Ordinary Service* ggf. erneut ein Bedienprozess statt. Umschaltzeiten für den Wechsel der Bedieneinheit von einer Warteschlange zur nächsten werden vernachlässigt bzw. als fester Bestandteil der Zeitschlitzes

<sup>2</sup> Erhalten bleibt also die Zellenreihenfolge sämtlicher Verbindungen.

angesehen – sowohl im Falle der Bedienung als auch bei purer Weiterschaltung von einer Warteschlange zu einer beliebigen anderen. Die Bedieneinheit unterliegt keinerlei blockierenden Einflüssen von außen, z.B. hervorgerufen durch Backpressure-Mechanismen, wie sie mitunter in mehrstufigen Systemen Anwendung finden.

Primäres Ziel der Analysen in den folgenden Abschnitten ist die Ermittlung der Leerlaufwahrscheinlichkeit des Systems, weil sich mit Hilfe dieser Basisgröße viele weitere Systemkenngrößen relativ einfach ermitteln lassen. Sehr wichtig und aufschlussreich ist ferner die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer, weshalb diese im Rahmen der folgenden Analysen ebenfalls behandelt wird. Hinter der Auswahl des Verkehrsmodells steht die Absicht, eine gewisse Anwendungsbreite zu repräsentieren. In diesem Sinne wurde als Ankunftsprozess bewusst das Bernoulli-Modell gewählt, das beispielsweise die Büschelhaftigkeit des Verkehrs in der Telekommunikation nicht in den Vordergrund stellt. Die Zufallsvariable  $A$  definiere die Anzahl der Aufträge, d.h. Zellen, die in einem beliebigen Zeitschlitz eintreffen. Es wird angenommen, dass die Ankünfte an den  $M$  Eingängen von unabhängigen Quellen stammen, charakterisiert durch Bernoulli-Prozesse. Daraus resultiert in beliebigen Zeitschlitz  $\Delta t$  eine Auftrittswahrscheinlichkeit  $p = \lambda \Delta t / M$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , und die Verkehrslast erfüllt damit die Stabilitätsbedingung des Systems [Takagi00]. Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $A$  gilt im Falle identischer Verkehrslast an allen Eingängen

$$a_k = P\{A = k\} = \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k}, \quad k = 0, 1, \dots, M. \quad (4.1)$$

Die Summen-Eingangslast in einem beliebigen Zeitschlitz  $\Delta t$ , zu gleichen Teilen zusammengesetzt aus den  $M$  Ankunftsrate  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M\}$ , ist dann gegeben mit  $E[A] = \sum_{i=0}^M i a_i = \lambda \Delta t$ . Die Anzahl der Zeitschlitz zwischen den Ankünften (Zwischenankunftsintervall) ist hierbei geometrisch verteilt, d.h. der Ankunftsprozess ist gedächtnislos (siehe z.B. [TranGia05]).

So weit wie möglich wird in den Analysen mit dem allgemeinen Parameter  $a_k$  für eine generelle Ankunftsgruppengröße gearbeitet. Den Ausgangspunkt der Analysen bildet die Ermittlung der Systemauslastung  $\rho$  an den Zeitschlitzgrenzen. Es sei angemerkt, dass die Bedieneinheit zu diesen Beobachtungszeitpunkten stets leer ist, weil ein ggf. zuvor abgefertigter Auftrag das System am Zeitschlitzende verlassen hat und ein neuer Bedienprozess frühestens im nächsten Zeitschlitz beginnen kann.

## 4.2 Modelle für die Analyse

Entsprechend der Diskussion in Kapitel 3.2.2.3 sind für die zeitdiskrete Analyse von Bediensystemen mit begrenztem Warteraum vier unterschiedliche Modelle von Interesse: das LA-Modell mit verzögertem und das EA-Modell mit sofortigem Zugang zur Bedieneinheit (Bedienbeginn), und zwar in beiden Varianten mit sofortiger und verzögerter Nachbesetzung ge-

rade frei werdender Warteplätze. Für die Anwendung dieser Modelle auf Multiwarteschlangen-Bediensysteme – hier des Polling-Typs – empfiehlt sich eine weitere Gliederung anhand von Randbedingungen wie der Interqueue-Disziplin und der Warteschlangenkapazität.

Die Anzahl der Forderungen in einem Bediensystem bzw. einer Warteschlange ist bezüglich der Abfertigungsreihenfolge stochastisch invariant, solange die Forderungen unabhängig von ihrer Bediendauer<sup>3</sup> zur Abfertigung ausgewählt werden. Derartige Bediendisziplinen – im Polling-System zusammengesetzt aus Warteschlangen-, Interqueue- und Abfertigungsdisziplin – werden *unparteiisch (impartial)* genannt [Kleinrock76], [Takagi91]. Hierzu zählen Bediendisziplinen wie FCFS, LCFS, Service In Cyclic Order (SICO), SIRO [Kingman82], [Kim04]. Demzufolge gilt die Analyse der Warteschlangenlänge (und damit auch des Durchsatzes und der mittleren Wartedauer) bei unbegrenztem Warteraum für beliebige unparteiische Abfertigungsdisziplinen. Differenziert werden muss natürlich bei anderen Analysen, wie z.B. Bestimmung der Wartedauerverteilung. Bei begrenztem Warteraum ist generell zu beachten, inwieweit die Analysemodelle anwendbar sind und unterschiedliche unparteiische Bediendisziplinen Einfluss auf die System-Performanz nehmen können. Qualitative Vorbetrachtungen hierzu enthalten die folgenden Abschnitte.

#### 4.2.1 Late-Arrival-Modell mit sofortiger Warteplatznachbesetzung

Das LA-Modell zeichnet sich dadurch aus, dass Ankunfts- und Bedienprozess jeweils durch eine Zeitschlitzgrenze entkoppelt sind. Das Modell erfordert mindestens einen Warteplatz je Eingang, um die am Zeitschlitzende eintreffenden Ankünfte bis zum nächstmöglichen Abfertigungsbeginn puffern zu können. Im Sonderfall mit  $K = 1$  Warteplatz je Warteschlange ist die Interqueue-Disziplin bezüglich der Gesamtwarteschlangenlänge belanglos, jede faire Auswahlstrategie führt zum gleichen Ergebnis (vergleiche Abschnitt 4.2.3, pufferloses EA-Modell). Bei größerem Warteraum kann hingegen die Warteschlangenauswahlstrategie in Verbindung mit dem Zellenverlustprozess auch Einfluss auf die Warteschlangenlänge nehmen.

Sofortige Nachbesetzung eines gerade frei gewordenen Warteplatzes bedeutet maximale Ausnutzung des Warteraums; er kann an den Zeitschlitzgrenzen vollständig belegt sein. Die Zufallsvariable  $Q$  definiere die Anzahl der Aufträge, die sich an einer beliebigen Zeitschlitzgrenze im System, d.h. im Puffer aufhalten. Der durch

$$q_k = P\{Q = k\}, \quad k = 0, 1, \dots, MK \quad (4.2)$$

beschriebene Systeminhalt repräsentiert direkt die Systemauslastung, d.h. es gilt

$$\rho_{LA} = 1 - q_0, \quad (4.3)$$

<sup>3</sup> Bedingung ist das Auftreten voneinander unabhängiger und identisch verteilter Bediendauern. In dieser Arbeit werden ausschließlich konstante Bediendauern behandelt.

wobei es sich bei  $q_0$  um die Leerlaufwahrscheinlichkeit handelt. Bezüglich Auslastung bzw. Leerlaufwahrscheinlichkeit ist das LA-Modell mit sofortiger Nachbesetzung identisch mit dem EA-Modell bei verzögerter Nachbesetzung (siehe Abschnitt 4.2.4). Die Wahrscheinlichkeit eines Zellenverlustes bei Ankunft ergibt sich unmittelbar aus der Auslastung zu

$$p_v = 1 - \rho / (\lambda \Delta t). \quad (4.4)$$

#### 4.2.2 Late-Arrival-Modell mit verzögerter Warteplatznachbesetzung

Verzögerte Nachbesetzung bedeutet, dass der frei gewordene Warteplatz in der gerade abgefertigten Warteschlange im selben Zeitschlitz nicht erneut belegt werden kann. Am Zeitschlitzende ist der vorhandene Warteraum deshalb in der Regel nicht vollständig belegt.<sup>4</sup> Es ergibt sich mithin eine schlechtere Warteplatzausnutzung als bei sofortiger Nachbesetzung. Andererseits stellt der Steuerungsmechanismus hier geringere Ansprüche an Reaktionszeiten der Systemkomponenten als bei sofortiger Nachbesetzung. Dies kommt beispielsweise darin zum Ausdruck, dass die Forderung synchroner Ankünfte bei diesem Modell entfallen kann. Ankünfte zu beliebigen Zeitpunkten zwischen Beginn und Abschluss der Bedienphase beeinflussen die Analyse der Warteschlangenlänge nicht. Bezüglich der Anwendung beliebiger unparteiischer Abfertigungsdisziplinen und der Bestimmung der Systemauslastung gelten die Ausführungen des vorherigen Abschnitts.

#### 4.2.3 Early-Arrival-Modell mit sofortiger Warteplatznachbesetzung

Im Gegensatz zum LA-Modell hängt die Abfertigung beim EA-Modell – unabhängig vom Nachbesetzungsschema – direkt mit den Ankünften im selben Zeitschlitz zusammen.<sup>5</sup> Eine Ausnahme bildet der pufferlose Fall, in dem die Warteplatznachbesetzung ebenso irrelevant ist wie die „Warteschlangen“-Auswahldisziplin – die Gleichbehandlung sämtlicher Ankünfte vorausgesetzt. Im Übrigen muss je nach Warteschlangen- und Interqueue-Disziplin sorgfältig unterschieden werden, ob und inwieweit zusätzlich zu den bereits wartenden Aufträgen auch die gerade eingetroffenen Forderungen in den Auswahlprozess zur Abfertigung einbezogen werden. Der zu Beginn einer Auftragsabfertigung frei werdende Warteplatz kann bei diesem Modell unmittelbar durch eine Neuankunft besetzt werden.<sup>6</sup> Der Warteraum ist somit stets vollständig nutzbar (von den betrachteten Modellen am effektivsten). Zu beachten ist, dass ein Auftrag bei Ankunft in einem leeren EA-System bzw. in einer leeren und sodann zur Abferti-

<sup>4</sup> Eine Ausnahme im Sonderfall mit  $K = 1$  Warteplatz je Eingang stellt folgendes Szenario dar: Eine Gruppenankunft mit Aufträgen an sämtlichen Eingängen trifft auf ein zuvor leeres System und füllt dieses vollständig.

<sup>5</sup> Die direkte Abfertigung einer Ankunft stellt eine fiktive Puffervergrößerung dar, berührt aber nicht die Unparteilichkeit der Bediendisziplin.

<sup>6</sup> Von diesem Nachbesetzungsschema profitierende Ankünfte sind Nachrücker. Diese können frühestens im Zeitschlitz nach ihrer Ankunft bedient werden; ihre minimale Wartedauer beträgt somit einen Zeitschlitz.

gung ausgewählten Warteschlange das System noch im selben Zeitschlitz verlassen kann. Der Warteschlangeninhalt ist in diesem Fall an der Zeitschlitzgrenze null, während der Ankunftszeitschlitz vollständig in die Aufenthaltsdauer einer jeden Forderung eingeht. Da sich das System im betrachteten Zeitschlitz nur dann im Leerlauf befindet, wenn es zum Zeitschlitzbeginn leer ist und keine Forderung eintrifft, ist die Systemauslastung gegeben durch

$$\rho_{EA} = 1 - q_0 a_0. \quad (4.5)$$

Dies trifft auch auf das EA-Modell mit verzögerter Nachbesetzung zu. Für die Zellenverlustwahrscheinlichkeit gilt Gleichung (4.4) bei den EA-Modellen entsprechend.

#### 4.2.4 Early-Arrival-Modell mit verzögerter Warteplatznachbesetzung

Beim EA-Modell mit verzögerter Nachbesetzung können Aufträge am Zeitschlitzbeginn (vor Start der Abfertigung) nur in dem Umfang im System aufgenommen werden, wie freie Warteplätze beim Zeitschlitzwechsel vorhanden waren.<sup>7</sup> Gleiches gilt beim LA-Modell mit sofortiger Nachbesetzung am Zeitschlitzende (zum Schluss der Abfertigung). Insofern sind beide Modellvarianten bezüglich des Durchsatzes äquivalent. Weitere Erläuterungen hierzu finden sich im Anhang B. Darüber hinaus wird diese Modellvariante in der vorliegenden Arbeit aber nicht mehr beachtet.

#### 4.2.5 Gliederung der Analysen

Die Ausführungen der vorherigen Abschnitte ergeben zusammenfassend die in **Tabelle 4.1** dargestellte Übersicht für die Analyse der Multiplexer-Performanz. Adressiert werden in den folgenden vier Abschnitten dieses Kapitels Polling-Systeme mit begrenztem Warteraum mit Hilfe der LA- und EA-Analysemodelle unter den aus der Tabelle resultierenden Aspekten. Die Gliederung der Unterkapitel folgt hierbei der tabellarischen Ordnung gemäß Warteraum-

Kapazität / Warteschlange		$K = 0$	$K = 1$	$1 < K < \infty$	$K = \infty$
Late-Arrival-Modell	Warteplatznachbesetzung	Modell nicht anwendbar	X	X	–
	Interqueue-Disziplin		–	X	–
Early-Arrival-Modell	Warteplatznachbesetzung	–	X	X	–
	Interqueue-Disziplin	–	X	X	–

**Tabelle 4.1:** Relevanz von analytischem Modell, Schema der Warteplatznachbesetzung und der Interqueue-Disziplin für Warteschlangenlänge und Durchsatz des gesamten Polling-Systems unter symmetrischer Last, in Abhängigkeit von der Anzahl der Warteplätze je Warteschlange. X = relevant; – = nicht relevant

<sup>7</sup> Für ungepufferte Systeme ist dieses Schema der Warteplatznachbesetzung mithin irrelevant.



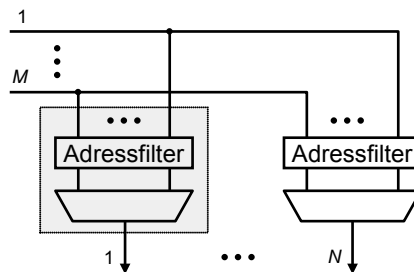
kapazität pro Warteschlange. Zusätzlich analysiert wird im Kapitel 4.7 das Polling-System im synchronen Zeitmultiplexbetrieb.

Für die Warteschlangendisziplin wird im Allgemeinen einheitlich FCFS angenommen (FIFO-Implementierung). Abweichungen hiervon können sowohl für die Analyse als auch für die Implementierung (z.B. RAM-Puffer ohne FIFO-Algorithmus) sinnvoll sein. Als Interqueue-Disziplinen werden je nach Möglichkeit der analytischen Behandlung SICO, SIRO, FCFS, Longest Queue First-Served (LQFS) sowie spezielle Erweiterungen betrachtet.

### 4.3 Analyse des ungepufferten Systems

Bedeutung erlangt dieser triviale Zellen-Multiplexer ohne Pufferung ( $K = 0$ ) z.B. als Grenzfall für gepufferte Polling-Systeme mit diversen unparteiischen Interqueue-Disziplinen. Er lässt sich beispielsweise als  $M \times 1$ -Schalter auffassen, der wiederum Teil eines Crossbar-Schalters sein kann, **Bild 4.2**. Zweckmäßige Zuteilungsverfahren sind SICO oder SIRO.<sup>8</sup> Aufgrund der Konventionen in dieser Arbeit (Bedieneinheit hat keine Speicherfunktion über Zeitschlitzgrenzen hinweg) ist die Leerlaufwahrscheinlichkeit in dem allein anwendbaren EA-Modell<sup>9</sup>  $q_0 = 1$ . Damit ergibt sich für Ankünfte mit beliebig verteilter Gruppengröße  $\rho_{EA} = 1 - q_0$   $a_0 = 1 - a_0$ . Akzeptiert wird natürlich höchstens einer der ankommenden Aufträge. Entsprechend ist für diesen Auftrag die mittlere Wartedauer  $E[W] = 0$ .

Die Auslastung des Multiplexers entspricht mit  $\rho = 1 - (1 - p)^M$  und der symmetrischen Verkehrslast  $p = \lambda \Delta t / M$  an allen  $M$  Eingängen der Auslastung eines ungepufferten  $M \times N$ -Crossbar (pro Ausgang), hergeleitet in [Patel81] für binomial-verteilte Ankünfte. Es ist zu beachten, dass die Durchsatzbetrachtung dieses speicherlosen Multiplexers nicht grundsätzlich an das EA-Analysemodell gebunden ist. Das LA-Modell ist ebenfalls anwendbar, wenn z.B. am Zeitschlitzende – nach Abfertigung eines gegebenenfalls anwesenden Auftrags – der sofortige Zugang zur Bedieneinheit gegeben ist. In diesem Fall hat der Server Pufferfunktion, und der Multiplexer bildet ein  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/1$ -System [Langer03].



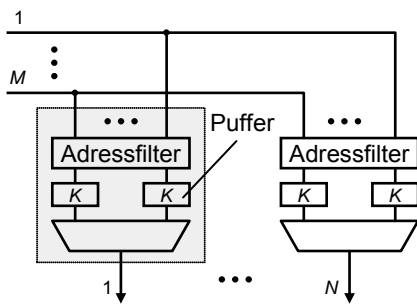
**Bild 4.2:** Architektur eines  $M \times N$ -Crossbar, bestehend aus  $N$  Multiplexern des Formats  $M:1$ .

<sup>8</sup> Die Analyse trifft für alle unparteiischen Interqueue-Disziplinen zu.

<sup>9</sup> Mangels Puffer ist im LA-Modell keine Aufnahme der am Zeitschlitzende eintreffenden Aufträge möglich.

### 4.4 Analyse von Systemen mit einem Warteplatz je Warteschlange

In den folgenden Abschnitten wird das Polling-System mit  $K = 1$  Warteplatz je Puffer exakt analysiert. Anwendung finden solche Systeme z.B. in Crossbar-Schaltern mit einfacher Koppelpunkt-Pufferung, **Bild 4.3**, (siehe z.B. [Lin05]). Das Modell bildet darüber hinaus ein sehr weites Feld von Anwendungen ab, bei denen  $M$  Stationen (repräsentiert durch die Eingänge bzw. Puffer) mit gleichartigen Einzelanforderungen (verkörpert durch einen belegten/ freien Warteplatz je Puffer) auf ein gemeinsames Betriebsmittel zugreifen. Als Beispiele hierfür seien Medienzugriffsverfahren wie CSMA, Slotted Ring und Slotted ALOHA<sup>10</sup> genannt [Takagi95].



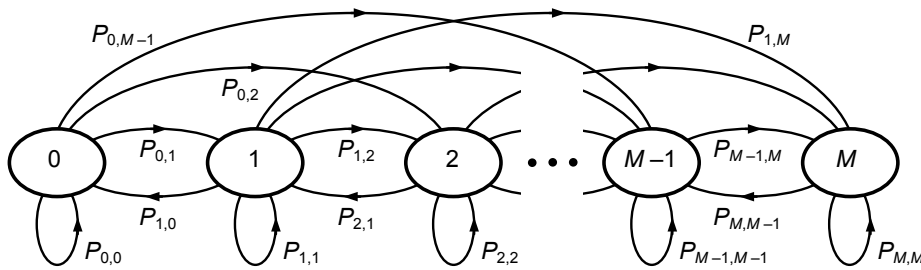
**Bild 4.3:** Architektur eines  $M \times N$ -Crossbar, basierend auf Multiplexern und Koppelpunktpuffern der Kapazität  $K = 1$  Warteplatz.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} & P_{0,4} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} & P_{1,4} \\ 0 & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} & P_{2,4} \\ 0 & 0 & P_{3,2} & P_{3,3} & P_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & P_{4,3} & P_{4,4} \end{pmatrix}$$

**Bild 4.4:** Beispiel einer Zustandsübergangsmatrix für Multiplexer mit  $M = 4$  Eingängen. Sie hat die Gestalt einer Hessenberg-Matrix.

Die Modelle mit verzögerter Nachbesetzung bilden aufgrund der Warteplatzanzahl per se Systeme mit 1-begrenzter Abfertigung (*1-limited Service*). Die Polling-Strategie ist in diesem Fall identisch mit der erschöpfenden Abfertigung (*Exhaustive Service*).

Entsprechend Gleichung (4.2) sei die Zufallsvariable  $Q$  die Anzahl der Aufträge in der beobachteten Anordnung am Ende eines beliebigen Zeitschlitzes. Bei endlicher Eingangsanzahl  $M$  kann der Systeminhalt  $Q$  gemäß **Bild 4.5** als zeitdiskrete Markov-Kette mit  $M + 1$  Zustän-



**Bild 4.5:** Zustandsübergangsdigramm für einen  $M:1$ -Multiplexer mit jeweils einem eingangsseitigen Warteplatz. Die Zustände repräsentieren die Anzahl wartender Aufträge  $Q$  an der Zeitschlitzgrenze.  $P_{i,j}$  bezeichnet die Wahrscheinlichkeiten für den Wechsel von Zustand  $i$  nach Zustand  $j$  in der Zeiteinheit  $\Delta t$ .

<sup>10</sup> Stationen, die auf ein gemeinsames Betriebsmittel erfolglos zugreifen, repräsentieren hier wartende Forderungen. Deren Anzahl verringert sich in jedem Zeitschlitz um eins, sofern die verbleibenden Stationen keine zusätzlichen Zugriffsversuche unternehmen. Andernfalls nimmt die Anzahl entsprechend zu oder bleibt gleich (siehe [Mieghem06] und dort genannte Literaturstellen).

den und den Zustandswahrscheinlichkeiten  $q_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, M$ , modelliert werden. Hierbei repräsentiert jeder einzelne Zustand eine Anzahl von  $\binom{M}{n}$  gleichwahrscheinlichen Subzuständen<sup>11</sup> mit jeweils  $n$  wartenden Aufträgen, verteilt auf die  $M$  Warteschlangen. Die Markov-Kette ist ergodisch und besitzt mithin eine eindeutige stationäre Verteilung (siehe Kapitel 3.2.2.1). Die Übergangsmatrix ist eine sogenannte *obere Hessenberg-Matrix*<sup>12</sup>, d.h. eine obere Dreiecksmatrix, ergänzt mit der besetzten ersten Unterdiagonalen (siehe z.B. [Meyer00]).

**Bild 4.4** zeigt ein Beispiel.

Für die Analysen wird ein matrixalgebraischer Ansatz verwendet, der die spezielle Struktur der Übergangsmatrix ausnutzt. Nach [Mieghem06] resultiert daraus die Leerlauf-Wahrscheinlichkeit

$$q_0 = 1 / \left( 1 + \sum_{i=1}^M \frac{(-1)^i \det(\mathbf{P}_{i \times i} - \mathbf{I}_{i \times i})}{\prod_{j=1}^i P_{j,j-1}} \right), \quad (4.6)$$

wobei  $\mathbf{P}_{i \times i}$  die Übergangswahrscheinlichkeitsmatrix<sup>13</sup>,  $\mathbf{I}_{i \times i}$  die Einheitsmatrix gleicher Größe, und  $P_{i,j}$  die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von Zustand  $i$  nach Zustand  $j$  bezeichnen. Der Summenausdruck repräsentiert die verbleibenden Zustandswahrscheinlichkeiten  $q_1, q_2, \dots, q_M$ . Die Lösung der Determinanten mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens führt dann zu

$$q_0 = 1 / \left( 1 + \sum_{k=1}^M \prod_{n=1}^k x_n \right). \quad (4.7)$$

Hierfür sind die Terme zum Modifizieren der  $i+1$  Elemente auf der Determinanten-Hauptdiagonalen gegeben durch

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 0, \\ \left( 1 - \sum_{m=1}^i P_{i-m,i-1} \prod_{j=0}^{i-1} x_j / \prod_{k=0}^{i-m} x_k \right) / P_{i,i-1} & \text{falls } 1 \leq i \leq M, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Unter Beibehaltung des Schemas von Gleichung (4.6) ergeben sich daraus die verbleibenden Übergangswahrscheinlichkeiten  $q_i$  zu

$$q_i = q_0 \frac{(-1)^i \det(\mathbf{P}_{i \times i} - \mathbf{I}_{i \times i})}{\prod_{j=1}^i P_{j,j-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (4.9)$$

Bemerkenswert ist, dass diese Lösung keine Übergangswahrscheinlichkeiten in den Zustand  $M$  der Markov-Kette benötigt. Die Lösung ist auf alle zeitdiskreten Systeme anwendbar, die

<sup>11</sup> Wegen der Annahme symmetrischer Lastverhältnisse und Warteraumressourcen sind diese Subzustände gleichwertig; zwischen ihnen muss hier nicht unterschieden werden.

<sup>12</sup> Benannt nach dem deutschen Ingenieur und Mathematiker K.A. Hessenberg (1904-1959).

<sup>13</sup> Diese Matrix ist begrenzt auf die ersten  $i$  Zustände anstelle von  $M+1$  Zuständen.

sich mit dem Markov-Modell in **Bild 4.5** beschreiben lassen (auch mit weniger Übergängen zu den „höheren“ Zuständen, als in der Grafik dargestellt). Zu erwähnen ist ebenfalls, dass es keine Abhängigkeiten zum Ankunfts- und Bedienprozess gibt; die Lösung gilt für das LA-Modell ebenso wie für das EA-Modell.

Entsprechend der spezifischen Werte der Übergangswahrscheinlichkeiten und deren Beziehung zueinander lässt sich die mit den Gleichungen (4.7) - (4.9) gegebene allgemeingültige Lösung unter Umständen erheblich vereinfachen, teilweise auch zu Ausdrücken in explizit geschlossener Form. Gelingt dies nicht, begrenzt die auszuführende Matrixalgebra allerdings den Betrag des Parameters  $M$ . Eine Alternative bietet dann die rekursive numerische Lösung der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten. Ein entsprechendes Verfahren wird im Anhang A beschrieben.

#### 4.4.1 Analyse mit dem Late-Arrival-Modell

Da der Systeminhalt im Falle  $K = 1$  nicht von der Abfragedisziplin abhängt, solange diese unparteiisch ist (siehe Kapitel 4.2.1), kann die zufällige Warteschlangenauswahl (SIRO) zur Analyse des Systeminhaltes mit dem LA-Modell dienen. Das Gesamtsystem lässt sich dann als Markov-Kette gemäß **Bild 4.5** mit  $M + 1$  Zuständen behandeln.<sup>14</sup> Die Identität mit dem Fall der zyklischen Warteschlangenauswahl wird an einem Beispiel im Anhang B gezeigt.

##### 4.4.1.1 Sofortige Warteplatznachbesetzung

Die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Systemzuständen gemäß **Bild 4.5** sind bei sofortiger Nachbesetzung und genereller Größe ankommender Gruppen gegeben durch

$$P_{i,i+j} = \begin{cases} a_j & \text{falls } i = 0, 0 \leq j \leq M, \\ \binom{M+1-i}{j+1} \sum_{n=1}^i a_{n+j} \binom{i-1}{n-1} / \binom{M}{n+j} & \text{falls } \begin{cases} 1 \leq i \leq M, \\ -1 \leq j \leq M-i, \end{cases} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.10)$$

Herleitung und Beweis hierfür finden sich in Anhang A. Nimmt man einen Bernoulli-Ankunftsprozess an, so kann man beim Einfügen von Gleichung (4.10) in Gleichung (4.8) von der speziellen Beziehung der Übergangswahrscheinlichkeiten profitieren, was sich ausdrückt in der geschlossenen Lösung für die Wahrscheinlichkeit eines „leerlaufenden“ Systems

<sup>14</sup> Die Markov-Kette für Polling in zyklischer Reihenfolge ist sehr viel komplexer, was einer Analyse großer Systeme entgegensteht (siehe auch Abschnitt 4.4.2.1).

$$q_0 = 1 / \left\{ 1 + \sum_{k=1}^M \binom{M}{k} \prod_{n=1}^k \left( \frac{1}{(1-\rho)^n} - 1 \right) \right\}. \quad (4.11)$$

Es ist erwähnenswert, dass dieses Ergebnis auf das klassische Problem der Wartung bzw. Reparatur  $M$  identischer Maschinen zutrifft, die von einer Betriebskraft zyklisch überwacht und bei Bedarf innerhalb eines festen Zeitintervalls repariert werden [Mack57].<sup>15,16</sup> Interessant ist ferner, dass [Takagi95] dieselbe Wahrscheinlichkeit des Leerlaufs für ein zeitdiskretes Polling-System mit  $M$  unabhängigen Stationen, identischen Ankunftsdaten, zyklischer Abfrage, konstanter Bediendauer und einer konstanten Umschaltdauer von einem Zeitschlitz je Polling-Zyklus präsentiert. Dort registriert die Bedieneinheit beim Erreichen einer Station den gesamten Systeminhalt.<sup>17</sup> Die Ableitung der weiteren Zustandswahrscheinlichkeiten<sup>18</sup>  $\{q_1 \dots q_M\}$  erfolgt auf direktem Wege (zyklische und zufällige Abfragereihenfolge liefern bei dieser Modellvariante identische Warteschlangenlängen). Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer ist die Polling-Reihenfolge (Interqueue-Disziplin) hingegen relevant. Betrachtet werden im Folgenden FCFS und SIRO.

Die FCFS-Abfertigung ist besonders interessant für einen Vergleich mit anderen Bedienstrategien, denn die Wartedauervarianz unter FCFS bildet die untere Grenze (siehe z.B. [Kingman62]). Für zeitdiskrete Single-Server-Systeme mit unbegrenztem Warteraum und FCFS-Abfertigung der Aufträge in jeweils einem Zeitschlitz wird in [Wittevrongel96] die Beziehung  $\text{var}[W] = \text{var}[Q]/\rho - (1-\rho)(E[Q]/\rho)^2$  hergeleitet<sup>19</sup>. Wie in Anhang C gezeigt wird, trifft sie auch auf Systeme mit endlicher Kapazität<sup>20</sup> zu [Vinck95], [Langer05], sodass sich hieraus mit Gleichung (4.3), d.h.  $\rho = 1 - q_0$ , unmittelbar die Verteilung der Wartedauer ergibt:

$$w_i = P\{W = i \Delta t\} = q_{i+1} / (1 - q_0), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (4.12)$$

Erfolgt die Warteschlangenauswahl nach dem Zufallsprinzip (SIRO), so handelt es sich im vorliegenden Sonderfall mit  $K = 1$  Warteplatz je Warteschlange zugleich um eine Zufallsauswahl der abzufertigenden Zelle aus der Gesamtheit aller anwesenden Aufträge. Deshalb kann hier der folgende Ansatz für eine globale SIRO-Auswahl angewandt werden (siehe auch Kapitel 5).

Die Wahrscheinlichkeit  $P_k$ , dass sich unmittelbar nach Ankunft einer  $n$  Aufträge umfassenden Gruppe (einschließlich des beobachteten Auftrags) insgesamt  $k$  Forderungen im System befin-

<sup>15</sup> Die Maschinen entsprechen den Puffern (Stationen), auftretende Defekte den Forderungen, und der Service-Techniker der Bedieneinheit eines Polling-Systems.

<sup>16</sup> Die Lösung wird dort jedoch nicht in geschlossener Form angegeben.

<sup>17</sup> Aufgrund der Umschaltdauer ergeben sich dort im Übrigen unterschiedliche Zustandswahrscheinlichkeiten. Zudem wird auf die Art der Nachbesetzung nicht eingegangen.

<sup>18</sup> Es ist zu beachten, dass die  $M$  Terme der Summe im Nenner von Gleichung (4.11) nicht den Zustandswahrscheinlichkeiten  $\{q_0, q_1, \dots, q_M\}$  entsprechen.

<sup>19</sup> Wartedauervarianz normiert auf  $(\Delta t)^2$ .

<sup>20</sup> Die Gesamtanzahl der Warteplätze ergibt bei FCFS zugleich die maximale Wartedauer.

den, beträgt  $P_k = \sum_{n=0}^k q_n (k-n) a_{k-n} / \rho$ . Hierbei ist  $q_n$  die aus Gleichung (4.11) folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Warteschlangenlänge. Des Weiteren sei  $P(i|k)$  die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass der beobachtete Auftrag von seinem Eintritt in das System bis zum Bedienende insgesamt  $i \in \mathbb{N}^+$  Zeitschlitze benötigt, während unmittelbar nach dem Ankunftszeitschlitz (zum Zeitpunkt des Service-Beginns) die zuvor erwähnten  $k$  Aufträge einschließlich der beobachteten Forderung warten. Falls im darauffolgenden Zeitschlitz erneut  $n \in \{1, 2, \dots, M\}$  Aufträge eintreffen, befinden sich zu Beginn des nächsten Bedienprozesses  $\max\{0, k+n-1\}$  Forderungen im System. Nach dem Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt dann

$$P(i|k) = \begin{cases} 1/k & \text{falls } i=1, k \geq 1, \\ \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{n=0}^M P(i-1|k+n-1) a_n & \text{falls } i \geq 2, k \geq 2, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.13)$$

wobei  $a_n$  die Wahrscheinlichkeit der Ankunft von  $n$  Aufträgen im betrachteten Zeitschlitz ist. Mit  $i=0$  beginnend lassen sich nun auf numerischem Wege die Wartedauerwahrscheinlichkeiten

$$w_i = P\{W = i \Delta t\} = \sum_{k=1}^M P(i+1|k) P_k = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^M P(i+1|k) \sum_{n=0}^k q_n (k-n) a_{k-n}, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (4.14)$$

sowie weitere daraus resultierende Größen ermitteln.

Geht man anstelle der binomial-verteilten Gruppengröße ankommender Forderungen von einer generellen Verteilung aus, so lässt sich die Übergangsmatrix (4.10) – ebenso wie alle Übergangsmatrizen in den weiteren Kapiteln dieser Arbeit mit vergleichbarer Struktur – zumindest numerisch lösen. Ein rekursives Schema hierfür wird im Anhang A erläutert.

#### 4.4.1.2 Verzögerte Warteplatznachbesetzung

Bei verzögerter Nachbesetzung sind die Übergangswahrscheinlichkeiten – beschafft nach dem im Anhang A vorgestellten Schema – gegeben durch

$$P_{i,i+j} = \begin{cases} a_j & \text{falls } i=0, 0 \leq j \leq M, \\ \left(\frac{M-i}{j+1}\right) \sum_{n=1}^{i+1} a_{n+j} \binom{i}{n-1} / \binom{M}{n+j} & \text{falls } \begin{cases} 1 \leq i \leq M, \\ -1 \leq j \leq M-i-1, \end{cases} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Der Warteraum ist nur dann vollständig belegt, wenn eine Gruppenankunft  $M$  ein leeres System vorfindet. In allen weiteren Fällen bleibt mindestens ein Warteplatz frei.

Die Warteschlangenlänge im stationären Zustand lässt sich mittels Analyse der Übergangsmatrix

trix gewinnen, oder mit zusätzlicher Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen aus dem Markov-Modell, wie es im Anhang A dargestellt ist.

Eine geschlossene Lösung kann hier nicht angegeben werden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Wartedauer für FCFS- und SIRO-Abfrage lassen sich analog zu den Ausführungen im vorherigen Abschnitt ermitteln.

#### 4.4.2 Analyse mit dem Early-Arrival-Modell

Im Folgenden werden Polling-Systeme beliebiger Größe mit  $K = 1$  Warteplatz je Eingang nach dem EA-Modell betrachtet, wobei sofortiger Zugang zur Bedieneinheit und die Möglichkeit der sofortigen Nachbesetzung frei werdender Warteplätze angenommen werden. Im Gegensatz zum LA-Modell wirkt sich die Art der Warteschlangenauswahl hier auch bei  $K = 1$  auf Leistungsgrößen wie Warteschlangenlänge oder Auslastung aus (siehe Kapitel 4.2.3). Betrachtet werden die Auswahldisziplinen FCFS, SIRO und SICO. Ferner wird die obere Grenze der Auslastung ermittelt, die sich mit Hilfe einer Kombination aus FCFS und LQFS erzielen lässt. Wie schon im Abschnitt zuvor gelten sämtliche Zustandsübergangsmatrizen für beliebige Eingangsanzahl  $M$  und generelle Ankunftsgruppengrößen. Die Übergangsgleichungen können auf numerischem Wege matrixalgebraisch oder rekursiv (siehe Kapitel 4.4 bzw. Anhang A) gelöst werden; geschlossene Lösungen lassen sich hier nicht angeben.

##### 4.4.2.1 Warteschlangenauswahl in zyklischer Reihenfolge

Zur Modellierung des Polling-Systems mit zyklischer Abfrage und Abfertigung der Warteschlangen (SICO) ist eine wesentlich komplexere Markov-Kette erforderlich als in den zuvor behandelten Fällen, da die Abfrage in jedem aktiven Zyklus an der zuletzt bedienten Warteschlange fortgesetzt wird. Bei Ausnutzung von Symmetrieeigenschaften aufgrund der Verkehrsannahmen ergibt sich eine Markov-Kette mit der Grundstruktur von **Bild 4.5**, jedoch umfasst jeder Zustand  $i \in \{0, 1, \dots, M\}$  dieser Anordnung  $\binom{M}{i}$  Mikrozustände, sodass sich bei exakter Modellierung eine Gesamtanzahl von  $\sum_{i=0}^M \binom{M}{i} = 2^M$  Zuständen ergibt. Die Mikrozustände repräsentieren die Vorgeschichte des Systems, die es zur Einhaltung der zyklischen Abfrage zu beachten gilt. Mit Hilfe der lokalen Gleichgewichtsbedingungen lässt sich die Markov-Kette auf die bekannte Gestalt der Makrozustände reduzieren, wodurch allerdings das komplexe Systemgedächtnis in die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Makrozuständen wandert. Die exakte Analyse bleibt deshalb auf wenige sehr kleine Systeme beschränkt; in dieser Arbeit auf die Fälle  $M = \{2, 3, 4\}$ <sup>21</sup>. Die erzielten Ergebnisse sind in den Diagrammdarstellungen (siehe weiter hinten) enthalten.

<sup>21</sup> Eine allgemeingültige Lösung kann nicht angegeben werden.

#### 4.4.2.2 Warteschlangenauswahl in Reihenfolge der Ankünfte

Die FCFS-Warteschlangenauswahl impliziert eine Bevorzugung bereits wartender Aufträge vor den gerade angekommenen. Ankünfte werden also bei der Auswahl nicht beachtet, sofern zu Zeitschlitzbeginn bereits Aufträge im System warten. Insoweit bewirkt die Auswahldisziplin beim nicht leeren System eine Entkopplung der Abfertigung vom Ankunftsprozess, und die Durchsatzbetrachtung stimmt mit der beim LA-Modell<sup>22</sup> überein – vorausgesetzt, das Schema der Warteplatznachbesetzung ist identisch (siehe Abschnitt 4.4.1.1). Beim leeren System gelten hier allerdings andere Übergangswahrscheinlichkeiten, wie die Beschaffung und Überprüfung nach dem im Anhang A gezeigten Schema zeigt:

$$P_{i,i+j} = \begin{cases} a_0 + a_1 & \text{falls } i = j = 0, \\ a_{j+1} & \text{falls } i = 0, 1 \leq j \leq M-1, \\ \binom{M+1-i}{j+1} \sum_{n=1}^i a_{n+j} \binom{i-1}{n-1} / \binom{M}{n+j} & \text{falls } \begin{cases} 1 \leq i \leq M, \\ -1 \leq j \leq M-i, \end{cases} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Den Ausführungen in [Wittevrongel96], [Vinck95] und [Langer05] folgend ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer hier mit  $\rho = 1 - q_0 a_0$  gemäß Gleichung (4.5) zu

$$w_0 = P\{W = 0\} = 1 - (1 - q_0) / \rho; \quad w_i = P\{W = i \Delta t\} = q_i / \rho, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (4.17)$$

#### 4.4.2.3 Warteschlangenauswahl in zufälliger Reihenfolge

Erneut werden die Übergangswahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Markov-Kette in **Bild 4.5** nach dem im Anhang A beschriebenen Schema ermittelt. Allerdings gestaltet sich die Herleitung bei der Zufallsauswahl einer Warteschlange (SIRO) sehr viel komplizierter als im vorherigen Abschnitt. Hierbei sind nämlich neben den an der Zeitschlitzgrenze bereits belegten Warteschlangen auch jene einzubeziehen, die gerade ankommende Forderungen aufnehmen. Zur besseren Übersicht werden deshalb ankommende und schon wartende Aufträge als virtuell getrennte Mengen  $\{\mathbb{A}, \mathbb{B}\}$  betrachtet, und die komplementären Fälle  $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{\emptyset\}$  sowie  $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \neq \{\emptyset\}$  werden separat behandelt. Natürlich sind die resultierenden Übergangswahrscheinlichkeiten, die nach bestem Wissen hier erstmals publiziert werden, sehr viel komplexer als bei den zuvor behandelten Modellen. Bemerkenswert ist, dass für  $P_{i,i-1}$  die Ausdrücke des FCFS-Systems gelten:

<sup>22</sup> Die Warteschlangenauswahl ist dort beliebig; sie muss allerdings unparteiisch sein.



$$P_{i,i+j} = \begin{cases} \left( \binom{M-i}{j} \left[ \left( \frac{M+1}{i+j+1} - \frac{i-1}{i+j} \right) \sum_{n=1}^i \frac{n}{j+1} a_{n+j} \binom{i}{n} \right] / \binom{M}{n+j} \right. \\ \quad \left. + \frac{M-i-j}{i+j+1} \sum_{n=1}^{\min\{i+1, M-j\}} a_{n+j} \binom{i}{n-1} / \binom{M}{n+j} \right) & \text{falls } \begin{cases} 1 \leq i \leq M, \\ 0 \leq j \leq M-i, \end{cases} \\ \sum_{n=1}^i a_{n-1} \binom{i-1}{n-1} / \binom{M}{n-1} & \text{falls } \begin{cases} 1 \leq i \leq M, \\ j = -1, \end{cases} \\ \text{siehe Gleichung (4.16)} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.18)$$

Wegen der Berücksichtigung von Ankünften im aktuellen Zeitschlitz (zwischen Zeitschlitzanfang und Service-Beginn) sowie der Nachrückerstrategie gestaltet sich die Ermittlung der Wartedauerverteilung unter SIRO ebenfalls schwierig. So unterscheidet sich die Analyse des Ankunftszeitschlitzes (Ausgangszeitintervall) grundsätzlich von den weiteren Schritten: Die beobachtete Forderung kann bei ihrer Ankunft entweder in eine leere Warteschlange gelangen und unmittelbar am Auswahlprozess teilnehmen, oder als Nachrücker eines gerade zur Abfertigung ausgewählten „Altauftrags“ erst ab dem darauffolgenden Zeitschlitz. Die rekursive Analyse aller weiteren Zeitschlitzes beruht dann auf der Präsenz der betrachteten Forderung am Kopf einer Warteschlange sowie der Berücksichtigung von Neuankünften und Zuteilungen. Anhand der Ausführungen in Anhang B ergeben sich die Wartedauerwahrscheinlichkeiten  $w_i = P\{W = i\}$  zu

$$w_i = \begin{cases} \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^M \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k q_n (k-n) \binom{M-n}{k-n} \sum_{m=0}^n a_{k-n+m} \binom{n}{m} / \binom{M}{k-n+m} & \text{falls } i = 0, \\ \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^M P_{i,k}^* \sum_{n=0}^k q_n \binom{M-n}{k-n} \left[ \frac{k+1-n}{k} \sum_{m=0}^n m a_{k-n+m} \binom{n}{m} / \binom{M}{k-n+m} \right. \\ \quad \left. + \frac{M-k}{k+1} \sum_{m=1}^{\min\{n+1, M-k+n\}} (k+1-m) a_{k-n+m} \binom{n}{m-1} / \binom{M}{k-n+m} \right] & \text{falls } i \in \mathbb{N}^+, \end{cases} \quad (4.19)$$

wobei es sich bei  $q_n$  um die mithilfe von Gleichung (4.18) rekursiv zu lösende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Warteschlangenlänge (Zustandswahrscheinlichkeiten der betreffenden Markov-Kette) handelt, und bei  $P_{i,k}^*$  um die Übergangswahrscheinlichkeiten der Zustandsmatrix zum Zeitpunkt zwischen Ankunft und Servicebeginn (siehe Anhang B). Bewiesen wird im Anhang B auch, dass die Auslastung bei großer Eingangsanzahl  $\lim_{M \rightarrow \infty} \rho = 1$  erreichen kann. Angemerkt sei ferner, dass die hier ermittelte allgemeine Lösung  $q_0 = f(M)$  konsistent ist mit der in [Dickey94] explizit angegebenen Lösung des Sonderfalls mit  $M = 2$  Eingängen.<sup>23</sup>

<sup>23</sup> Dort ist nur aus dem Kontext ersichtlich, dass es sich um das EA-IR-Analysemodell handelt.

#### 4.4.2.4 Weitere Interqueue-Disziplinen

Insbesondere bei Systemen mit wenig Warteraum kann die Ressourcenausnutzung von besonderem Interesse sein; beispielsweise um einen möglichst hohen Durchsatz zu gestatten. Die wesentliche Ursache von Minderleistung bei den zuvor untersuchten gepufferten Systemen ist, dass die Gesamtsituation wartender und ankommender Aufträge bei der Warteschlangenauswahl außer Acht gelassen wird. Dies drückt sich z.B. in den Übergangsgleichungen aus, wenn der Systeminhalt am Zeitschlitzende trotz vorhandener Neuankünfte abnimmt (Übergangswahrscheinlichkeiten  $P_{i,i-1}$ ). Sämtliche Ankünfte an nicht bedienten Warteschlangen gehen in diesem Fall wegen Pufferüberlauf zu Verlust, während es an der abgefertigten Warteschlange keinen Nachrücker gibt.

Abhilfe schafft das Vermeiden solcher Situationen, und ein geeignetes Mittel ist die Warteschlangenauswahl gemäß LQFS.<sup>24</sup> Um der LQFS-bedingten Gefahr einer Vernachlässigung schwach ausgelasteter Warteschlangen zu begegnen, und ebenso der zwangsläufig erhöhten Wartedauervarianz (siehe [Kingman62]), kann man verschiedene Disziplinen kombinieren. In Betracht kommt beispielsweise FCFS als Basisstrategie, die solange Anwendung findet, wie LQFS im jeweiligen Zeitschlitz keinen geringeren Zellenverlust bewirken kann. Nur in den übrigen Fällen kommt LQFS zum Zuge [Langer91]. Die Zustandsübergangsmatrix eines solchen Systems lässt sich für beliebige Eingangszahl erneut mit Hilfe der Markov-Kette von **Bild 4.5** sowie der Gleichungen für FCFS-Auswahl und deren Modifikation an allen LQFS-relevanten Stellen wie folgt angeben:

$$P_{i,i+j} = \begin{cases} a_0 + a_1 & \text{falls } i = j = 0, \\ a_{j+1} & \text{falls } i = 0, 1 \leq j \leq M-1, \\ a_{j+1} \binom{M-i}{j+1} / \binom{M}{j+1} + \sum_{n=1}^i a_{n+j} \binom{i}{n} \binom{M-i}{j} / \binom{M}{n+j} & \text{falls } \begin{cases} 1 \leq i \leq M, \\ 0 \leq j \leq M-i, \end{cases} \\ a_0 & \text{falls } 1 \leq i \leq M, j = -1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.20)$$

In der Tat nimmt hier der Systeminhalt nur dann ab, wenn keine Ankünfte eintreffen. Dies bedeutet eine Verringerung der Zellenverluste im Vergleich zur FCFS-Auswahl. Die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten  $q_i$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, M\}$  lassen sich nach dem im Anhang A beschriebenen Verfahren rekursiv ermitteln. Die offenbar hier erstmalig präsentierten exakten, für symmetrische Verkehrslast allgemeingültigen Ergebnisse zur Durchsatzsteigerung und die resultierende Wartedauer werden im übernächsten Abschnitt diskutiert.

<sup>24</sup> Als Interqueue-Disziplin für Multiwarteschlangensysteme wurde LQFS ursprünglich in [Fan91] vorgeschlagen. Dem Vorteil, damit Zellenverlusten in stark belasteten Warteschlangen vorbeugen zu können, steht die Gefahr einer Vernachlässigung schwach ausgelasteter Warteschlangen gegenüber (siehe z.B. [Aldeer10]).

### 4.4.3 Analyse bei sehr großer Eingangsanzahl

Im Grenzfall  $M \rightarrow \infty$  nehmen die in den Abschnitten 4.4.1 und 4.4.2 behandelten LA- und EA-Modellvarianten die Gestalt eines  $M^{[X]}/D/1$ -Systems an. Die Grenzwertbetrachtung der jeweiligen Übergangswahrscheinlichkeiten ergibt Unabhängigkeit von den Ausgangszuständen mit Ausnahme des Leerlaufzustands. Hier unterscheiden sich EA- und LA-Modell in bekannter Weise. Für das EA-Modell gilt

$$\lim_{M \rightarrow \infty} q_n = (1-\rho) e^{(n+1)\rho} \sum_{i=0}^n (-1)^i (\rho e^{-\rho} (n+1-i))^i \left(1 + \frac{i}{\rho(n+1-i)}\right) / i!, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.21)$$

Es sei angemerkt, dass Gleichung (4.21) die geschlossene (und elegantere) Form einer Darstellung aus [Gross74] ist. Herleitung und Beweis hierfür finden sich in [Langer05]. Die ersten zwei Momente der Warteschlangenlänge betragen dem  $M^{[X]}/D/1$ -System entsprechend  $E[Q] = \rho^2 / [2(1-\rho)]$  bzw.  $E[Q^2] = (3\rho^2 - \rho^3 + \rho^4) / [6(1-\rho)^2]$ .

Für die LA-Modelle gilt bei sofortiger und verzögerter Nachbesetzung gleichermaßen

$$\lim_{M \rightarrow \infty} q_n = \begin{cases} 1-\rho & \text{falls } n=0, \\ (1-\rho) e^{n\rho} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (\rho e^{-\rho} (n-i))^i \left(1 + \frac{i}{\rho(n-i)}\right) / i! & \text{falls } n \in \mathbb{N}^+. \end{cases} \quad (4.22)$$

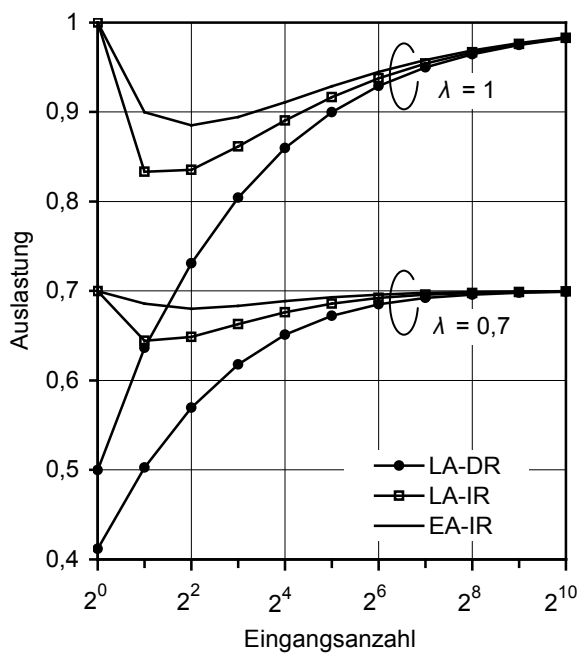
Anzumerken ist hier, dass der Ausdruck (4.22) für  $n \geq 1$  identisch ist mit  $q_{n-1}$  in Gleichung (4.21). Entsprechend dieser Beziehung bzw. der Identität des LA-Modells mit dem EA-Modell bei Betrachtung zwischen Ankunft und Bedienbeginn beträgt die mittlere Warteschlangenlänge  $E[Q] = \rho + \rho^2 / [2(1-\rho)]$ . Die Wartedauerverteilung bei FCFS-Abfertigung ergibt sich aus Gleichung (4.17), mit  $\rho = \lambda \Delta t$  (siehe auch Anhang B). Für die SIRO-Warteschlangenauswahl lässt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer numerisch beschaffen (siehe Abschnitt 4.4.1.1 oder [Karol87]). Bezüglich der Wartedauervarianz gelten die Ausführungen zu  $M^{[X]}/D/1$ -Systemen im Kapitel 4.6.

### 4.4.4 Diskussion von Leistungsgrößen und Modellunterschieden

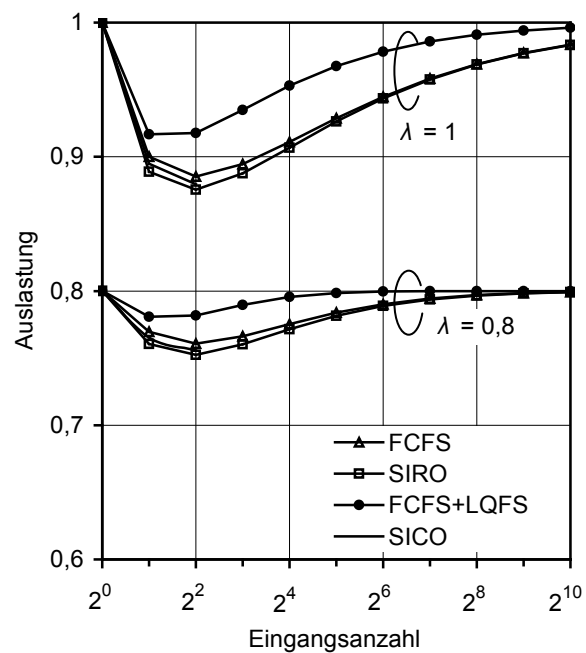
Die im Abschnitt 4.4 ermittelten Kennwerte für Polling-Systeme mit beliebiger Eingangsanzahl bei jeweils einem Warteplatz pro Warteschlange werden im Folgenden zusammengefasst und gegenübergestellt.

Zunächst veranschaulichen **Bild 4.6** und **Bild 4.7** (benachbarte Werte der Auslastung sind durch Geraden verbunden)<sup>25</sup>, dass die Auslastung bei allen verwendeten Modellen mit zuneh-

<sup>25</sup> Sofern die Abszissenachsen weiterer Diagramme in dieser Arbeit diskrete Größen darstellen (Anzahl von Eingängen oder Warteplätzen, Wartedauer als ganzzahliges Vielfaches der Zeitschlitzdauer  $\Delta t$ ), so sind in diesen Diagrammen benachbarte Ordinatenwerte stets geradlinig miteinander verbunden.



**Bild 4.6:** Auslastung (diskrete Werte) der LA- und EA-Modelle mit  $K = 1$  Warteplatz in Abhängigkeit von der Eingangsanzahl für zwei Lastfälle. Beim EA-IR-Modell wurde FCFS-Warteschlangenauswahl angenommen.



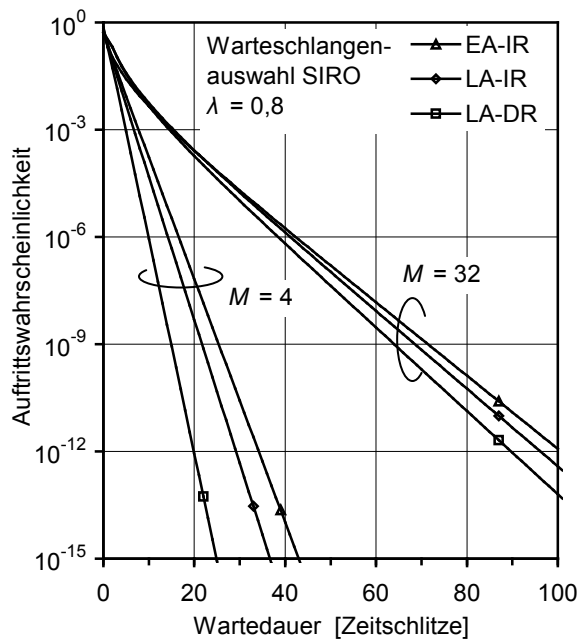
**Bild 4.7:** Vergleich der Auslastung für Multiplexer mit einem Warteplatz je Eingang (EA-IR Modell) bei Warteschlangenauswahl nach FCFS, SIRO und FCFS + LQFS. Dargestellt sind auch Resultate bei SICO-Abfrage, jedoch aus Aufwandsgründen nur für Systeme mit  $M = \{2,4\}$  Eingängen.

mender Eingangsanzahl gegen 100% der Eingangslast  $\lambda$  strebt. Aufgrund der schlechteren Pufferausnutzung liefert das LA-Modell stets einen geringeren Durchsatz als das EA-Modell, insbesondere in der DR-Variante bei kleinen  $M$ , **Bild 4.6**. Die Modellunterschiede verschwinden erst bei sehr großer Eingangsanzahl, weil die Summe der Warteplätze dann einen fast unbegrenzten Puffer bildet. Sie sind also für viele praktische Anwendungsfälle relevant.

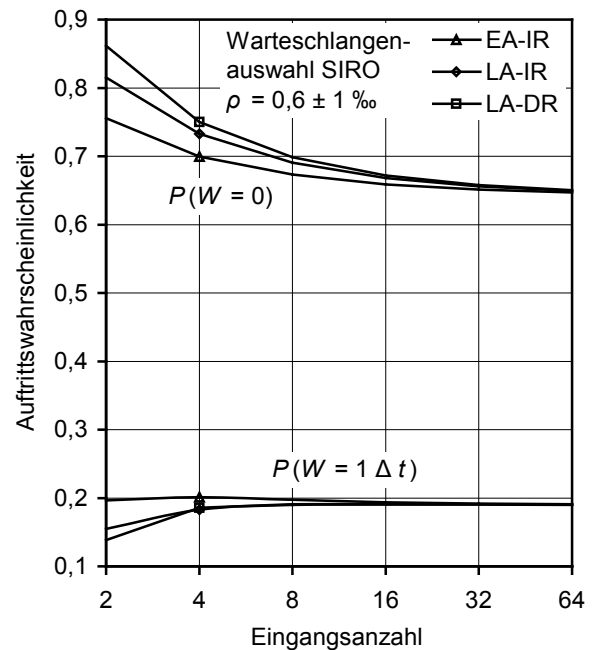
Beide Modelle mit sofortiger Warteplatznachbesetzung (EA-IR, LA-IR) zeigen einen charakteristischen Kurvenverlauf mit einem „Durchsatzeinbruch“ bei Systemen mit  $M \in \{2,3,4\}$  Eingängen. Verantwortlich hierfür ist der Umstand, dass in diesen Systemen bei relativ kleiner Anzahl von Puffer- und Ankunftsständen aus kombinatorischen Gründen Gruppenankünfte häufig auf belegte Warteschlangen treffen. Dabei kann stets nur eine Forderung vom Nachbesetzungsschema profitieren, während die übrigen zu Verlust gehen. Mit zunehmender Eingangsanzahl entzerrt sich diese Situation. Die analytisch exakten Ergebnisse decken sich mit der Simulationsstudie in [Lin05].

**Bild 4.7** zeigt auch, dass sich die Disziplinen FCFS, SIRO und SICO bezüglich Auslastung kaum unterscheiden. Eine signifikante Steigerung ist durch Kombination mit LQFS möglich. Hierdurch erreicht ein Polling-System mit  $M = 2$  Eingängen und jeweils einem Warteplatz z.B. die gleiche Performanz wie ein Zentralpuffer-Multiplexer mit  $K = 2$  Warteplätzen.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer wird von der Auswahlstrategie bestimmt.



**Bild 4.8:** Diskrete Verteilung der Wartedauer bei Anwendung der SIRO-Disziplin unter gleicher Eingangslast für die Modelle EA-IR, LA-IR und LA-DR.



**Bild 4.9:** Diskrete Auftretswahrscheinlichkeiten für Wartedauern von 0 und 1 Zeitschlitz über der Eingangszahl bei SIRO-Abfertigung und nahezu einheitlicher Auslastung.

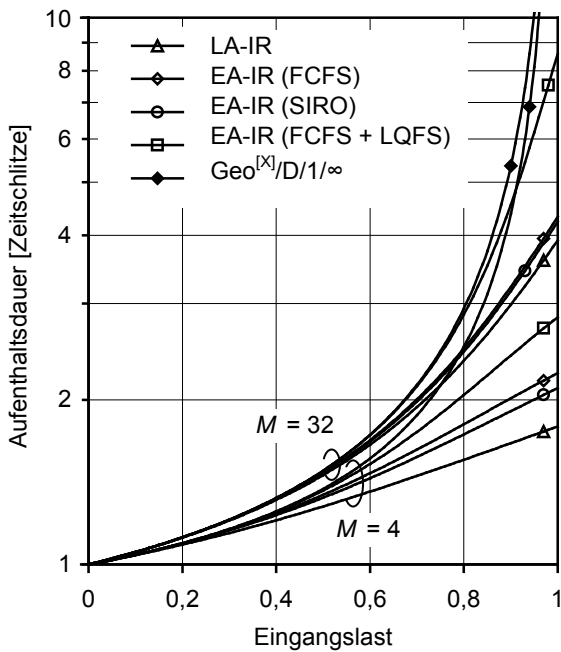
Leicht einzusehen ist, dass unter FCFS die Puffergesamtkapazität ( $MK$ ) die obere Grenze der Wartedauer setzt. Für SIRO-Warteschlangenauswahl veranschaulicht **Bild 4.8** die Unterschiede der Wartedauerwahrscheinlichkeitsverteilung unter einheitlicher (exemplarischer) Eingangslast. Mit zunehmender Eingangszahl nähern sich die Verteilungsfunktionen an, weil die Modellunterschiede dann generell geringer werden (siehe Auslastung). Ein naheliegender Grund für die deutlichen Unterschiede bei kleinen Systemen ist die unterschiedliche Auslastung bei hohem, identischem Verkehrsangebot.<sup>26</sup> Doch auch die Ausklammerung dieses Effektes durch Herbeiführen einer (nahezu) einheitlichen Auslastung<sup>27</sup> beseitigt die Unterschiede nicht gänzlich. Die bei kleinen Systemen verbleibenden Differenzen in der Wartedauerwahrscheinlichkeit illustriert **Bild 4.9** für Wartedauerwahrscheinlichkeiten von 0 und 1 Zeitschlitz bei annähernd identischer Auslastung.<sup>28</sup> Etwa ab  $M > 16$  verschwindet der Modellierungseinfluss und es ergeben sich kaum zu unterscheidende Verteilungen.

Die Aufenthaltsdauer als Funktion des Angebots veranschaulicht **Bild 4.10** exemplarisch für Systeme mit geringer und großer Eingangszahl. Ersichtlich ist, dass die verschiedenen Modellvarianten relativ wenig Einfluss auf die mittlere Aufenthaltsdauer einer Zelle haben. Eine Ausnahme bildet die Abfertigung mit optimiertem Durchsatz. Im Hochlastfall erhöht sich hierbei die Aufenthaltsdauer je nach Eingangszahl um rund 50 - 100% im Vergleich zu den

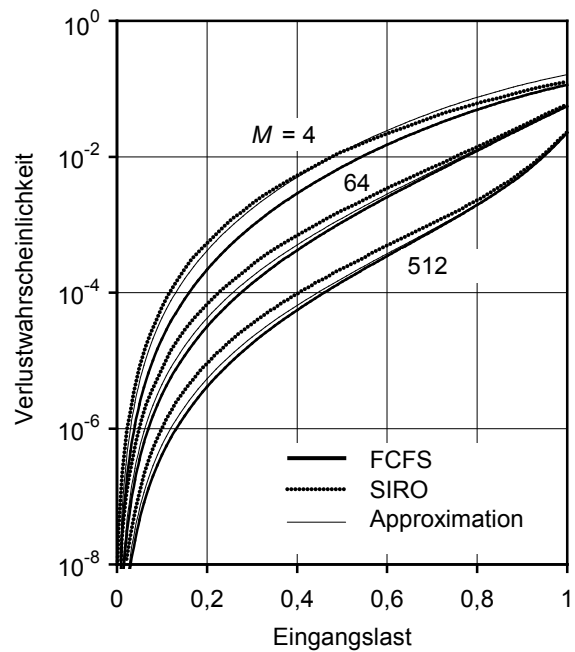
<sup>26</sup> Natürlich verschwinden die Unterschiede bei geringer Verkehrslast.

<sup>27</sup> Aus Bild 4.6 ist ersichtlich, dass die betrachteten Modelle bei beliebiger Eingangszahl  $M > 1$  unter Vollast ( $\lambda = 1$ ) stets Auslastungen  $\rho > 0,6$  erreichen. Deshalb wurde im Bild 4.9 als Vergleichsgröße  $\rho \approx 0,6$  gewählt.

<sup>28</sup> Die Wahrscheinlichkeitsunterschiede für Wartedauern von mehreren Zeitschlitzen fallen geringer aus.



**Bild 4.10:** Mittlere Aufenthaltsdauer für verschiedene Polling-Systemmodelle mit geringer bzw. hoher Eingangszahl und  $K = 1$  Warteplatz je Puffer. Die obere Grenze liefert das  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/\infty$ -System.



**Bild 4.11:** Vergleich der Verlustwahrscheinlichkeit bei Systemen mit  $K = 1$  Warteplatz je Eingang und SIRO- bzw. FCFS-Abfertigung. Dünne Linie: Approximation durch ein  $\text{Geo}/\text{Geo}/1/K$ -FCFS-System.

übrigen Systemen, was auf die höhere Auslastung zurückzuführen ist.

**Bild 4.11** zeigt die nach den Gleichungen (4.4) und (4.5) ermittelte Zellenverlustwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Eingangslast im EA-IR-Modell bei unterschiedlicher Eingangszahl und FCFS- bzw. SIRO- Auswahlstrategie. Über den gesamten Lastbereich zeigen sich bei  $K = 1$  Warteplatz je Warteschlange nur sehr geringe Unterschiede. Dieser Umstand wird im nächsten Unterkapitel genutzt, um die Analyse von Polling-Systemen mit größerem Warteraum ( $K > 1$ ) zu vereinfachen. Im Hinblick darauf enthält **Bild 4.11** auch die Verlustwahrscheinlichkeit eines  $\text{Geo}/\text{Geo}/1/1$ -Systems, dessen Bediendauer durch die Aufenthaltsdauer im entsprechenden (hier exakt analysierten) Polling-System approximiert wurde.

#### 4.5 Performanz von Systemen mit beliebiger endlicher Warteplatzanzahl

In den vorherigen Abschnitten war die Warteschlangendisziplin wegen  $K \in \{0,1\}$  für die Bestimmung des Systeminhalts mit dem LA-Modell nicht von Bedeutung. Bei  $K \geq 2$  Warteplätzen je Warteschlange<sup>29</sup> beeinflusst sie aber im LA- wie auch im EA-Modell beispielsweise die Wartedauer und deren Wahrscheinlichkeitsverteilung maßgeblich. Des Weiteren muss nunmehr bei beiden Modellen sorgfältig unterschieden werden zwischen der Interqueue-Disziplin und der Warteschlangendisziplin, die in der vorliegenden Arbeit für alle Warteschlangen einheitlich FCFS sei (siehe Kapitel 4.1). Für bestimmte Anwendungen sind auch andere

<sup>29</sup> Die Anzahl der Warteplätze  $K$  sei für alle Warteschlangen einheitlich.

Disziplinen denkbar, z.B. SIRO oder LCFS, wenn eine entsprechende Gesamtdisziplin erzielt werden soll. So resultiert gemäß **Tabelle 4.2** aus der zufallsbasierten Warteschlangenabfrage und der SIRO-Warteschlangendisziplin die globale SIRO-Disziplin (G-SIRO), bei der zur Abfertigung eine Forderung aus dem gesamten Systeminhalt ausgewählt wird. Die Kombination von SIRO-Interqueue- und FCFS-Warteschlangendisziplin ergibt indessen die HoL-SIRO-Abfertigung, d.h. eine Zufallsauswahl aus den Aufträgen, die sich am Kopf der Warteschlangen befinden. Im Gegensatz zu G-SIRO gewährleistet HoL-SIRO, dass die Aufträge einer bestimmten Warteschlange stets in der Reihenfolge ihres Eintreffens bedient werden, d.h. Überholvorgänge ausgeschlossen sind. Ignoriert wird hier allerdings im Unterschied zu FCFS die zeitliche Relation von Forderungen, die sich in verschiedenen Warteschlangen befinden. So kann es durchaus vorkommen, dass ein Auftrag, der bei Ankunft eine leere Warteschlange vorfindet, unmittelbar bedient wird, während in anderen Puffern früher angekommene Aufträge warten müssen. Damit steht fest, dass die Interqueue-Disziplin SIRO per se eine größere Wartedauervarianz als FCFS hervorruft. Die exakte Analyse gestaltet sich schwierig und aufwändig. Für die Analysen in diesem und dem nächsten Unterkapitel werden als resultierende Abfertigungsdisziplinen nach **Tabelle 4.2** FCFS, HoL-SIRO, G-SIRO sowie LQFS verwendet. Etwas ausführlicher untersucht wird HoL-SIRO, da diese Disziplin im Hinblick auf die analytische Behandlung, Implementierung und Anwendungsbreite besonders interessant erscheint. Eine Sonderstellung nehmen Polling-Systeme mit  $M = 2$  Eingängen ein, die im nächsten Abschnitt eingehender betrachtet werden.

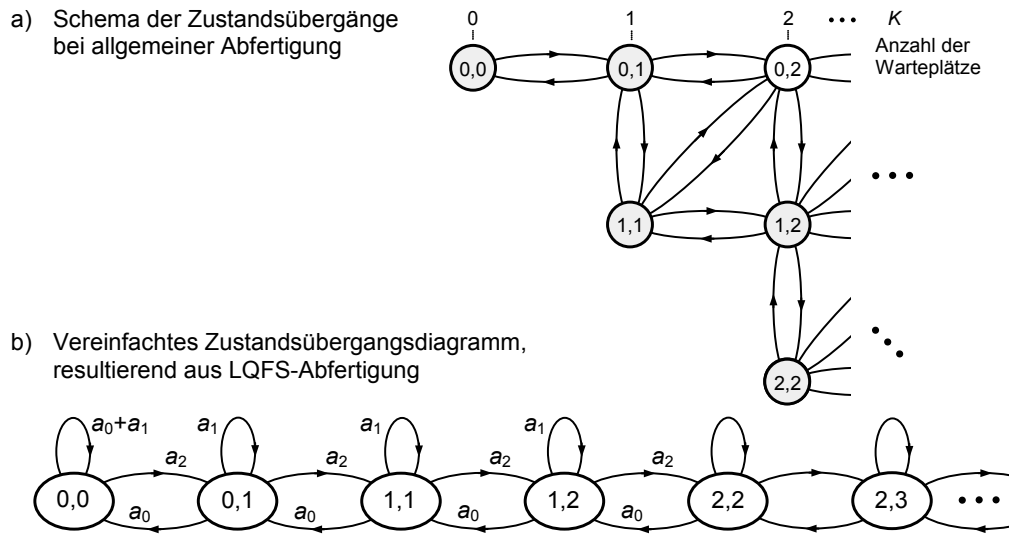
Interqueue-Disziplin	FCFS <sup>30</sup>	LQFS	SIRO	SIRO	LCFS <sup>30</sup>
Warteschlangendisziplin	FCFS	FCFS	FCFS	SIRO	LCFS
Resultierende Disziplin	FCFS	LQFS	Head-of-Line SIRO (HoL-SIRO)	Global SIRO (G-SIRO)	LCFS

**Tabelle 4.2:** Einige Beispiele von Abfertigungsdisziplinen, wie sie aus dem Zusammenwirken von Warteschlangenabfrage und Warteschlangendisziplin resultieren. Zur Präzisierung muss bei der SIRO-Abfrage stets zwischen HoL-SIRO und G-SIRO unterschieden werden.

#### 4.5.1 Systeme mit zwei Eingängen

Ein zustandsreduziertes Modell für Polling-Systeme mit zwei Warteschlangen und beliebiger Interqueue-Disziplin, welches zwecks Vereinfachung die angenommene Verkehrssymmetrie ausnutzt, zeigt **Bild 4.12** (a). Die Anzahl von  $\sum_{i=0}^K \binom{M-1+i}{i} = (M+K)! / (M!K!)$  Systemzuständen bei diesem Modell verdeutlicht, dass damit nur kleine Systeme mit geringer Pufferkapazität handhabbar sind. So gelingen im Falle der HoL-SIRO- oder SICO-Disziplin geschlossene Lösungen mit vertretbarem Aufwand nur für kleine Pufferkapazitäten ( $K \leq 4$ ). Darüber hinaus kommen mit diesem systematischen Modell numerische Untersuchungen in Betracht. Im

<sup>30</sup> Als Auswahlkriterium genügt die zeitliche Relation der Forderungen auf HoL-Positionen.



**Bild 4.12:** Zustandsübergangsdiagramm für einen 2:1-Multiplexer (EA-IR-Modell) mit beliebigem symmetrischem Warteraum unter symmetrischer, generell-verteilter Verkehrslast und LQFS-Abfertigung. Die Zustandsbezeichnung entspricht der Auftragsanzahl in beiden Puffern. Die Interqueue-Disziplin bewirkt bei diesem Sonderfall, dass zahlreiche Zustände symmetrisch oder gar nicht auftreten. Die resultierende einlinige Markov-Kette repräsentiert den Systeminhalt (ungleiche Inhalte verkörpern jeweils 2 gleichwahrscheinliche Mikrozustände).

Sonderfall  $M = 2$  ermöglicht die Warteschlangenauswahl gemäß LQFS eine gravierende Vereinfachung, weil sämtliche Zustände mit einer Differenz der Warteschlangeninhalte von  $\geq 2$  Zellen nicht auftreten, **Bild 4.12** (b). Die resultierende einlinige Markov-Kette weist  $2K + 1$  Zustände auf, die dem Systeminhalt entsprechen.<sup>31</sup> Offensichtlich handelt es sich hierbei um das zeitdiskrete Äquivalent des klassischen M/M/1/K-Systems.

Für das betrachtete Polling-System mit begrenztem Warteraum und beliebiger Verteilung der Ankunftsgruppengröße wird hier erstmals die geschlossene Lösung präsentiert. Damit steht ein präzises Resultat zur Verfügung, dass als Richt- bzw. Grenzwert für andere Systemdimensionen mit  $M > 2$  und beliebiger Wartekapazität dienen kann. Nach [Kleinrock75] ergeben sich mit dem EA-IR-Modell die Zustandswahrscheinlichkeiten für den Inhalt des Gesamtsystems zu

$$q_{n(\text{EA-IR})} = q_0 \left( \frac{a_2}{a_0} \right)^n = \frac{1 - a_2/a_0}{1 - (a_2/a_0)^{2K+1}} \left( \frac{a_2}{a_0} \right)^n, \quad n = 0, 1, \dots, 2K, \quad K \in \mathbb{N}. \quad (4.23)$$

Gleichung (4.23) trifft auf beliebige Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Ankunftsgruppengröße zu, sofern die Ergodizitätsbedingung  $a_2/a_0 < 1$  erfüllt ist. Die Leerlaufwahrscheinlichkeit – und damit der Durchsatz – sind identisch mit den Werten des Zentralpuffer-Multiplexers bei gleicher Gesamtkapazität von  $2K$  Zellen (siehe Kapitel 5 sowie [Langer05]). Im Fall  $K = 1$  ist sie ebenfalls identisch mit der Lösung für das einfach gepufferte Polling-System aus Kapitel 4.4.2.4 bei kombinierter FCFS-LQFS-Warteschlangenauswahl. Leicht ersichtlich ist

<sup>31</sup> Wegen der Partitionierungseigenschaften des Systeminhalts ist dies nur im Fall  $M = 2$  unter LQFS möglich.



$\lim_{K \rightarrow \infty} q_0 = 1 - a_2/a_0$ . Für die Zellenverlustwahrscheinlichkeit gilt  $p_v = 1 - (1 - q_0 a_0)/(\lambda \Delta t)$  bzw. aus Sicht (logisch) separierter Warteschlangen  $p_v = q_{2K}(\frac{1}{2} a_2)/(\frac{1}{2} \lambda \Delta t)$ . Danach werden beispielsweise  $K = 23$  Wartelätze benötigt, um bei Eingangslasten  $\lambda \leq 0,9$  die Zellenverlustwahrscheinlichkeit auf  $p_v < 10^{-9}$  zu begrenzen.

Der Vollständigkeit halber seien auch die Zustandswahrscheinlichkeiten im LA-IR-Modell genannt; sie sind gegeben durch

$$q_{0(\text{LA-IR})} = \frac{a_0 - a_2}{1 - \frac{1 - (a_0 - a_2)}{1 + (a_0 - a_2)} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^{2K-1}}, \quad q_{1(\text{LA-IR})} = q_{0(\text{LA-IR})} (1 - a_0)/a_0, \quad (4.24)$$

$$q_{n(\text{LA-IR})} = q_{0(\text{LA-IR})} \frac{a_2^{n-1}}{a_0^n}, \quad n = 2, 3, \dots, 2K, \quad K \in \mathbb{N}^+.$$

#### 4.5.2 Systeme mit mehr als zwei Eingängen

Eine vereinfachte Untersuchung von Polling-Systemen mit beliebiger Eingangsanzahl und endlicher Pufferkapazität ermöglicht die Annahme statistisch unabhängiger Inhalte in den  $M$  Warteschlangen mit jeweils  $K$  Warteplätzen. Tatsächlich trifft dies aber nur auf den Fall  $M \rightarrow \infty$  zu. Die hierauf basierende approximative Analyse konzentriert sich im Folgenden auf eine typische Warteschlange  $j \in \{1, 2, \dots, M\}$ , deren Inhalt nach der FCFS-Warteschlangendisziplin abgefertigt wird. Aus der Menge aller Warteschlangen, die mindestens eine Forderung enthalten, wird die Warteschlange  $j$  nach dem SIRO-Prinzip bedient. Insgesamt resultiert daraus eine HoL-SIRO-Abfertigung (siehe **Tabelle 4.2**). Aus Perspektive der betrachteten Warteschlange  $j$  ergibt sich dann eine geometrisch verteilte Bediendauer, sodass sich diese Warteschlange als Geo/Geo/1/K-System mit FCFS-Abfertigung analysieren lässt. Modelliert wird das System als zeitdiskrete Markov-Kette mit  $K + 1$  Zuständen, die den Inhalt  $Q$  der betrachteten Warteschlange mit den Zustandswahrscheinlichkeiten  $q_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, K$ , repräsentieren. Forderungen treffen hierbei an der Warteschlange mit den Bernoulli-Ankunftswahrscheinlichkeiten  $a_k = P\{A = k\} = p^k (1 - p)^{1-k}$ ,  $k \in \{0, 1\}$  ein, wobei  $p = \lambda \Delta t / M$  ist. Die Wahrscheinlichkeit  $s$ , dass die betrachtete Warteschlange in einem gegebenen Zeitschlitz Service erhält, beträgt  $s = \Delta t / t_s$ , wobei  $t_s$  die (virtuelle) Bediendauer des Geo/Geo/1/K-Systems angibt. Hierauf wird weiter unten eingegangen. Die Zustandswahrscheinlichkeiten des Systems (zeitdiskretes M/M/1/K-Äquivalent) betragen nach dem EA-IR- bzw. LA-IR-Modell (siehe z.B. [Kolias99])

$$q_{n(\text{EA-IR})} = \frac{1 - \{p(1-s)/s(1-p)\}}{1 - \{p(1-s)/s(1-p)\}^{K+1}} \left( \frac{p(1-s)}{s(1-p)} \right)^n, \quad n = 0, 1, \dots, K, \quad K \in \mathbb{N}, \quad (4.25)$$

bzw.

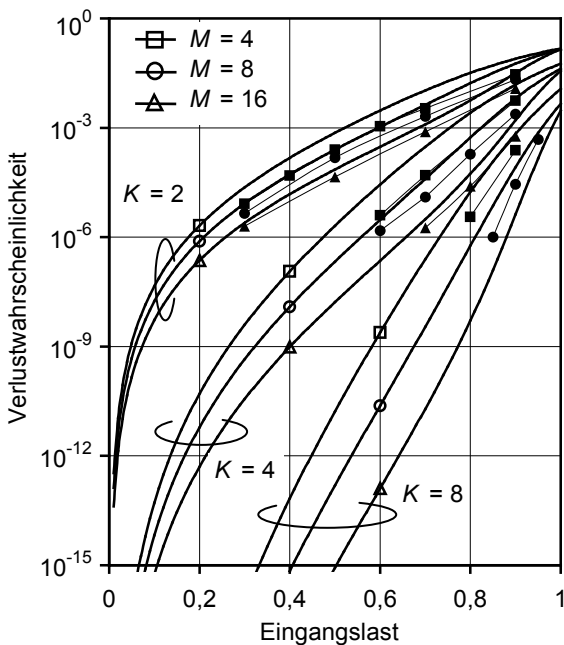
$$q_{0(\text{LA-IR})} = (s - p) / \left( s - p \left\{ \frac{p(1-s)}{s(1-p)} \right\}^K \right), \quad q_{n(\text{LA-IR})} = \frac{q_{0(\text{LA-IR})}}{1 - s} \left( \frac{p(1-s)}{s(1-p)} \right)^n, \quad \begin{cases} n = 1, 2, \dots, K, \\ K \in \mathbb{N}^+. \end{cases} \quad (4.26)$$

Die Ermittlung der Servicedauer  $t_s$  beruht auf dem Ansatz, ein Hilffsystem zu verwenden, das die Verhältnisse auf den Warteschlangen-Kopfpositionen des Polling-Systems möglichst gut nachbildet. Die mittlere Aufenthaltsdauer  $T$  einer Zelle in diesem (virtuellen) Bediensystem entspricht dabei der Bediendauer  $t_s$  im Polling-System. Approximiert wird der Prozess auf den  $M$  HoL-Positionen mithilfe eines Geo<sup>[X]</sup>/D/1/K-Gruppenankunftssystems, dessen Warteschlange über  $K=M$  Warteplätze (entsprechend der  $M$  HoL-Positionen) verfügt. Analysemodell und Warteplatznachbesetzungsschema orientieren sich dabei an dem zu analysierenden Polling-System. Eine geschlossene Lösung für  $T$  wird in Kapitel 5.2.2 dieser Arbeit bereitgestellt. Die Wahrscheinlichkeit, dass die betrachtete Warteschlange in einem gegebenen Zeitschlitz bedient wird, beträgt damit  $s = \Delta t/T$ .

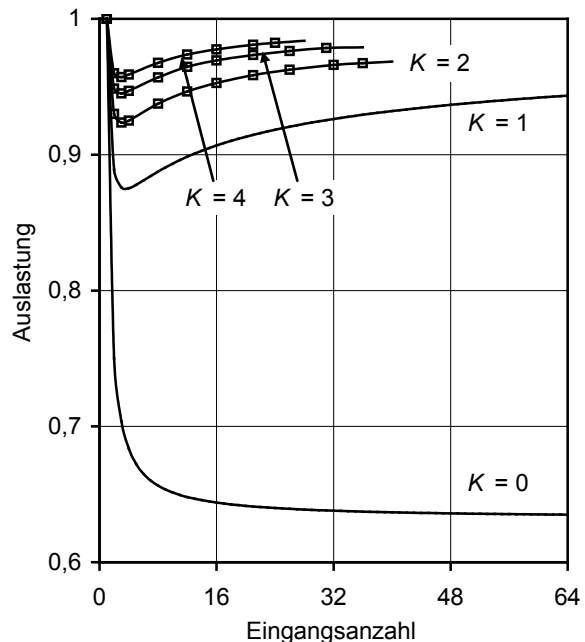
Die Qualität dieser Verfahrensweise soll hier anhand der Zellenverlustwahrscheinlichkeit im EA-IR-Modell überprüft werden. Zu Verlust geht eine ankommende Forderung in dem Geo/Geo/1/K-System immer dann, wenn sich die Warteschlange im Zustand  $q_K$  befindet – also vollständig gefüllt ist – und im Ankunftszeitschlitz nicht abgefertigt wird. Folglich trägt die Verlustwahrscheinlichkeit.

$$p_v = q_K(1-s). \tag{4.27}$$

Die so mit Hilfe der Gleichungen (4.25) und (4.27) approximierten Zellenverlustwahrscheinlichkeiten



**Bild 4.13:** Approximierte Zellenverlustwahrscheinlichkeit für verschiedene Systemdimensionen (EA-IR-Modell) und Vergleich mit Simulationsergebnissen (dunkle Punkte). Die 95%-Konfidenzintervalle der Werte aus der Simulation betragen ca. ± 10%; sie sind damit kleiner als die Datenpunktmarkierungen. Die verwendete Bediendauer pro Zelle stammt aus dem Zentralpuffer-Modell mit  $K = M$  Warteplätzen.



**Bild 4.14:** Systemauslastung als (diskrete) Funktion der Eingangszahl  $M$  für verschiedene Pufferkapazitäten und HoL-SIRO-Abfertigung im EA-IR-Modell. Die Resultate für  $K = \{0, 1\}$  sind exakt, die Kurven für  $K > 1$  wurden per Simulation gewonnen. Konfidenzintervalle sind nicht dargestellt, weil sie marginal sind (95%-Intervalle  $< \pm 0,0005$  der dargestellten Werte).

lichkeit ist im **Bild 4.13** als Funktion der Eingangslast bei unterschiedlicher Eingangs- und Warteplatzanzahl dargestellt. Die zur Überprüfung ermittelten Simulationsergebnisse sind ebenfalls im Diagramm enthalten. Der beispielhafte Vergleich in **Bild 4.13** belegt, dass sich die analytische Lösung sehr gut eignet, um bei Zellen-Multiplexern mit  $M > 2$  Eingängen ( $M = 2$  siehe Abschnitt 4.5.1) gerade den Bereich sehr geringer Zellenverlustwahrscheinlichkeiten (bei kleinem bzw. mittlerem Angebot), der sich einer hinreichend genauen simulativen Untersuchung innerhalb angemessener Ausführungsdauer entzieht, konservativ zu approximieren. Die Pufferkapazität hat offenbar auf die Akkuratessse keinen nennenswerten Einfluss. Für Polling-Systeme mit  $K = 1$  Warteplatz je Eingang enthält **Bild 4.11** zum Vergleich mit den exakten Zellenverlustwahrscheinlichkeiten auch die entsprechenden Resultate der hier beschriebenen Approximation. Entgegen der vorherigen Diskussion lässt sich der Bereich hoher Verkehrslast mühelos auf dem Wege der Simulation erschließen. Als Beispiel ist in **Bild 4.14** die Auslastung als Funktion der Eingangsanzahl für unterschiedliche Pufferkapazitäten dargestellt. Die Simulationsergebnisse belegen, dass sich der charakteristische Kurvenverlauf für Polling-Systeme mit  $K = 1$  Warteplatz je Eingang (siehe auch **Bild 4.6** und **Bild 4.7**) bei größeren Pufferkapazitäten fortsetzt.

#### 4.6 Performanz von Systemen mit unbegrenztem Warteraum

Für die Analyse von Polling-Systemen mit unbegrenztem Warteraum (Skizze in **Bild 4.1** mit  $K \rightarrow \infty$ ), ist unter symmetrischer Verkehrslast und bei gleichartiger Abfertigung aller  $M$  Warteschlangen mit einer unparteiischen Disziplin (z.B. FCFS oder G-SIRO) keine individuelle Betrachtung der einzelnen Warteschlangen des Systems erforderlich.<sup>32</sup> Das Systemverhalten ist vollkommen identisch mit dem eines idealen Multiplexers mit zentralem Puffer [DelRe93], [Kolias96]. Der Zellen-Multiplexer des Polling-Typs lässt sich mithin als Gruppenankunfts-Wartesystem interpretieren und mit Hilfe des Geo<sup>[X]</sup>/D/1-Modells exakt analysieren (siehe Kapitel 5). Ob hierbei das zeitdiskrete EA- oder LA-Modell gewählt wird, ist nur für die Analyse des gesamten Systeminhalts (vor bzw. nach den Ankunftszeitpunkten) relevant. Bei Abfertigung mit einer beliebigen (unparteiischen) Disziplin beträgt die mittlere Gesamtlänge aller Warteschlangen

$$E[Q]_{EA} = \frac{M-1}{M} \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \quad \text{bzw.} \quad E[Q]_{LA} = \frac{M-1}{M} \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho, \quad (4.28)$$

wobei  $\rho = \lambda \Delta t$  gilt. Der Inhalt einer einzelnen Warteschlange lässt sich mittels Partitionierung des Gesamtinhalts ermitteln. Die mittlere Wartedauer beträgt bei Betrachtung vor Ankunft (EA-Modell) nach dem Gesetz von Little

<sup>32</sup> Eine Ausnahme bildet z.B. die Untersuchung der Warteschlangenlänge im Falle eines unsymmetrischen Verkehrsangebots, das in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet wird.

$$E[W] = \frac{M-1}{M} \frac{\rho \Delta t}{2(1-\rho)} = \frac{M-1}{M} E[W]_{M/D/1} \quad (4.29)$$

Zeitschlitz, wobei leicht einzusehen ist, dass sich die Wartedauer bei großer Eingangsanzahl  $M$  dem Betrag des M/D/1-Systems nähert. Je nach Abfertigungsdisziplin ergeben sich natürlich unterschiedliche höhere Momente der Wartedauer. Diese werden in den zwei folgenden Abschnitten näher betrachtet.

#### 4.6.1 Einfluss der Abfertigungsreihenfolge

Gemäß der Übersicht in **Tabelle 4.2** entsprechen FCFS- und G-SIRO-Abfertigung bei Polling-Systemen der FCFS- bzw. SIRO-Bedienung beim Zellen-Multiplexer mit zentraler Warteschlange. Infolgedessen gelten die in Kapitel 5 für den Zellen-Multiplexer mit unbegrenzter Zentralwarteschlange ermittelten exakten Wahrscheinlichkeitsverteilungen hier uneingeschränkt (siehe auch tabellarische Übersicht in Anhang D). Diskutiert werden beide Disziplinen im Folgenden aus der Perspektive eines Polling-Systems. Ausgehend hiervon wird dann mit einem approximativen Ansatz die Wartedauervarianz für die Auftragsabfertigung gemäß HoL-SIRO analysiert. Die Erkenntnisse ermöglichen ausgezeichnete Schlussfolgerungen für schwieriger analysierbare Interqueue-Disziplinen wie z.B. SICO.

Bei FCFS-Betrieb des Polling-Systems gelangt jedes Mitglied einer ankommenden Auftragsgruppe in die dem betreffenden Eingang zugeordnete Warteschlange. Dort können die Aufträge auf eine unterschiedliche Anzahl wartender Forderungen treffen, die zunächst in der Reihenfolge ihres Eintreffens abgefertigt werden müssen. Dies beansprucht die Zeitspanne  $W_0$ . Sobald die Bedienung der betrachteten Auftragsgruppe beginnt, müssen sich zwangsläufig alle Aufträge dieser Gruppe auf Kopfpositionen der Warteschlangen befinden.<sup>33</sup> Die Abfertigung der gleichzeitig eingetroffenen Aufträge findet dann in zufälliger Reihenfolge statt, sodass sich für ein typisches Gruppenmitglied bis zum Servicebeginn ein weiterer Wartedaueranteil  $W_1$  ergibt. Aus der Summe beider Zeitabschnitte ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer gemäß Anhang C (wie beim unbegrenzten Zentralpuffer-Multiplexer).<sup>34</sup> Auch die höheren Momente können direkt vom Zentralpuffer-Multiplexer übernommen werden. So beträgt die Wartedauervarianz bei unbegrenztem Warteraum im Geo<sup>[X]</sup>/D/1-System (siehe Kapitel 5 sowie [Kruskal88])

<sup>33</sup> Besteht die beobachtete Gruppe aus  $A < M$  Aufträgen, so können die Kopfpositionen der übrigen  $M - A$  Warteschlangen durchaus mit Zellen besetzt sein, die zu einem späteren Zeitpunkt angekommen sind.

<sup>34</sup> Während die zufällige Reihenfolge der Aufträge einer Gruppenankunft beim Multiplexer mit Zentralpuffer schon durch entsprechendes Einreihen in die Warteschlange zustande kommt, kann beim Polling-System eine Zufallsauswahl gleichzeitig eingetroffener Aufträge erst bei der Abfertigung erfolgen. Die zeitliche Reihenfolge, in der die Summanden  $W_0$  und  $W_1$  wirksam werden, ist mithin bei beiden Systemen vertauscht.

$$\text{var}[W]_{\text{FCFS}} = \frac{M-1}{M^2} \frac{6M\rho - 5(M+1)\rho^2 + 2(M+1)\rho^3}{12(1-\rho)^2} (\Delta t)^2 \quad (4.30)$$

bzw.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{var}[W]_{\text{FCFS}} = \frac{6\rho - 5\rho^2 + 2\rho^3}{12(1-\rho)^2} (\Delta t)^2 = \text{var}[W]_{\text{M/D/1-FCFS}} + \frac{\rho}{6} (\Delta t)^2. \quad (4.31)$$

Bei der G-SIRO-Abfertigung nehmen alle wartenden Aufträge am Auswahlprozess teil. Für Zellen-Multiplexer ist diese Disziplin unter Performanz-Aspekten kaum zweckmäßig (siehe Kapitel 5.2.3), eine Betrachtung unterstützt aber die im nächsten Abschnitt folgende Analyse der HoL-SIRO-Abfertigung. Die mittlere Wartedauer gemäß Gleichung (4.29) gilt auch bei Service nach dem G-SIRO-Prinzip. Eine feste Beziehung zwischen den zweiten Momenten der Wartedauer (siehe Kapitel 4.6.2 und 5.2.3) liefert zusammen mit Gleichung (4.30) die Varianz der Wartedauer bei G-SIRO-Abfertigung

$$\text{var}[W]_{\text{G-SIRO}} = \frac{M-1}{M^2} \frac{12M\rho - 4(M+5/2)\rho^2 + (M+1)\rho^3}{12(1-\rho)^2(2-\rho)} (\Delta t)^2 \quad (4.32)$$

(siehe auch Anhang D). Die obere Grenze wird hierbei markiert durch

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \text{var}[W]_{\text{G-SIRO}} = \frac{12\rho - 4\rho^2 + \rho^3}{12(1-\rho)^2(2-\rho)} (\Delta t)^2 = \text{var}[W]_{\text{M/D/1-SIRO}} + \frac{\rho}{6} \frac{2+\rho}{(1-\rho)(2-\rho)} (\Delta t)^2. \quad (4.33)$$

Bei großer Eingangsanzahl  $M$  gilt dann  $\lim_{M \rightarrow \infty} E[W] = E[W]_{\text{M/D/1}} = \rho\Delta t/2(1-\rho)$  Zeitschlitzze bzw.  $\lim_{M \rightarrow \infty} T = T_{\text{M/D/1}} = \Delta t + E[W]_{\text{M/D/1}} = \Delta t(2-\rho)/2(1-\rho)$ . Dies bedeutet zugleich, dass sich ein Polling-System mit vielen Eingängen und unbegrenzter Pufferkapazität aus Sicht einer einzelnen Warteschlange als M/D/1-System darstellt. Die Bediendauer  $t_s$  einer Warteschlange ist also identisch mit der Aufenthaltsdauer  $T_{\text{M/D/1}}$ . Die Wartedauer eines Auftrags zwischen Ankunft und Vorrücken auf die Kopfposition seiner Warteschlange beträgt damit  $W_0 = 0$ , d.h. ankommende Aufträge gelangen direkt auf HoL-Positionen. Zurückzuführen ist dies darauf, dass sich bei symmetrischer Last die Ankünfte mit höchster Dispersion auf die Multiplexer-Eingänge verteilen und daher allesamt leere Warteschlangen vorfinden. Das Polling-System wird dann bereits mit  $K=1$  Warteplatz je Puffer (was in summa unendliche Pufferkapazität bedeutet) zum reinen Wartesystem; gleiches gilt natürlich auch für eine größere Anzahl von Warteplätzen pro Warteschlange, d.h.  $K \in \mathbb{N}^+$  (siehe Kapitel 4.4.4,  $\rho(K=1)$ , bzw. Kapitel 4.5.2). Infolgedessen entspricht die G-SIRO-Disziplin im Fall sehr großer Eingangsanzahl voll und ganz der HoL-SIRO-Auswahl. Bezüglich der Eingangsanzahl stellt die G-SIRO-Abfertigung mithin den Grenzfall der HoL-SIRO-Bedienung dar, der mit Gleichung (4.33) die obere Grenze der Wartedauervarianz beschreibt.

Für kleinste und größte Systeme ( $M = \{2, \infty\}$ ) ist in **Bild 4.15** die Wartedauervarianz bei G-SIRO-Abfertigung im Vergleich zu FCFS über der Ankunftsrate dargestellt. Natürlich variiert die Wartedauer bei kleiner Verkehrslast unter G-SIRO nur geringfügig stärker als unter FCFS, weil sich nur selten mehrere Aufträge gleichzeitig im System aufhalten. Bei höherer Last zeigen sich deutlichere Unterschiede zwischen beiden Disziplinen, diese sind aber offensichtlich nicht sehr stark von der Eingangsanzahl  $M$  abhängig.

#### 4.6.2 Head-of-Line Service in zufälliger Reihenfolge

Die auf den HoL-Positionen der Warteschlangen in einem Polling-System befindlichen Forderungen haben die längste lokale Wartedauer (pro Warteschlange), und stets ist einer dieser Aufträge der im gesamten System am längsten wartende.<sup>35</sup> Insofern weist die HoL-SIRO-Disziplin eine gewisse FCFS-Orientierung auf, die abhängig von der Eingangsanzahl  $M$  mehr oder weniger stark ausgeprägt ist.<sup>36</sup> Für die Wartedauervarianz gilt deshalb  $\text{var}[W]_{\text{FCFS}} \leq \text{var}[W]_{\text{HoL-SIRO}} \leq \text{var}[W]_{\text{G-SIRO}}$ . Die exakte Bestimmung bei Systemen mit endlicher Eingangsanzahl  $M$  gestaltet sich schwierig, denn mit den Inhalten der Warteschlangen ist auch die Anzahl der belegten HoL-Plätze abhängig vom Inhalt des Gesamtsystems. Numerische Approximationen der Bediendauer und deren Varianz (aus Sicht einer typischen Warteschlange) sind z.B. in [DelRe93] zu finden. Der dort verwendete Ansatz vernachlässigt allerdings die erwähnte Abhängigkeit, und demzufolge zeigen die Ergebnisse im oberen Auslastungsbereich (etwa ab  $\rho > 0,75$ ) erhebliche Ungenauigkeiten.<sup>37</sup>

Der in dieser Arbeit gewählte Ansatz beruht darauf, dass sich nach [Fuhrmann91] Bediendisziplinen in  $M/G/1$ -Systemen mit Hilfe zweier Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  beschreiben lassen. Den Ausführungen von Fuhrmann folgend existiert für jede reelle Zahl  $0 \leq \alpha \leq 1$  eine (individuelle) Bediendisziplin – im Folgenden gekennzeichnet durch den Index „X“, und mit jeder dieser Disziplinen wird die Beziehung

$$\beta_x = 1/(1 - \alpha_x \rho), \quad 0 \leq \alpha_x \leq 1, \quad (4.34)$$

erfüllt. Des Weiteren hängen die zweiten Momente der Wartedauer in  $M/G/1$ -Systemen bei Anwendung von FCFS bzw. einer alternativen Bediendisziplin X über die Beziehung  $E[W^2]_X = \beta_x E[W^2]_{\text{FCFS}}$  zusammen. Aus **Tabelle 4.3** ist ersichtlich, dass die Extremwerte  $\alpha = \{0, 1\}$  den Disziplinen FCFS bzw. LCFS zuzuordnen sind, während G-SIRO durch  $\alpha = 1/2$  gekennzeichnet ist. Dieser Zusammenhang trifft nach [Kawasaki00] auch auf  $M^{[X]}/G/1$ -Sys-

<sup>35</sup> FCFS kann z.B. mit Hilfe einer zentralen Steuerungswarteschlange ausgeführt werden, oder mittels Auswertung eines Zeitstempels aller HoL-Zellen. Weniger aufwändig erscheint die zufallsgesteuerte Auswahl von Aufträgen auf den HoL-Positionen der Warteschlangen (HoL-SIRO).

<sup>36</sup> Im Fall  $M=1$  entspricht HoL-SIRO der FCFS-Disziplin, im Fall  $M \rightarrow \infty$  der G-SIRO-Disziplin.

<sup>37</sup> Belegen lässt sich dies z.B. durch Bestimmung der mittleren Wartedauer aus den gewonnenen Werten und Vergleich mit dem bekannten exakten Erwartungswert.

teme zu. Unabhängig hiervon wird in [Takagi93] gezeigt, dass bei  $\text{Geo}^{[X]}/G/1$ -Systemen unter Abfertigung in zufälliger Reihenfolge bzw. nach FCFS die Beziehung

$$E[W^2]_{G\text{-SIRO}} + E[W] = \beta^* (E[W^2]_{\text{FCFS}} + E[W]), \quad \beta^* = 2/(2-\rho) \quad (4.35)$$

existiert. Interessanterweise ist der Faktor  $\beta^*$  identisch mit dem in Gleichung (4.34) beschriebenen Faktor  $\beta_{G\text{-SIRO}}$  (siehe auch Kapitel 5.2.3). So liegt die Vermutung nahe, dass sich die für  $M^{[X]}/G/1$ -Systeme geltenden Beziehungen auch auf  $\text{Geo}^{[X]}/G/1$ -Systeme übertragen lassen. Nach den eingangs getroffenen Feststellungen zur HoL-SIRO-Abfertigung markieren  $\alpha_{\text{FCFS}}$  die untere und  $\alpha_{G\text{-SIRO}}$  die obere Grenze des von der Eingangszahl  $M$  abhängigen Parameters  $\alpha_{\text{HoL-SIRO}}$ , sodass HoL-SIRO gemäß **Tabelle 4.3** mit  $\alpha_{\text{FCFS}} \leq \alpha_{\text{HoL-SIRO}}(M) \leq \alpha_{G\text{-SIRO}}$  in ein durch  $\alpha$  gekennzeichnetes kontinuierliches Spektrum von Abfertigungsdisziplinen eingeordnet werden kann.

Abfertigungsdisziplin	FCFS	HoL-SIRO	G-SIRO	LCFS
Parameter $\alpha$	$\alpha = 0$	$0 < \alpha < 1/2$	$\alpha = 1/2$	$\alpha = 1$
Parameter $\beta$	$\beta = 1$	$1 < \beta < 2/(2-\rho)$	$\beta = 2/(2-\rho)$	$\beta = 1/(1-\rho)$

**Tabelle 4.3:** Charakterisierung der klassischen Bediendisziplinen durch die Parameter  $\{\alpha, \beta\}$  und Einordnung der gemischten Disziplin HoL-SIRO in dieses Schema.

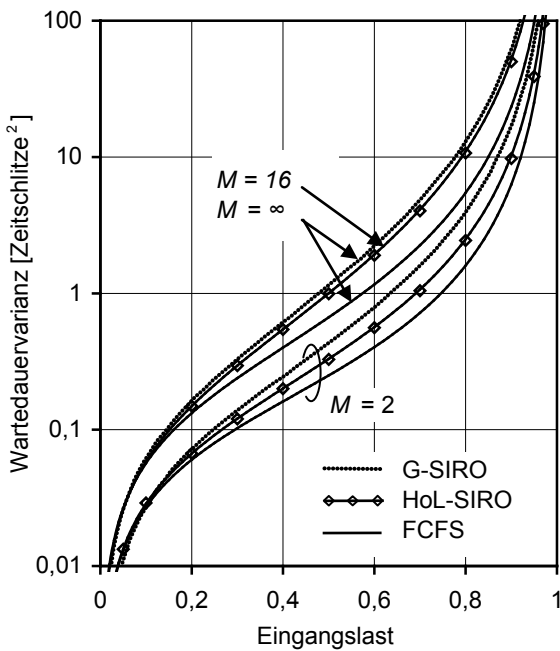
Die aus der obigen Diskussion resultierenden Randbedingungen  $\lim_{M \rightarrow 1} \alpha_{\text{HoL-SIRO}} = \alpha_{\text{FCFS}} = 0$  sowie  $\lim_{M \rightarrow \infty} \alpha_{\text{HoL-SIRO}} = \alpha_{G\text{-SIRO}} = 1/2$  führen dann zu der einfachen und naheliegenden Abschätzung  $\alpha_{\text{HoL-SIRO}} \approx (M-1)/(2M)$ , woraus mit Gleichung (4.34) und  $\rho = \lambda \Delta t$  (verlustfreies Wartesystem)

$$\beta_{\text{HoL-SIRO}} \approx 2/(2-\rho-\rho/M) \quad (4.36)$$

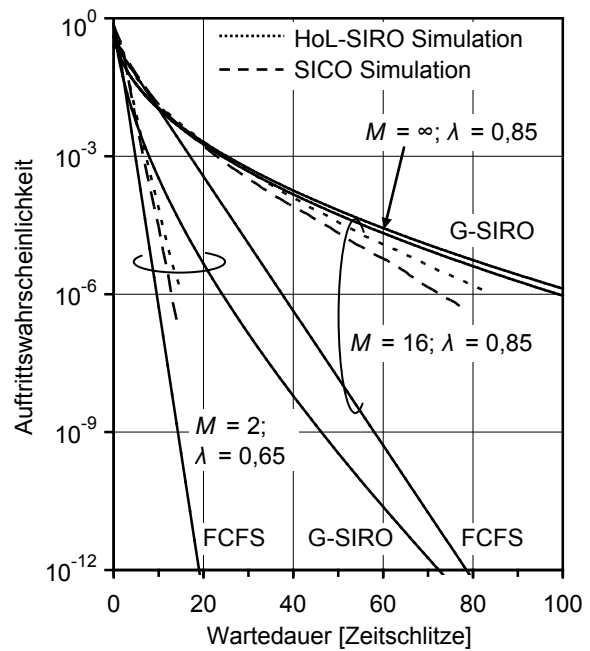
folgt. Die Beziehung  $\text{var}[W]_{\text{HoL-SIRO}} = \beta_{\text{HoL-SIRO}} (E[W^2]_{\text{FCFS}} + E[W]) - E[W](E[W]+1)$  resultiert aus Gleichung (4.35), und mit Gleichung (4.36) ergibt sich schließlich die Varianz der Wartedauer

$$\text{var}[W]_{\text{HoL-SIRO}} \approx \frac{M-1}{M^2} \frac{12M^2\rho - 4M(M+4)\rho^2 + (M^2+4M+3)\rho^3}{12(1-\rho)^2(2M-M\rho+\rho)} (\Delta t)^2. \quad (4.37)$$

Exemplarisch ist die Wartedauervarianz als Funktion der Eingangslast in **Bild 4.15** für  $M=2$  und  $M=16$  Eingänge dargestellt. Die Approximation stimmt mit den markierten Simulationsergebnissen exzellent überein, die Abweichungen sind meist geringer als 1%. Der Vergleich mit den ebenfalls dargestellten Werten für FCFS- und G-SIRO-Abfertigung zeigt, dass die Wartedauer bei HoL-SIRO-Abfertigung erwartungsgemäß stets stärker variiert als bei Anwendung der FCFS-Disziplin. Bei  $M=2$  Eingängen fällt die Differenz moderat aus, weil ein



**Bild 4.15:** Approximierte Varianz der Wartedauer über der Eingangslast bei HoL-SIRO Interqueue-Disziplin für  $M = 2$  und  $16$ . Die markierten Punkte wurden simulativ ermittelt (Beträge der 95%-Konfidenzintervalle  $< 1\%$  des jeweiligen Wertes). Zum Vergleich dienen die Werte für FCFS und G-SIRO. Bereits bei  $M = 16$  decken sich G-SIRO- und HoL-SIRO-Werte und verlaufen nahe am Grenzfall  $M = \infty$ .



**Bild 4.16:** Vergleich der diskreten Wartedauerwahrscheinlichkeiten für HoL-SIRO- und SICO-Disziplin (simuliert) mit den Werten für FCFS- und G-SIRO-Abfertigung, analysiert bei exemplarischer Last für Systeme mit  $M = 2$  bzw.  $16$  Eingängen und unbegrenztem Warteraum. Die obere Grenze liefert der Fall mit unendlicher Eingangsanzahl unter G-SIRO. Die Konfidenzintervalle der Simulationsergebnisse sind  $< 1\%$  und deshalb nicht dargestellt.

Abweichen von FCFS grundsätzlich nur in einem Systemzustand möglich<sup>38</sup> ist. G-SIRO führt hier natürlich zu einer deutlich höheren Varianz der Wartedauer. Eine große Warteschlangenanzahl bietet deutlich mehr Abweichungsmöglichkeiten von FCFS. So stimmt die HoL-SIRO-Performanz schon bei 16 Eingängen mit dem G-SIRO-Fall nahezu überein. Erkennbar ist auch, dass weitere Eingänge (bis  $M \rightarrow \infty$ ) kaum noch höhere Wartedauervarianzen hervorrufen. In welchem Bereich sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer bei beliebiger Eingangsanzahl und verschiedenen Abfertigungsdisziplinen bewegen kann, zeigt **Bild 4.16**. Am Beispiel einer mittleren und einer hohen Verkehrslast ( $\lambda = 0,65$  bzw.  $0,85$ ) sind dort die absolute untere Grenze – markiert durch FCFS-Zuteilung bei minimaler Systemgröße ( $M=2$ ), sowie eine obere Grenze dargestellt – gegeben durch G-SRIO-Zuteilung bei maximaler Eingangsanzahl. Bei einer niedrigen Auslastung sind die Unterschiede naturgemäß geringer als bei einer höheren, da die Abfertigungsreihenfolge bei wenigen wartenden Aufträgen kaum variieren kann. FCFS lässt sich also im unteren Lastbereich gut als Referenz für andere Disziplinen wie SICO oder HoL-SIRO verwenden. Im Hochlastfall wird deutlich, dass sich

<sup>38</sup> Da einer der HoL-Aufträge stets die absolut längste Wartedauer im System aufweist, ist ein Abweichen von FCFS nur dann möglich, wenn beide HoL-Positionen besetzt sind. Im Mittel wird dann bei jeder zweiten Abfertigung von FCFS abgewichen.

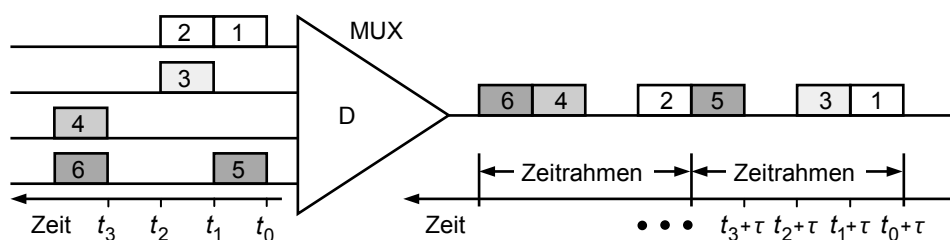


die (simulativ ermittelten) Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei HoL-SIRO und SICO-Abfertigung stark an den Werten für die G-SIRO-Disziplin orientieren.

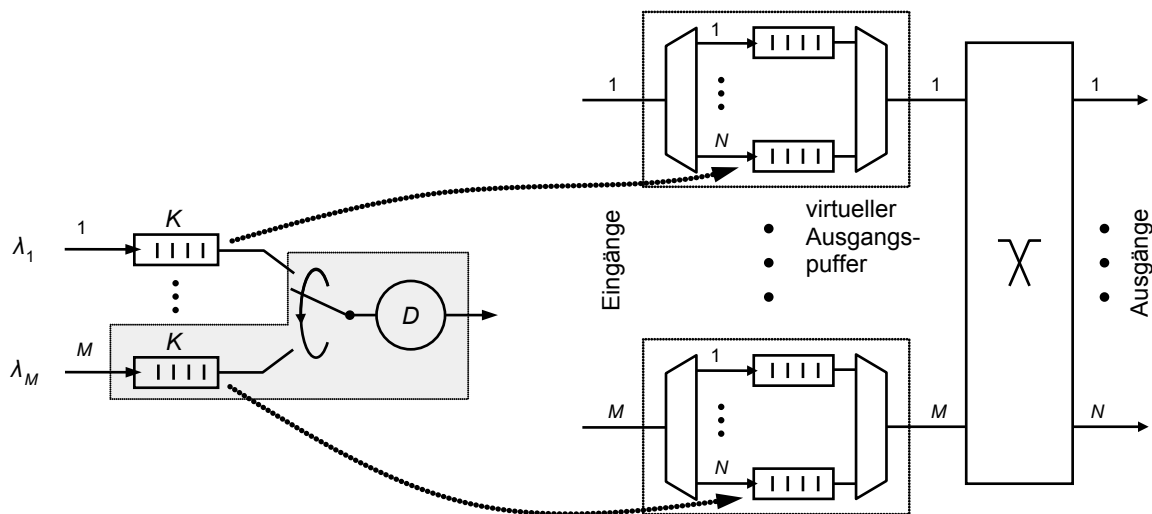
#### 4.7 Analyse des Zellen-Multiplexers im synchronen Zeitmultiplexbetrieb

Beim synchronen Zeitmultiplex (STD, Synchronous Time Division) wird jedem am Multiplexer ankommenden Datenstrom ein Zeitschlitz auf dem abgehenden Übertragungskanal zugeordnet. Das abgehende System ist mithin ein TDMA-System (Time Division Multiple Access). Beim hier betrachteten Multiplexer wird davon ausgegangen, dass es sich um ein Subsystem der Leitungsvermittlung handelt, dessen (abgehende) Transportkapazität zu gleichen Teilen fest und dauerhaft (im Betrachtungszeitraum) für die Zellen von jeweils einem Multiplexer-Eingang reserviert ist. Die einzelnen Verbindungen sind durch ihre zeitlichen Positionen im abgehenden Übertragungskanal identifizierbar, was den am Ziel notwendigen Demultiplex-Prozess einfach gestaltet. Nachteilig bei einer derartigen Konfiguration ist, dass Zeitabschnitte bzw. die entsprechenden Übertragungskapazitäten immer dann ungenutzt bleiben, wenn die zugehörigen Quellen keine Daten senden. Der Übertragungskanal wird in solchen Fällen nicht optimal ausgelastet. **Bild 4.17** zeigt das Beispiel eines derartigen Zellen-Multiplexers mit  $M = 4$  Eingängen.

Interessant ist diese Architektur z.B. für den Aufbau großer Schaltanordnungen zur Zellenvermittlung, basierend auf dem Prinzip der Eingangspufferung mit virtuellen Ausgangswarteschlangen (*Virtual Output Queue*, VOQ) [Chao01]. Darin stellt der hier betrachtete Zellen-Multiplexer (**Bild 4.18** links) das Polling-System für einen von  $N$  Ausgängen des Zellschalters dar (**Bild 4.18** rechts), zu dem die an den  $M$  Eingängen befindlichen ausgangsspezifischen Puffer gehören. Das betrachtete Polling-System lässt sich in einer derartigen Konfiguration mit den übrigen Polling-Systemen zu einem  $M \times N$ -Koppelnetz mit Crossbar-Funktion kombinieren (**Bild 4.18** rechts) und dank des synchronen TDM-Betriebs in einfachster Weise konfliktfrei steuern. Dass die  $M$  Puffersysteme jeweils mit nur einem Ein- und Ausgang sowie ohne (interne) Geschwindigkeitserhöhung (*Speed-up*) auskommen, ist ein weiterer Vorzug dieser Konfiguration, insbesondere für Hochgeschwindigkeitsanwendungen. In den



**Bild 4.17:** Beispiel des Multiplexens von 4 ungerahmten Zellenströmen (nur zwecks Übersichtlichkeit synchron dargestellt) in einen Zeitmultiplex-Rahmen auf der Abnehmerleitung des Systems bei zyklischer Abfrage der Eingangspuffer. Der Multiplexvorgang (ohne Wartezeit im Puffer) beansprucht hier ein konstantes Zeitintervall  $\tau$ .



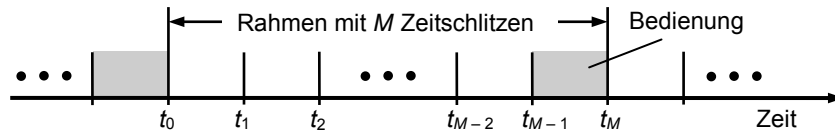
**Bild 4.18:** Links: Modell eines Zellen-Multiplexers (Polling-Typ) mit  $M$  Eingängen. Der TDM-Betrieb resultiert aus zyklischer Abfrage der Puffer mit jeweils  $K$  Wartepunkten und Abfertigung in einem festen Zeitrahmen, unabhängig vom Systeminhalt. Das Modell erlaubt z.B. die Analyse eines Zellen-basierten  $M \times N$ -Schaltknotens mit virtuellen Ausgangswarteschlangen (rechts), der durch den TDM-Betrieb eine einfache Systemkoordination ermöglicht. In diesem Beispiel wird die dem Ausgang  $N$  zugeordnete Puffergruppe modelliert.

nächsten Abschnitten wird das Leistungsverhalten des im **Bild 4.18** links dargestellten Zellen-Multiplexers vom Polling-Typ für synchronen TDM-Betrieb vollständig analysiert.

Ergänzend zu den im Kapitel 4.1 getroffenen Annahmen gilt Folgendes. Die ankommenden TDM-Systeme wie auch das abgehende arbeiten mit einem einheitlichen Zeitraster. Das abgehende TDM-System weist eine Rahmenstruktur bestehend aus jeweils  $M$  Zeitschlitzen auf, die für den Zellentransport uneingeschränkt zur Verfügung stehen.<sup>39</sup> Die Kapazität der Puffer betrage jeweils  $K$  Zellen,  $K \in \mathbb{N}$ . Die Warteschlangen werden zyklisch und strikt im TDM-Zeitraster abgefragt und es findet eine 1-begrenzte Abfertigung statt, vorausgesetzt es sind Zellen im betreffenden Puffer vorhanden. Ist er leer, so findet eine Pseudobedienung in Gestalt einer Pause statt, wobei der zugehörige Zeitschlitz des abgehenden TDM-Systems leer bleibt. Für das Gesamtsystem ergibt sich damit eine zyklische Abfertigung, an der alle Warteschlangen teilnehmen, unabhängig von ihrem Inhalt. Dementsprechend sind die Warteschlangen völlig unabhängig voneinander, und man kann ohne Verlust der Allgemeingültigkeit einen einzelnen Zweig des Zellen-Multiplexers (d.h. eine einzelne Warteschlange mit Bedieneinheit) als einliniges Warte-Verlustsystem des Typs Geo/D/1/K analysieren. Dem Bedienintervall (Dauer  $\Delta t$  eines Zeitschlitzes) folgt dann periodisch in jedem TDM-Rahmen eine  $M-1$  Zeitschlitz andauernde Bedienpause<sup>40</sup>, während in jedem Zeitschlitz gleichermaßen die Ankunft einer Zelle stattfinden kann. Die Rahmengestalt des TDM-Systems am Ausgang des Zellen-Multiplexers aus Sicht der Warteschlange  $M$  zeigt **Bild 4.19**.

<sup>39</sup> Es wird angenommen, dass die  $M$  Zeitschlitz des TDM-Rahmens keinerlei Synchronisationsaufgaben für das Demultiplexen am Empfangsort haben.

<sup>40</sup> Während der Pause (aus Sicht der analysierten Warteschlange) werden die übrigen Warteschlangen bedient. Die Verkehrsverhältnisse an den übrigen Warteschlangen sind für die Analyse irrelevant.



**Bild 4.19:** Zeitmultiplex-Rahmen auf der Abnehmerleitung des Zellen-Multiplexers bei zyklischer Abfrage der Puffer. Im markierten Zeitschlitz wird die in der Analyse beobachtete Warteschlange  $M$  bedient.

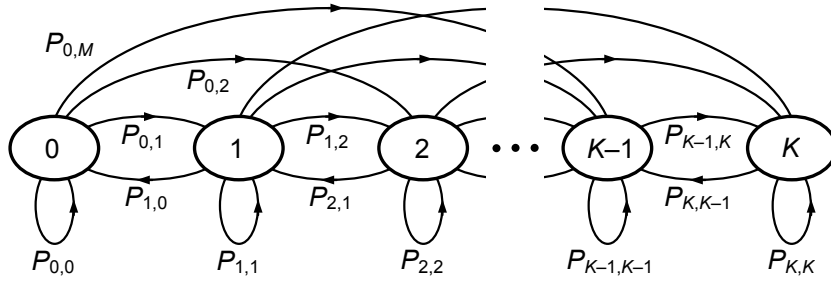
Für die Bestimmung des Systeminhaltes ist es zweckmäßig, sich zunächst auf das Ende des TDM-Rahmens mit  $M$  Zeitschlitzen  $\Delta t$  zu konzentrieren, und somit das Ende einer Zellenabfertigung als Beobachtungszeitpunkt zu wählen. Da bei dieser (Vor-)Betrachtung die exakten Zeitpunkte einzelner Ankünfte – soweit sie zwischen zwei Service-Zeitschlitzen liegen – unerheblich sind, erscheint der betrachtete Multiplexer-Zweig als  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/K$ -Gruppenankunftssystem mit  $M$  identischen und unabhängigen (virtuellen) Verkehrsquellen und der (virtuellen) Bediendauer  $M\Delta t$  eines Zeitrahmens. Dieser Modellvorstellung zur Analyse des Systeminhaltes folgend wird der zugehörige Ankunftsprozess beschrieben durch

$$a_i = \Pr\{A = i\} = \binom{M}{i} p^i (1-p)^{M-i}, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad \text{mit } p = \lambda \Delta t / M, \quad (4.38)$$

wobei  $0 \leq \lambda < 1$  die Ankunftsrate bezeichnet, die aus der Summe der  $M$  möglichen Einzelankünfte während eines beliebigen Zeitrahmens  $M\Delta t$  resultiert. Der Erwartungswert der Anzahl ankommender Forderungen pro Serviceintervall beträgt  $E[A] = \sum_{i=0}^M i a_i = \lambda \Delta t$ . Beim real vorliegenden  $\text{Geo}/D/1/K$ -System treten Ankünfte mit demselben Erwartungswert auf, allerdings zeitlich nacheinander. Zwei weitere bedeutende Unterschiede betreffen, je nach verwendetem Analysemodell, die leere und die vollständig belegte Warteschlange:

- i. Im LA-Modell mit leerer Warteschlange wird die erste Ankunft im betrachteten Zeitrahmen bedient, falls sie vor dem Service-Zeitschlitz eintrifft. Trifft sie jedoch in diesem Zeitschlitz ein, ist dem nicht so.
- ii. Das Schema der Warteplatznachbesetzung berührt pro Zeitrahmen nur eine bestimmte Ankunft, nämlich die im Abfertigungszeitschlitz eintreffende. Von Bedeutung ist dies immer dann, wenn die Wartekapazität (in einem beliebigen Zeitschlitz des Rahmens) erschöpft ist.

Die Resultate der Analyse des  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/K$ -Systems aus Kapitel 5 sind deshalb nur bedingt auf dieses TDM-Polling-System übertragbar. Unter Beachtung der oben erläuterten Gegebenheiten werden Systeminhalt und Wartedauer anhand der im **Bild 4.20** dargestellten zeitdiskreten Markov-Kette für beliebige Pufferkapazitäten  $K \in \mathbb{N}$  analysiert. Dabei werden zunächst die Charakteristika mit dem EA-IR-Modell ausführlich untersucht, und anschließend die Unterschiede zur Analyse mit den LA-Modellvarianten beleuchtet.



**Bild 4.20:** Markov-Kette mit  $K + 1$  Zuständen für den Systeminhalt eines Puffers der Kapazität  $K > M$  (am Ende eines aus  $M$  Zeitschlitzen bestehenden Zeitrahmens) nach erfolgter Abfertigung. Aufgrund der  $M$  diskreten Zeitpunkte für Einzelankünfte ist der Zustandsübergang  $P_{0,M}$  hier weder im EA- noch im LA-Modell möglich.

#### 4.7.1 Early-Arrival-Modell mit sofortiger Warteplatznachbesetzung

Die Vorgänge in der betrachteten Warteschlange des Polling-Systems werden mit den Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten der in **Bild 4.20** dargestellten Markov-Kette beschrieben, die im vorliegenden Fall ergodisch ist. Für  $K \in \mathbb{N}^+$  Warteplätze (der Fall  $K = 0$  ist weiter unten adressiert) lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten angeben mit:

$$P_{i,j} = \begin{cases} a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{\max\{M, K+1\}} a_k (M-k)/M & \text{falls } K=1, i=j=0, \\ a_0 + a_1 & \text{falls } K > 1, i=j=0, \\ a_{j-i+1} & \text{falls } K > 2, 0 \leq i \leq j, 1 \leq j \leq K-2, \\ a_{j-i+1} + \sum_{k=j-i+2}^{\max\{M, K+1\}} a_k (M-k)/M & \text{falls } 0 \leq i \leq K, j=K-1, i+j \neq 0, \\ \sum_{k=j-i+1}^{\max\{M, K+1\}} a_k k/M & \text{falls } 0 \leq i \leq K, j=K, \\ a_0 & \text{falls } K > 1; 1 \leq i \leq K-1, j=i-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.39)$$

Unterschiede zu dem in Kapitel 5 analysierten  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/K$ -System ergeben sich aus der eingangs diskutierten Warteplatznachbesetzung; sie betreffen daher die Übergänge in die Zustände  $\{K-1, K\}$  sowie Pufferkapazitäten von  $K = \{1, 2\}$  Zellen. Löst man die Gleichgewichtsgleichungen der Markov-Kette nach der Leerlauf-Wahrscheinlichkeit  $q_0^* = q_0 \Big|_{t_{iM}} = P\{Q=0\}$  auf,  $i \in \mathbb{N}$ , wobei  $Q$  die Anzahl der wartenden Aufträge in einem beliebigen Zeitrahmen direkt nach Bedienende<sup>41</sup> bezeichnet, so erhält man

$$q_0^* = 1 / \sum_{i=0}^K \frac{(-p)^i}{(1-p)^{M(K-i)+i+1}} \binom{M(K-i)+i}{i}, \quad \{K, M\} \in \mathbb{N}^+. \quad (4.40)$$

Für eine große Eingangsanzahl  $M$  ergibt sich<sup>42</sup>

<sup>41</sup> \* kennzeichnet, dass es sich um eine Betrachtung auf Zeitrahmenbasis handelt, und nicht um einzelne Zeitschlitze.

<sup>42</sup> Systeme  $M \rightarrow \infty$  erscheinen wegen der Abfertigungszyklendauer von  $M$  Zeitschlitzen in praxi kaum sinnvoll.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} q_0^* = \left[ e^{\lambda \Delta t (K-1)} \sum_{i=0}^K \left( -(K-i) \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} \right)^i / i! \right]^{-1}, \quad K \in \mathbb{N}^+. \quad (4.41)$$

Leicht einzusehen ist, dass die Leerlaufwahrscheinlichkeit im pufferlosen Fall von  $M$  unabhängig  $q_0^*(K=0) = 1$  beträgt. Bei unbegrenztem Warteraum liefert die Grenzwertbetrachtung von Gleichung (4.40) gemäß Anhang B

$$\lim_{K \rightarrow \infty} q_0^* = (1 - Mp) / (1 - p)^M, \quad M \in \mathbb{N}^+. \quad (4.42)$$

Dieses Resultat ist identisch mit dem in [Karol87] für ein  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/K$  ermittelten Ausdruck (siehe auch Kapitel 5.2.1). Aufgrund von Äquivalenzen der relevanten Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten mit dem  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/K$ -System lassen sich die im Kapitel 5.1 dieser Arbeit ermittelten Zustandswahrscheinlichkeiten  $q_1 \dots q_{K-1} = f(q_0)$  direkt als  $q_1^* \dots q_{K-1}^*$  verwenden. Nur der Zustand  $K$  (vollständig gefüllter Puffer) muss gemäß der zuvor geführten Diskussion gesondert behandelt werden. Eine simple Lösung bietet hier die Beziehung  $q_K^* = 1 - \sum_{i=0}^{K-1} q_i^*$ .

Mit Kenntnis des Systeminhalts am Rahmenende gelangt man durch Betrachtung der einzelnen Zeitschlitz des darauf folgenden Rahmens direkt zur Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer für eine Forderung, die zu einem beliebigen Zeitpunkt im System aufgenommen (d.h. nicht durch Überlauf abgewiesen) wird. Sie ergibt sich zu

$$w_i = P\{W = i \Delta t\} = \frac{p}{\rho} \sum_{k=0}^{\min\{\alpha, \lfloor i/M \rfloor\}} \binom{\alpha}{k} q_{\lfloor i/M \rfloor - k}^* p^k (1-p)^{\alpha-k}, \quad i = 0, 1, \dots, (MK-1), \quad (4.43)$$

$$\text{mit } \alpha = M \lfloor i/M \rfloor + M - 1 - i, \quad \{M, K\} \in \mathbb{N}^+.$$

Hierdurch nicht erfasst ist die maximale Wartedauer, die bei FCFS-Abfertigung  $MK$  Zeitschlitz beträgt. Dieser spezielle Fall kann nur dann auftreten, wenn die beobachtete Forderung in ein vollständig besetztes System gelangt, was aufgrund des Nachbesetzungsschemas ausschließlich im Service-Zeitschlitz möglich ist. Dies macht den einzigen Unterschied zu sämtlichen übrigen (von Gleichung (4.43) erfassten) Fällen aus. Insofern lässt sich  $w_{MK}$  einfach über die Beziehung  $w_{MK} = 1 - \sum_{i=0}^{MK-1} w_i$  angeben.

Die Auslastung  $\rho$  der Warteschlange ergibt sich für den Zeitschlitz der Abfertigung zu

$$\rho = 1 - q_0^* a_0, \quad K \in \mathbb{N}^+. \quad (4.44)$$

Aufgrund der symmetrischen Verkehrslast gilt diese Auslastung auch für die übrigen Zeitschlitz des abgehenden TDM-Systems, d.h. sie ist für das System allgemeingültig.

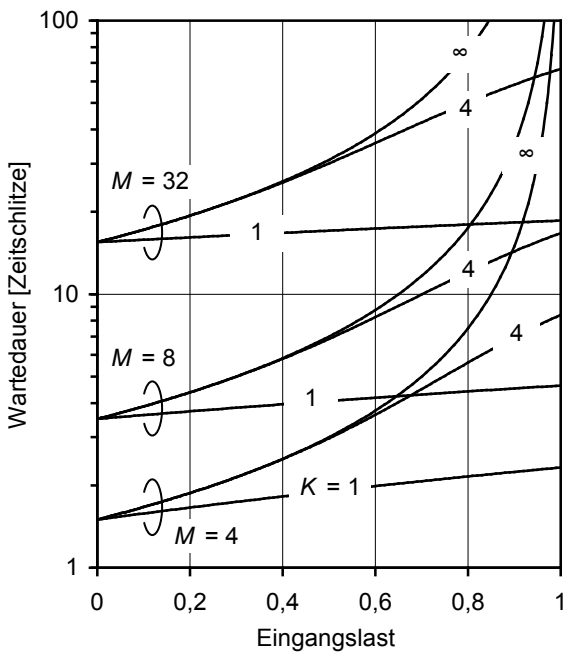
Der ungepufferte Fall erfordert eine gesonderte Betrachtung, da nur Ankünfte im Service-Zeitschlitz zum Durchsatz beitragen können. Eine Forderung tritt beim verwendeten BP in jedem Zeitschlitz mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  auf, woraus  $a_0 = 1 - p$  folgt. Gleichung (4.44)

liefert sodann mit  $q_0(K=0) = 1$  die Auslastung  $\rho(K=0) = p$ .<sup>43</sup>

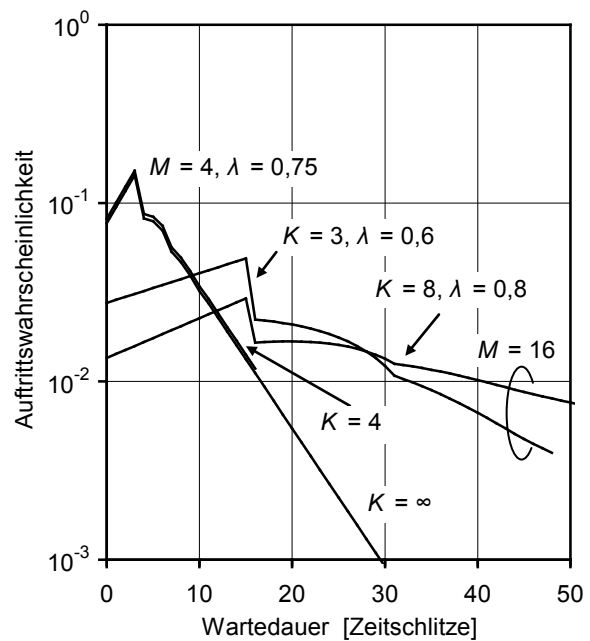
Für den Fall unbegrenzten Warteraums resultieren die Gleichungen (4.42) und (4.44) erwartungsgemäß in einer Auslastung von  $\rho = Mp = \lambda \Delta t$ .

Ausgehend vom Systemzustand am Ende des Abfertigungszeitschlitzes (Ende des TDM-Rahmens) lässt sich auch der Systeminhalt in beliebigen Zeitschlitzes des Rahmens leicht ermitteln. Zu berücksichtigen ist lediglich, dass es sich bei der zuvor angenommenen Gruppenankunft tatsächlich um eine zeitlich aufgelöste Folge von Einzelankünften handelt. So muss der Erwartungswert der Warteschlangenlänge nach Bedienung  $E[Q^*] = \sum_{i=0}^K i q_i^*$  ergänzt werden mit der mittleren Anzahl von Aufträgen, die zwischen zwei Bedienungsvorgängen in die betrachtete Warteschlange gelangen. Dieses Vorgehen führt zu<sup>44</sup>

$$E[Q] = E[Q^*] + p(M-1)/2 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{\min\{K+1, M\}} q_{K+1-j} a_j \sum_{i=1}^{M+1-j} \left( (i+1) \frac{M-1}{2} - (j-1) \right) \left( \frac{p}{1-p} \right)^{i-1} \binom{M-j}{i-1} / \binom{j+i}{i}. \quad (4.45)$$



**Bild 4.21:** Mittlere Wartedauer für Zellen-Multiplexer im TDM-Betrieb mit M Eingängen und Puffern unterschiedlicher Kapazität K als Funktion der Eingangslast. Dem TDM-Betrieb geschuldet ist der Sockelbetrag von  $\frac{1}{2}(M-1)$  Zeitschlitzes.



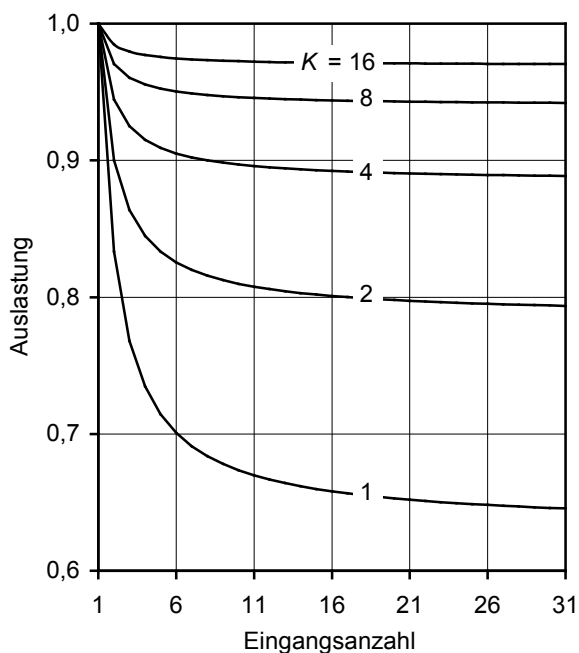
**Bild 4.22:** Wartedauerwahrscheinlichkeiten am Beispiel einiger Lastfälle bei unterschiedlich dimensionierten Multiplexern. Zur Verdeutlichung sind die diskreten Werte durch Linien verbunden. Die maximale Wartedauer bei zyklischer Abfertigung beträgt (MK) Zeitschlitzes.

<sup>43</sup> Im ungepufferten Fall fertigt dieses Polling-System von jedem der einfallenden (symmetrischen) Verkehrsströme nur den M-ten Teil ab. Es ist leicht einzusehen, dass diese Auslastung bei symmetrischer Verkehrslast auch für jede andere Interqueue-Disziplin gilt.

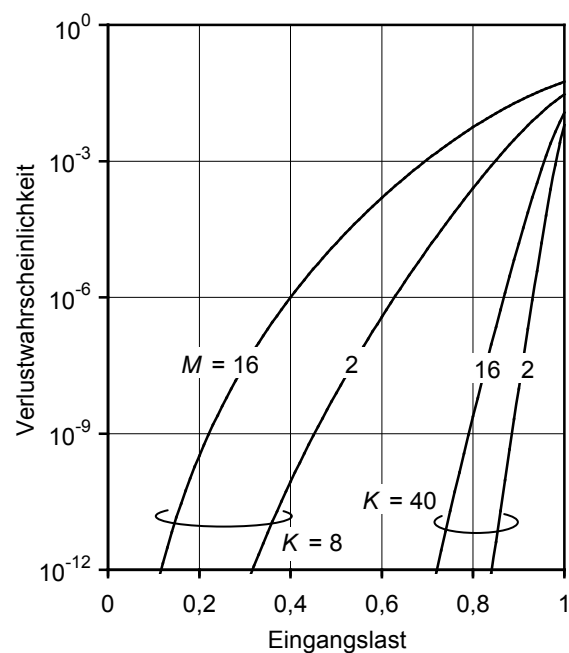
<sup>44</sup> Ebenso lässt sich mit dem Gesetz von Little der mittlere Inhalt der betrachteten Warteschlange an beliebigen Zeitschlitzesgrenzen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer angeben.

Bei unbegrenzter Pufferkapazität und endlicher Eingangszahl verschwindet der Summenterm aus Gleichung (4.45), denn wegen  $\lim_{K \rightarrow \infty} q_K = 0$  gilt auch für sämtliche Faktoren  $q_i(K \rightarrow \infty) = 0$ . Die mittlere Warteschlangenlänge im betrachteten Puffer beträgt dann in einem beliebigen Zeitschlitz  $E[Q^{(\infty)}] = (M-1)p/[2(1-Mp)]$ . Dies entspricht dem  $1/\rho$ -fachen der mittleren Warteschlangenlänge in einem  $\text{Geo}^{[X]}/D/1$ -System.<sup>45</sup>

Auf direktem Wege erhält man die mittlere Wartedauer  $E[W] = E[Q]M/\lambda$  für eine Zelle, die in einem beliebigen Zeitschlitz das System betritt. **Bild 4.21** veranschaulicht die mittlere Wartedauer über der Verkehrslast für verschieden große Systeme und Pufferkapazitäten. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer illustriert **Bild 4.22**. Typischerweise steigt die Wahrscheinlichkeit einer Wartedauer von null bis zu  $M-1$  Zeitschlitzen an (d.h. die beobachtete Ankunft trifft hier in einem leeren System ein). Der Grund hierfür ist, dass mit zunehmender Anzahl möglicher Ankunftszeitpunkte die Wahrscheinlichkeit abnimmt, dass der Systeminhalt seit der letzten Abfertigung unverändert bleibt, die beobachtete Ankunft also die erste in einem Zeitrahmen ist. Dieser Umstand tritt bei leerer Warteschlange besonders hervor und relativiert sich mit zunehmendem Systeminhalt, da aus Sicht der beobachteten Ankunft jede weitere anwesende Forderung eine zusätzliche Wartedauer von  $M$  Zeitschlitzen bedeutet. Geringen Einfluss auf die Auslastung bei gegebener Warteplatzanzahl hat die Eingangszahl. Wie **Bild 4.23** zeigt, genügen bereits rund  $K=16$  Warteplätze je Warteschlange, um



**Bild 4.23:** Auslastung als (diskrete) Funktion der Eingangszahl  $M$  und der Pufferkapazität. Bei mehr als  $K = 16$  Warteplätzen und mehreren Eingängen hat die exakte Größe  $M$  kaum noch Einfluss.



**Bild 4.24:** Zellenverlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Eingangslast. Mit wachsender Pufferkapazität nehmen Verlustwahrscheinlichkeit und Einfluss der Eingangszahl deutlich ab.

<sup>45</sup> Leicht einzusehen ist, dass sich unter Volllast in jedem der  $M$  Puffer eine mittlere Warteschlangenlänge einstellt, die mit dem Erwartungswert in einem  $\text{Geo}^{[X]}/D/1$ -System identisch ist.

weitgehende Unabhängigkeit von  $M$  zu erreichen. Die Verlustwahrscheinlichkeit einer beliebigen ankommenden Zelle ist nach Gleichung (4.4) gegeben durch  $p_v = 1 - (1 - q_0^* a_0) / (Mp)$ . **Bild 4.24** illustriert ein Beispiel der Zellenverlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Eingangslast bei kleiner und großer Pufferkapazität und Eingangsanzahl.

#### 4.7.2 Late-Arrival-Modelle

In den LA-Modellen benötigt das System grundsätzlich an jedem Eingang mindestens einen Warteplatz (siehe **Tabelle 4.1**), da sämtliche Forderungen unabhängig vom exakten Ankunftszeitpunkt bis zum Service-Zeitschlitz gepuffert werden müssen. Ein weiterer Unterschied zum EA-IR-Modell sind die Zeitpunkte, zu denen Forderungen eintreffen können. Hiervon betroffen sind allerdings ausschließlich die Service-Zeitschlitzte.<sup>46</sup> Gleiches gilt für das Schema der Warteplatznachbesetzung; im Übrigen unterscheiden sich die LA-Modelle nicht vom EA-Modell. Infolgedessen sind die Leistungsunterschiede bei gegebenem Warteraum generell gering, insbesondere wenn noch zusätzlich bei großer Eingangsanzahl  $M$  die  $M-1$  Service-freien Zeitschlitzte dominieren. Für die Leerlaufwahrscheinlichkeit ergibt sich

$$q_{0(\text{LA-IR})}^* = 1 / \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(-p)^i}{(1-p)^{M(K-i-1)+i+1}} \binom{M(K-i)+i-1}{i}, \{K, M\} \in \mathbb{N}^+. \quad (4.46)$$

Die übrigen Zustandswahrscheinlichkeiten lassen sich z.B. mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen oder auf matrixalgebraischem Wege beschaffen.

Verzögerte Nachbesetzung im LA-Modell bedeutet, dass für sämtliche Ankünfte innerhalb eines Zeitrahmens nur die zu Rahmenbeginn vorhandene freie Pufferkapazität (unabhängig vom Bedienprozess) zur Verfügung steht. Die Wahrscheinlichkeit eines leeren Systems an der Zeitrahmengrenze beträgt für das LA-DR-Modell

$$q_{0(\text{LA-DR})}^* = 1 / \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(-p)^i}{(1-p)^{M(K-i-1)+i}} \binom{M(K-i)+i-2}{i}, K \in \mathbb{N}^+, M = 2, 3, \dots \quad (4.47)$$

Bei  $K = 1$  ist das System zum Beobachtungszeitpunkt stets leer, weil die Puffernutzung im Falle einer vorherigen Abfertigung erst im Zeitschlitz nach Service wieder möglich ist. Der Durchsatz ist für beide LA-Modellvarianten gegeben durch

$$\rho = 1 - q_0^* (a_0 + a_1 / M), K \in \mathbb{N}^+, \quad (4.48)$$

weil sich das System nur dann im Leerlauf befindet, wenn es zum Beobachtungszeitpunkt leer

<sup>46</sup> Zellen, die im Service-Zeitschlitz in einer leeren Warteschlange ankommen, werden im gleichen Zeitrahmen nicht mehr bedient. Die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten des LA-IR-Modells unterscheiden sich nur in diesem einen Punkt von denen des EA-IR-Modells gemäß Gleichung (4.39).



ist und im darauffolgenden Zeitrahmen keine Abfertigung stattfindet (d.h. keine Ankunft außerhalb des Service-Zeitschlitzes). Da das Warteplatznachbesetzungsschema bei großem Puffer irrelevant wird, ergibt sich mit beiden LA-Modellen dieselbe Leerlaufwahrscheinlichkeit und Auslastung. Darüber hinaus ist die Auslastung identisch mit dem Resultat des EA-Modells gemäß Gleichung (4.44).<sup>47</sup> Ein entsprechender Beweis findet sich in Anhang B.

Aufgrund der großen Ähnlichkeiten mit dem EA-IR-Modell wird auf eine weitergehende Betrachtung des LA-Modells verzichtet.

#### 4.8 Fazit zur Analyse der Polling-Systeme

In diesem Kapitel wurden Zellen-Multiplexer des Polling-Typs, ausgestattet mit einer beliebigen Anzahl von Eingängen und Puffern einheitlicher endlicher Kapazität, unter symmetrischer Verkehrslast analysiert – einschließlich der Grenzfälle unendlicher Eingangsanzahl und unbegrenzten Warteraums. Betrachtet wurden die klassische Anordnung mit 1-begrenzter Abfertigung ohne Zeitschlitzreservierung auf dem abgehenden Übertragungssystem, sowie Systeme im Zeitmultiplexbetrieb mit festem TDM-Rahmen. Für die Analysen in diskreter Zeit wurden die beiden typischen EA- und LA-Modelle herangezogen und unter Berücksichtigung der möglichen Schemata zur Neubelegung des durch die Abfertigung einer Zelle frei werdenden Warteplatzes systematisch angewendet. Die Modellvarianten haben generell signifikanten Einfluss auf die Analysen und ihre Resultate. Vereinfachungen ergeben sich durch feste Modellrelationen. So entspricht das EA-DR-Modell bezüglich Durchsatz dem LA-IR-Modell. Aufgrund der Tatsache, dass bei der Abfertigung im EA-Modell neben den wartenden Aufträgen zugleich Neuankünfte berücksichtigt werden müssen, gestaltet sich die Analyse grundsätzlich schwieriger als mit dem LA-Modell. Dass Modellierung bzw. Systemdesign nach dem EA-Modell dennoch vorteilhaft sein können, wird weiter unten gezeigt. Die Analysen folgten einer groben Gliederung gemäß **Tabelle 4.1**, nach dem verwendeten zeitdiskreten Modell und der vorhandenen Warteplatzanzahl. Das nun folgende Resümee der Untersuchungen orientiert sich daran und spricht zunächst Polling-Systeme ohne Reservierung in ungepufferten und einfach gepufferten Anordnungen an, sowie solche mit mehreren Warteplätzen je Warteschlange und jene mit unbegrenzter Kapazität. Im Anschluss daran wird eine Bilanz zur Analyse der Polling-Systeme im TDM-Betrieb gezogen.

Mit dem Ziel einer über die Telekommunikation hinausreichenden Anwendungsbreite wurde als Ankunftsprozess das Bernoulli-Modell mit gleichartigen, unabhängigen Verkehrsquellen gewählt. Als Bedienstrategie – bestehend aus Queue- und Interqueue-Disziplin – kommt ein immenses „Spektrum“ in Frage, dessen untere und obere Grenze hinsichtlich Wartedauervari-

---

<sup>47</sup> Da die Ausdrücke für die Auslastung im EA- und LA-Modell verschieden sind, unterscheiden sich die Leerlaufwahrscheinlichkeiten beider Modelle durchaus auch bei unbegrenztem Puffer.

anz die (Gesamt-)Disziplinen FCFS bzw. LCFS markieren. Beim Zellen-Multiplexen ist es zweckmäßig, die Reihenfolge von Zellen aus derselben Warteschlange nicht (unnötig) zu verändern. „Überholvorgänge“ sind dann ausgeschlossen, was an den Endstellen ein einfaches Zusammenfügen von Zellen zu Nachrichtenblöcken ermöglicht. Als Warteschlangendisziplin wurde deshalb durchgehend FCFS angenommen (Implementierung mittels FIFO-Speicher). Als Interqueue-Disziplinen fanden FCFS, SICO, LQFS und SIRO Berücksichtigung, sowie eine Kombination aus FCFS und LQFS. Die daraus resultierenden Gesamtdisziplinen rangierten bezüglich Wartedauervarianz beim Minimum (im Falle von FCFS) oder in dessen Nähe (bei SIRO bzw. HoL-SIRO sowie LQFS), was allerdings auch durch die Annahme der symmetrischen Verkehrslast begünstigt wurde.

Auf das ungepufferte Polling-System treffen bekannte Resultate einer Analyse des ungepufferten  $M \times N$ -Crossbar<sup>48</sup> in [Patel81] zu. Bei balanciertem Verkehr ist die Abfertigungsdisziplin hier unerheblich, solange sie keinen Eingang bevorzugt. Mit der Präsenz von Warteplätzen ändert sich dies. Einfach gepufferte Polling-Systeme wurden extensiv analysiert. Je nach Analysemodell ist die Warteschlangenlänge bei Anwendung beliebiger unparteiischer Disziplinen geschlossen oder numerisch lösbar. Wartedauer und Zellenverlustwahrscheinlichkeit unter den Disziplinen FCFS und HoL-SIRO wurden daraus numerisch exakt ermittelt. Die Wartedauerunterschiede sind gering, hauptsächlich modellbedingt, und treten besonders bei Systemen mit wenigen Eingängen in Erscheinung. Innerhalb einer Modellklasse (EA bzw. LA) wirken sich unterschiedliche Abfertigungsdisziplinen kaum aus – weder bei der Wartedauer noch bei der Verlustwahrscheinlichkeit. Natürlich trägt hierzu auch die Lastbalance am Multiplexer bei. Gravierende Wirkung hat hingegen das Schema der Warteplatznachbesetzung. Insbesondere bei Systemen mit wenigen Eingängen hat die verzögerte Wiederverwendung frei gewordener Warteplätze einen sehr viel geringeren Durchsatz zur Folge als bei sofortiger Nachbesetzung. Markant ist ferner der charakteristische Verlauf der Systemauslastung als Funktion der Eingangsanzahl. Für EA- und LA-Modell mit sofortiger Nachbesetzung zeigt sich im Bereich weniger Eingänge  $M \in \{2, 3, 4\}$  ein „Durchsatzeinbruch“. Die betrachteten Abfertigungsdisziplinen haben auch hier keinen nennenswerten Einfluss. Gleiches gilt für die Anzahl der Warteplätze. Ursache für den Kurvenverlauf ist, dass bei hoher Verkehrslast Gruppenankünfte mit zwei oder mehr Zellen relativ häufig auftreten. Diese treffen bei Polling-Systemen mit wenigen Warteschlangen im Hochlastfall aus kombinatorischen Gründen oft auf dieselben bereits vollen Puffer und gehen folglich zu Verlust. Hiervon ausgenommen ist bestenfalls eine Ankunft, soweit sie vom Nachbesetzungsschema des im selben Zeitschlitz frei werdenden Warteplatzes profitieren kann. Die geschilderte Situation entspannt sich erst bei Systemen mit mehr als vier Eingängen. Die Auslastung steigt dann proportional mit der Eingangsanzahl an und konvergiert graduell gegen eins, wie ein entsprechender Be-

<sup>48</sup> Jeden der  $N$  Crossbar-Ausgänge kann man als Ausgang eines  $M:1$ -Multiplexers auffassen.

weis zeigt. Der diesbezügliche Einfluss unterschiedlicher Interqueue-Disziplinen ist eher gering. Gleichwohl ist eine signifikante Optimierung möglich. So wurde gezeigt, dass sich durch Kombination einer Basisdisziplin (im vorliegenden Fall FCFS zwecks Minimierung der Wartedauervarianz) mit LQFS als Hilfsmaßnahme zur Reduzierung von Zellenverlusten der Durchsatz bzw. die Verlustwahrscheinlichkeit deutlich verbessern lassen. Diese Maßnahme beschränkt sich allerdings auf das EA-IR-Modell.

Mehrere Wartepplätze ( $K > 1$ ) pro Warteschlange erschweren bzw. verhindern eine exakte Analyse (selbst unter einfachen Verkehrsannahmen). Eine Ausnahme bildet der Sonderfall mit  $M = 2$  Eingängen, der unter den getroffenen Annahmen für beliebige (symmetrische) Pufferkapazitäten analysiert wurde. Mit LQFS als Interqueue-Disziplin liefert die Analyse eine geschlossene Lösung für die Warteschlangenlänge bei symmetrischem Verkehrsangebot mit allgemeiner Verteilung der Gruppengröße.

Weitere exakte Analysen sind nur in einem sehr eng bemessenen Parameterraum  $\{K, M\}$  praktikabel. Darüber hinausgehend sind die grundsätzlich voneinander abhängigen Warteschlangen des Systems nur noch mittels Approximation handhabbar. In besonderem Maße gilt dies aufgrund der hohen Modellkomplexität für SICO-Abfertigung. Den Weg für Analysen mit größerem Parameterraum ebnet die vereinfachende Annahme statistisch unabhängiger Warteschlangen. Dadurch ist es möglich, eine Warteschlange aus dem Gesamtsystem zu separieren und als Geo/Geo/1/K-System mit FCFS-Abfertigung zu analysieren. Diese approximative Analyse stützt sich auf eine geometrisch verteilte Bediendauer (Gesamtdisziplin HoL-SIRO), die man aus der mittleren Aufenthaltsdauer in einem der unter sehr ähnlichen Randbedingungen exakt analysierbaren Zellen-Multiplexer gewinnen kann. Es wurde eine gute Übereinstimmung mit Simulationsergebnissen festgestellt, was den Schluss zulässt, dass sich dieser Weg ausgezeichnet eignet, um bei Zellen-Multiplexern mit  $M > 2$  Eingängen den schwer zugänglichen Bereich sehr geringer Zellenverlustwahrscheinlichkeiten konservativ zu approximieren. Die Pufferkapazität hat auf die Akkuratessse keinen nennenswerten Einfluss. Festzustellen ist insgesamt, dass Systeme mit wenigen Eingängen und Wartepplätzen  $\{M, K\} \in \{2, 3, \dots, 8\}$  je nach Dimensionierung signifikante Durchsatzunterschiede aufweisen. Als Interqueue-Disziplin für Polling-Systeme wurde HoL-SIRO näher untersucht, und die Wartedauervarianz wurde bei unbegrenztem Warteraum als Funktion der Eingangsanzahl approximiert. Die Anwendung von HoL-SIRO ergibt bei Systemen mit wenigen Eingängen eine starke Orientierung der Wartedauerwahrscheinlichkeiten an den Fall der FCFS-Abfertigung, während sich die Wartedauerverteilung bei größerer Eingangsanzahl stark an der G-SIRO-Bedieneung ausrichtet. Wieder ist zu beachten, dass dies für symmetrische Lastverhältnisse gilt. Unter asymmetrischer Verkehrslast ist mit größeren Abweichungen von den Fällen der FCFS- bzw. G-SIRO-Bedieneung zu rechnen. Eine Möglichkeit der Optimierung wäre beispielsweise die Berücksichtigung von Fairness-Aspekten bei der Interqueue-Disziplin [Kirstädter98].

Mit zunehmender Pufferkapazität verschwindet der Einfluss des verwendeten Analysemodells auf die ermittelten Leistungsgrößen. Dass die Performanz mit den Resultaten für begrenzten Warteraum konsistent ist, wurde ebenso nachgewiesen wie die Übereinstimmung mit bekannten Analyseergebnissen entsprechender Wartesysteme. Die Wartedauervarianz unter der Interqueue-Disziplin HoL-SIRO entspricht bei sehr großem Warteraum nahezu G-SIRO. Dies ist darin begründet, dass im (unrealistischen) Grenzfall unendlich großer Eingangsanzahl maximal nur ein Auftrag pro Warteschlange vorhanden ist, sodass sich beide Disziplinen identisch auswirken. Beliebig viele Warteplätze pro Puffer vorzusehen bringt also in diesem Szenario mit den getroffenen Verkehrsannahmen keinen Vorteil.

Im Falle des synchronen TDM-Betriebs ist eine vollständig exakte Analyse des Zellen-Multiplexers möglich, wofür in dieser Arbeit geschlossene Lösungen entwickelt wurden. Die Wahl des analytischen Modells ist hierbei weniger bedeutend als bei Polling-Systemen ohne Reservierung, und eine Umrechnung zwischen den EA- und LA-Modellvarianten ist leicht möglich. Aufgrund des TDM-Schemas mit zyklischer Zeitschlitzreservierung für jede Warteschlange kann sich die Analyse auf einen Systemeingang beschränken; die Verkehrsaufteilung auf die übrigen Eingänge ist dabei unerheblich.

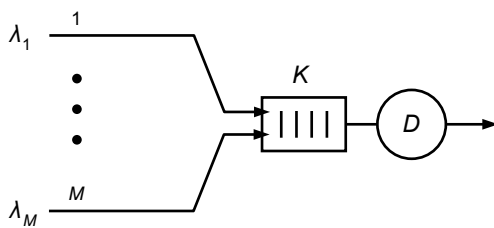
Dem TDM-Betrieb geschuldet ist ein Sockelbetrag von  $\frac{1}{2}(M-1)$  Zeitschlitzten bei der mittleren Wartedauer, der sich entsprechend auf die Wartedauerverteilung auswirkt. Der Durchsatz nimmt mit wachsender Anzahl von Eingängen (bei einheitlicher Pufferkapazität pro Eingang) stetig ab; ein Durchsatzeinbruch wie beim klassischen Polling-System tritt hier nicht in Erscheinung. Um eine bestimmte Zellenverlustwahrscheinlichkeit zu erreichen, muss man also mit zunehmender Eingangsanzahl größere Puffer vorsehen. Dies deutet auf ein robusteres Betriebsverhalten hin, z.B. im Falle stärkerer Büschelhaftigkeit des Verkehrsangebots als hier angenommen. Allerdings ist das Durchsatzniveau bei gleicher Pufferkapazität deutlich geringer als beim Polling-System ohne Reservierung. Insgesamt ist im TDM-Betrieb eine große Eingangsanzahl kaum zweckmäßig (die Abfertigungsdauer entspricht der Rahmenlänge); sinnvoll erscheinen Werte  $M = 16 \dots 256$ . Hier sei angemerkt, dass Polling-Systeme im Allgemeinen ohnehin keine größere Eingangsanzahl aufweisen.

## Kapitel 5

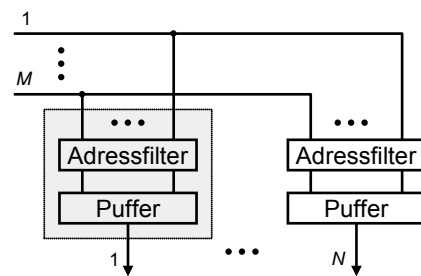
# Leistungsfähigkeit von Zellen-Multiplexern mit Zentralpuffer

### 5.1 Modelle und Annahmen für die zeitdiskrete Analyse

Den Mittelpunkt dieses Kapitels bildet der  $M : 1$ -Zellen-Multiplexer mit Zentralpufferarchitektur. Gemäß **Bild 5.1** wird der Multiplexer als zeitdiskretes Single-Server Bediensystem mit zentraler Warteschlange modelliert. Gespeist wird die Warteschlange von  $M$  Eingängen, die Bedieneinheit repräsentiert den Multiplexer-Ausgang. Das Multiplexen der Zellenströme findet bei dieser Konfiguration durch koordinierte Aufnahme der ankommenden Zellen in den gemeinsamen,  $K$  Zellen fassenden Puffer statt. Als Anwendungsbeispiel zeigt **Bild 5.2** die Anordnung mehrerer derartiger Multiplexer-Elemente in einem Schaltknoten mit Ausgangspufferung zur Zellenvermittlung (siehe z.B. [Chao01]).



**Bild 5.1:** Zellen-Multiplexer mit  $M$  Eingängen und endlicher Warteschlangenkapazität  $K$ , modelliert als einliniges zeitdiskretes Bediensystem.



**Bild 5.2:** Anwendungsbeispiel für  $M:1$ -Zellen-Multiplexer:  $M \times N$ -Zellenschalter, bestehend aus  $N$  Multiplexer-Elementen (siehe z.B. [Yeh87]).

Für die wichtigsten Leistungsgrößen wie Warteschlangenlänge, Wartedauer und Anzahl von Zellenverlusten pro Gruppenankunft werden in den folgenden Abschnitten exakte geschlossene Lösungen entwickelt. Die Analysen basieren – wie auch im Kapitel 4 – auf den Early-Arrival- und Late-Arrival-Modellvarianten. Die Annahmen bezüglich Zeitraster, Verkehr usw. (äußere Randbedingungen), sowie Abfertigungsdauer entsprechen denen für die Analyse der

Polling-Systeme in Kapitel 4. Ferner gilt hier:

- Die Ankünfte treten synchron als Gruppe der Größe  $A = 0, 1, \dots, M$  auf.
- Sämtliche Ankünfte haben gleiches Nutzungsrecht des Warteraums (dynamischer Zellen-Multiplexer, kein Reservierungsschema).
- Die akzeptierten Ankünfte werden in zufälliger Reihenfolge an das Warteschlangende angefügt (Zugangsdisziplin *Random Order*, RO).
- Zellen, die aufgrund fehlenden Warteraums zum Ankunftszeitpunkt nicht im System aufgenommen werden können, gehen verloren. Mithin ist die teilweise Aufnahme von Aufträgen aus einer eintreffenden Gruppe möglich; ihre Auswahl erfolgt zufällig.
- Abgefertigt werden die Aufträge gemäß einer vorgegebenen Warteschlangendisziplin (z.B. Reihenfolge der Ankunft, d.h. FCFS, oder zufällige Reihenfolge, d.h. SIRO).
- Die Bedieneinheit arbeitet im Sinne einer erschöpfenden Warteschlangenabfertigung, solange sich Aufträge im System befinden.

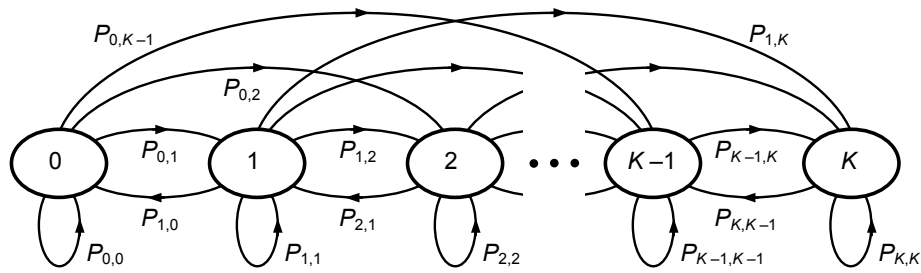
Im Zusammenwirken resultieren FCFS-Warteschlangen- und RO-Zugangsdisziplin in einer unparteiischen Abfertigung. Die Bestimmung der Warteschlangenlänge ist aber auch mit beliebigen anderen unparteiischen Warteschlangendisziplinen, wie beispielsweise SIRO, möglich.<sup>1</sup> Wichtig ist nur, dass in jedem Zeitschlitz ein Auftrag bedient wird, solange sich das System nicht im Leerlauf befindet. FCFS und SIRO sind im Hinblick auf die Pufferimplementierung (FIFO- bzw. RAM-Puffer, siehe Kapitel 3.1.1.1) naheliegende Warteschlangendisziplinen. Im Folgenden wird das EA-IR-Modell unter FCFS und SIRO ausführlich analysiert und anschließend mit den Kennwerten der analog untersuchten LA-Modelle verglichen.

Betrachtet wird das System an den Zeitschlitzgrenzen, wo sämtliche Aktionen des gerade beendeten Zeitschlitzes abgeschlossen sind und Aktivitäten des darauffolgenden Zeitschlitzes noch nicht begonnen haben. Die Warteschlangenlänge ist dann (unabhängig vom verwendeten Analysemodell) identisch mit dem Systeminhalt. **Bild 5.3** zeigt das Schema der resultierenden zeitdiskreten Markov-Kette.

Es wird angenommen, dass die Ankünfte an den  $M$  Eingängen unabhängigen Bernoulli-Prozessen folgen, sodass Forderungen an jedem Eingang pro Zeitschlitz  $\Delta t$  mit der Wahrscheinlichkeit  $p = \lambda \Delta t / M$  auftreten,  $0 \leq \lambda < 1$ . Danach ergeben sich für  $A$  die binomialen Wahrscheinlichkeiten

$$a_i = P\{A = i\} = \binom{M}{i} p^i (1-p)^{M-i}, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (5.1)$$

<sup>1</sup> Warteschlangenzugang und Service in zufälliger Reihenfolge ergeben im Verbund globale SIRO-Abfertigung.



**Bild 5.3:** Zustandsübergangsdiagramm für die Warteschlangenlänge in einem Puffer mit  $K$  Warteplätzen bei Gruppenankünften, bestehend aus  $1 \dots M$  Forderungen,  $K > M$ , hier dargestellt für das EA-Modell. Das LA-Modell basiert auf der gleichen Struktur, es existiert aber ein weiterer Zustandsübergang  $P_{0,K}$ .

wobei  $a_i$  die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Zufallsvariablen  $A$  ist, welche die Anzahl gleichzeitig ankommender Aufträge in einem beliebigen Zeitschlitz angibt. Im Grenzfall einer unendlichen Anzahl von Eingängen folgt die Anzahl simultaner Ankünfte den Poisson-Wahrscheinlichkeiten  $\lim_{M \rightarrow \infty} a_i = (\lambda \Delta t)^i e^{-\lambda \Delta t} / i!$ .

Der beschriebene Zellen-Multiplexer stellt ein Geo<sup>[X]</sup>/D/1/K-System mit konstanter Bediendauer  $\Delta t$  (1 Zeitschlitz) dar.<sup>2</sup> Die folgenden Analysen basieren auf diesem Modell.

### 5.2 Analyse mit dem Early-Arrival-Modell

Auf der Basis des EA-Modells mit sofortiger Warteplatznachbesetzung werden in den folgenden Abschnitten die Verteilungsfunktionen von Warteschlangenlänge und Wartedauer ermittelt, sowie weitere daraus abgeleitete Leistungsgrößen. Die Analysen basieren auf dem Systeminhalt, wie ihn die zeitdiskrete ergodische Markov-Kette gemäß **Bild 5.3** beschreibt. Für einen Bernoulli-Ankunftsprozess mit genereller Gruppengröße betragen die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten<sup>3</sup>

$$P_{i,j} = \begin{cases} a_0 + a_1 & \text{falls } i = j = 0, \\ a_{j-i+1} & \text{falls } 0 \leq i \leq j, 1 \leq j \leq K-1, \\ \sum_{k=j-i+1}^M a_k & \text{falls } 0 \leq i \leq K, j = K, \\ a_0 & \text{falls } 1 \leq i \leq K, j = i-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.2)$$

<sup>2</sup> Anzumerken ist, dass sich dieses Bediensystem bei Verwendung von Bernoulli-Quellen auch als Geo/D/1/K-Modell mit der Bediendauer  $M$  interpretieren lässt. Dies ist darin begründet, dass die Anzahl der Forderungen, die während einer  $M$  Zeitschlitz andauernden Bedienperiode von einer einzelnen Bernoulli-Quelle generiert werden, identisch ist mit der gleichzeitig eintreffenden Auftragsanzahl beim Gruppenankunftsmodell (überlagerte BP bzw. BBP, siehe Kapitel 3.2.2.3). Natürlich setzt diese Sichtweise voraus, dass man als Beobachtungszeitpunkt den Service-Abschluss wählt, und zwischen den unterschiedlichen Ankunftszeitpunkten während einer Bedienperiode nicht differenziert.

<sup>3</sup> Der Index  $j$  der Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten verwendet in diesem Kapitel die Zustandsnummern als Absolutwerte.

### 5.2.1 Analyse der Warteschlangenlänge

Den Ausgangspunkt der Analyse bildet der Umstand, dass der Warteschlangenprozess im vorliegenden Fall identisch ist mit dem eines  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/\infty$ -Systems, solange sich nicht mehr als  $K$  Aufträge in dem auf  $K$  Warteplätze begrenzten Puffer aufhalten. In [Takagi93] ist dargelegt, dass die mit der Zufallsvariablen  $Q$  gekennzeichnete Auftragsanzahl in der Warteschlange am Ende eines beliebigen Zeitschlitzes (unmittelbar nach Bedienende) mit den Wahrscheinlichkeiten

$$q_n = P\{Q = n\} = q_n^{(\infty)} / \sum_{i=0}^K q_i^{(\infty)}, \quad n = 0, 1, \dots, K \quad (5.3)$$

auftritt. Der Ausdruck  $q^{(\infty)}$  kennzeichnet hier einen Warteraum (außerhalb der Bedieneinheit) unbegrenzter Größe.<sup>4</sup> Es sei angemerkt, dass es sich beim Nenner von Gleichung (5.3) um die kumulative Verteilungsfunktion für die Wahrscheinlichkeit von  $Q \leq K$  handelt. Durch Auflösung der Zustandsübergangsmatrix, die sich aus der mit Gleichung (5.2) beschriebenen Markov-Kette ergibt, gelangt man schließlich zur Leerlauf-Wahrscheinlichkeit des Systems<sup>5</sup>

$$q_0 = 1 / \sum_{i=0}^K \frac{(-p)^i}{(1-p)^{M(K-i)+i}} \binom{M(K+1-i)+i-1}{i}, \quad K \in \mathbb{N}, \quad M \in \mathbb{N}^+. \quad (5.4)$$

Bemerkenswert ist, dass dieser Ausdruck für  $K=0$  ebenso hält wie für  $M=1$ . Aus Gleichung (5.3) folgt die Beziehung  $\sum_{i=0}^n q_i = q_0 / q_0^{(n)}$ , und aufgrund der Tatsache, dass sich  $q_n$  durch  $q_n = \sum_{i=0}^n q_i - \sum_{i=0}^{n-1} q_i$  ausdrücken lässt, gelangt man zu dem Ausdruck  $q_n = q_0 / q_0^{(n)} - q_0 / q_0^{(n-1)}$ . Mit Hilfe von Gleichung (5.4) folgt daraus nach einigen Rechenschritten

$$q_n = q_0 \sum_{i=0}^n \frac{(-p)^i}{(1-p)^{M(n-i)+i}} \left( 1 + \frac{1-p}{p} \frac{i}{M(n+1-i)+i-1} \right) \binom{M(n+1-i)+i-1}{i}, \quad n = 1, 2, \dots, K. \quad (5.5)$$

Dieser Ausdruck ist lediglich durch  $q_0$  von  $K$  abhängig und gilt folglich auch im Fall unbegrenzten Warteraums, wobei natürlich  $q_0^{(\infty)}$  anstelle von  $q_0$  verwendet werden muss. Somit liefern die Gleichungen (5.4) und (5.5) eine allgemeingültige geschlossene Lösung für  $q_n = f(K, M, p)$ . Die Resultate stimmen ausgezeichnet mit der in [Hluchyj88] präsentierten rekursiven Lösung überein. Die Konsistenz von Gleichung (5.4) mit dem bestens bekannten Ausdruck

$$q_0^{(\infty)} = \lim_{K \rightarrow \infty} q_0 = (1 - Mp) / (1 - p)^M \quad (5.6)$$

wird im Anhang C nachgewiesen. Dort wird ebenfalls gezeigt, dass sich aus diesen Kernbe-

<sup>4</sup> Diese Kennzeichnung wird nur verwendet, soweit erforderlich. Fehlt dieser Index, so wird die Abhängigkeit von der Warteraumkapazität  $K$  unterstellt.

<sup>5</sup> Zur Auflösung der Übergangsmatrix siehe Kapitel 4. Im vorliegenden Fall gelingt bei Verwendung des BP-Ankunftsprozesses die Überführung in eine geschlossene Lösung. Eine Verallgemeinerung auf den generellen Ankunftsprozess scheitert an der Determinantenbestimmung (u.a. wegen Unübersichtlichkeit der Terme).



ziehungen unschwer weitere Kenngrößen ableiten bzw. beweisen lassen.

Die Warteschlangenlänge bei unendlicher Eingangszahl  $M \rightarrow \infty$  folgt unmittelbar aus der Grenzwertbetrachtung der allgemeinen Lösung. Hierbei nimmt die Gruppengröße der Ankünfte die Poisson-Verteilung an, und die Grenzwertanalyse von Gleichung (5.4) liefert

$$\lim_{M \rightarrow \infty} q_0 = 1 / \left\{ e^{K\lambda\Delta t} \sum_{i=0}^K \frac{(-1)^i}{i!} [(K+1-i)\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}]^i \right\}. \quad (5.7)$$

In Verbindung mit Gleichung (5.5) folgt daraus

$$\lim_{M \rightarrow \infty} q_n = q_0 e^{n\lambda\Delta t} \sum_{i=0}^n [(-1)(n+1-i)\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}]^i \left( 1 + \frac{i}{(n+1-i)\lambda\Delta t} \right) / i!, \quad n = 1, 2, \dots, K. \quad (5.8)$$

Wieder halten diese Ausdrücke für alle  $K \in \mathbb{N}$  bis hin zu  $K \rightarrow \infty$ . Im Anhang C wird gezeigt, dass die aus [Karol87] bekannte Beziehung für Systeme mit unbegrenzter Kapazität mit dieser verallgemeinerten Lösung konsistent ist.

Anhand der Herleitung für  $q_n$  in Gleichung (5.5) lässt sich auch die mittlere Warteschlangenlänge bestimmen. Nach einigen Rechenschritten ergibt sich der einfache Ausdruck

$$E[Q] = \sum_{n=0}^K n q_n = q_0 \sum_{n=1}^K \frac{n}{q_0^{(n)}} - \frac{n}{q_0^{(n-1)}} = K - q_0 (1-p)^M \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{n=1}^{K-i} \binom{Mn+i-1}{i} \frac{(-p)^i}{(1-p)^{Mn+i}}. \quad (5.9)$$

Bei unbegrenzter Kapazität konvergiert die mittlere Warteschlangenlänge gegen den Wert des Geo/D/1-Systems, z.B. nach [Takagi93] bekannt als

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E[Q] = \frac{M-1}{M} \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = E[Q]_{\text{Geo/D/1}}. \quad (5.10)$$

Die Auslastung  $\rho = \lambda\Delta t$  ist hier – ebenso wie bei den Polling-Systemen im Kapitel 4.2.3 – durch  $\rho = 1 - q_0 a_0$  gegeben, denn die Bedieneinheit befindet sich nur dann im Leerlauf, wenn die Warteschlange leer ist und im betrachteten Zeitschlitz keine Ankünfte auftreten. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Zelle aus einer ankommenden Auftragsgruppe wegen Pufferüberlauf zu Verlust geht

$$p_v = 1 - \rho / E[A] = 1 - (1 - q_0 a_0) / (\lambda\Delta t). \quad (5.11)$$

Typische, rekursiv berechnete Diagramme der Verlustwahrscheinlichkeit als Funktion des Verkehrsangebots finden sich in [Hluchyj88]. Sie decken sich mit der analytischen Lösung von Gleichung (5.11). **Bild 5.4** zeigt, dass die Pufferkapazität für eine bestimmte Verkehrsleistung generell proportional zur Eingangszahl  $M$  ist. Mit wachsender Eingangszahl verschwindet dieser Effekt. Es sei angemerkt, dass die hier ermittelte allgemeine Lösung

$\rho = f(M, K)$  konsistent ist mit der in [Dickey94]<sup>6</sup> explizit angegebenen Lösung des Einzelfalls  $M = K = 2$ .

In gleicher Weise wie zuvor gelangt man zum zweiten Moment der Warteschlangenlänge

$$E[Q^2] = K^2 - (1-\rho) \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{n=1}^{K-i} \binom{Mn+i-1}{i} (2i+2n-1) (-p)^i (1-p)^{-Mn-i}, \quad (5.12)$$

mit dem Grenzfall unendlichen Warteraums ( $\rho = \lambda \Delta t$ )

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E[Q^2] = \frac{M-1}{M^2} \frac{3M\rho^2 - (M+4)\rho^3 + (M+1)\rho^4}{6(1-\rho)^2} = E[Q^2]_{\text{Geo/D/1}}. \quad (5.13)$$

### 5.2.2 Wartedauer bei Abfertigung in der Reihenfolge des Eintreffens

Für zeitdiskrete Single-Server-Bediensysteme mit FCFS-Disziplin und fester Abfertigungsdauer von einem Zeitschlitz pro Auftrag gilt nach [Wittevrongel96] bei unbegrenztem Warteraum für die Wartedauervarianz die Beziehung (siehe auch Kapitel 4.4.1.1)

$$\text{var}[W]_{\text{FCFS}} / (\Delta t)^2 = \text{var}[Q] / \rho - (1-\rho) (E[Q] / \rho)^2. \quad (5.14)$$

Im Anhang C wird bewiesen, dass dieser Ausdruck auch auf Systeme mit beliebiger endlicher Kapazität zutrifft. Mit der Auslastung  $\rho = 1 - q_0 a_0$  folgt aus Gleichung (5.14)

$$w_i = P\{W = i \Delta t\} = \begin{cases} 1 - (1 - q_0) / \rho & \text{falls } i = 0, \\ q_i / \rho & \text{falls } 1 \leq i \leq K. \end{cases} \quad (5.15)$$

Die mittlere Wartedauer kann leicht aus Gleichung (5.15) gewonnen werden, oder mit Hilfe des Littleschen Gesetzes aus der mittleren Warteschlangenlänge, d.h.  $E[W] = E[Q] / (\rho / \Delta t)$ .<sup>7</sup> Ferner resultiert aus Gleichung (5.14)  $E[W^2] = E[Q^2] (\Delta t)^2 / \rho$ , sodass man mit Gleichung (5.12) schließlich zum zweiten Moment der Wartedauer gelangt:

$$E[W^2]_{\text{FCFS}} = \frac{(\Delta t)^2}{\rho} \left\{ K^2 - (1-\rho) \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{n=1}^{K-i} \binom{Mn+i-1}{i} (2i+2n-1) (-p)^i (1-p)^{-Mn-i} \right\}, \quad (5.16)$$

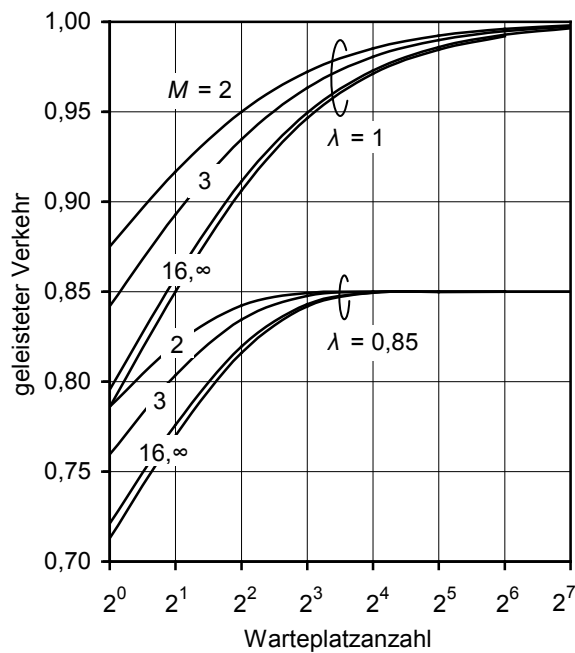
bzw.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E[W^2]_{\text{FCFS}} = \frac{M-1}{M^2} \frac{3M\rho - (M+4)\rho^2 + (M+1)\rho^3}{6(1-\rho)^2} (\Delta t)^2. \quad (5.17)$$

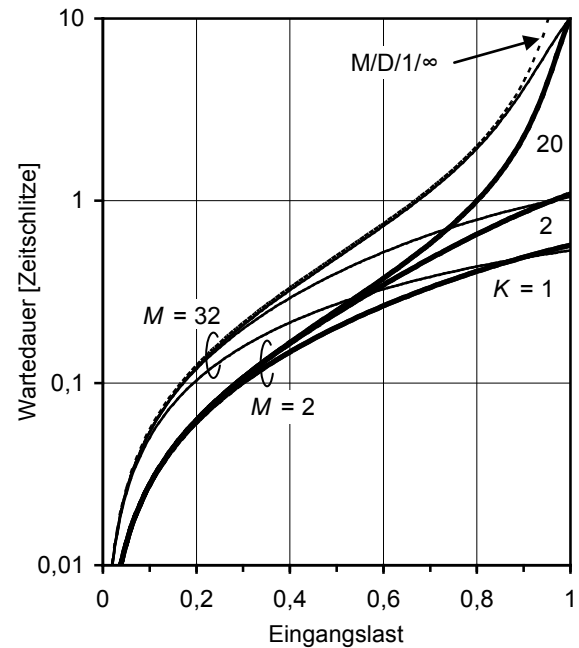
Die gesamte Aufenthaltsdauer im System beträgt  $E[T] = E[W] + 1$  Zeitschlitz der Dauer  $\Delta t$ .

<sup>6</sup> Dass es sich um das EA-IR-Analysemodell handelt, ist dort nur aus dem Kontext ersichtlich.

<sup>7</sup> Nicht in der Warteschlangenlänge enthalten ist beim EA-IR-Modell der Verkehrsanteil, der unmittelbar im Ankunftszeitschlitz (ohne Aufenthalt in der Warteschlange) geleistet wird.



**Bild 5.4:** Geleisteter Verkehr als Funktion der Pufferkapazität am Beispiel von zwei hohen Verkehrslasten. Zur Verdeutlichung sind die diskreten Werte durch Linien verbunden.

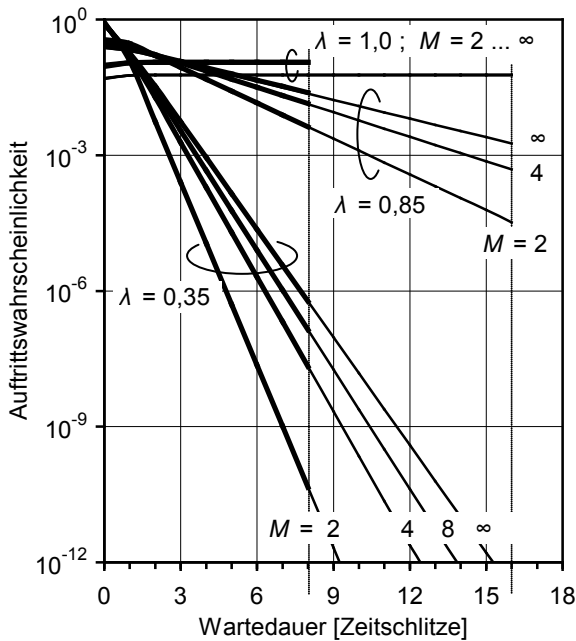


**Bild 5.5:** Mittlere Wartedauer als Funktion der Eingangslast für Multiplexer mit  $M = 2$  bzw. 32 Eingängen und verschiedenen Pufferkapazitäten. Das  $M/D/1/\infty$ -System markiert hier die obere Grenze.

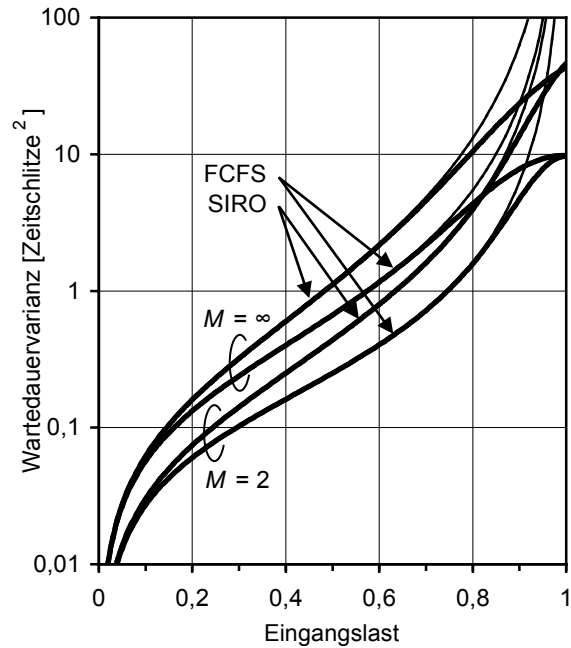
Numerische Ergebnisse, wie sie z.B. in [Hluchyj88] publiziert worden sind, stimmen mit diesen exakt ermittelten Resultaten ausgezeichnet überein.

**Bild 5.5** illustriert die mittlere Wartedauer als Funktion des Eingangslast für kleine und große Multiplexer ( $M = 2$  bzw. 32) mit verschiedener Warteplatzanzahl  $K$ . Es wird deutlich, dass die Wartedauer unter voller Auslastung den Wert  $E[W] = K/2$  Zeitschlitz knapp übersteigt.<sup>8</sup> Generell verschwindet in diesem Lastbereich die im Übrigen vorhandene Abhängigkeit von der Eingangsanzahl (siehe  $M/D/1/K$ -System in [Kühn76]). Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer als Funktion von  $M$ ,  $K$  und  $\lambda$  ist in **Bild 5.6** dargestellt. Durch FCFS begrenzt auf die maximale Wartedauer von  $K$  Zeitschlitz zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung eine nahezu lineare Charakteristik und nur geringe Abweichungen im überlappenden Bereich unterschiedlicher Warteraumkapazitäten bis hinauf zu Lasten von  $\lambda = 0,85$ . Unter Volllast treten im Falle  $M = 2$  alle Zustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf, und mit Ausnahme des Leerlaufs sind sie bei beliebiger Eingangsanzahl  $M > 2$  nahezu gleich verteilt. Die Wartedauerwahrscheinlichkeiten hängen dann primär vom  $K$  ab, weshalb das Wahrscheinlichkeitsniveau mit zunehmender Warteschlangenkapazität sinkt.

<sup>8</sup> Der exakte Wert lässt sich unschwer aus Gleichung (5.9) sowie dem Durchsatz ermitteln.



**Bild 5.6:** Diskrete Wartedauerwahrscheinlichkeiten für Systeme unterschiedlicher Größe mit  $K = 8$  (fette Linien) und  $K = 16$  (dünne Linien) Wartepätzen in verschiedenen Lastsituationen.  $K$  markiert bei FCFS-Abfertigung die obere Grenze der Wartedauer.



**Bild 5.7:** Wartedauervarianz über der Eingangslast für Multiplexer mit  $K = 10$  Wartepätzen (fette Linien) bzw. unbegrenztem Puffer (dünne Linien) bei minimaler und maximaler Eingangszahl  $M$  unter FCFS- bzw. SIRO-Abfertigung.

### 5.2.3 Wartedauer bei Service in zufälliger Reihenfolge

Unparteiische Disziplinen haben bei dem hier behandelten Bediensystem unter den getroffenen Verkehrsannahmen keinen Einfluss auf Warteschlangenlänge, Verlustwahrscheinlichkeit oder mittlere Wartedauer. Diese in den vorherigen Abschnitten für FCFS analysierten Parameter gelten also auch unter Disziplinen wie SIRO. Von der Warteschlangendisziplin maßgeblich bestimmt wird allerdings die Verteilung der Wartedauer. Bei der SIRO-Disziplin schließt der Auswahlprozess zur Abfertigung jeweils eines Auftrags sämtliche anwesenden Forderungen ein. Unter Performance-Aspekten mag dieses Verfahren bei Zellen-Multiplexern kaum zweckmäßig sein.<sup>9</sup> Da es sich aber durch eine einfache Auswahl- und Puffersteuerung auszeichnet, kann es unter Implementierungsaspekten für bestimmte Anwendungen durchaus relevant sein. Im Folgenden wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer bei SIRO-Abfertigung bestimmt. Hierfür findet die bereits in Kapitel 4.4.1.1 angewendete numerische Methode Anwendung.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich nach Ankunft einer Gruppe von  $n$  Aufträgen – darunter der beobachtete Auftrag – unmittelbar zu Beginn des Bedienprozesses  $k = 1, 2, \dots, K + 1$  Forderun-

<sup>9</sup> Werden sämtliche wartenden Aufträge in den Zuteilungsprozess einbezogen, so sind „Überholvorgänge“ innerhalb der Warteschlange möglich. Das kann zu einer veränderten Reihenfolge von Zellen führen, die zur selben virtuellen Verbindung gehören. Infolgedessen erfordert dieses Zuteilungsverfahren im Anschluss an den Vermittlungsprozess eine Überprüfung und ggf. Wiederherstellung der korrekten Zellenreihenfolge.

gen im System befinden, beträgt  $P_k = \sum_{n=0}^k q_n (k-n) a_{k-n} / \rho$ . Hierbei ist  $q_n$  die im Abschnitt 5.2.1 ermittelte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Warteschlangenlänge. In Verbindung mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten  $P(i|k)$  einer Wartedauer von  $i \in \mathbb{N}$  Zeitschlitzen für die beobachtete Forderung in Gegenwart von anfänglich  $k$  Aufträgen (siehe auch Gleichung (4.13) im Abschnitt 4.4.1.1) gelangt man zur Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer

$$w_i = P\{W = i \Delta t\} = \sum_{k=1}^M P(i+1|k) P_k = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^M P(i+1|k) \sum_{n=0}^k q_n (k-n) a_{k-n}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (5.18)$$

Hierbei ist zu beachten dass bei der Ermittlung von  $P_k$  und  $P(i|k)$  sämtliche Ankünfte berücksichtigt werden müssen, auch wenn diese nicht zur Abfertigung ausgewählt werden und wegen Pufferüberlauf zu Verlust gehen. Beispiele für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer unter SIRO bei unterschiedlicher Eingangsanzahl, Pufferkapazität und Verkehrslast sind weiter hinten in **Bild 5.8** dargestellt. Leicht lassen sich aus der Wartedauerverteilung auf numerischem Wege auch die höheren Momente der Wartedauer bei beliebiger Warte- raumkapazität  $K$  ermitteln. Für den Fall unbegrenzten Warteraums gibt es eine geschlossene Lösung. Sie basiert auf einer festen Beziehung zwischen den zweiten Momenten der Wartedauer bei Geo<sup>[X]</sup>/G/1-Systemen mit FCFS- bzw. SIRO-Disziplin [Takagi93].<sup>10</sup> Danach gilt für den hier behandelten Zellen-Multiplexer

$$\left( E[W^2]_{\text{SIRO}} + E[W]_{\text{SIRO}} \right) / \left( E[W^2]_{\text{FCFS}} + E[W]_{\text{FCFS}} \right) = \beta_{\text{SIRO}} = \frac{1}{1 - \lambda \Delta t / 2}. \quad (5.19)$$

Mit Gleichung (5.17) und der mittleren Wartedauer, die für beide Disziplinen identisch ist, ergibt sich hieraus das zweite Moment der Wartedauer zu

$$E[W^2]_{\text{SIRO}} = \frac{M-1}{M^2} \frac{6M\rho + (M-8)\rho^2 - (M-2)\rho^3}{6(1-\rho)^2(2-\rho)} (\Delta t)^2 \quad (5.20)$$

bzw.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E[W^2]_{\text{SIRO}} = \frac{6\rho + \rho^2 - \rho^3}{6(1-\rho)^2(2-\rho)} (\Delta t)^2 = E[W^2]_{\text{M/D/1-SIRO}} + \frac{\rho}{6} \frac{2-\rho-\rho^2}{(1-\rho)(2-\rho)} (\Delta t)^2. \quad (5.21)$$

**Bild 5.7** zeigt einen Vergleich der Wartedauervarianzen bei FCFS- und SIRO-Zuteilung für kleinste ( $M = 2$ ) und größte ( $M \rightarrow \infty$ ) Systeme. Natürlich stellt sich bei kleinen Ankunftsra- ten und SIRO nur eine geringfügig höhere Wartedauervarianz ein als mit FCFS-Zuteilung, weil sich nur selten mehrere Aufträge gleichzeitig im System befinden. Bei höherer Last hin- gegen bewirkt die Teilnahme aller wartenden Aufträge an der Auswahl zur Abfertigung eine deutlich höhere Varianz. Des Weiteren ergibt sich nach Gleichung (5.21) bei sehr großer Ein-

<sup>10</sup> Die Herleitung des zweiten Momentes der Wartedauer für SIRO in [Takagi93], S. 56, enthält Unstimmigkei- ten, während das Resultat korrekt abgedruckt ist und sich z.B. mit dem Ergebnis eines alternativen Ansatzes in [Laevens95] deckt.

gangszahl eine stärkere Wartedauervarianz als bei einem M/D/1-System, was darauf zurückzuführen ist, dass beim hier betrachteten System Gruppenankünfte möglich sind.

### 5.3 Analyse mit dem Late-Arrival-Modell bei sofortiger Warteplatznachbesetzung

Angelehnt an die obigen Ausführungen folgen in den beiden nächsten Abschnitten verkürzte Analysen der wichtigsten Leistungsgrößen mit dem LA-Modell bei sofortiger bzw. verzögerter Warteplatznachbesetzung unter den Disziplinen FCFS und SIRO. Das EA-Modell mit verzögerter Nachbesetzung ist identisch mit dem LA-Modell mit sofortiger Nachbesetzung (siehe Kapitel 4.2.4).

Außerhalb der Bedieneinheit hat das LA-Modell eine Warteraumkapazität von  $K \in \mathbb{N}^+$  Zellen. Für einen Durchsatz  $> 0$  benötigt es also mindestens einen Warteplatz, weil der Ankunftszeitpunkt hier unmittelbar vor dem Zeitschlitzende (Beobachtungszeitpunkt) liegt, und Ankünfte bis zum Abfertigungsbeginn gepuffert werden müssen. Es wird angenommen, dass der Warteplatz, den die gerade im Abfertigungsprozess befindliche Zelle räumt, im gleichen Zeitschlitz wieder besetzt werden kann. Aus **Bild 5.3** ergeben sich damit für einen Bernoulli-Ankunftsprozess mit genereller Gruppengröße die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten

$$P_{i,j} = \begin{cases} a_j & \text{falls } i = 0, 0 \leq j \leq K-1, \\ \sum_{k=j}^M a_k & \text{falls } i = 0, j = K, \\ a_{j-i+1} & \text{falls } 1 \leq i \leq j, 1 \leq j \leq K-1, \\ \sum_{k=j-i+1}^M a_k & \text{falls } 1 \leq i \leq K, j = K, \\ a_0 & \text{falls } 1 \leq i \leq K, j = i-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.22)$$

Entsprechend der Vorgehensweise beim EA-Modell liefern die Gleichgewichtsbedingungen für die mit Gleichung (5.22) beschriebene Markov-Kette bei binomial-verteilter Gruppengröße der Ankünfte die Zustandswahrscheinlichkeiten<sup>11</sup>

$$q_n = \begin{cases} 1 / \left\{ \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(-p)^i}{(1-p)^{M(K-i)+i}} \binom{M(K-i)+i-1}{i} \right\} & \text{falls } n = 0, \\ q_0(1-a_0)/a_0 & \text{falls } n = 1, \\ q_0 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-p)^i}{(1-p)^{M(n-i)+i}} \binom{M(n-i)+i-1}{i} & \text{falls } 2 \leq n \leq K, \\ \cdot \left\{ 1 + \frac{1-p}{p} \binom{i}{M(n-i)+i-1} \right\} & \{K, M\} \in \mathbb{N}^+. \end{cases} \quad (5.23)$$

<sup>11</sup> Der Parameter  $a$  wird überall dort verwendet, wo keine Abhängigkeit vom Ankunftsprozess besteht.

Mit Hilfe der im Anhang C beim EA-IR-Modell angewendeten Prozedur lässt sich leicht zeigen, dass für unbegrenzte Pufferkapazität

$$\lim_{K \rightarrow \infty} q_0 = 1 - M\rho \quad (5.24)$$

gilt. Da die Ausdrücke  $q_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$  nicht von  $K$  abhängen, liefert das Einfügen von Gleichung (5.24) in Gleichung (5.23) die allgemeine Lösung für ein System mit unbegrenzter Kapazität. Wie schon für das EA-IR-Modell ausgeführt wurde, trifft diese Lösung auf das Geo<sup>[X]</sup>/D/1/K-Modell mit konstanter Bediendauer von einem Zeitschlitz ebenso zu wie auf das Geo/D/1/K-Modell mit diskreter Bediendauer von  $M$  Zeitschlitz, das in [Gravey90] analysiert worden ist. Durch Grenzwertbetrachtung  $M \rightarrow \infty$  erhält man aus der allgemeinen Lösung von Gleichung (5.23) für den Poisson-Fall mit  $K \in \mathbb{N}^+$  unmittelbar

$$\lim_{M \rightarrow \infty} q_n = \begin{cases} 1 / e^{K\lambda\Delta t} \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(-1)^i}{i!} [(K-i)\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}]^i & \text{falls } n=0, \\ q_0 (e^{\lambda\Delta t} - 1) & \text{falls } n=1, \\ q_0 e^{n\lambda\Delta t} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} [(n-i)\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}]^i [1 + i / ((n-i)\lambda\Delta t)] & \text{falls } 2 \leq n \leq K. \end{cases} \quad (5.25)$$

Die Auslastung ist durch  $\rho = 1 - q_0$  gegeben (siehe auch Kapitel 4.2.1), denn die Bedieneinheit befindet sich immer dann im Leerlauf, wenn die Warteschlange zum Zeitschlitzwechsel leer ist. Anzumerken ist, dass der mit diesem Modell ermittelte Durchsatz auch auf das EA-DR-Modell zutrifft; natürlich ergibt sich dort wegen  $\rho = 1 - q_0 a_0$  eine andere Leerlaufwahrscheinlichkeit. In Analogie zu Gleichung (5.15) gilt für die Wartedauerverteilung bei FCFS-Abfertigung

$$w_i = P\{W = i\Delta t\} = \frac{1}{1 - q_0} \sum_{n=0}^i x_n \left( 1 - \sum_{k=0}^{i-n} a_k \right), \quad i = 0, 1, \dots, K-1, \quad (5.26)$$

$$\text{mit } x_n = \begin{cases} q_0 + q_1 & \text{falls } n=0, \\ q_{n+1} & \text{falls } n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Erläuterungen hierzu enthält Anhang C. Die mittlere Warteschlangenlänge  $E[Q] = \sum_{i=0}^K i q_i$  repräsentiert den Systeminhalt während einer Bedienperiode. Mit dem Gesetz von Little folgt daraus die typische Aufenthaltsdauer einer Zelle im Multiplexer  $E[T] = E[Q] / (\rho / \Delta t) = E[W] + \Delta t$ , wobei  $E[W]$  identisch ist mit dem aus Gleichung (5.26) gebildeten Erwartungswert. Ausführlicher wird auf die Verteilung der Wartedauerwahrscheinlichkeit im Abschnitt 5.5 eingegangen – auch für den Fall der SIRO-Abfertigung.

#### 5.4 Analyse mit dem Late-Arrival-Modell bei verzögerter Warteplatznachbesetzung

Wie im vorherigen Abschnitt kommen auch beim LA-Modell mit verzögerter Nachbesetzung nur Warteraumkapazitäten von  $K \in \mathbb{N}^+$  Zellen in Betracht. Eine Besonderheit dieses Modells ist, dass der Warteraum an den Zeitschlitzgrenzen nur dann vollständig gefüllt sein kann, wenn bei  $K \leq M$  Warteplätzen Gruppenankünfte mit mindestens  $K$  Forderungen ein leeres System betreten. Die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten sind gegeben durch

$$P_{i,j} = \begin{cases} a_j & \text{falls } i = 0, 0 \leq j \leq K-1, \\ \sum_{k=j}^M a_k & \text{falls } i = 0, j = K, \\ a_{j-i+1} & \text{falls } 1 \leq i \leq j, 1 \leq j \leq K-2, \\ \sum_{k=j-i+1}^M a_k & \text{falls } 1 \leq i \leq K, j = K-1, \\ a_0 & \text{falls } 1 \leq i \leq K-1, j = i-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.27)$$

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Warteschlangenlänge<sup>12</sup> gilt dann

$$q_n = \begin{cases} 1 / \left\{ \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(-p)^i}{(1-p)^{M(K-1-i)+i}} \binom{M(K-1-i)+i-1}{i} + \left( 1 - \sum_{i=0}^{K-1} a_i \right) \right\} & \text{falls } n = 0, \\ \text{siehe } q_1 \text{ in Gleichung (5.23)} & \text{falls } n = 1, K > 1, \\ \text{siehe } q_n \text{ in Gleichung (5.23)} & \text{falls } 2 \leq n \leq K-1, \\ q_0 \left( 1 - \sum_{i=0}^{K-1} a_i \right) & \text{falls } n = K, \\ & \{K, M\} \in \mathbb{N}^+. \end{cases} \quad (5.28)$$

Die Ausdrücke für Systeminhalte  $n > 0$  unterscheiden sich von denen des LA-IR-Modells nur im Bereich  $K \leq M$ . Bei größerem Puffer charakterisiert ausschließlich die Leerlaufwahrscheinlichkeit  $q_0$  die Modellunterschiede. Im Übrigen entsprechen die Ausdrücke für den Systeminhalt voll und ganz der Gleichung (5.23).<sup>13</sup> Leicht zu erkennen ist ferner, dass im Falle unbegrenzten Warteraumes ( $K \rightarrow \infty$ ) die Unterschiede zwischen den Gleichungen (5.28) und (5.23) vollständig verschwinden, sodass LA-IR- und LA-DR-Modell dann gleichwertig sind. Bei sehr großer Eingangsanzahl ( $M \rightarrow \infty$ ) und  $K \in \mathbb{N}^+$  gilt schließlich

<sup>12</sup> Wieder ist  $a_i$  nicht gebunden an den Bernoulli-Ankunftsprozess, sehr wohl aber der Parameter  $p$ .

<sup>13</sup> Wie eingangs erwähnt, gilt  $q_K(K > M) = 0$ .



$$\lim_{M \rightarrow \infty} q_n = \begin{cases} 1 / \left\{ e^{(K-1)\lambda\Delta t} \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(-1)^i}{i!} [(K-1-i)\lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t}]^i + \right. \\ \left. + \left( 1 - \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(\lambda\Delta t)^i e^{-\lambda\Delta t}}{i!} \right) \right\} & \text{falls } n = 0, \\ \text{siehe } q_1 \text{ in Gleichung (5.25)} & \text{falls } n = 1, K > 1, \\ \text{siehe } q_n \text{ in Gleichung (5.25)} & \text{falls } 2 \leq n \leq K-1, \\ q_0 \left( 1 - \sum_{i=0}^{K-1} \frac{(\lambda\Delta t)^i e^{-\lambda\Delta t}}{i!} \right) / i! & \text{falls } n = K. \end{cases} \quad (5.29)$$

Der Term  $q_K$  verschwindet bei unbegrenztem Warteraum grundsätzlich, denn das Schema der Warteplatznachbesetzung wird dann belanglos, sodass die Leerlaufwahrscheinlichkeit gegen den Ausdruck von Gleichung (5.24) konvergiert.

Die Auslastung lässt sich analog zum LA-IR-Modell angeben; die Wartedauerverteilung bei FCFS- und SIRO-Abfertigung wird im nächsten Abschnitt adressiert.

### 5.5 Vergleich der Multiplexer-Modelle anhand der Leistungsgrößen

Die in den vorherigen Abschnitten aus den EA- und LA-Modellen hergeleiteten Kennwerte werden nun miteinander verglichen, wobei sich die Aufmerksamkeit zunächst auf die beiden Modelle mit sofortiger Warteplatznachbesetzung richtet.

Nach den Ausführungen in [Takagi93] ist die Verteilung der Warteschlangenlänge bei beiden Modellen – gleiche Eingangsanzahl  $M$  vorausgesetzt – identisch, wenn man als Beobachtungszeitpunkt beim LA-IR-Modell die Zeitschlitzgrenze wählt und beim EA-IR-Modell den Zeitpunkt unmittelbar nach potentiellen Ankünften. Folglich muss die Verteilung der Wartedauer akzeptierter Aufträge bei beiden Modellen gleich sein. Hier bedarf es allerdings einer Präzisierung, denn entsprechend der Definition in den Kapiteln 4 und 5 hat das LA-IR-Modell tatsächlich eine effektive Kapazität von  $K-1$  Zellen,  $K \in \mathbb{N}^+$ .

Die Analysen der Warteschlangenlängen belegen, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen (an den Zeitschlitzgrenzen) nur dann übereinstimmen, wenn die Warteraumkapazität  $K_{(\text{EA-IR})} = K_{(\text{LA-IR})} - 1$  beträgt. Im Detail gilt

$$q_{n(\text{LA-IR})}^{(K)} = \begin{cases} q_{0(\text{EA-IR})}^{(K-1)} a_0 & \text{falls } n = 0, \\ q_{0(\text{EA-IR})}^{(K-1)} (1 - a_0) & \text{falls } n = 1, \\ q_{n-1(\text{EA-IR})}^{(K-1)} & \text{falls } 2 \leq n \leq K. \end{cases} \quad (5.30)$$

Daraus folgt mit der Beziehung

$$\rho_{(\text{LA-IR})}^{(K)} = 1 - q_{0(\text{LA-IR})}^{(K)} = 1 - q_{0(\text{EA-IR})}^{(K-1)} a_0 = \rho_{(\text{EA-IR})}^{(K-1)}, \quad K \in \mathbb{N}^+ \quad (5.31)$$

ferner, dass die Systemauslastung bei beiden Modellen immer dann identisch ist, wenn das LA-IR-System gegenüber dem EA-IR-System einen zusätzlichen Auftrag annehmen kann. Im Gegensatz zum EA-IR-Modell umfasst der Systeminhalt beim LA-IR-Modell an den Zeitschlitzgrenzen die Restarbeit sowie sämtliche Aufträge, die unmittelbar zuvor eingetroffen sind. Infolgedessen gilt

$$E\left[Q_{(\text{EA-IR})}^{(K-1)}\right] + \rho_{(\text{EA-IR})}^{(K-1)} = E\left[Q_{(\text{LA-IR})}^{(K)}\right], K \in \mathbb{N}^+. \quad (5.32)$$

Dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer unter der genannten Pufferrelation identisch ist, lässt sich im Falle von FCFS in geschlossener Form anhand der Gleichungen (5.15) und (5.26) leicht überprüfen. Ebenso gelingt dies für SIRO-Abfertigung mit Hilfe des numerischen Verfahrens, das in Gleichung (5.18) mündet. Der Zusammenhang der mittleren Wartedauer (in Zeitschlitz  $\Delta t$ ) ist für beide Disziplinen gegeben durch

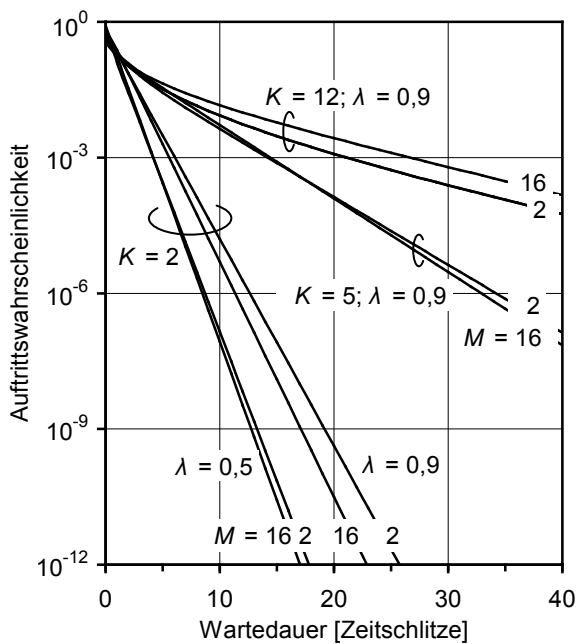
$$E\left[W_{(\text{EA-IR})}^{(K-1)}\right] = E\left[W_{(\text{LA-IR})}^{(K)}\right], K \in \mathbb{N}^+. \quad (5.33)$$

Beim Vergleich des LA-DR-Modells mit den beiden zuvor betrachteten Modelltypen muss man unterscheiden zwischen Pufferkapazitäten  $K \leq M$  und  $K > M$ . Im letztgenannten Fall bleibt der  $K$ -te Warteplatz des LA-DR-Modells, bedingt durch das Nachbesetzungsschema an den Zeitschlitzgrenzen, stets frei. Das Modell entspricht somit voll und ganz dem LA-IR-Modell mit  $K - 1$  Warteplätzen und zeigt identische Performanz. Aufgrund der obigen Diskussion ist das LA-DR-Modell dann auch in jeder Hinsicht äquivalent zum EA-IR-Modell mit  $K - 2$  Warteplätzen. Die Erwartungswerte von Warteschlangenlänge und Wartedauer (in Zeitschlitz  $\Delta t$ ) unter FCFS bzw. SIRO lassen sich mithin angeben als

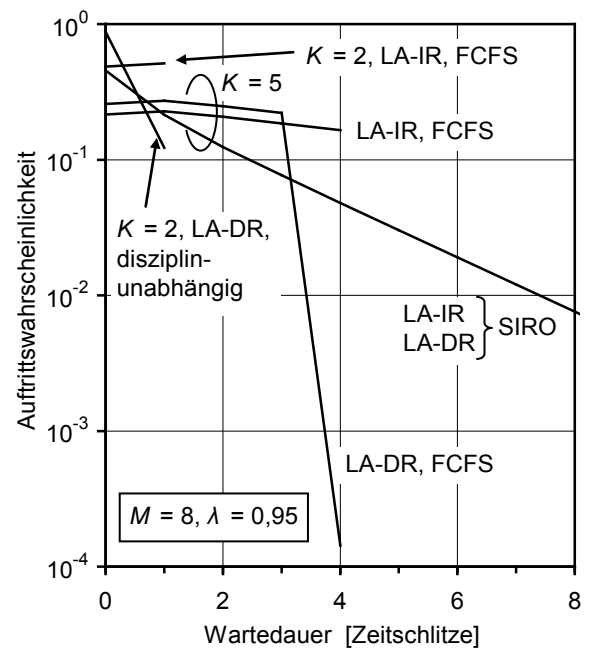
$$\left. \begin{aligned} E\left[Q_{(\text{EA-IR})}^{(K-1)}\right] + \rho_{(\text{EA-IR})}^{(K-1)} &= E\left[Q_{(\text{LA-IR})}^{(K)}\right] = E\left[Q_{(\text{LA-DR})}^{(K+1)}\right] \\ E\left[W_{(\text{EA-IR})}^{(K-1)}\right] &= E\left[W_{(\text{LA-IR})}^{(K)}\right] = E\left[W_{(\text{LA-DR})}^{(K+1)}\right] \end{aligned} \right\} K \geq M. \quad (5.34)$$

Die Wartedauerwahrscheinlichkeiten für die drei Modelle bei SIRO-Abfertigung sind in **Bild 5.8** dargestellt.<sup>14</sup> Üblicherweise, d.h. bei hinreichend großem Warteraum, bilden die Restwahrscheinlichkeiten von Systemen mit zwei Eingängen eine untere Grenze. Dies kehrt sich bei geringer Pufferkapazität unabhängig von der Verkehrslast um. Der Grund hierfür ist, dass der Systeminhalt bei kleiner Eingangsanzahl geringfügiger variiert als bei großer. Ein kleiner Puffer mit wenigen Eingängen befindet sich nämlich häufiger an seinem Limit, wobei die Zufallsauswahl dann jeweils aus der maximal möglichen Zellenanzahl erfolgen muss. Dies drückt sich zwangsläufig in einer höheren Wartedauervarianz aus. Im Übrigen sei darauf hingewiesen, dass die Darstellungen der Wartedauer und deren Varianz im Kapitel 5.2 bei Berücksichtigung der entsprechenden Pufferkapazität auch für die LA-Modelle gelten.

<sup>14</sup> Die angegebene Pufferkapazität  $K$  bezieht sich auf das EA-IR-Modell; für das LA-IR-Modell gilt  $K+1$  und für das LA-DR-Modell  $K+2$ .



**Bild 5.8:** Für die EA- und LA-Modelle gleichermaßen geltenden diskreten Wartedauerwahrscheinlichkeiten am Beispiel von  $M = \{2, 16\}$  Eingängen unter verschiedenen Verkehrslasten bei SIRO-Service. Die Pufferkapazitäten beziehen sich auf das EA-IR-Modell, für die LA-IR- und LA-DR-Modelle gelten  $K + 1$  bzw.  $K + 2$ .



**Bild 5.9:** Diskrete Wartedauerwahrscheinlichkeiten beim LA-DR-Modell mit  $K \leq M$  Wartepätzen am Beispiel  $M = 8, K = \{2, 5\}$ , bei FCFS- und SIRO-Abfertigung. Zum Vergleich dargestellt sind auch die FCFS-Werte des LA-IR-Modells.

Hat das LA-DR-Modell nur eine Kapazität von  $1 \leq K \leq M$  Zellen, so ist der grundsätzliche Unterschied zum zuvor betrachteten Fall, dass der Puffer an der Zeitschlitzgrenze durchaus vollständig belegt sein kann.<sup>15</sup> Dies passiert immer dann, wenn sich das System im Leerlauf befindet und eine Gruppe von  $K \leq n \leq M$  Aufträgen eintrifft. Die Konsequenzen werden im Folgenden näher beleuchtet. So ist die Wartedauerverteilung bei beliebiger Eingangsanzahl  $M$  und  $K = \{1, 2\}$  Wartepätzen völlig unabhängig von unparteiischen Service-Disziplinen. Die Wartedauerwahrscheinlichkeiten  $w_i^{(K \leq 2)}, i = \{0, K-1\}$  lassen sich daher durch Einsetzen von Gleichung (5.28) in Gleichung (5.26) explizit angeben. Unter SIRO kann die Wartedauer also nur bei  $K > 2$  Wartepätzen beliebig lang werden und sich erst dann vom Fall der FCFS-Abfertigung unterscheiden. Exemplarisch ist dies in **Bild 5.9** dargestellt. Unter SIRO differiert die Wartedauerverteilung zwischen LA-DR und LA-IR bei gleicher Pufferkapazität nur um  $< 1\%$ . Dagegen ist das Wahrscheinlichkeitsniveau unter FCFS bei DR etwas höher als bei IR, mit einem starken Abfall der Wahrscheinlichkeit  $w_{K-1}$ . Der Grund hierfür ist, dass der letzte Wartepplatz ausschließlich in der oben beschriebenen, wenig wahrscheinlichen Situation belegt sein kann, und nur dann eine Wartedauer von  $K-1$  Zeitschlitzen auftritt.

Der Auslastungsvergleich mit dem LA-IR-Modell ergibt bei gleicher Pufferkapazität im LA-DR-Modell generell einen geringeren Betrag. Verfügt das LA-DR-Modell über einen zusätzli-

<sup>15</sup> Indirekt hebt sich dieser Fall auch von den LA-IR- und EA-IR-Modellen ab.

chen Warteplatz, so ist die Auslastung beider Modelle im Bereich  $K > M$  identisch, während sich im Bereich  $K \leq M$  beim LA-DR-Modell eine etwas höhere Auslastung als beim LA-IR-Modell zeigt. Grund hierfür ist die zuvor erwähnte bessere Pufferausnutzung in diesem Sonderfall. Den gesamten Auslastungsvergleich der drei Analysemodelle in Abhängigkeit der Pufferkapazität fasst **Tabelle 5.1** zusammen.

Insgesamt ist es also unerheblich, mit welchem der drei Modelle die Leistungsgrößen eines einlinigen Warte-Verlustsystems ermittelt werden; sie lassen sich durch einfache Umrechnung auf das jeweils andere Systemmodell übertragen. Eine Ausnahme bildet das LA-DR-Modell, das bei  $K \leq M$  Warteplätzen individuell betrachtet werden muss. Dass die drei Modelle bei unbegrenztem Warteraum identische Performanz haben, sei hier nur der Vollständigkeit halber noch einmal erwähnt.

Warteplatzanzahl $K$	Auslastung $\rho_{EA-IR}(K)$ im EA-IR-Modell	Auslastung $\rho_{LA-IR}$ im LA-IR-Modell	Auslastung $\rho_{LA-DR}$ im LA-DR-Modell
0	$\rho_{EA-IR}(0)$	–	–
1	$\rho_{EA-IR}(1)$	$\rho_{EA-IR}(0)$	$0 < \rho_{LA-DR} < \rho_{EA-IR}(0)$
2	$\rho_{EA-IR}(2)$	$\rho_{EA-IR}(1)$	$\rho_{EA-IR}(0) < \rho_{LA-DR} < \rho_{EA-IR}(1)$
$M \in \{2, 3, \dots\}$	$\rho_{EA-IR}(M)$	$\rho_{EA-IR}(M-1)$	$\rho_{EA-IR}(M-2) < \rho_{LA-DR} < \rho_{EA-IR}(M-1)$
$M+1$	$\rho_{EA-IR}(M+1)$	$\rho_{EA-IR}(M)$	$\rho_{EA-IR}(M-1)$
$M+i, i \in \mathbb{N}^+$	$\rho_{EA-IR}(M+i)$	$\rho_{EA-IR}(M+i-1)$	$\rho_{EA-IR}(M+i-2)$

**Tabelle 5.1:** Vergleich der Auslastung für die LA-IR- und LA-DR-Modelle mit der Auslastung im EA-IR-Modell, die bei gegebener Warteplatzanzahl  $K$  als Bezugsgröße dient.

## 5.6 Leistungsvergleich der Multiplexer-Architekturen

In ihrer grundsätzlichen Funktion und Leistungsfähigkeit sind zellenbasierte Polling-Systeme und Multiplexer mit Zentralpufferarchitektur als gleichwertig anzusehen. Dies gilt auch im Fall endlichen Warteraums, vorausgesetzt, die Pufferkapazität ist entsprechend dimensioniert und die Zellenabfertigung erfolgt in identischer Weise. Beide Punkte sind eng verknüpft mit dem Nutzungsgrad, d.h. der Puffereffizienz, auf die weiter unten ausführlich eingegangen wird. Zunächst sollen Realisierungsaspekte beider Architekturen beleuchtet und verglichen werden, d.h. notwendige Funktionen und Ressourcen zum Erreichen identischer Performanz.

Hauptmerkmal von Polling-Systemen sind die an den Systemeingängen befindlichen, in der Regel räumlich verteilten Puffer, deren Speicherfunktionen (Auftragsaufnahme bei Ankunft und Abgabe bei Aufforderung durch die Bedieneinheit) voneinander unabhängig ausgeführt werden können. Die Synchronisation der einfallenden Verkehrsströme ist durch den Sendeauftrag der zentralen Bedieneinheit implizit gegeben, wobei individuelle Übertragungsraten an den Systemeingängen problemlos möglich sind. Die Puffer-Hardware benötigt zur Verarbei-

tung ankommender bzw. abgehender Datenströme keine erhöhte Verarbeitungsgeschwindigkeit (speed-up). Infolgedessen können höchste (technisch realisierbare) Übertragungsraten verarbeitet werden.

Die auf einem zentralen Speicher basierende Multiplexer-Architektur ist charakterisiert durch ein einfaches, die Server-Funktion ausübendes Ausgangs-Interface, sowie durch  $M$  Eingangsschnittstellen. Die koordinierte Speicherung der ankommenden Zellen bedingt eine Synchronisation der entsprechenden Abläufe. Folglich muss sich die systeminterne Verarbeitungsgeschwindigkeit an der Summe der Übertragungsraten, mit denen die  $M$  Zellenströme ankommen, orientieren. Im Vergleich zum Polling-System bedeutet dies eine Geschwindigkeitserhöhung (speed-up), sodass die intern mögliche Verarbeitungsgeschwindigkeit des Multiplexers für die *Summe* der Übertragungsraten ankommender Zellenströme eine obere Grenze setzt. Parallelverarbeitung, wie sie beim Polling-System per se stattfindet, hilft beim Vermeiden bzw. Begrenzen des speed-up nur soweit, wie die Pufferressourcen einzelnen Eingängen fest zugeordnet sind. Andererseits ermöglicht der zentrale Warteraum in Kombination mit einer zentralen Warteplatzverwaltung und Multiplexer-Steuerung eine einfache Umsetzung nahezu beliebiger Abfertigungsdisziplinen. So sind FCFS und G-SIRO hier besonders einfach implementierbar. Im Falle von FCFS muss der Puffer als FIFO-Speicher organisiert sein, und die Aufnahme von Gruppenankünften in zufälliger Reihenfolge stattfinden. G-SIRO lässt sich mithilfe eines RAM-Speichers umsetzen, dessen Inhalt per Zufallsauswahl abgefertigt wird.

Im Gegensatz dazu bedarf es bei Polling-Systemen aufgrund der verteilten Pufferung einer separaten Betrachtung von Warteschlangen- und Interqueue-Disziplin (siehe Kapitel 4.5). Die Warteschlangendisziplin lässt sich wie beim Zentralpuffer umsetzen, also z.B. für FCFS mittels FIFO-Prinzip. Um allerdings im Zusammenwirken mit der Interqueue-Disziplin Gesamtdisziplinen wie G-SIRO oder FCFS zu realisieren, muss hier auch der Sendeaufruf per Zufallsauswahl erfolgen bzw. in der Reihenfolge des Eintreffens der an den Warteschlangenköpfen (HoL) befindlichen Zellen. Solche in einem Zentralpuffer einfach umzusetzenden Gesamtdisziplinen erfordern also bei Polling-Systemen eine (z.T. nicht triviale) Abstimmung zwischen den Warteschlangen bzw. intensiveren Austausch von Steuerungsinformation zwischen Server und Warteschlangen. Die Dauer von Abfrage und Weiterschaltung zur nächsten Warteschlange kann in solchen Fällen signifikant sein (dieser Aspekt wurde in dieser Arbeit vernachlässigt). Traditionell werden deshalb übersichtliche und im Gesamtsystem sehr viel einfacher implementierbare Interqueue-Disziplinen wie Elevator-Scan, zyklische Abfrage (SICO) und HoL-SIRO eingesetzt. Wie die Analysen gezeigt haben, nähert man sich damit (unter den angenommenen symmetrischen Lastverhältnissen) recht gut den Leistungskennwerten unter FCFS an.

Die Anzahl der Warteplätze ist bei Polling-Systemen prinzipiell für jeden Puffer individuell dimensionierbar, z.B. entsprechend der Verkehrs- und Performanzanforderungen. Vorausset-

zung ist aber in der Regel mindestens ein Warteplatz je Puffer. Bei der in dieser Arbeit angenommenen einheitlichen Kapazität aller Puffer ist die Warteplatzgranularität entsprechend der Eingangszahl  $M$  recht grob. Anzumerken ist schließlich, dass sich Polling-Systeme sehr gut zur einfachen Realisierung von gerahmten TDM-Systemen eignen.

Ein variabler Wechsel der Kapazität einzelner Warteschlangen ist generell nur dann möglich, wenn der Puffer insgesamt eine Einheit bildet, und die Warteschlangen darin logisch organisiert sind, wie es beim Zentralpuffer-Multiplexer der Fall ist. Bezogen auf das Gesamtverkehrsangebot ist dann feinste Warteplatzgranularität gegeben. Auch lassen sich mit dieser Architektur Funktionen, wie z.B. eine dynamische Reservierung von Warteraum oder eine Priorisierung bestimmter Zellenströme, leichter implementieren als in einem Polling-System. Des Weiteren ist die Möglichkeit zur Ausnutzung von Bündelungseffekten gegeben. Dieser Bündelungsgewinn wird im Folgenden anhand eines Vergleichs vom Pufferaufwand für ein Polling-System und einen Zentralpuffer-Multiplexer unter identischen Randbedingungen und bei möglichst gut übereinstimmender Verkehrsleistung näher untersucht.

Im Vergleich zu einer starr gegliederten Warteschlangenorganisation bei Polling-Systemen lässt sich durch die wahlfreie Nutzung der Warteplätze beim Zentralpuffer-System aufgrund von Bündelungseffekten größtenteils mit geringerer Pufferkapazität die gleiche Leistungsfähigkeit erzielen. Zur quantitativen Bestimmung dieses Bündelungsgewinns (economy of scale) an Warteplätzen können die beiden Multiplexer-Architekturen z.B. auf Basis der Wartedauer oder auch der Auslastung (bzw. der Zellenverlustwahrscheinlichkeit) verglichen werden. Da es bei der Pufferdimensionierung primär um die Begrenzung von Zellenverlusten geht, und damit um eine Optimierung der Auslastung, wird hier identische (oder möglichst gut übereinstimmende) Auslastung zugrunde gelegt.<sup>16</sup> Demgemäß wird in dieser Arbeit der Quotient aus der ungebündelten Pufferkapazität des gesamten Polling-Systems ( $K_p = M K$ ) und der gebündelten Kapazität des Zentralpuffer-Multiplexers  $K_p/K_z$  als Bündelungsgewinn  $B \geq 1$  bezeichnet. Da die Granularität des ungebündelten, gleichmäßig auf die einfallenden Verkehrsströme aufgeteilten Warteraums grundsätzlich gröber ist als bei Bündelung, sind  $K_p$  bzw.  $K_z$  für den Vergleich derart zu bemessen, dass sich im Fall gebündelten Warteraums die gleiche oder eine minimal bessere Auslastung<sup>17</sup> ergibt als ohne Bündelung. Hierbei ist eine höhere Auslastung im gebündelten Fall immer dann minimal, wenn die Reduktion des gebündelten Warteraums um einen Warteplatz von einer höheren zu einer geringeren Auslastung gegenüber ungebündelter Warteraumorganisation (bei konstanter Kapazität) führt. Somit be-

<sup>16</sup> Bei Verlustsystemen wird der Bündelungsgewinn durch die Zunahme der Kanalauslastung in Abhängigkeit der Bündelgröße bei konstanter Verlustwahrscheinlichkeit angegeben. Für (reine) Wartesysteme ergibt sich ein Bündelungsgewinn in entsprechender Weise [ITG97].

<sup>17</sup> Eine möglichst gut übereinstimmende Auslastung lässt sich nur durch Kapazitätsvariation des Warteraums mit der feineren Granularität erreichen, d.h. mit dem gebündelten Warteraum (in 1er-Schritten). Für die konservative Bestimmung von  $B$  ist es notwendig, dass die Auslastung im gebündelten Fall identisch oder nur minimal höher ist als im ungebündelten Fall.

trägt der Bündelungsgewinn

$$B = K_p / K_z, \{ \rho(K_z) \geq \rho(K_p) \} \cap \{ \rho(K_z - 1) < \rho(K_p) \}. \quad (5.35)$$

Eine Abschätzung der oberen Grenze von  $B$  ergibt sich aus den folgenden Überlegungen. Verluste durch Pufferüberlauf treten beim Polling-System nur dann auf, wenn sich zum Ankunftszeitpunkt  $K_p/M$  Aufträge im betreffenden Puffer aufhalten und eine Abfertigung ausbleibt. Diesem Systemzustand muss ein zentraler Puffer mindestens Raum bieten, denn eine geringere Kapazität  $K_z$  würde zwangsläufig zu höheren Verlusten führen als bei einem einzelnen Puffer des Polling-Systems. Des Weiteren zu berücksichtigen ist der Status der übrigen Puffer des Polling-Systems.<sup>18</sup> Hier bieten die unvollständig gefüllten Warteschlangen Raum zur Aufnahme von Ankünften. Wenn ein zentraler Puffer Gleiches leisten soll, muss er also zusätzlich zum oben genannten Betrag über mindestens einen weiteren Warteplatz verfügen, woraus  $K_z \geq 1 + K_p/M$  folgt, und schließlich die Bereichabschätzung

$$1 \leq B \leq \frac{M}{1 + M/K_p}. \quad (5.36)$$

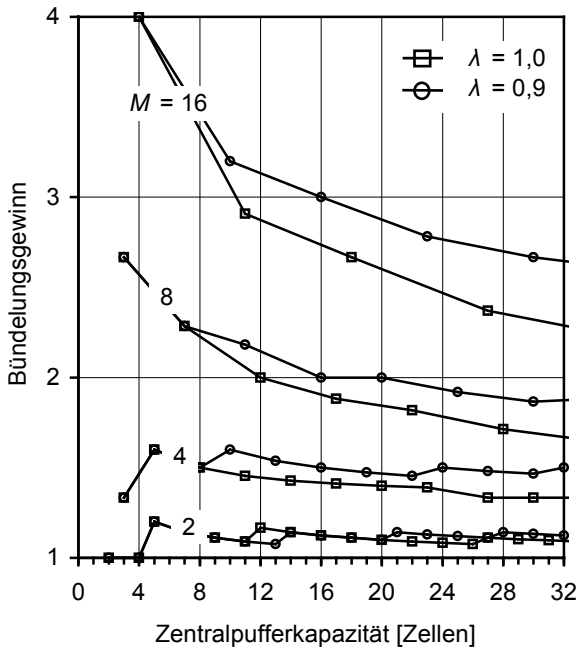
**Bild 5.10** zeigt den Bündelungsgewinn als Funktion der Zentralpufferkapazität für Zellen-Multiplexer mit unterschiedlicher Eingangsanzahl bei FCFS-Abfertigung<sup>19</sup> unter Volllast und  $\lambda = 0,9$ . Die Unstetigkeiten des Bündelungsgewinns im Diagramm sind Folge der Randbedingung für die Auslastung nach Gleichung (5.35). Bei der dargestellten Eingangsanzahl und einer Warteraumkapazität von  $K_z = 32$  liegt das Niveau der Zellenverlustwahrscheinlichkeit bei  $p_v(\lambda = 1) \approx 10^{-2}$ . Eine deutlichere Abhängigkeit von der Eingangsanzahl zeigt sich bei einer Eingangslast von  $\lambda = 0,9$ ; die Wahrscheinlichkeit eines Zellenverlustes bei gleicher Pufferkapazität wie zuvor liegt dann zwischen  $p_v(M=2) \approx 10^{-7}$  und  $p_v(M=16) \approx 10^{-5}$ .<sup>20</sup> Natürlich lässt sich das Wahrscheinlichkeitsniveau durch einen größeren Warteraum beliebig absenken. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass im ungepufferten Fall (für beliebige unparteiische Disziplinen) generell  $B = 1$  gilt. Bemerkenswert ist auch, dass der Vergleich des Polling-Systems mit zwei Eingängen unter LQFS (siehe Kapitel 4.5.1) und dem gleichartigen Zentralpuffer-Multiplexer bei beliebigen Verkehrslasten und Pufferkapazitäten exakt  $B = 1$  ergibt.

Ein Vergleich des Polling-Systems mit  $K = 1$  Warteplatz je Eingang und der Zentralpufferarchitektur liefert bei größerer Eingangsanzahl das Maximum von  $B$  bzw. bei wenigen Eingängen eine gute Näherung. Damit lässt sich der Bündelungsgewinn unter dem Aspekt der Maxi-

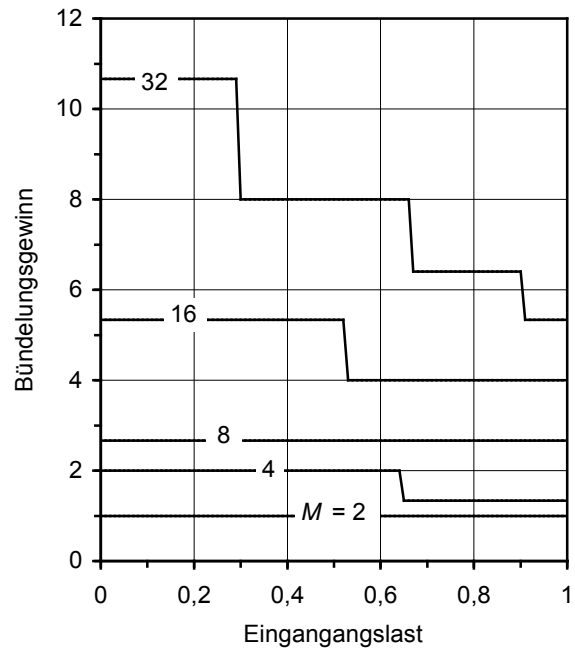
<sup>18</sup> Hier wird angenommen, dass die Warteschlangen des Polling-Systems statistisch unabhängig sind.

<sup>19</sup> FCFS wurde gewählt, um einen präzisen Vergleich zu ermöglichen. Da bei Polling-Systemen die Unterschiede im Durchsatz bei FCFS-, SICO- und SIRO-Abfertigung gering ausfallen (siehe Kapitel 4.4.4), dürfte sich die Interque-Disziplin auf den Bündelungsfaktor ebenfalls nur mäßig auswirken.

<sup>20</sup> Die Zellenverlustwahrscheinlichkeiten für das Polling-System mit mehreren Warteplätzen je Eingang wurden durch Simulation ermittelt.



**Bild 5.10:** Diskreter Bündelungsgewinn im EA-IR-Modell unter FCFS in Abhängigkeit der gebündelten Pufferkapazität und der Eingangszahl bei Eingangslasten  $\lambda = 1$  sowie 0,9.



**Bild 5.11:** Bündelungsgewinn bei  $K_P = M$  Wartepätzen im Polling-System (d.h.  $K = 1$  je Warteschlange, EA-IR-Modell, FCFS) in Abhängigkeit der Eingangslast bei unterschiedlicher Eingangszahl  $M$ .

mierung als Funktion der Eingangslast angeben. **Bild 5.11** zeigt, dass sich  $B$  umgekehrt proportional zur Verkehrslast verhält, denn ein geringes Angebot eröffnet dem Zentralpuffer grundsätzlich ein hohes Bündelungspotential. Dementsprechend bewegt sich  $B$  bei geringer Verkehrslast in der Größenordnung des abgeschätzten Maximums. Bei hoher Last und größerer Eingangszahl fällt  $B$  hingegen stark ab auf Werte  $B(\lambda = 1, K_P = M) \approx \ln M$ . Zu beachten ist, dass diese Betrachtung auf einem sehr kleinen Warteraum beruht. Der in **Bild 5.10** verwendete Parameterraum und die daraus resultierenden Bündelungsgewinne liefern insofern Hinweise von größerer praktischer Bedeutung. Danach ist für Systeme mit  $M \leq 16$  Eingängen unter Volllast von Bündelungsgewinnen  $1 \leq B \leq 2,5$  auszugehen. Zu bedenken ist auch, dass diese Werte auf symmetrischer Verkehrslast basieren. So werden sich die parallelen Eingangspuffer eines Polling-Systems bei Schiefast oder Lastspitzen vermutlich robuster verhalten als ein auf hohem Bündelungsgewinn ausgelegter Zentralpuffer. Die Analyse derartiger Einflüsse bleibt zukünftigen Untersuchungen vorbehalten.



## Kapitel 6

### Zusammenfassung

#### 6.1 Ergebnisse dieser Arbeit

Zellen-Multiplexer sind in den meisten Netzknotentypen von Kommunikationsnetzen anzutreffen. Sie werden unter anderem in Koppelnetzen und Leitungsmodulen von Routern eingesetzt und gehören deshalb zu den Schlüsselementen der paketbasierten Vermittlungstechnik. Große Bedeutung kommt der Netzknotendimensionierung zu, denn für die Einhaltung vorgegebener Dienstgütekriterien ist es unerlässlich, Ressourcen und Systemorganisation der Netzknoten angemessen auszulegen. Hierzu zählt auch, Zellen-Multiplexer mit einem hohen Maß an Flexibilität zu versehen, damit sie sich beispielsweise schnell an veränderte Verkehrssituationen anpassen lassen. Konfigurierung, Ablaufplanung und Puffer-Management der Multiplexer setzen für solche Zwecke eine umfassende Kenntnis ihres Leistungsverhaltens voraus, und nach Möglichkeit eine entsprechende analytische Beschreibung. Anzutreffen sind Funktionen des Zellen-Multiplexens auch in vielen Bereichen außerhalb der Telekommunikation. Beispiele hierfür sind Produktionsprozesse und die Fließband-gestützte Fertigungstechnik.

In der Vergangenheit wurden Multiplexer überwiegend als zeitkontinuierliche Systeme analysiert. Die bei block- bzw. zellenweiser Übermittlung und Verarbeitung von Dateneinheiten eher angebrachten zeitdiskreten Untersuchungen sind in weitaus geringerem Umfang vorhanden. Durchgeführt wurden solche Arbeiten größtenteils mit der idealisierten Annahme eines unbegrenzten Warteraums, oder mit dem Anspruch, komplexe Verkehrsszenarien konkreter Telekommunikationsdienste zu berücksichtigen – modelliert durch entsprechende Ankunftsprozesse. Letzteres stellt eine erhebliche Hürde dar, an der viele analytisch exakte Betrachtungen scheiterten. So existieren für Zellen-Multiplexer mit endlichem Warteraum vorwiegend Simulationsergebnisse sowie approximative und numerische Resultate.

Die in der vorliegenden Arbeit ausgeführten Untersuchungen und Analysen tragen zu einem vertieften und erweiterten Verständnis der zeitdiskreten Leistungsanalyse von Zellen-Multi-

plexern mit begrenztem Warteraum bei. Es wurden formelmäßige Zusammenhänge hergeleitet und identifiziert, die es erlauben, Leistungsgrößen wie die Zellenverlustwahrscheinlichkeit und die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer unmittelbar aus der Verkehrslast und den Systemparametern zu bestimmen. Dies ermöglicht beispielsweise eine schnelle und flexible Anpassung von Systemkonfigurationen an veränderte Bedingungen im laufenden Betrieb. Zum Erreichen dieser Ziele wurden die wesentlichen leistungsrelevanten Modellaspekte berücksichtigt. Um ein solches Systemmodell analytisch handhaben zu können, wurden die Untersuchungen ausschließlich auf der Zellenebene durchgeführt, und es wurde ein relativ einfaches Verkehrsmodell verwendet. Als Verkehrslast wurden unabhängige, symmetrische Verkehrsströme angenommen, woraus sich pro Zeitschlitz Gruppenankünfte mit binomialverteilter Zellenanzahl ergeben. Dieses Verkehrsmodell ist gewiss nicht adäquat, um Ankunftsprozesse zu modellieren, wie sie von vielen realen Telekommunikationsanwendungen herrühren. Es stellt aber einen sinnvollen Ausgangspunkt für Leistungsuntersuchungen dar. So kann dieses Vorgehen als Entscheidungshilfe dienen bei der Frage, ob und bei welchen Parametern eine eingehendere Untersuchung mit komplexeren, dem jeweiligen Anwendungsgebiet näher kommenden Verkehrsmodellen angebracht ist.

Verwendet wurden die für zeitdiskrete Analysen üblichen Early- und Late-Arrival-Modelle. Besonders zu beachten war hier der bei endlichem Warteraum wichtige Umgang mit dem durch Zellenabfertigung frei werdenden Warteplatz, und dessen erneute Vergabe an eine Ankunft, die damit zum „Nachrücker“ wird. Die Differenzierung zwischen sofortiger und verzögerter Nachbesetzung mündete in drei disjunkte Modellvarianten, die sich für jede beliebige Eingangsanzahl eignen, und die bei den Analysen systematisch angewandt wurden. Entsprechend der Zielsetzung ist auch die Frage untersucht worden, inwieweit sich aus den leistungsbeschreibenden Parametern eines dieser Modelle Kennwerte für die übrigen Varianten gewinnen lassen. Einzelheiten der erzielten Ergebnisse sind im Folgenden zusammengefasst. Analysiert wurde der Zellen-Multiplexer in den zwei wesentlichen und grundverschiedenen Architekturformen:

- dem klassischen Polling-System (ohne und mit Zeitschlitzreservierung), mit einheitlicher Kapazität der Warteschlangen, FCFS-Warteschlangendisziplin (FIFO), und 1-begrenzter Abfertigung, sowie
- dem Zentralpuffer-System mit Mehrfachzugang, wobei die Aufträge in zufälliger Reihenfolge in eine gemeinsame Warteschlange aufgenommen und gemäß FCFS- oder SIRO-Disziplin abgefertigt werden.

Für beide Multiplexer-Typen wurden analytische Ansätze auf der Grundlage von Markov-Ketten verwendet, deren Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten allgemeingültig entwickelt wurden, soweit es die maßgeblich von der Warteplatzanzahl bestimmte Modellkomplexität

zuließ. Die auf matrixalgebraischem Wege prinzipiell mögliche Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten erwies sich nur bei Multiplexern mit relativ geringer Eingangsanzahl als praktikabel. Allerdings gelang in einigen Fällen die Lösung in geschlossener Form. Bei allen übrigen exakt modellierten Multiplexer-Varianten führte die rekursive numerische Auswertung der allgemeingültigen Übergangsmatrix zu Ergebnissen von sehr guter Qualität.

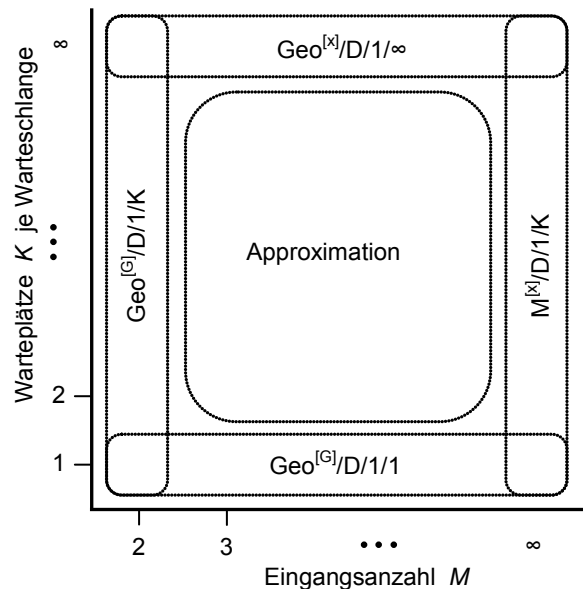
Das Polling-System (ohne Zeitschlitzreservierung) wurde als Multiwarteschlangenmodell mit den Interqueue-Disziplinen FCFS, G-SIRO, HoL-SIRO und LQFS ausführlich behandelt. Des Weiteren wurde am Beispiel einer Kombination aus FCFS und LQFS analytisch exakt gezeigt, inwieweit sich durch Pufferüberlauf verursachte Zellenverluste minimieren lassen, wenn in Situationen drohenden Überlaufs die betroffenen Warteschlangen vorrangig abgefertigt werden. Anwenden lässt sich dieses Prinzip aber nur dann, wenn der Puffer eine sofortige Warteplatznachbesetzung ermöglicht. Mit den Analysen nur ungenügend erfasst werden konnte die zyklische Warteschlangenabfrage (SICO). Der Grund hierfür ist die mit zunehmender Eingangs- und Warteplatzanzahl immens ansteigende Anzahl von Systemzuständen, worauf die Ausnutzung von Symmetrieeffekten keinen entscheidenden Einfluss hat. Infolgedessen musste sich die Berücksichtigung der SICO-Disziplin auf wenige Einzelfälle beschränken.

Unter allen weiteren zuvor genannten Abfertigungsdisziplinen wurde das einfach gepufferte Polling-System ( $K=1$ ) mit allen drei Analysemodellen bezüglich der diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Warteschlangenlänge und Wartedauer sowie der Zellenverlustwahrscheinlichkeit exakt analysiert. Darüber hinaus wurden für den Sonderfall eines Polling-Systems mit  $M=2$  Eingängen und beliebiger Pufferkapazität unter LQFS-Abfertigung exakte geschlossene Lösungen präsentiert. Die Größe der Ankunftsgruppen kann hier eine beliebige Verteilung haben.

Systeme mit  $M > 2$  Eingängen entziehen sich aufgrund der exzessiv hohen Anzahl von Systemzuständen einer exakten Analyse weitgehend. Sie wurden approximativ analysiert, und zwar mithilfe eines Ansatzes mit neuartigen Details. Hierbei wird die exakte Wartedauer eines vergleichbaren Bediensystems – des Zentralpuffer-Multiplexers mit endlichem Puffer – ausgenutzt und im Polling-System aus Sicht einer Warteschlange als Servicedauer verwendet. Als Interqueue-Disziplin wurde dabei HoL-SIRO angenommen. Die Überprüfung mit (naturgemäß in der Ausführungsdauer begrenzten) Simulationen lässt den Schluss zu, dass sich auf diesem Weg gerade der Bereich sehr geringer Zellenverlustwahrscheinlichkeiten sehr gut abdecken lässt.

Des Weiteren enthält die Arbeit auch eine Untersuchung zur Auswirkung der Interqueue-Disziplin auf die Multiplexer-Performanz. Eine sehr gute Näherungslösung für die HoL-SIRO-Disziplin bei unbegrenztem Puffer zeigt, dass sich Systeme mit wenigen Eingängen sehr ähnlich verhalten wie unter FCFS, während bei 16 und mehr Multiplexer-Eingängen nahezu G-

SIRO-Verhalten vorliegt. Die angenommene Verkehrssymmetrie hat natürlich Einfluss auf die Ergebnisse der Analysen und stellt insofern einen Sonderfall dar. Dennoch sind die Lösungen relevant, auch für Polling-ähnliche Prozesse (z.B. slotted ALOHA Protokoll). Den Parameterraum von Eingangs- und Warteplatzanzahl der analysierten Polling-Systeme mit den entsprechend verwendeten Bediensystemmodellen illustriert **Bild 6.1**.



**Bild 6.1:** Übersicht der Bediensystem-Varianten zur Analyse von zeitdiskreten Zellen-Multiplexern des Polling-Typs.

Anmerkung: Für Polling-Systeme im TDM-Modus sowie den Multiplexer mit Zentralpufferarchitektur stellt diese Arbeit unter der Annahme symmetrischen Verkehrs exakte Lösungen für den gesamten hier dargestellten Parameterraum bereit.

Das Polling-System mit Zeitschlitzreservierung, d.h. im (zyklischen) Zeitmultiplexbetrieb, konnte mithilfe des  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/K$ -FCFS-Modells vollständig analysiert werden. Entwickelt wurden dabei geschlossene Lösungen für beliebige Warteraumkapazität und Anzahl von Eingängen. Die Annahme der Verkehrssymmetrie ist in diesem Fall belanglos, denn die Warteschlangen sind aufgrund des Betriebsmodus voneinander unabhängig. Die Zellenverlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Eingangszahl verläuft hier im Gegensatz zum klassischen Polling-System monoton steigend.

Die Multiplexer-Architektur mit einem Zentralpuffer endlicher Kapazität wurde mithilfe der  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/K$ -Modelle ebenfalls umfassend analysiert. Entwickelt wurden geschlossene Lösungen für Warteschlangenlänge, Zellenverlustwahrscheinlichkeit und Wartedauerverteilung, die den im **Bild 6.1** (für Polling-Systeme) dargestellten Parameterraum vollständig abdecken. Präzise Resultate werden damit auch bei sehr geringen Auftrittswahrscheinlichkeiten erzielt. Die für die Analyse notwendige Annahme der Verkehrssymmetrie dürfte hier gegenüber dem

allgemeinen Fall keine gravierende Einschränkung darstellen, denn alle Verkehrsströme werden gleichrangig behandelt und im System aufgenommen, solange freie Warteplätze vorhanden sind.

Sämtliche Analysen und Approximationen wurden durch Simulationen überprüft und – soweit verfügbar – an (Teil-)ergebnissen aus der Literatur gespiegelt. Obwohl sich insgesamt sehr gute Übereinstimmungen gezeigt haben, bedarf es weiterer Untersuchungen, insbesondere der Pollingsysteme mit mehreren Eingängen und endlichem Puffer (siehe Ausblick).

Schließlich brachte der Vergleich von Resultaten zu Zellen-Multiplexern mit endlichem Warteraum viele in dieser Arbeit erstmals aufgezeigte Zusammenhänge der zeitdiskreten LA- und EA-Analysemodelle hervor.<sup>1</sup> Damit sind Ergebnisüberführungen von einem in das jeweils andere Analysemodell leicht möglich, was der Anwendungsbreite der zeitdiskreten Systemmodelle zugute kommt.

In ihrer grundsätzlichen Funktion und Leistungsfähigkeit sind zellenbasierte Polling-Systeme und Multiplexer mit Zentralpufferarchitektur auch im Fall endlichen Warteraums als gleichwertig anzusehen, eine entsprechende Dimensionierung der Pufferkapazität vorausgesetzt. Ein Vergleich des Warteraumbedarfs zum Erzielen identischer Leistungsfähigkeit zeigt, dass Polling-Systeme mit typischer Eingangsanzahl (bis zu einigen 10) unter symmetrischer Last bis zu  $2\frac{1}{2}$ -mal mehr Warteraum benötigen als ein Zentralpuffer-Multiplexer. Andererseits unterscheiden sich beide Architekturen signifikant bezüglich der Pufferausführung bzw. der technischen Anforderungen. So genügen für die Puffer von Polling-Systemen einfachste Architekturen mit je einem Eingang und Ausgang. Hiermit lassen sich an jedem Multiplexer-Eingang höchste Übertragungsraten verarbeiten. Der Zentralpuffer muss hingegen imstande sein, die an seinen Eingängen ankommenden Zellen simultan aufzunehmen. Im Vergleich zu den verteilten Puffern des Polling-Systems erfordert dies eine der Eingangsanzahl entsprechende höhere Bandbreite für den Pufferzugang. Im speichertechnologischen Grenzbereich werden die möglichen Übertragungsraten der ankommenden Übertragungssysteme demgemäß begrenzt. Der günstigeren Pufferkapazität des Zentralpuffer-Multiplexers steht folglich die eingangseitig höhere maximale Gesamtübertragungsrate beim Polling-System gegenüber. Ausgangseitig unterscheiden sich beide Architekturen bezüglich der Warteschlangenauswahl, die beim Polling-System per Schaltfunktion (physikalische Abfrage mittels Raumstufe und Protokoll) erfolgt, und beim Zentralpuffer-System mittels logischer Abfrage (Pufferverwaltung).

Insgesamt wurde für die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse nachgewiesen, dass sie mit bekannten Resultaten für unbegrenzten Warteraum konsistent sind. Die Analysen bilden eine wichtige Ausgangsbasis für Warte-Verlustsysteme mit Gruppenankünften, auch auf Gebieten jenseits der Paket- und Zellenvermittlung. Anwendungsmöglichkeiten ergeben sich unter an-

---

<sup>1</sup> Bei unbegrenztem Puffer ist es belanglos, welches zeitdiskrete Analysemodell gewählt wird.

derem beim Systemdesign von Koppelnetzen. So lässt sich beispielsweise nachweisen, dass der Schalteraufwand (Koppelpunktzahl) bei großen, aus einheitlichen  $M \times M$ -Schaltelementen konstruierten mehrstufigen Anordnungen stark von der Schaltergröße  $M$  abhängt. Die optimale Schaltergröße beträgt dabei  $M = \{3 \vee 4\}$ . Andererseits zeigt die vorliegende Arbeit präzise, dass Multiplexer des Polling-Typs (die sich zu  $M \times M$ -Schaltelementen kombinieren lassen) genau bei dieser Eingangsanzahl eine ungünstige Durchsatz-Performanz haben.<sup>2</sup> Hier gilt es also, einen zweckmäßigen Kompromiss zwischen Hardware-Aufwand und Leistungsfähigkeit zu finden.

## 6.2 Ausblick

Die vorliegende Arbeit bietet mehrere Anknüpfungspunkte für weitergehende Untersuchungen, die außerhalb dieser Arbeit fortzuführen wären. Beispielsweise bedarf es weiterer Analysen – insbesondere der Wartedauervarianz – bei Abfertigung der begrenzten Puffer von Polling-Systemen mit Interqueue-Disziplinen, die eine Basisstrategie und LQFS kombinieren. Gleiches gilt für die Anwendung der HoL-Warteschlangenauswahl. Zweckmäßig erscheinen auch vertiefende und detaillierte Untersuchungen des approximativen Ansatzes zur Analyse von Polling-Systemen mit begrenztem Warteraum mithilfe von Resultaten, die aus der Analyse des Zentralpuffer-Multiplexers stammen. So könnten die approximierten Kennwerte des Polling-Systems den exakten Zentralpuffer-Größen mit dem Ziel gegenübergestellt werden, die Möglichkeiten einer optimierten Approximation zu eruieren. Von Interesse ist natürlich auch der Einfluss der Verkehrssymmetriannahme auf die Leistungsmerkmale der Multiplexer-Architekturen.

Generell schwierig gestaltet sich bei zeitdiskreten Bediensystemen mit endlichem Warteraum die Beschaffung geschlossener bzw. numerisch lösbarer mathematischer Ausdrücke für die Leistungsgrößen. Erforderlich ist vielgestaltige mathematische Unterstützung. Hierzu zählen auch Zusammenhänge aus der Kombinatorik und der Zahlentheorie, die zum Teil noch nicht hinreichend ergründet sind. Dies mag eine der Ursachen sein, warum für zeitdiskrete Systeme bislang nur wenige Resultate vorliegen. Diverse neue Erkenntnisse über zahlentheoretische Beziehungen, beispielsweise zwischen Pascal-Matrix, Bernoulli-/Euler-Polynomen und Stirling-Zahlen (siehe z.B. [Pan06]), sowie Verbindungen zwischen Binomialkoeffizienten und Delannoy-Zahlen<sup>3</sup> könnten künftig weitere Fortschritte bei derartigen Analysen ermöglichen.

---

<sup>2</sup> Dies gilt für balancierten Verkehr, wovon man innerhalb großer Koppelnetze ausgehen kann.

<sup>3</sup> Siehe beispielsweise E.W. Weisstein: Delannoy Number. MathWorld – a Wolfram Web Resource, 2011.

## Anhang A

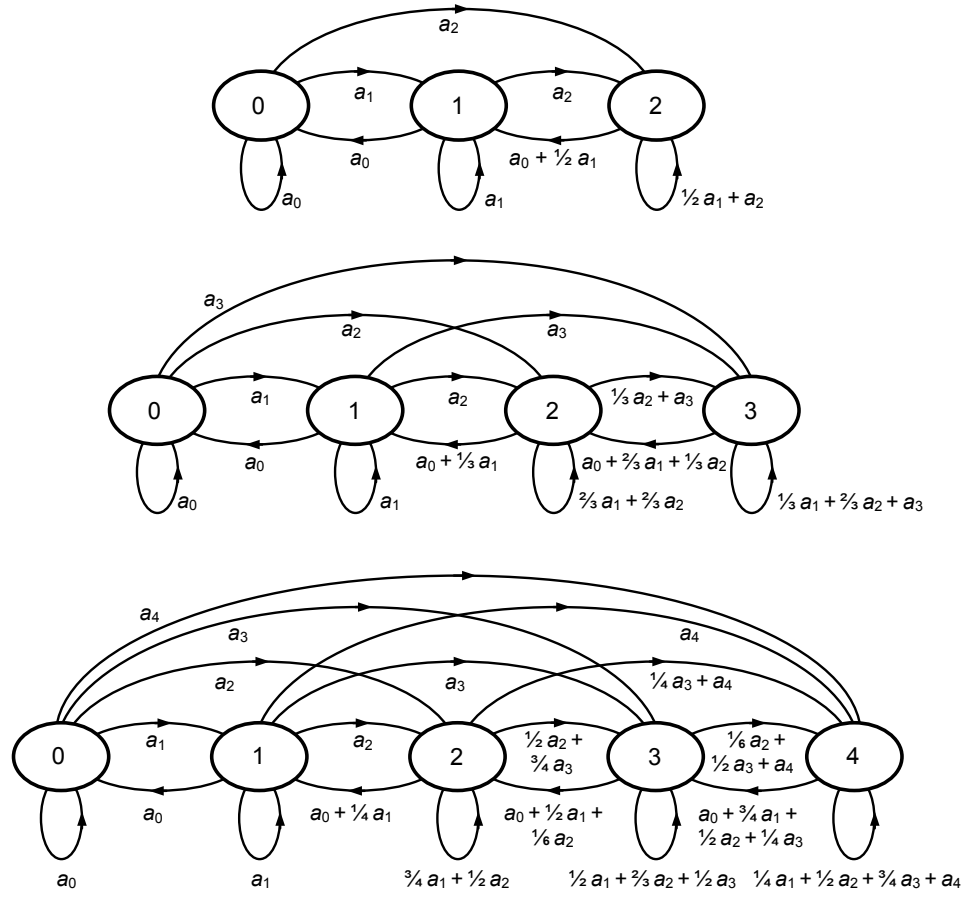
### Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten eines $M$ -zu-1-Multiplexers

In den Kapiteln 4 und 5 dieser Arbeit werden zahlreiche Zellen-Multiplexer behandelt und mithilfe unterschiedlicher zeitdiskreter Systemmodelle analysiert. Grundlage der Analysen bildet stets eine ergodische Markov-Kette, deren Zustandsübergangsmatrix bezüglich Eingangsanzahl und Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gruppengröße von Ankünften pro Zeitschlitz Allgemeingültigkeit besitzt. Die Beschaffung der Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten erfolgt stets nach demselben Schema, das im Folgenden am Beispiel eines einfach gepufferten Polling-Systems (d.h.  $K=1$  Wartepplatz je Multiplexer-Eingang) unter Abfertigung in zufälliger Reihenfolge nach dem LA-IR-Modell betrachtet wird. Wie in Kapitel 4.2.1 ausgeführt ist, gelten die mit diesem Systemmodell ermittelten stationären Zustandswahrscheinlichkeiten auch bei Abfertigung nach beliebigen anderen unparteiischen Disziplinen.

Ausgehend von den in **Bild A.1** dargestellten Markov-Ketten für den Systeminhalt von Zellen-Multiplexern mit  $M = \{2, 3, 4\}$  Eingängen und den zugehörigen individuell ermittelten Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den  $M+1$  Systemzuständen wird eine Verallgemeinerung bezüglich der Eingangsanzahl  $M$  vorgenommen und bewiesen. Des Weiteren wird ein Schema zur rekursiven Berechnung der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten hergeleitet.

Die Betrachtung der Systeme mit  $M = \{2, 3, 4\}$  lässt vermuten, dass die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten bei allgemeiner Eingangsanzahl  $M \in \mathbb{N}^+$  der folgenden Gesetzmäßigkeit gehorchen:

$$P_{i,i+j} = \begin{cases} a_j & \text{falls } i = 0, 0 \leq j \leq M, \\ \binom{M+1-i}{j+1} \sum_{n=1}^i a_{n+j} \binom{i-1}{n-1} / \binom{M}{n+j} & \text{falls } \begin{cases} 1 \leq i \leq M, \\ -1 \leq j \leq M-i, \end{cases} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$



$$P(M=2) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \frac{1}{1} a_0 + \frac{1}{2} a_1 & \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{1} a_2 \end{pmatrix}$$

$$P(M=3) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & \frac{1}{1} a_0 + \frac{1}{3} a_1 & \frac{2}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2 & \frac{1}{3} a_2 + \frac{1}{1} a_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1} a_0 + \frac{2}{3} a_1 + \frac{1}{3} a_2 & \frac{1}{3} a_1 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{1}{1} a_3 \end{pmatrix}$$

$P(M=4) =$

$$= \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 1 \left( \frac{1}{1} a_0 + \frac{1}{4} a_1 \right) & 3 \left( \frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{6} a_2 \right) & 3 \left( \frac{1}{6} a_2 + \frac{1}{4} a_3 \right) & 1 \left( \frac{1}{4} a_3 + \frac{1}{1} a_4 \right) \\ 0 & 0 & 1 \left( \frac{1}{1} a_0 + \frac{2}{4} a_1 + \frac{1}{6} a_2 \right) & 2 \left( \frac{1}{4} a_1 + \frac{2}{6} a_2 + \frac{1}{4} a_3 \right) & 1 \left( \frac{1}{6} a_2 + \frac{2}{4} a_3 + \frac{1}{1} a_4 \right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \left( \frac{1}{1} a_0 + \frac{3}{4} a_1 + \frac{3}{6} a_2 + \frac{1}{4} a_3 \right) & 1 \left( \frac{1}{4} a_1 + \frac{3}{6} a_2 + \frac{3}{4} a_3 + \frac{1}{1} a_4 \right) \end{pmatrix}$$

**Bild A.1:** Markov-Ketten und Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten für einfach gepufferte Polling-Systeme ( $K = 1$ ) mit  $M = 2$  (oben),  $M = 3$  (mittig) und  $M = 4$  (unten) Eingängen bei SIRO-Abfertigung im LA-IR-Modell.



Die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten aus jedem beliebigen Zustand  $i$  heraus muss  $\sum_j P_{i,j} = 1$  sein. Auf die vom Leerlaufzustand ausgehenden Übergänge trifft dies offensichtlich zu, sodass sich ein Beweis für  $i = 0$  erübrigt. Die Allgemeingültigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten aus allen weiteren Zuständen wird im Folgenden für eine beliebige Eingangsanzahl  $M$  auf dem Wege der vollständigen Induktion bewiesen. Die Induktionsbehauptung bezieht sich hierbei zunächst auf einen Ausgangszustand  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  im Falle von  $M + 1$  Eingängen, und anschließend auf den Ausgangszustand  $i + 1$ . Aus Gleichung (A.1) folgt

$$\sum_{j=-1}^{M+1-i} \binom{M+2-i}{j+1} \sum_{n=1}^i a_{j+n} \binom{i-1}{n-1} \Big/ \binom{M+1}{j+n} \stackrel{!}{=} 1, \quad \{M, i\} \in \mathbb{N}^+. \quad (\text{A.2})$$

Die Neuordnung der kombinatorischen Terme führt nach entsprechender Anpassung der Summationsgrenzen zu

$$\sum_{j=0}^{M+2-i} \sum_{n=0}^{i-1} a_{j+n} \binom{j+n}{n} \binom{M+1-(j+n)}{i-1-n} \Big/ \binom{M+1}{i-1} \stackrel{!}{=} 1. \quad (\text{A.3})$$

Da die Reihenfolge der Summanden beliebig ist, lässt sich dieser Ausdruck mit  $k = j + n$  umformen zu

$$\sum_{k=0}^{M+1} a_k \sum_{j=\max\{0, k+1-i\}}^{\min\{k, M+2-i\}} \binom{k}{j} \binom{M+1-k}{M+2-i-j} \Big/ \binom{M+1}{i-1} \stackrel{!}{=} 1. \quad (\text{A.4})$$

Mithilfe der Vandermonde-Konvolution zeigt sich sodann, dass der kombinatorische Summenausdruck im Zähler identisch ist mit dem Nenner, woraus unmittelbar  $\sum_{k=0}^M a_k = 1$  folgt. Dies beweist zugleich die Gültigkeit von Gleichung (A.1) für alle  $M \in \mathbb{N}^+$ .

Auf gleichem Wege wird die Gültigkeit von Gleichung (A.2) für alle weiteren Ausgangszustände bewiesen, denn ausgehend von Gleichung (A.1) muss auch für den Zustand  $i + 1$

$$\sum_{j=-1}^{M-i-1} \binom{M-i}{j+1} \sum_{n=1}^{i+1} a_{j+n} \binom{i}{n-1} \Big/ \binom{M}{j+n} \stackrel{!}{=} 1 \quad (\text{A.5})$$

gelten. Analog zur obigen Vorgehensweise ergeben die Umformungen hier

$$\sum_{k=0}^M a_k \sum_{j=\max\{0, k-i\}}^{\min\{k, M-i\}} \binom{k}{j} \binom{M-k}{M-i-j} \Big/ \binom{M}{i} \stackrel{!}{=} 1. \quad (\text{A.6})$$

Und wieder liefert die Vandermonde-Konvolution das erwartete Resultat  $\sum_{k=0}^M a_k = 1$ , was die Gültigkeit von Gleichung (A.1) für alle Ausgangszustände mit dem Index  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  beweist.  $\square$

Die so gewonnenen Übergangswahrscheinlichkeiten gelten für beliebige zeitdiskrete Ankunftsprozesse, solange sich die Ankunfts-wahrscheinlichkeiten in der für den hier gewählten Ansatz<sup>1</sup> notwendigen Form  $\sum_{k=0}^M a_k = 1$  angeben lassen.

Die Warteschlangenlänge im stationären Zustand lässt sich mittels Analyse der Übergangsmatrix gewinnen (siehe Abschnitt 4.4), oder mit zusätzlicher Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen aus dem Markov-Modell. Aus der Bedingung des globalen Gleichgewichts für den Zustand  $(n-1)$  folgt

$$q_{n-1} \sum_{k=0}^M a_k = q_{n-1} = P_{n,n-1} q_n + \sum_{k=0}^{n-1} P_{k,n-1} q_k, \quad 1 \leq n \leq M. \quad (\text{A.7})$$

Normiert auf die Zustandswahrscheinlichkeit  $q_0$  ergibt sich daraus mit  $x_n = q_n/q_0$

$$x_0 = 1, \quad x_n = \frac{1}{P_{n,n-1}} \left( x_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k P_{k,n-1} \right), \quad 1 \leq n \leq M, \quad (\text{A.8})$$

und schließlich folgt aus der Summe der Zustandswahrscheinlichkeiten

$$\sum_{i=0}^M q_i = q_0 \sum_{i=0}^M x_i = 1, \quad \text{sowie} \quad q_0 = 1 / \sum_{n=0}^M x_n. \quad (\text{A.9})$$

Mithilfe von Gleichung (A.9) ergeben sich dann die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten  $q_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  unmittelbar aus Gleichung (A.7). Diese Lösung gilt für beliebige Übergangswahrscheinlichkeiten  $P_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq M$ ,  $i-1 \leq j \leq M$ , d.h. für beliebige obere Hessenberg-Matrizen einschließlich der Tridiagonal-Matrix. Sie ist somit auch auf die EA-Analysemodelle anwendbar. Auch für große  $M$  lassen sich damit die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten sehr präzise rekursiv berechnen.

Eine geschlossene Lösung für die Zustandswahrscheinlichkeit  $q_0$  des hier behandelten Beispielsystems ist ebenfalls verfügbar (siehe Kapitel 4.4.1.1). Sie setzt allerdings eine binomiale Verteilung der Ankunftsgruppengröße je Zeitschlitz voraus, während die aufgezeigte rekursive Lösung den Vorteil hat, dass die Gruppengröße beliebig verteilt sein kann.

<sup>1</sup> Im Ansatz sind die (Gruppen-)Ankünfte in den voneinander unabhängigen Zeitschlitzten nicht an bestimmte Systemeingänge des  $M:1$ -Multiplexers gebunden, was symmetrische Verkehrslast impliziert.

## Anhang B

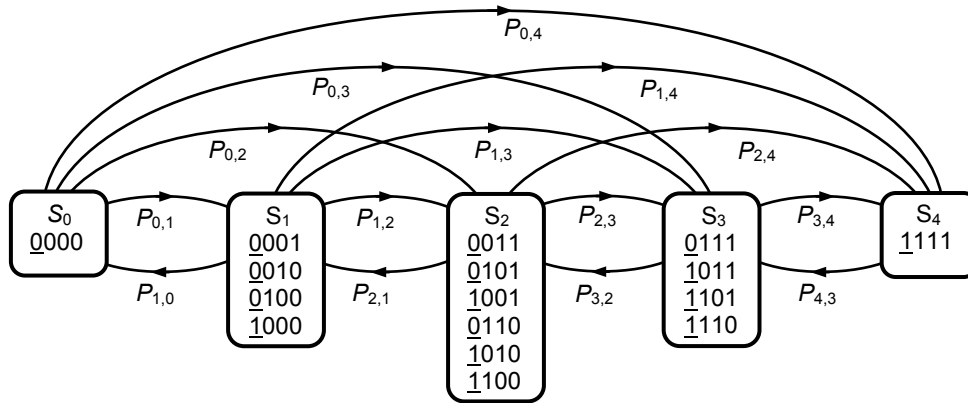
### Analysen vom Multiplexer des Polling-Typs

Ergänzend zum Kapitel 4 adressiert dieser Anhang folgende Details von einfach gepufferten Polling-Systemen. Zunächst wird gezeigt, dass sich im LA-Modell bei zyklischer Abfertigung der gleiche Systeminhalt ergibt wie beim Service in zufälliger Reihenfolge. Es folgt ein Nachweis, dass die EA-DR- und LA-IR-Modelle bezüglich Auslastung identisch sind. Analysiert wird ferner die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer im EA-IR-Modell bei Zufallsauswahl. Schließlich wird die Systemauslastung von Polling-Systemen mit einfacher Pufferung bei sehr großer Eingangszahl ermittelt und der Fall des TDM-Betriebs bei unbegrenztem Warteraum betrachtet.

#### LA-Modell des einfach gepufferten Polling-Systems mit zyklischer Abfertigung

Im Kapitel 4.4.1 wird das Polling-System mit  $K=1$  Warteplatz je Eingang unter symmetrischer Verkehrslast mithilfe der LA-IR- und LA-DR-Modelle analysiert, d.h. bei sofortiger bzw. verzögerter Warteplatznachbesetzung. Als Abfertigungsdisziplin, die beim LA-Modell im Falle einfacher Pufferung zugleich Interqueue-Disziplin ist, werden dort SIRO und FCFS betrachtet. Anhand eines Beispiels mit dem LA-IR-Modell wird im Folgenden gezeigt, dass sich bei Anwendung der klassischen zyklischen Abfrage (SICO) derselbe Systeminhalt ergibt.

Das exakte Modell mit zyklischer Abfrage umfasst  $\sum_{i=0}^M \binom{M}{i} = 2^M$  unterschiedliche Systemzustände, die sich als  $M+1$  Makrozustände strukturieren lassen. **Bild B.1** zeigt das Zustandsübergangsdiagramm am Beispiel eines Polling-Systems mit  $M=4$  Eingängen. Anzumerken ist, dass bei dieser Markov-Kette eine Zerlegung der Zustände  $S_0$  und  $S_4$  in Mikrozustände, welche die Positionen der aktuellen Polling-Priorität angeben, unnötig ist. Aufgrund der angenommenen Verkehrssymmetrie würden sich von jedem dieser Mikrozustände gleich wahrscheinliche Übergänge in denselben Makro-Zielzustand ergeben. Des Weiteren sind beim LA-IR-Modell alle Übergangswahrscheinlichkeiten von den Mikrozuständen innerhalb eines Ma-



**Bild B.1:** Übergänge zwischen den Makrozuständen eines Polling-Systems mit  $M = 4$  Stationen (Warteschlangen) und zyklischer Abfrage. Fordernde Stationen sind durch „1“ gekennzeichnet, leerlaufende durch „0“. Die Markierung einer Station kennzeichnet die räumliche Priorität. Aus Übersichtlichkeitsgründen nicht dargestellt sind die Übergänge innerhalb der Makrozustände.

krozustands zu einem bestimmten anderen Makrozustand identisch. Dies ermöglicht das direkte Zusammenfassen von Übergangswahrscheinlichkeiten und eine Modellbetrachtung auf der Ebene der Makrozustände. Es bedeutet ferner, dass die Polling-Reihenfolge bezüglich der Zustandswahrscheinlichkeiten im Falle eines Warteplatzes je Eingang keine Rolle spielt. Das Zustandsübergangsdiagramm in **Bild B.1** entspricht somit dem Schema im **Bild 4.5**, und es gelten die im Kapitel 4.4.1.1 angegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P_{i,i+j} = \begin{cases} a_j & \text{falls } i = 0, 0 \leq j \leq M, \\ \binom{M+1-i}{j+1} \sum_{n=1}^i a_{n+j} \binom{i-1}{n-1} / \binom{M}{n+j} & \text{falls } \begin{cases} 1 \leq i \leq M, \\ -1 \leq j \leq M-i, \end{cases} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Zu beachten ist, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer selbstverständlich von der Abfertigungsreihenfolge der wartenden Aufträge abhängt. Die entsprechende Analyse gestaltet sich allerdings sehr aufwändig. Zu erwarten ist, dass die Wartedauerverteilung zwischen den Fällen mit FCFS- und mit SIRO-Abfertigung rangiert (siehe Kapitel 4.4). Ferner sei angemerkt, dass die Interqueue-Disziplin im LA-IR-Modell bei mehreren Warteplätzen je Warteschlange ( $K > 1$ ) sehr wohl Einfluss auf den Systeminhalt nimmt. Dies alles trifft auch auf das LA-DR-Modell zu.

### Äquivalenz von LA-IR- und EA-DR-Modell

Wie im Kapitel 4.2.4. ausgeführt wurde, entspricht das LA-IR-Modell bezüglich der Auslastung dem EA-DR-Modell. Dies wird im Folgenden am Beispiel des Polling-Systems mit  $K = 1$  Warteplatz je Eingang nachgewiesen. Zunächst wird hierzu die Auslastung im EA-DR-Modell analysiert und anschließend mit dem Resultat aus dem LA-IR-Modell verglichen. Die

Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten für den Systeminhalt im EA-DR-Modell lassen sich angeben mit

$$P_{i,i+j} = \begin{cases} a_0 + a_1 & \text{falls } i = j = 0, \\ \binom{M-i}{j+1} \sum_{n=1}^{i+1} a_{n+j} \binom{i}{n-1} / \binom{M}{n+j} & \text{falls } \begin{cases} i = 0, 1 \leq j \leq M-1, \\ 1 \leq i \leq M-1, -1 \leq j \leq M-i-1, \end{cases} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Unter der Annahme, dass es sich bei diesem System um ein Äquivalent des LA-IR-Modells handelt, muss die Auslastung beider Systeme unter gleichen Randbedingungen identisch sein, d.h. es muss

$$1 - q_{0(\text{LA-IR})} = \rho = 1 - a_0 q_{0(\text{EA-DR})} \quad \text{bzw.} \quad q_{0(\text{EA-DR})} = q_{0(\text{LA-IR})} / a_0 \quad (\text{B.3})$$

gelten. Mit Gleichung (4.11) für die Leerlaufwahrscheinlichkeit des LA-IR-Systems sowie  $p = \lambda \Delta t / M$  folgt daraus für das EA-DR-Modell der Ausdruck

$$q_{0(\text{EA-DR})} = 1 / \left\{ a_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^M \binom{M}{k} \prod_{n=1}^k \left( \frac{1}{(1-p)^n} - 1 \right) \right] \right\} \quad (\text{B.4})$$

bzw. mit modifizierten Grenzen

$$q_{0(\text{EA-DR})} = 1 / \left\{ a_0 \left[ \sum_{k=0}^M \frac{(-1)^{k+1}}{1 - (1-p)^k + p(1-p)^k} \binom{M}{k} \prod_{n=0}^k \left( 1 - \frac{1}{(1-p)^n} - p \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.5})$$

Dass die alternative Bestimmung der Leerlaufwahrscheinlichkeit  $q_{0(\text{EA-DR})}$  nach Gleichung (4.6) mit den betreffenden Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten aus Gleichung (B.2) zum selben Resultat führt, lässt sich unschwer bestätigen.

### Wartedauerwahrscheinlichkeiten im einfach gepufferten EA-IR-Modell bei SIRO-Abfertigung

Zu den wichtigsten Details der Charakterisierung eines Bediensystems gehört die Kenntnis der Wartedauerverteilung. Während die Analyse bei einer Abfertigungsdisziplin wie FCFS noch relativ einfach möglich ist, gestaltet sie sich bei anderen Disziplinen je nach verwendetem Systemmodell sehr viel aufwändiger. In diesem Abschnitt wird die Wartedauerverteilung eines Polling-Systems mit beliebiger Eingangsanzahl  $M$  und einem Warteplatz je Eingang ( $K = 1$ ) bei SIRO-Abfertigung anhand des EA-IR-Modells ermittelt.

Bei der Wartedaueranalyse mit dem EA-IR-Modell muss man innerhalb eines Zeitschlitzes zwischen dem Ankunftszeitpunkt von Forderungen und dem Beginn des Abfertigungsprozesses differenzieren. Zusätzlich zum generellen Beobachtungszeitpunkt an den Zeitschlitzgren-

zen ist hier also ein weiterer Betrachtungszeitpunkt einzuführen.<sup>1</sup> Die Übergangswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt zwischen Ankunft und Servicebeginn (siehe 4.4.2.1) lassen sich für eine beliebige Anzahl von Eingängen  $M$  nach dem im Anhang A dargestellten Schema wie folgt angeben.

$$P_{i,i+j}^* = \begin{cases} \left( \binom{M-i}{j} \left[ \left[ \left( \frac{i-1}{i(i+j)} \right) \sum_{n=1}^i n a_{n+j} \binom{i}{n} / \binom{M}{n+j} \right] + \left[ \frac{M-i-j}{i+j+1} \right. \right. \right. \\ \cdot \left. \left. \sum_{n=1}^{\min\{i+1, M-j\}} a_{n+j} \left( 1 + \frac{i-n}{j+1} + \frac{n-1}{i(j+1)} \right) \binom{i}{n-1} / \binom{M}{n+j} \right] \right] \right\} & \text{falls } \begin{cases} 1 \leq i \leq M, \\ 0 \leq j \leq M-i, \end{cases} \\ \frac{i-1}{i} \sum_{n=1}^i a_{n-1} \binom{i-1}{n-1} / \binom{M}{n-1} & \text{falls } \begin{cases} 1 \leq i \leq M, \\ j = -1, \end{cases} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Die beobachtete Forderung kann bei ihrer Ankunft entweder in eine leere Warteschlange gelangen und unmittelbar am Auswahlprozess teilnehmen, oder sie kommt als Nachrücker eines gerade zur Abfertigung ausgewählten „Altauftrags“ erst im darauffolgenden Zeitschlitz infrage. Insofern unterscheidet sich die Analyse des Ankunftszeitschlitzes (Ausgangszeitintervall) grundsätzlich von den weiteren Schritten. Die Wahrscheinlichkeit einer sofortigen Abfertigung bei Ankunft kann mit

$$w_0 = P\{W=0\} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^M \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k q_n (k-n) \binom{M-n}{k-n} \sum_{m=0}^n a_{k-n+m} \binom{n}{m} / \binom{M}{k-n+m} \quad (\text{B.7})$$

angegeben werden, wobei es sich bei  $q_n$  um die rekursiv aus den Übergangswahrscheinlichkeiten von Gleichung (4.18) berechenbaren Zustandswahrscheinlichkeiten des Systems an der Zeitschlitzgrenze (Wahrscheinlichkeitsverteilung der Warteschlangenlänge) handelt. Die anschließende Analyse längerer Wartedauern beruht auf der Präsenz der betrachteten Forderung am Kopf der betreffenden Warteschlange. Zeitschlitz für Zeitschlitz wird dabei rekursiv – unter Berücksichtigung sämtlicher Neuankünfte – die Wahrscheinlichkeit ermittelt, dass der beobachtete Auftrag bedient wird (vergleiche Ansatz zur Wartedauerverteilung unter SIRO in Kapitel 4.4.1.1). Die weiteren Wartedauerwahrscheinlichkeiten ergeben sich danach zu

$$w_i = P\{W=i \Delta t\} = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^M P_{i,k}^* \sum_{n=0}^k q_n \binom{M-n}{k-n} \left\{ \frac{k+1-n}{k} \sum_{m=0}^n m a_{k-n+m} \binom{n}{m} / \binom{M}{k-n+m} \right. \\ \left. + \frac{M-k}{k+1} \sum_{m=1}^{\min\{n+1, M-k+n\}} (k+1-m) a_{k-n+m} \binom{n}{m-1} / \binom{M}{k-n+m} \right\}, \quad i \in \mathbb{N}^+, \quad (\text{B.8})$$

<sup>1</sup> Es ist zu beachten, dass es sich bei der Systembetrachtung zu einem Zeitpunkt zwischen Ankunft und Abfertigungsbeginn keinesfalls um eine Sicht handelt, die äquivalent zum LA-IR-Modell ist. Die ankommende Forderung an der zur Abfertigung ausgewählten Warteschlange kann nämlich hier auf den frei werdenden Wartepplatz nachrücken, während sie im LA-Modell abgewiesen werden würde.

wobei  $P_{i,k}^*$  die Übergangswahrscheinlichkeiten der Zustandsmatrix zum Zeitpunkt zwischen Ankunft und Servicebeginn gemäß Gleichung (B.6) bezeichnet.

### Systemauslastung bei einfacher Pufferung und sehr großer Eingangsanzahl

Insbesondere bei Polling-Systemen mit geringer Pufferkapazität stellt sich die Frage nach dem Einfluss der Warteschlangenanzahl auf den erreichbaren Durchsatz. Der folgende Abschnitt beweist, dass bereits ein Warteplatz je Warteschlange ausreicht, um unter der getroffenen Verkehrsannahme mit zunehmender Eingangsanzahl eine Auslastung von eins zu erzielen, bzw. eine beliebig geringe Verlustwahrscheinlichkeit.

Bei sehr großer Eingangsanzahl  $M \rightarrow \infty$  nehmen die Zustandsübergangswahrscheinlichkeiten des einfach gepufferten Polling-Systems (siehe **Bild 4.5**) unabhängig vom Ausgangszustand  $i$  die Gestalt der Poisson-Wahrscheinlichkeiten an, d.h. es gilt

$$P_{i,i+j} = \begin{cases} (\lambda \Delta t)^{j+1} e^{-\lambda \Delta t} / (j+1)! & \text{falls } -1 \leq j \leq M, i \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten werden folglich durch jene des M/D/1-Systems beschrieben (siehe auch Anhang C). Leicht einzusehen ist ferner, dass in diesem Fall die Unterschiede zwischen den EA- und LA-Modellen sowie den Schemata der Warteplatznachbesetzung verschwinden. So kann für eine allgemeingültige Grenzwertbetrachtung die geschlossene Lösung der Leerlaufwahrscheinlichkeit im LA-IR-Modell herangezogen werden.

Gemäß Gleichung (4.11) ist die Leerlaufwahrscheinlichkeit bei endlicher Eingangsanzahl  $M$  und jeweils einem Warteplatz je Eingang ( $K = 1$ ) gegeben durch

$$q_0 = 1 / \left\{ 1 + \sum_{k=1}^M \binom{M}{k} \prod_{n=1}^k \left( \frac{1}{(1-p)^n} - 1 \right) \right\}. \quad (\text{B.10})$$

Mit  $p = \lambda \Delta t / M$  folgt aus dem (Teil-)Grenzwert der Summanden

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \binom{M}{k} \prod_{n=1}^k \left[ \left( \frac{M}{M - \lambda \Delta t} \right)^n - 1 \right] = (\lambda \Delta t)^k \quad (\text{B.11})$$

und schlussendlich

$$\lim_{M \rightarrow \infty} q_0 = \lim_{M \rightarrow \infty} 1 / \left\{ 1 + \sum_{k=1}^M (\lambda \Delta t)^k \right\} = 1 - \lambda \Delta t. \quad (\text{B.12})$$

Damit ergibt sich die Systemauslastung zu  $\rho = \rho_{\text{LA}} = (1 - q_0) = \lambda \Delta t$ . Dies ist bereits bei einem Warteplatz je Eingang und unparteiischer Abfertigung der Fall, trifft also auch auf  $K \geq 1$  zu. Allerdings dürfte das Resultat kaum von praktischem Nutzen sein, denn die Kurven der Sys-

temauslastung konvergieren mit zunehmender Eingangsanzahl nur sehr allmählich gegen den Grenzwert (siehe **Bilder 4.6** und **4.7**).

### TDM-Betrieb bei unbegrenzter Pufferkapazität

Auch beim Polling-System im TDM-Betrieb interessiert die maximal erreichbare Auslastung bei unbegrenzter Pufferkapazität. Mithilfe der im Kapitel 4 beschafften Leerlaufwahrscheinlichkeiten für die EA- und LA-Modelle mit begrenztem Puffer ist die Analyse leicht möglich. Darüber hinaus wird in diesem Abschnitt nachgewiesen, dass die Modellunterschiede bei unbegrenztem Warteraum verschwinden.

Die Leerlaufwahrscheinlichkeit im EA-IR-Modell mit unbegrenztem Puffer in einem beliebigen Zeitrahmen, direkt nachdem die betrachtete Warteschlange bedient wurde, liefert die Grenzwertbetrachtung  $K \rightarrow \infty$  des Ausdrucks von Gleichung (4.40)

$$\lim_{K \rightarrow \infty} q_0^* = (1-p)^{M(K-1)+1} / \sum_{i=0}^{\infty} \left( -p(1-p)^{M-1} \right)^i \binom{MK-i(M-1)}{i}. \quad (\text{B.13})$$

Der Nenner von Gleichung (B.13) korrespondiert mit der in [Pólya25] bewiesenen kombinatorischen Identität

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha+i\beta}{i} y^i = \frac{x^{\alpha+1}}{(1-\beta)x+\beta}, \quad \{\alpha, \beta\} \in \mathbb{Q}, \quad (\text{B.14})$$

wobei  $x$  die Wurzel der trinomialen Gleichung  $1-x+yx^\beta=0$  ist. Aus dem Koeffizientenvergleich der linken Seite von Gleichung (B.14) mit dem Nenner der Gleichung (B.13) folgt unmittelbar  $\alpha = MK$ ,  $\beta = 1-M$  und  $y = -p(1-p)^{M-1}$ . Durch Einsetzen dieser Terme erhält man

$$\lim_{K \rightarrow \infty} q_0^* = (1-p)^{M(K-1)+1} / \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i^{\alpha+1}}{(1-\beta)x_i+\beta}, \quad (\text{B.15})$$

wobei wegen des Grades der Bestimmungsgleichung  $M-1$  Lösungen  $x_i$  existieren. Im Grenzfall  $K \rightarrow \infty$  verbleibt als einzige relevante und für alle  $M \in \mathbb{N}^+$  gültige Lösung  $x = 1-p$ . So liefert Gleichung (B.15) mit

$$\lim_{K \rightarrow \infty} q_0^* = (1-Mp) / (1-p)^M \quad (\text{B.16})$$

ein Resultat, das sich mit dem in [Karol87] für ein  $\text{Geo}^{[X]}/D/1/K$  ermittelten Ausdruck deckt (siehe auch Kapitel 5.2.1).

Für das LA-IR-Modell folgen aus der in Kapitel 4 hergeleiteten Beziehung zur Leerlaufwahrscheinlichkeit am Ende des Servicezeitschlitzes



$$\lim_{K \rightarrow \infty} q_{0(\text{LA-IR})}^* = (1-p)^{M(K-1)+1} / \sum_{i=0}^{\infty} \left( -p(1-p)^{M-1} \right)^i \binom{MK-1-i(M-1)}{i} \quad (\text{B.17})$$

sowie mithilfe der zuvor angewandten Prozedur

$$\lim_{K \rightarrow \infty} q_0^* = (1-Mp) / (1-p)^{M-1}. \quad (\text{B.18})$$

Dasselbe Ergebnis für unbegrenzten Warteraum liefert auf entsprechendem Wege auch die Grenzwertbetrachtung für das LA-DR-Modell mit

$$\lim_{K \rightarrow \infty} q_{0(\text{LA-DR})}^* = (1-p)^{M(K-1)} / \sum_{i=0}^{\infty} \left( -p(1-p)^{M-1} \right)^i \binom{MK-2-i(M-1)}{i}. \quad (\text{B.19})$$

Dass die Auslastung bei den betrachteten Modellvarianten im Fall unbegrenzten Puffers bei gleicher Eingangszahl  $M \in \mathbb{N}^+$  identisch ist, lässt sich leicht durch Vergleich der beiden Ausdrücke  $\rho_{(\text{EA-IR})} = 1 - a_0(1-Mp) / (1-p)^M$  sowie  $\rho_{(\text{LA})} = 1 - (a_0 + a_1/M)(1-Mp) / (1-p)^{M-1}$  überprüfen, wobei  $a_0 = (1-p)^M$  und  $a_1 = Mp(1-p)^{M-1}$  zu berücksichtigen sind.



## Anhang C

### Analysen vom Multiplexer mit zentraler Pufferung

Die im Kapitel 5 ermittelten Leistungsparameter für Zellen-Multiplexer mit zentralem Puffer einer beliebigen endlichen Kapazität werden in den folgenden Abschnitten dieses Anhangs mit bekannten Resultaten aus der Literatur für Systeme mit unbegrenzten Warteraum verglichen bzw. überprüft. Zu diesem Zweck werden unter anderem die Wartedauerwahrscheinlichkeiten bei FCFS-Abfertigung der begrenzten Warteschlange hergeleitet.

#### Systeminhalt im Falle unbegrenzten Warteraums

Zunächst wird die für beliebigen endlichen Warteraum mit dem EA-IR-Modell hergeleitete Warteschlangenlänge<sup>1</sup>

$$q_n = \begin{cases} 1 / \sum_{i=0}^K \frac{(-p)^i}{(1-p)^{M(K-i)+i}} \binom{M(K+1-i)+i-1}{i} & \text{falls } n=0, \\ q_0 \sum_{i=0}^n \frac{(-p)^i}{(1-p)^{M(n-i)+i}} \left\{ \left( 1 + \frac{1-p}{p} \frac{i}{M(n+1-i)+i-1} \right) \binom{M(n+1-i)+i-1}{i} \right\} & \text{falls } 1 \leq n \leq K, \\ & K \in \mathbb{N}, M \in \mathbb{N}^+, \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

im Grenzfall  $K \rightarrow \infty$  betrachtet. Der Vergleich mit dem ausschließlich für unbegrenzte Pufferkapazität geltenden Ausdruck (siehe beispielsweise [Karol87]), lässt Identität erwarten, d.h.

$$\lim_{K \rightarrow \infty} q_0 = (1-p)^{MK} / \sum_{i=0}^{\infty} \left( -p (1-p)^{M-1} \right)^i \binom{MK + M - 1 - i(M-1)}{i} = \frac{1-Mp}{(1-p)^M}. \quad (\text{C.2})$$

<sup>1</sup> Siehe Gleichungen (5.4) und (5.5).

**Beweis:** Der Nenner der linken Seite von Gleichung (C.2) korrespondiert mit der im Anhang B verwendeten kombinatorischen Identität von Gleichung (B.12). Damit folgt aus Gleichung (C.2) unmittelbar

$$q_0 = (1-p)^{MK} / \sum_i \frac{x_i^{M(K+1)}}{M x_i - (M-1)}, \quad (C.3)$$

wobei im Grenzfall  $K \rightarrow \infty$  mit  $x = 1-p$  nur eine relevante und für alle  $M \in \mathbb{N}^+$  gültige Lösung verbleibt. Das Einsetzen in Gleichung (C.3) liefert das erwartete Resultat von Gleichung (C.2) und schließt so den Beweis.  $\square$

Es sei angemerkt, dass sich die oben verwendete Prozedur für den Beweis der entsprechenden Resultate aus dem LA-IR-Modell gleichermaßen eignet. Erwähnenswert ist ferner, dass es sich bei Gleichung (C.3) um eine alternative Darstellung von Gleichung (C.1) handelt, die insbesondere für kleine  $M$  attraktiv ist. Weil sich der Nenner von  $q_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, K$  aus Gleichung (C.1) in zwei kombinatorische Terme aufteilen lässt, ist hier ebenfalls eine Darstellung in der von Gleichung (C.3) gegebenen Form möglich.

Im nun folgenden Abschnitt wird der Multiplexer bei unbegrenztem Warteraum ( $K \rightarrow \infty$ ) und sehr großer Eingangsanzahl ( $M \rightarrow \infty$ ) betrachtet, d.h. bei Poisson-verteilter Gruppengröße der Ankünfte. Da es sich in diesem Fall um ein reines Wartesystem handelt, gilt  $\rho = \lambda \Delta t$ . Wie in [Karol87] ausgeführt ist, ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten der Warteschlangenlänge eines solchen Zellen-Multiplexers in geschlossener Form als MacLaurinsche Reihe aus der erzeugenden Funktion der korrespondierenden stationären Warteschlangenlänge eines M/D/1-Systems. Dies führt nach [Gross74] zu

$$q_n = \begin{cases} (1-\rho)e^\rho & \text{falls } n=0, \\ (1-\rho)e^\rho(e^\rho-1-\rho) & \text{falls } n=1, \\ (1-\rho) \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1-i} e^{i\rho} \left[ \frac{(i\rho)^{n-i+1}}{(n-i+1)!} + \frac{(i\rho)^{n-i}}{(n-i)!} \right] & \text{falls } n \geq 2, \end{cases} \quad (C.4)$$

wobei für  $n \geq 2$  der zweite Faktor des Summanden mit dem Laufindex  $i = n+1$  ignoriert werden muss. Durch Grenzwertbildung des in der vorliegenden Arbeit verallgemeinerten Ausdrucks zur Warteschlangenlänge bei beliebig großem Warteraum nach Gleichung (C.1)<sup>2</sup>

$$\lim_{\{K, M\} \rightarrow \infty} q_n = \begin{cases} 1 / \left\{ e^{K\rho} \sum_{i=0}^K \frac{(-1)^i}{i!} [(K+1-i)\rho e^{-\rho}]^i \right\} & \text{falls } n=0, \\ q_0 e^{n\rho} \sum_{i=0}^n [(-1)(n+1-i)\rho e^{-\rho}]^i \left( 1 + \frac{i}{(n+1-i)\rho} \right) / i! & \text{falls } 1 \leq n \leq K, \end{cases} \quad (C.5)$$

<sup>2</sup> Siehe auch Gleichungen (5.7) und (5.8).

wird hier die Identität mit Gleichung (C.4) bewiesen.

**Beweis:** Von Gleichung (C.5) ausgehend erhält man mit  $\alpha = -\rho(K+1)$  den Ausdruck

$$\lim_{K \rightarrow \infty} q_0 = e^\rho \left/ \sum_{i=0}^{\infty} e^{-(\alpha+i\rho)} \frac{(\alpha+i\rho)^i}{i!} \right. = e^\rho (1-\rho), \quad (\text{C.6})$$

dessen unendliche Summe mit Jensens Theorem<sup>3</sup> korrespondiert (siehe [Syski60] sowie dort genannte weiterführende Zitate), was schließlich zum gesuchten Grenzwert führt. Dieser ist mit dem Ausdruck für  $q_0$  in Gleichung (C.4) identisch, und stimmt im Grenzfall  $M \rightarrow \infty$  auch mit dem Ausdruck (C.3) überein.

Es folgt die Betrachtung der Terme  $q_1 \dots q_K$ . Gleichung (C.4) lässt sich für  $n \geq 2$  unter Beachtung der genannten Bedingung zu

$$q_n = (1-\rho) e^{\rho(n+1)} \left[ 1 + \sum_{i=1}^n (-e^{-\rho})^{n-i+1} \left( \frac{(i\rho)^{n-i+1}}{(n-i+1)!} + \frac{(i\rho)^{n-i}}{(n-i)!} \right) \right], \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (\text{C.7})$$

umformen, und erlangt so auch für  $n=1$  Gültigkeit. Nach Umkehr der Summationsreihenfolge durch Vertauschen der Indizes  $i$  und  $n-i$  ergeben sich weitere Vereinfachungen, die zu

$$q_n = (1-\rho) e^{\rho(n+1)} \left[ 1 + \sum_{i=1}^n \left( 1 + \frac{i}{(n+1-i)\rho} \right) (-1)^i \frac{[(n+1-i)\rho e^{-\rho}]^i}{i!} \right], \quad n \in \mathbb{N}^+, \quad (\text{C.8})$$

führen. Schließlich lässt sich der Ausdruck innerhalb der eckigen Klammern in eine bei  $i=0$  beginnende Reihe umwandeln, wodurch man zusammen mit dem Faktor, der  $q_0$  repräsentiert, einen zu Gleichung (C.5) äquivalenten Ausdruck erhält.  $\square$

### Wartedauerverteilung im EA-IR-Modell unter FCFS

Für zeitdiskrete Single-Server-Bediensysteme mit FCFS-Disziplin wird in [Wittevrongel96] die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wartedauer hergeleitet, wobei ein unbegrenzter Warte- raum und eine konstante Abfertigungsdauer von einem Zeitschlitz pro Auftrag angenommen werden. Basierend auf der Verteilung der Warteschlangenlänge im EA-IR-Modell wird im Folgenden bewiesen, dass die in [Wittevrongel96] angegebene Beziehung zur Wartedauerver- teilung auch für Systeme mit beliebiger endlicher Pufferkapazität und FCFS-Abfertigung gültig ist (siehe auch [Langer05]).

Die Wartedauer einer Zelle setzt sich aus der Summe  $W = W_0 + W_1$  zusammen, wobei  $W_0 = Q\Delta t$  die Wartedauer einer ankommenden Auftragsgruppe aufgrund der im System vorgefundenen

<sup>3</sup> Benannt nach dem dänischen Mathematiker J.L.W.V. Jensen (1859-1925).

Restarbeit darstellt. Die zweite Komponente  $W_1$  repräsentiert die zusätzliche Wartedauer (in Zeitschlitzen  $\Delta t$ ), die sich für ein typisches Mitglied der ankommenden Gruppe ergibt, wobei angenommen wird, dass die vom System akzeptierten Aufträge in zufälliger Reihenfolge an das Warteschlangeneende angefügt werden. Da die Abfertigung der bereits wartenden Zellen in FCFS-Manier erfolgt und die Bediendauer pro Zelle genau einen Zeitschlitz beansprucht, kann man die Wartedauer einer Auftragsgruppe (bis zum Servicebeginn des ersten Auftrags dieser Gruppe) direkt aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Warteschlangenlänge übernehmen. Im Folgenden wird die zusätzliche, durch die Gruppenankunft bedingte Wartedauer näher untersucht. Hierzu richte sich die Aufmerksamkeit auf die Position eines bestimmten Auftrags aus der Gruppe. Die Zufallsvariable  $G$  kennzeichne die Größe einer vom System akzeptierten Auftragsgruppe. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Gruppe aus  $i$  Zellen besteht (nachdem sie vom System akzeptiert wurde), ist  $i a_i / E[G]$ . Somit hat ein beliebiger Auftrag innerhalb seiner Gruppe eine bestimmte Position mit der Wahrscheinlichkeit  $i a_i / (i E[G]) = a_i / E[G]$  inne. Nimmt man Gruppen von allgemeiner Größe an und berücksichtigt für die Zelle auf der Position  $k = 1, 2, \dots, M$  eine zusätzliche Wartedauer von  $k - 1$  Zeitschlitzen, so erhält man  $P\{W_1 = k \Delta t\} = \sum_{i=k+1}^M a_i / E[G]$ . Nun lässt sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der gesamten Wartedauer aus der Beziehung  $w_i = P\{W = i \Delta t\} = P\{W_0 + W_1 = i \Delta t\}$  angeben. Dieser Ansatz gewährleistet, dass nur solche Zellen berücksichtigt werden, die tatsächlich vom System akzeptiert worden sind. Es gilt

$$w_i = P\{W = i \Delta t\} = \sum_{n=0}^{\min\{i, M-1\}} q_{i-n}^{(K)} \frac{1}{\rho} \sum_{k=n+1}^M a_k = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^i q_n^{(K)} \left( 1 - \sum_{k=0}^{i-n} a_k \right), \quad i = 0, 1, \dots, K. \quad (\text{C.9})$$

Anzumerken ist, dass der verwendete Ansatz und dieses Resultat auch auf das einfach gepufferte Polling-System mit großer Eingangsanzahl zutreffen (siehe Kapitel 4.6.1).

In [Wittevrongel96] wird für Single-Server-Systeme mit unbegrenzter Kapazität und FCFS-Abfertigung in jeweils einem Zeitschlitz pro Auftrag die Beziehung

$$\text{var}[W]/(\Delta t)^2 = \text{var}[Q]/\rho - (1 - \rho)(E[Q]/\rho)^2 \quad (\text{C.10})$$

hergeleitet.<sup>4</sup> Mit der Annahme, dass Gleichung (C.10) auch für Systeme mit endlicher Kapazität hält, führt Gleichung (C.9) zusammen mit Gleichung (C.1) zu

$$w_i = P\{W = i \Delta t\} = \begin{cases} 1 - (1 - q_0)/\rho & \text{falls } i = 0, \\ q_i/\rho & \text{falls } 1 \leq i \leq K. \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Dies wird im Folgenden für binomial-verteilte Gruppengrößen bewiesen.

<sup>4</sup> Die Wartedauervarianz wird angegeben in  $(\Delta t)^2$ .

**Beweis:** Mit  $\rho = 1 - q_0 a_0$  zeigt sich die Identität der Gleichungen (C.9) und (C.11) für  $w_0$  unmittelbar. Für den Beweis der Beziehung  $q_n = \rho w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, K$ , wird – unter der Voraussetzung einer binomial-verteilten Größe der ankommenden Gruppe sowie FCFS-Abfertigung – die in Kapitel 5.2.1 beschriebene Beziehung

$$q_n^{(K)} = \frac{q_0^{(K)}}{q_0^{(n)}} - \frac{q_0^{(K)}}{q_0^{(n-1)}} = \frac{q_0^{(K)}}{q_0^{(n)}} - \sum_{j=0}^n q_j^{(K)} \sum_{k=0}^{n-j} a_k \quad (\text{C.12})$$

herangezogen. Danach muss

$$\frac{1}{q_0^{(n-1)}} = \sum_{j=0}^n \frac{q_j^{(K)}}{q_0^{(K)}} \sum_{k=0}^{n-j} a_k \quad (\text{C.13})$$

gelten. Nach dem Ersetzen sämtlicher  $q_j$  (Pufferkapazität von  $K$  Zellen) durch Gleichung (C.1) lässt sich dieser Ausdruck mittels Aufteilung der Summanden und Neuordnung (anhand einheitlicher Grenzen) vereinfachen. Einige weitere algebraische Schritte führen dann zum Ausdruck

$$\frac{1}{q_0^{(n-1)}} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^j p^{n-i} (1-p)^{-M(i-1)-(n-i)} \binom{M(i+1)+j-1}{j} \binom{M}{n-j-i}. \quad (\text{C.14})$$

Durch erneuten Wechsel der Summationsreihenfolge, und mit Hilfe einer Variante der Vandermonde-Konvolution [Riordan68] erhält man die Vereinfachung

$$\frac{1}{q_0^{(n-1)}} = \sum_{i=0}^{n-1} (-p)^{n-1-i} (1-p)^{-Mi-(n-1-i)} \binom{M(i+1)+(n-1-i)-1}{n-1-i}. \quad (\text{C.15})$$

Nun kann die Reihenfolge der Summation durch Vertauschen der steigenden und fallenden Indizes  $i$  bzw.  $n-1-i$  geändert werden, was schließlich nach Kehrwertbildung zu Gleichung (C.1) führt und somit den Beweis abschließt.  $\square$

### Wartedauerverteilung im LA-IR-Modell unter FCFS

Analog zur obigen Herleitung der Wartedauerverteilung im EA-IR-Modell wird hier die Wartedauer im LA-IR-Modell unter FCFS-Abfertigung bestimmt.

Da sich das System nur dann im Leerlauf befindet, wenn an den Zeitschlitzgrenzen kein Auftrag auf Abfertigung wartet, beträgt die Auslastung  $\rho = 1 - q_0$ . Zu beachten ist, dass im LA-IR-Modell die beiden Systemzustände mit leerer Warteschlange bzw. einem einzelnen wartenden Auftrag an der Zeitschlitzgrenze (zu Servicebeginn) wegen des Prinzips der sofortigen Warteplatznachbesetzung (am Ende der Bedienung) äquivalent sind. Unter Berücksichtigung dieses Zusammenhangs erhält man – dem obigen in Gleichung (C.9) mündenden Ansatz für das EA-IR-Modell folgend – die Wartedauer

$$w_i = P\{W = i\Delta t\} = \frac{1}{1 - q_0} \sum_{n=0}^i x_n \left( 1 - \sum_{k=0}^{i-n} a_k \right), \quad i = 0, 1, \dots, K-1, \quad (\text{C.16})$$

$$\text{mit } x_n = \begin{cases} q_0 + q_1 & \text{falls } n = 0, \\ q_{n+1} & \text{falls } n \in \mathbb{N}^+. \end{cases}$$

Natürlich beträgt die maximale Wartedauer bei FCFS-Abfertigung  $K-1$  Zeitschlitze, denn der Auftrag am Kopf der Warteschlange wird ohne Verzögerung unmittelbar nach der betrachteten Zeitschlitzgrenze abgefertigt, während die letzte Forderung in einer mit  $K$  Aufträgen vollständig gefüllten Warteschlange  $K-1$  Zeitschlitze bis zum Servicebeginn warten muss. Die mittlere Wartedauer ist folglich  $W = \sum_{i=0}^{K-1} i w_i \Delta t$ . Ausführungen zur Wartedauer-varianz finden sich im Anhang D.



## Anhang D

### Warteschlangenlänge und Wartedauer bei unbegrenztem Warteraum

Dieser Anhang gibt eine zusammenfassende Übersicht zu den ersten zwei Momenten von Gesamtwarteschlangenlänge und Wartedauer bei Zellen-Multiplexern mit unbegrenztem Warteraum in Abhängigkeit der Eingangsanzahl und der Verkehrslast, wobei Gruppenankünfte aus einer binomial- bzw. Poisson-verteilter Zellenanzahl bestehen. Die Übersicht trifft auf die Zentralpufferarchitektur ebenso zu wie auf Polling-Systeme. Sie ist gegliedert nach Ankunftsprozess und des Weiteren nach dem zeitdiskreten Analysemodell (EA- und LA-Modell<sup>1</sup>, relevant für die Warteschlangenlänge) bzw. nach der Abfertigungsdisziplin (relevant für die Wartedauer). Zum Vergleich ist in der Übersicht auch das M/D/1-System enthalten.

Den Ausgangspunkt für die Angaben zur Warteschlangenlänge in **Tabelle D.1** bildet die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für den Bernoulli-Gruppenankunftsprozess

$$A(z) = \left( 1 - \frac{\lambda \Delta t}{M} + z \frac{\lambda \Delta t}{M} \right)^M, \quad (\text{D.1})$$

wobei wegen des unbegrenzten Puffers  $\lambda \Delta t = \rho$  gilt. Die Abfertigungsdisziplin (einschließlich Interque-Disziplin im Falle der Polling-Architektur) ist hier nicht relevant. Beim LA-Modell ist zu beachten, dass Ankünfte ( $E[A] = \lambda \Delta t$  je Zeitschlitz) unmittelbar Bestandteil der Warteschlangenlänge werden. Sehr anschaulich wirkt sich dies beim Erwartungswert aus.

Bei den Angaben zur Wartedauer in **Tabelle D.2** ist das zeitdiskrete Analysemodell unerheblich. Als Bediendisziplinen sind FCFS und SIRO<sup>2</sup> berücksichtigt, was im Fall der Polling-Systemarchitektur die 1-begrenzte Abfertigung impliziert. Die Ergebnisse basieren für FCFS auf der erzeugenden Funktion der Wartedauerverteilung in einem Geo<sup>[X]</sup>/D/1-Wartesystem [Kolias99].

<sup>1</sup> Aufgrund des unbegrenzten Warteraums ist das Warteplatznachbesetzungsschema unerheblich.

<sup>2</sup> Die Abfertigung in zufälliger Reihenfolge wird in Kapitel 4 (Polling-Systeme) mit G-SIRO bezeichnet.

Modell <sup>3</sup>	Warteschlangenlänge			
	$Q(z)$	$E[Q]$	$E[Q^2]$	$\text{var}[Q]$
Geo <sup>[X]</sup> /D/1 EA-Modell	$\frac{(1-\lambda\Delta t)(1-z)}{A(z)-z}$ [Karol87]	$\frac{M-1}{M} \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$ [Karol87]	$\frac{M-1}{M^2} \frac{3M\rho^2 - (M+4)\rho^3 + (M+1)\rho^4}{6(1-\rho)^2}$	$\frac{M-1}{M^2} \frac{6M\rho^2 - 2(M+4)\rho^3 - (M-5)\rho^4}{12(1-\rho)^2}$
M <sup>[X]</sup> /D/1 EA-Modell		$\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$	$\frac{3\rho^2 - \rho^3 + \rho^4}{6(1-\rho)^2}$	$\frac{6\rho^2 - 2\rho^3 - \rho^4}{12(1-\rho)^2}$
M/D/1 EA-Modell		[Takagi93], [Kleinrock76]		
Geo <sup>[X]</sup> /D/1 LA-Modell	$\frac{(1-\lambda\Delta t)(1-z)A(z)}{A(z)-z}$ z.B. [Bose02]	$\frac{M-1}{M} \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho$	$\frac{M-1}{M^2} \frac{6M\rho^2 - 4(M+1)\rho^3 + (M+1)\rho^4}{6(1-\rho)^2}$	$\frac{M-1}{M^2} \frac{12M\rho^2 - (20M+8)\rho^3 + (11M+5)\rho^4}{12(1-\rho)^2} - \rho^2$
M <sup>[X]</sup> /D/1 LA-Modell		$\frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho$	$\frac{6\rho^2 - 4\rho^3 + \rho^4}{6(1-\rho)^2}$	$\frac{4\rho^3 - \rho^4}{12(1-\rho)^2}$
M/D/1 LA-Modell				

**Tabelle D.1:** Explizite Darstellung der ersten zwei Momente und der Varianz der gesamten Warteschlangenlänge für Zellen-Multiplexer mit unbegrenztem Warteraum bei symmetrischem Verkehr ( $\rho = \lambda \Delta t$ ).

Modell <sup>4</sup>	Wartedauer			
	$W(z)$	$E[W]/(\Delta t)$	$E[W^2]/(\Delta t)^2$	$\text{var}[W]/(\Delta t)^2$
Geo <sup>[X]</sup> /D/1- FCFS	$\frac{(1-\lambda\Delta t)(1-A(z))}{\lambda\Delta t(A(z)-z)}$ z.B. [Koliass99]	$\frac{M-1}{M} \frac{\rho}{2(1-\rho)}$ [Karol87]	$\frac{M-1}{M^2} \frac{3M\rho - (M+4)\rho^2 + (M+1)\rho^3}{6(1-\rho)^2}$	$\frac{M-1}{M^2} \frac{6M\rho - 5(M+1)\rho^2 + 2(M+1)\rho^3}{12(1-\rho)^2}$ [Kruskal88]
M <sup>[X]</sup> /D/1- FCFS		$\frac{\rho}{2(1-\rho)}$	$\frac{3\rho - \rho^2 + \rho^3}{6(1-\rho)^2}$	$\frac{6\rho - 5\rho^2 + 2\rho^3}{12(1-\rho)^2}$
M/D/1- FCFS		[Takagi93], [Kleinrock76]	$\frac{2\rho + \rho^2}{6(1-\rho)^2}$ z.B. [Kleinrock75]	$\frac{4\rho - \rho^2}{12(1-\rho)^2}$ [Cohen69]
Geo <sup>[X]</sup> /D/1- SIRO	Ansätze für $E[W^2]$ siehe [Takagi93], [Laevens95]	$\frac{M-1}{M} \frac{\rho}{2(1-\rho)}$	$\frac{M-1}{M^2} \frac{6M\rho + (M-8)\rho^2 - (M-2)\rho^3}{6(1-\rho)^2(2-\rho)}$	$\frac{M-1}{M^2} \frac{12M\rho - 4(M+5/2)\rho^2 + (M+1)\rho^3}{12(1-\rho)^2(2-\rho)}$
M <sup>[X]</sup> /D/1- SIRO		$\frac{\rho}{2(1-\rho)}$	$\frac{6\rho + \rho^2 - \rho^3}{6(1-\rho)^2(2-\rho)}$	$\frac{12\rho - 4\rho^2 + \rho^3}{12(1-\rho)^2(2-\rho)}$
M/D/1- SIRO		[Takagi93], [Kleinrock76]	$\frac{2\rho + \rho^2}{3(1-\rho)^2(2-\rho)}$ z.B. [Koliass99]	$\frac{8\rho - 2\rho^2 + 3\rho^3}{12(1-\rho)^2(2-\rho)}$

**Tabelle D.2:** Explizite Darstellung der ersten zwei Momente und der Varianz der Wartedauer für Zellen-Multiplexer mit unbegrenztem Warteraum bei symmetrischem, gleichberechtigtem Verkehr. Die Architektur kann sowohl auf einer zentralen Warteschlange beruhen als auch auf dem Prinzip des Polling-Systems mit 1-begrenzter Abfertigung. Die Angaben zu  $E[W]$  beziehen sich auf Zeitschlitze ( $\Delta t$ ), die Angaben zu  $E[W^2]$  und  $\text{var}[W]$  auf  $(\Delta t)^2$ .

<sup>3</sup> Unabhängig von der Abfertigungsdisziplin.

<sup>4</sup> Unabhängig vom zeitdiskreten Analysemodell.

Für die explizite Angabe des zweiten Moments der Wartedauer bei SIRO-Abfertigung wurden Ansätze von Takagi und Laevens herangezogen [Takagi93], [Laevens95]. Bemerkenswert ist der Zusammenhang zwischen den zweiten Momenten von Wartedauer und Warteschlangenlänge bei FCFS-Abfertigung (siehe Kapitel 5 sowie [Wittevrongel96])

$$E[W^2]_{\text{EA}} / (\Delta t)^2 = E[Q^2]_{\text{EA}} / \rho. \quad (\text{D.2})$$

Auf das LA-Modell trifft dies so nicht zu. Weil hier an der Zeitschlitzgrenze die Ankünfte in der Warteschlangenlänge enthalten sind, ergeben sich entsprechend unterschiedliche Momente. Da aber zwischen den Ausdrücken für das EA-Modell und denen des LA-Modells feste Beziehungen bestehen, ist ein Wechsel zwischen den Modellen leicht möglich. So lässt sich anhand von **Tabelle D.1** unschwer nachprüfen, dass

$$\text{var}[Q]_{\text{LA}} = \text{var}[Q]_{\text{EA}} + E[Q]_{\text{EA}} + \rho/M \quad (\text{D.3})$$

gilt. Eine weitere Relation für Gruppenankunftssysteme mit unbegrenztem Warteraum unter FCFS- bzw. SIRO-Abfertigung ist nach [Fuhrmann91] und [Takagi93]

$$\left\{ E[W^2]_{\text{SIRO}} + E[W]_{\text{SIRO}} \right\} / \left\{ E[W^2]_{\text{FCFS}} + E[W]_{\text{FCFS}} \right\} = \frac{1}{1 - \rho/2}. \quad (\text{D.4})$$

Dieser Ausdruck gilt für EA- und LA-Modell gleichermaßen, da die Warteschlangenlänge nicht enthalten ist.

Der Zellen-Multiplexer im TDM-Modus wird wegen seiner besonderen Betriebsart nicht unmittelbar von den Tabellen abgedeckt.



---

## Literaturverzeichnis

- [Aldeer10] M.M.N. Aldeer: Performance comparison of packet-level multiplexing algorithms with bursty traffic. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, Vol. 3, No. 1, pp. 46-52, 2010.
- [Alfa03] A.S. Alfa: An alternative approach for analyzing finite buffer queues in discrete time. *Performance Evaluation*, Vol. 53, pp. 75-92, 2003.
- [Arpaci00] M. Arpaci, J.A. Copeland: Buffer management for shared-memory ATM switches. *IEEE Communications Surveys and Tutorials*, Vol. 3, No. 1, 2000.
- [ATMForum99] ATM-Forum Technical Committee: Traffic management specification version 4.1. Document AF-TM-0121.000, 1999.
- [Awdeh95] R.Y. Awdeh, H.T. Mouftah: Survey of ATM switch architectures. *Computer Networks and ISDN Systems*, Vol. 27, pp. 1567-1613, 1995.
- [Bach02] R. Bach: Paketvermittelnde Datennetze. In V. Jung, H.-J. Warnecke (Hrsg.), *Handbuch für die Telekommunikation*, Springer, Berlin, 2002.
- [Baiocchi91] A. Baiocchi, N. Blefari Melazzi, M. Listanti, A. Roveri, R. Winkler: Loss performance analysis of an ATM multiplexer loaded with high-speed on-off sources. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol. 9, No. 3, pp. 388-393, 1991.
- [Bažanowski95] Z. Bažanowski, U. Killat: The superposition of cell streams with geometrically distributed interarrivals in an ATM multiplexer. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 43, No. 2, 3, 4, pp. 1323-1325, 1995.
- [Beneš65] V.E. Beneš: *Mathematical theory of connecting networks and telephone traffic*. Academic Press, New York, 1965.
- [Birdsall62] T.G. Birdsall, M.P. Ristenbatt, S.B. Weinstein: Analysis of asynchronous time multiplexing of speech sources. *IRE Transactions on Communications Systems*, Vol. 10, No. 4, pp. 390-397, 1962.
- [Bisdikian93] C. Bisdikian: A note on the conservation law for queues with batch arrivals. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 41, No. 6, pp. 832-835, 1993.
- [Blake98] S. Blake et al.: An architecture for differentiated services. RFC 2475, IETF. Dec. 1998.
- [Blanton02] E. Blanton, M. Allman: On making TCP more robust to packet reordering. *Computer Communication Review*, Vol. 32, No. 1, pp. 20-30, 2002.
- [Blondia92] C. Blondia, O. Casals: Statistical multiplexing of VBR sources: matrix-analytic approach. *Performance Evaluation* Vol. 16, No. 1-3, pp. 5-20, 1992.

- [**Bodamer02**] S. Bodamer, J. Charzinski, K. Dolzer: Dienstgütemetriken für elastischen Internetverkehr. Praxis der Informationsverarbeitung und Kommunikation (PIK), Band 25, Nr. 2, S. 82-89, 2002.
- [**Bodamer04**] S. Bodamer: Verfahren zur relativen Dienstgütedifferenzierung in IP-Netzknoten. 88. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten, Universität Stuttgart, Institut für Kommunikationsnetze und Rechnersysteme, 2004.
- [**Boehm64**] S.P. Boehm, P. Baran: Digital simulation of Hot-Potato routing in a broadband distribution communications network. Rand Corp., Memorandum RM-3103-PR, 1964.
- [**Bolch89**] G. Bolch: Leistungsbewertung von Rechensystemen mittels analytischer Warteschlangenmodelle. B.G. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [**Bolla97**] R. Bolla, F. Davoli, M. Marchese: A simple model for cell loss probability evaluation in an ATM multiplexer. Proc. IFIP TC6 WG6.3/WG6.4 Int. Workshop on ATM Networks, Performance Modelling and Analysis, Vol. 3, pp. 383-401, 1997.
- [**Borst93**] S.C. Borst: A polling system with a dormant server. Report BS-R9313, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, The Netherlands, 1993.
- [**Borst95**] S.C. Borst, O.J. Boxma, H. Levy: The use of service limits for efficient operation of multistation single-medium communication systems. IEEE/ACM Transactions on Networking, Vol. 3, No. 5, pp. 602-612, 1995.
- [**Bose02**] S.K. Bose: An introduction to queueing systems. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002.
- [**Boxma88**] O.J. Boxma, W.P. Groenendijk: Waiting times in discrete-time cyclic-service systems. IEEE Transactions on Communications, Vol. 36, No. 2, pp. 164-170, 1988.
- [**Boxma90**] O.J. Boxma, W.P. Groenendijk, J.A. Weststrate: A pseudoconservation law for service systems with a polling table. IEEE Transactions on Communications, Vol. 38, No. 10, pp. 1865-1870, 1990.
- [**Boyer93**] J. Boyer, A. Dupuis, F. Guillemin: Burstiness and resource management in ATM networks. Internat. Journal on Analog and Digital Communication Systems, Vol. 6, pp. 173-181, 1993.
- [**Braden97**] B. Braden et al.: Resource ReSerVation Protocol (RSVP) -- Version 1: Functional Specification. RFC 2205, IETF, Sep. 1997.
- [**Braden98**] B. Braden et al.: Recommendations on queue management and congestion avoidance in the Internet. RFC 2309, IETF, April 1998.
- [**Brázio06**] J. Brázio, P. Tran-Gia, N. Akar, A. Beben, W. Burakowski, M. Fiedler, E. Karasan, M. Menth, P. Olivier, K. Tutschku, S. Wittevrongel (Eds.): Analysis and design of advanced multiservice networks supporting mobility, multimedia, and internetworking. COST Action 279 Final Report, Springer, 2006.
- [**Bricklin03**] D. Bricklin: Why we don't need QoS: trains, cars, and Internet quality of service. <http://www.bricklin.com>, Aug. 2003.
- [**Bruneel93**] H. Bruneel, B.G. Kim: Discrete-time models for communication systems including ATM. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.
- [**Bunday91**] B.D. Bunday: Analysis of the SCAN service polling model. Acta Cybernetica, Vol. 10, No. 1-2, pp. 1-13, 1991.

- [**Burgstahler03**] L. Burgstahler et al.: Beyond technology: The missing pieces for QoS success. Proc. ACM SIGCOMM RIPQoS Workshop, 2003.
- [**Burgstahler09**] L. Burgstahler: Bewertung von Mess- und Abschätzverfahren zur Unterstützung dienstgüteorientierter Verkehrslenkung in verbindungslosen Datennetzen. 100. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten, Universität Stuttgart, Institut für Kommunikationsnetze und Rechnersysteme, 2009.
- [**Chandra03**] K. Chandra: Statistical multiplexing. In J.G. Proakis (Ed.), The Wiley Encyclopedia of Telecommunications, EOT 280, J. Wiley & Sons, 2003.
- [**Chaney97**] T. Chaney, J.A. Fingerhut, M. Flucke, J.S. Turner: Design of a gigabit ATM switch. Proceedings IEEE INFOCOM '97, Vol. 1, pp. 2-11, 1997.
- [**Chao01**] H.J. Chao, B. Liu: High performance switches and routers. J. Wiley & Sons, 2001.
- [**Chaudhry97**] M.L. Chaudhry, U.C. Gupta: Queue-length and waiting-time distributions of discrete-time  $GI^X/Geom/1$  queueing systems with early and late arrivals. Queueing Systems, Vol. 25, pp. 307-324, 1997.
- [**Chaudhry98**] M.L. Chaudhry, U.C. Gupta: Performance analysis of discrete-time finite-buffer batch-arrival  $GI^X/Geom/1/N$  queues. Discrete Event Dynamic Systems, Vol. 8, No. 1, pp. 55-70, 1998.
- [**Chaudhry03**] M.L. Chaudhry, U.C. Gupta: Queue length distribution at various epochs in discrete-time D-MAP/G/1/N queue and their numerical evaluations. Information and Management Sciences, Vol. 14, No. 3, pp. 67-83, 2003.
- [**Choudhury96**] G.L. Choudhury, W. Whitt: Computing distributions and moments in polling models by numerical transform inversion. Performance Evaluation, Vol. 25, pp. 267-292, 1996.
- [**Chen98**] S. Chen, K. Nahrstedt: An overview of quality of service routing for next-generation high-speed networks: problems and solutions. IEEE Network, Vol. 12, No. 6, pp. 64-79, 1998.
- [**Chiang02**] S.-Y. Chiang: Performance analysis of ATM multiplexer with Bernoulli traffic sources. Mathematical Problems in Engineering, Vol. 8, No. 6, pp. 541-552, 2002.
- [**Chiussi03**] F.M. Chiussi, A. Francini: Scalable electronic packet switches. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 21, No. 4, pp. 486-500, 2003.
- [**Choi98**] W.-Y. Choi, C.-H. Jun, J.J. Suh: An exact queueing analysis for an ATM multiplexer with mixed correlated and uncorrelated traffic sources. IEICE Transactions on Communications, Vol. E81-B, No. 5, pp. 929-936, 1998.
- [**Christl97**] M. Christl: Polling-Systeme in diskreter Zeit. Diplomarbeit am Institut für Mathematik der Universität Augsburg, 1997.
- [**Clare83**] L.P. Clare, I. Rubin. Queueing analysis of TDMA with limited and unlimited buffer capacity. Proceedings of INFOCOM '83. pp. 229-238, 1983.
- [**Cohen69**] J. Cohen: The single server queue. North Holland, Amsterdam, 1969.
- [**Cohen87**] J.W. Cohen: A two-queue one-server model with priority for the longer queue. Queueing Systems, Vol. 2, pp. 261-283, 1987.
- [**Conway67**] R.W. Conway, W.L. Maxwell, L.W. Miller: Theory of scheduling. Addison-Wesley, Reading, MA, 1967.

- [**Cosmas94**] J.P. Cosmas et al.: A review of voice, data and video traffic models for ATM. *European Transactions on Telecommunications*, Vol. 5, No. 2, pp. 11-26, 1994.
- [**Cox65**] D.R. Cox, H.D. Miller: *The Theory of stochastic processes*. Chapman and Hall, London, 1965.
- [**Cox84**] D.R. Cox: Long-range dependence: a review. In H.A. David, H.T. David (Eds.), *Statistics: an appraisal*, Iowa State University Press, Ames, IA, pp. 55-74, 1984.
- [**Cruz95**] R.L. Cruz: Quality of service guarantees in virtual circuit switched networks. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol. 13, No. 6, pp. 1048-1056, 1995.
- [**Daduna01**] H. Daduna: Queueing networks with discrete time scale. In G. Goos, J. Hartmanis, J. van Leeuwen (Eds.), *Lecture Notes in Computer Science 2046*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [**Daniëls97**] T. Daniëls, C. Blondia: A discrete-time ATM traffic model with long range dependence characteristics. *Proc. Performance and Management of Complex Communication Networks, PMCCN*, pp. 97-110, 1997.
- [**Dattatreya05**] G.R. Dattatreya, L.N. Singh: Relationships among different models for discrete-time queues. *WSEAS Trans. Systems*, Vol. 4, pp. 1183-1190, 2005.
- [**DeHaan09**] R. de Haan, R.J. Boucherie, J.-K. van Ommeren: A polling model with an autonomous server. *Queueing Systems*, Vol. 62, pp. 279-308, 2009.
- [**DelRe93**] E. Del Re, R. Fantacci: Performance evaluation of input and output queueing techniques in ATM switching systems. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 41, No. 10, pp. 1565-1575, 1993.
- [**Dickey94**] S.R. Dickey: *Systolic combining switch designs*. PhD Thesis, Courant Institute, New York University, New York, 1994.
- [**Dittmann93**] R. Dittmann, F. Hübner: Discrete-time analysis of a cyclic service system with gated limited service. Report No. 67, University of Würzburg, Institute of Computer Science, 1993.
- [**Dor67**] N.M. Dor: Guide to the length of buffer storage required for random (Poisson) input and constant output rates. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, Vol. EC-16, No. 5, pp. 683-684, 1967.
- [**Doshi90**] B. Doshi: Single server queues with vacations. In H. Takagi (Ed.), *Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems*, Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), IFIP, pp. 217-265, 1990.
- [**DuttaRoy00**] A. Dutta-Roy: The cost of quality in Internet-style networks. *IEEE Spectrum*, Vol. 37, No. 9, pp. 57-62, 2000.
- [**Eberspächer02**] J. Eberspächer: *Netzstrukturen und Verkehrslenkung (Routing)*. In V. Jung, H.-J. Warnecke (Hrsg.), *Handbuch für die Telekommunikation*, Springer, Berlin, 2002.
- [**Eckberg79**] A.E. Eckberg: The single server queue with periodic arrival process and deterministic service times. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. COM-27, No. 3, pp. 556-562, 1979.
- [**Elmeleegy09**] K. Elmeleegy, A.L. Cox, T.S.E. Ng: Understanding and mitigating the effects of count to infinity in Ethernet networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, Vol. 17, No. 1, pp. 186-199, 2009.



- [Eisenberg94] M. Eisenberg: The polling system with a stopping server. *Queueing Systems*, Vol. 18, pp. 387-431, 1994.
- [Fabian93] O. Fabian, H. Levy: Polling system optimization through dynamic routing policies. *Proc. IEEE INFOCOM '93*, pp. 194-200, 1993.
- [Fan91] Y.H. Fan: New policy for multiqueue systems with finite queue size. *Electronics Letters*, Vol. 27, No. 16, pp. 1434-1435, 1991.
- [Feller66] W. Feller: An introduction to probability theory and its application. Vol. 2, J. Wiley & Sons, New York, 1966.
- [Fersch186] F. Fersch: Bedienungstheorie: Tendenzen und neuere Entwicklungen. *OR Spektrum*, Vol. 8, pp. 1-24, 1986.
- [Fiedler98] M. Fiedler: Erforderliche Kapazität beim Multiplexen von ATM-Verbindungen. Herbert Utz Verlag, München, 1998.
- [Fiems04] D. Fiems: Analysis of discrete-time queueing systems with vacations. PhD Thesis, Ghent University, 2004.
- [Floyd93] S. Floyd, V. Jacobson: Random early detection gateways for congestion avoidance. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, Vol. 1, No. 4, pp. 397-413, 1993.
- [Fretwell02] R. Fretwell, D. Kouvatsos: LRD and SRD traffic: review or results and open issues for the batch renewal process. *Perf. Evaluation*, Vol. 48, pp. 267-284, 2002.
- [Fuhrmann91] S.W. Fuhrmann: Second moment relationships for waiting times in queueing systems with Poisson input. *Queueing Systems*, Vol. 8, pp. 397-406, 1991.
- [Ganz88] A. Ganz, I. Chlamtac: Queueing analysis of finite buffer token networks. *Proc. ACM SIGMETRICS Conference*, pp. 30-36, 1988.
- [Ganz90] A. Ganz, I. Chlamtac: A linear solution to queueing analysis of synchronous finite buffer networks. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 38, No. 4, pp. 440-446, 1990.
- [Giacopelli91] J.N. Giacopelli, J.J. Hickey, W.S. Marcus, W.D. Sincoskie, M. Littlewood: Sunshine: a high-performance self-routing broadband switch architecture. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol. 9, No. 8, pp. 1289-1298, 1991.
- [Glasmann03] J. Glasmann: Ressourcenmanagement für Echtzeitverkehre in Intranets. Dissertation am Lehrstuhl für Kommunikationsnetze der Technischen Universität München, 2003.
- [Goke73] L.R. Goke, G.J. Lipovski: Banyan networks for partitioning multiprocessor systems. *Proc. of First Annual Symp. on Computer Architecture*, pp. 21-28, 1973.
- [Goli92] P. Goli, V. Kumar: Performance of a crosspoint buffered ATM switch fabric. *Proceedings IEEE INFOCOM '92*, pp. 426-435, 1992.
- [Gravey90] A. Gravey, J.-R. Louvion, P. Boyer: On the Geo/D/1 and Geo/D/1/n queues. *Performance Evaluation*, Vol. 11, No. 2, pp. 117-125, 1990.
- [Gravey92] A. Gravey, G. Hébuterne: Simultaneity in discrete-time single server queues with Bernoulli inputs. *Performance Evaluation*, Vol. 14, No.2, pp. 123-131, 1992.
- [Grillo90] D. Grillo: Polling mechanism models in communication systems – some application examples. In H. Takagi (Ed.), *Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems*, North-Holland, pp. 659-698, 1990.

- [**Gross74**] D. Gross, C.M. Harris: Fundamentals of queueing theory. J. Wiley & Sons, New York, 1974.
- [**Guérin99**] R. Guérin, V. Peris: Quality-of-service in packet networks: basic mechanisms and directions. *Computer Networks*, Vol. 31, pp. 169-189, 1999.
- [**Gupta07**] U.C. Gupta, S.K. Samanta, R.K. Sharma, M.L. Chaudhry: Discrete-time single-server finite buffer queues under discrete Markovian arrival process with vacations. *Performance Evaluation*, Vol. 64, pp. 1-19, 2007.
- [**Halfin83**] S. Halfin: Batch delays versus customer delays. *Bell System Technical Journal*, Vol. 62, No. 7, pp. 2011-2015, 1983.
- [**Han94**] W.Y. Han, S.J. Lee, C.M. Han, S.H. Kim: Queueing analysis for an ATM multiplexer loaded by CBR and on/off traffic sources. *Proc. Singapore International Conference on Communication Systems (ICCS)*, Vol. 2, pp. 760-764, 1994.
- [**Handley06**] M. Handley: Why the Internet only just works. *British Telecom Technology Journal*, Vol. 24, No. 3, pp. 119-129, 2006.
- [**Hanka09**] O. Hanka, C. Spleiß, G. Kunzmann, J. Eberspächer: A DHT-inspired clean-slate approach for the Next Generation Internet. *Proc. International Conference on Networks*, pp. 332-341, 2009.
- [**Hassler07**] U. Hassler: *Stochastische Integration und Zeitreihenmodellierung*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.
- [**Haßlinger95**] G. Haßlinger: A polynomial factorization approach to the discrete time GI/G/1/(N) queue size distribution. *Performance Evaluation*, Vol. 23, pp. 217-240, 1995.
- [**Haßlinger99**] G. Haßlinger, T. Klein: *Breitband-ISDN und ATM-Netze*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1999.
- [**Hébuterne96**] G. Hébuterne, A. Dupuis: Microscopic models of ATM multiplexing. *Proceedings IFIP Workshop on Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks*, pp. 55/1-55/16, 1996.
- [**Herrmann01**] C. Herrmann: The complete analysis of the discrete time finite DBMAP/G/1/N queue. *Performance Evaluation*, Vol. 42, pp. 95-121, 2001.
- [**Hillier87**] F.S. Hillier, B. Jabbari: Analysis of the fixed-assigned TDMA technique with finite buffer capacity. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-35, No. 7, pp. 724-729, 1987.
- [**Hluchyj88**] M.G. Hluchyj, M.J. Karol: Queueing in high-performance packet switching. *IEEE Journal on Selected Areas in Comm.*, Vol. 6, No. 9, pp. 1587-1597, 1988.
- [**Huang84**] A. Huang, S. Knauer: Starlite: A wideband digital switch. *Proceedings IEEE GLOBECOM '84*, pp. 121-125, 1984.
- [**Hübner90**] F. Hübner: Analysis of a finite capacity asynchronous multiplexer with periodic sources. *Technical Report Nr. 14, Lehrstuhl für verteilte Systeme, Universität Würzburg*, 1990.
- [**Hübner91**] F. Hübner: Discrete-time analysis of the output process of an ATM multiplexer with periodic input. *Technical Report Nr. 36, Lehrstuhl für verteilte Systeme, Universität Würzburg*, 1991.

- [Hui87] J.Y. Hui, E. Arthurs: A broadband packet switch for integrated transport. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 5, No. 8, pp. 1264-1273, 1987.
- [Hunter83] J.J. Hunter: Mathematical techniques of applied probability. Vol. 2, Discrete time models: techniques and applications. Academic Press, New York, 1983.
- [Hurst65] H.E. Hurst, R.P. Black, Y.M. Sinaika: Long term storage in reservoirs: an experimental study. Constable, London, 1965.
- [IEEE98] IEEE 802.5: Token ring access method and physical layer specifications, 1998.
- [IEEE01] IEEE 802.1w: Rapid reconfiguration of Spanning Tree, 2001.
- [IEEE02] IEEE 802.3: Carrier sense multiple access with collision detection (CSMA/CD) access method and physical layer specification, 2002.
- [Ishizaki99] F. Ishizaki, T. Takine: Loss probability in a finite discrete-time queue in terms of steady state distribution of an infinite queue. Queueing Systems, Vol. 31, pp. 317-326, 1999.
- [Ishizaki02] F. Ishizaki: Numerical method for discrete-time finite-buffer queues with some regenerative structure. Stochastic Models, Vol. 18, No. 1, pp. 25-39, 2002.
- [ISO02] ISO/IEC 10589: Information technology - Telecommunications and information exchange between systems - Intermediate System to Intermediate System intra-domain routing information exchange protocol for use in conjunction with the protocol for providing the connectionless-mode network service. Intern. Organization for Standardization, 2002.
- [ITG96a] ITG-Empfehlung 5.2-01: Architekturen und Verfahren der Vermittlungstechnik. Begriffswerk des ITG-Fachausschusses 5.2, VDE-Verlag, Berlin und Offenbach, Dez. 1996.
- [ITG96b] ITG-Empfehlung 5.2-02: Systeme der Vermittlungstechnik. Begriffswerk des ITG-Fachausschusses 5.2, VDE-Verlag, Berlin und Offenbach, Dez. 1996.
- [ITG97] ITG-Empfehlung 5.2-03: Begriffe der Nachrichtenverkehrstheorie. Begriffswerk des ITG-Fachausschusses 5.2, VDE-Verlag, Berlin und Offenbach, Okt. 1997.
- [ITU94] ITU-T Recommendation E.800: Quality of service and dependability vocabulary, Aug. 1994.
- [ITU96a] ITU-T Recommendation G.114: One-way transmission time. Feb. 1996.
- [ITU96b] ITU-T Recommendation I.371: Traffic control and congestion control in B-ISDN. Aug. 1996.
- [ITU97] ITU-T Recommendation I.113: Vocabulary of terms for broadband aspects of ISDN. June 1997.
- [Iyer02] S. Iyer, R. Zhang, N. McKeown: Routers with a single stage of buffering. ACM Computer Comm. Review – Proc. SIGCOMM '02, Vol. 32, No. 4, pp. 251-264, 2002.
- [Jou93] Y.F. Jou, A.A. Nilsson, F. Lai: Tractable analysis of a finite capacity polling system under bursty and correlated ATM arrivals. Proc. IEEE International Conference on Communications, pp. 340-344, 1993.
- [Jung92] W.Y. Jung, C.K. Un: Analysis of throughput and delay of a high-speed slotted ring based on lumped modeling. IEEE Transactions on Communications, Vol. 40, No. 5, pp. 860-862, 1992.

- [**Kang97**] K. Kang, B. Steyaert, C. Kim: A simple relation between loss performance and buffer contents in a statistical multiplexer with periodic vacations. *IEICE Transactions on Communications*, Vol. E80-B, No. 5, pp. 1749-1752, 1997.
- [**Karol87**] M.J. Karol, M.G. Hluchyj, S.P. Morgan: Input versus output queueing on a space-division packet switch. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-35, No. 12, pp. 1347-1356, 1987.
- [**Kawasaki00**] N. Kawasaki, H. Takagi, Y. Takahashi, S.-J. Hong, T. Hasegawa: Waiting time analysis of  $M^X/G/1$  queues with/ without vacations under random order of service discipline. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 43, No. 4, pp. 455-468, 2000.
- [**Keshav98**] S. Keshav, R. Sharma: Issues and trends in router design. *IEEE Communications Magazine*, Vol. 36, No. 5, pp. 144-151, 1998.
- [**Kim02a**] N.K. Kim, S.H. Chang, K.C. Chae: On the relationships among queue lengths at arrival, departure, and random epochs in the discrete-time queue with D-BMAP arrivals. *Operations Research Letters*, Vol. 30, pp. 25-32, 2002.
- [**Kim02b**] J. Kim, C.H. Jun: Analysis of a discrete-time queueing system with a single server and heterogeneous Markovian arrivals. *Queueing Systems*, Vol. 42, pp. 221-237, 2002.
- [**Kim04**] N.K. Kim, K.C. Chae, M.L. Chaudhry: An invariance relation and a unified method to derive stationary queue-length distributions. *Operations Research*, Vol. 52, No. 5, pp. 756-764, 2004.
- [**Kingman62**] J.F.C. Kingman: The effect of queue discipline on waiting time variance. *Proceedings Cambridge Philosophical Society*, Vol. 58, No. 1, pp. 163-164, 1962.
- [**Kingman82**] J.F.C. Kingman: Queue disciplines in heavy traffic. *Mathematics of Operations Research*, Vol. 7, No. 2, pp. 262-271, 1982.
- [**Kirstädter98**] A. Kirstädter: Verteilte Koordinierungsverfahren für ATM-Vermittlungen mit Eingangspuffern. Dissertation am Lehrstuhl für Kommunikationsnetze der Technischen Universität München, 1998.
- [**Kleinrock75**] L. Kleinrock: Queueing systems. Vol. 1, J. Wiley & Sons, New York, 1975.
- [**Kleinrock76**] L. Kleinrock: Queueing systems. Vol. 2, J. Wiley & Sons, New York, 1976.
- [**Kobayashi09**] H. Kobayashi, B.L. Mark: System modeling and analysis: Foundations of System Performance Evaluation. Pearson Education, Upper Saddle River, NJ, 2009.
- [**Koch02**] H. Koch: Internetprotokolle. In V. Jung, H.-J. Warnecke (Hrsg.), *Handbuch für die Telekommunikation*, Springer, Berlin, 2002.
- [**Kolias96**] C. Kolias, L. Kleinrock: Throughput analysis of multiple input-queueing in ATM switches. In L. Mason and A. Casaca (Eds.), *Broadband Communications*, Chapman & Hall, London, pp. 382-393, 1996.
- [**Kolias99**] C. Kolias: Analysis and performance evaluation of new architectures in high-speed packet switching. PhD Thesis, University of California, Los Angeles, 1999.
- [**Konheim74**] A.G. Konheim, B. Meister: Waiting lines and times in a system with polling. *Journal of the ACM*, Vol. 21, No. 3, pp. 470-490, 1974.

- [**Kouvatsos94**] D.D. Kouvatsos, S.G. Denazis, N.M. Tabet-Aouel: Simultaneity in discrete-time queues with compound Bernoulli inputs and AF-DF buffer management policies. Proc. 11th Teletraffic Symposium on Performance Engineering in Telecommunications Networks, pp. 29/1-29/15, 1994.
- [**Kouvatsos95**] D. Kouvatsos, R. Fretwell: Closed form performance distributions of a discrete time  $GI^G/D/1/N$  queue with correlated traffic. Proc. 6<sup>th</sup> IFIP WG6.3 Conference on Performance of Computer Networks, pp. 141-163, 1995.
- [**Kröner95**] H. Kröner: Verkehrssteuerung in ATM-Netzen: Verfahren und verkehrstheoretische Analysen zur Zellpriorisierung und Verbindungsannahme. 62. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten, Universität Stuttgart, Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, 1995.
- [**Kruskal88**] C.P. Kruskal, M. Snir, A. Weiss: The distribution of waiting times in clocked multistage interconnection networks. IEEE Transactions on Computers, Vol. 37, No. 11, pp. 1337-1352, 1988.
- [**Kühn76**] P. Kühn: Tables on delay systems. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart, 1976.
- [**Kühn79**] P.J. Kühn: Multiqueue systems with nonexhaustive cyclic service. Bell System Technical Journal, Vol. 58, No. 3, pp. 671-678, 1979.
- [**Kühn96**] P.J. Kühn: Reminder on queueing theory for ATM networks. Telecommunication Systems, Vol. 5, No. 1-3, pp. 1-24, 1996.
- [**Kumar 98**] V.P. Kumar, T.V. Lakshman, D. Stiliadis: Beyond best effort: router architectures for the differentiated services of tomorrow's Internet. IEEE Communications Magazine, Vol. 36, No. 5, pp. 152-164, 1998.
- [**Laevens95**] K. Laevens, H. Bruneel: Delay analysis for ATM queues with random order of service. Electronics Letters, Vol. 31, No. 5, pp. 346-347, 1995.
- [**Laevens98**] K. Laevens, H. Bruneel: Discrete-time multiserver queues with priorities. Performance Evaluation, Vol. 33, No. 4, pp. 249-275, 1998.
- [**Laface05**] P. Laface, D. Carra, R. Lo Cigno: A performance model for multimedia service provisioning on network interfaces. Proc. QoS-IP '05, pp. 286-299, 2005.
- [**Langer91**] K.-D. Langer: Konzept eines Koppелеlements für die hochratige ATM-Vermittlung. Tagungsband ITG/ GI Workshop Verbindungsnetzwerke für Parallelrechner und Breitband-Übermittlungssysteme, S. 42-47, 1991.
- [**Langer03**] K.-D. Langer: Departure batch-size distribution of unbuffered crossbar packet switches. AEÜ International Journal of Electronics and Communications, Vol. 57, No. 5, pp. 351-354, 2003.
- [**Langer05**] K.-D. Langer: Closed-form solutions for key performance measures of packet multiplexers with finite capacity queue. AEÜ International Journal of Electronics and Communications, Vol. 59, No. 1, pp. 37-47, 2005.
- [**LeBoudec01**] J.-Y. Le Boudec, P. Thiran: A theory of deterministic queuing systems for the Internet. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2050, Springer-Verlag, 2001.
- [**Lee92**] W.-S.R. Lee: Performance analysis of slotted rings with finite buffers. IEE Proceedings-E, Vol. 139, No. 3, pp. 215-220, 1992.

- [Lee96] T.Y.S. Lee, J. Sunjaya: Exact analysis of asymmetric random polling systems with single buffers and correlated input process. *Queueing Systems*, Vol. 23, pp. 131-156, 1996.
- [Lee97] H. Lee, Y. Nemoto: Loss periods in ATM output multiplexer. *IEE Proceedings Communications*, Vol. 144, No. 5, pp. 301-306, 1997.
- [Leland94] W. Leland, M.S. Taqqu, W. Willinger, D.V. Wilson: On the self-similar nature of Ethernet traffic. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, Vol. 2, No. 1, pp. 1-15, 1994.
- [Levy90] H. Levy, M. Sidi: Polling Systems: Applications, modeling, and optimization. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 38, No. 10, pp. 1750-1760, 1990.
- [Lin05] M. Lin, N. McKeown: The throughput of a buffered crossbar switch. *IEEE Communications Letters*, Vol. 9, No. 5, pp. 465-467, 2005.
- [Linwong04] P. Linwong, N. Kato, Y. Nemoto: A polynomial factorization approach for the discrete time  $GI^X/G/1/K$  queue. *Methodology and Computing in Applied Probability*, Vol. 6, No. 3, pp. 277-291, 2004.
- [Lucantoni91] D.M. Lucantoni: New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process. *Comm. Statist. Stochastic Models*, Vol. 7, No. 1, pp. 1-46, 1991.
- [Lucantoni93] D.M. Lucantoni: The BMAP/G/1 queue: A tutorial. In L. Donatiello, R. Nelson (Eds.), *Models and techniques for performance evaluation of computer and communications systems*, Springer, New York, pp. 330-358, 1993.
- [Mack57] C. Mack, T. Murphy and N.L. Webb: The efficiency of N machines uni-directionally patrolled by one operative when walking time and repair times are constants. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, Vol. 19, No. 1, pp. 166-172, 1957.
- [Mandelbrot68] B.B. Mandelbrot, J.W. van Ness: Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, Vol. 10, No. 4, pp. 422-437, 1968.
- [Manner10] J. Manner, G. Karagiannis, A. McDonald: NSIS Signaling Layer Protocol (NSLP) for Quality-of-Service signaling. RFC 5974, IETF, Oct. 2010.
- [McKeown95] N. McKeown: Scheduling algorithms for input-queued cell switches. PhD Thesis, University of California, Berkeley, 1995.
- [McKeown97] N. McKeown, M. Izzard, A. Mekkittikul, W. Ellersick, M. Horowitz: The Tiny Tera: a packet switch core. *IEEE Micro*, Vol. 17, No. 1, pp. 26-33, 1997.
- [Meddeb10] A. Meddeb: Internet QoS: Pieces of the puzzle. *IEEE Communications Magazine*, Vol. 48, No. 1, pp. 86-94, 2010.
- [Meisling58] T. Meisling: Discrete-time queuing theory. *Operations Research*, Vol. 6, No. 1, pp. 96-105, 1958.
- [Menth04] M. Menth: A numerical framework for solving discrete and finite Markov models. Report No. 326, Inst. of Computer Science, University of Würzburg, 2004.
- [Menth08] M. Menth, M. Hartmann, P. Tran-Gia, D. Klein: Future Internet routing: motivation and design issues. *Information Technology*, Vol. 15, No. 6, pp. 358-366, 2008.
- [Meyer00] C.D. Meyer: Matrix analysis and applied linear algebra. SIAM, Philadelphia, 2000.

- [**Michiel97**] H. Michiel, K. Laevens: Teletraffic engineering in a broad-band era. Proceedings of the IEEE, Vol. 85, No. 12, pp. 2007-2033, 1997.
- [**Mieghem06**] P. van Mieghem: Performance analysis of communications networks and systems. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [**Mignault96**] J. Mignault, A. Gravey, C. Rosenberg: A survey of straightforward statistical multiplexing models for ATM networks. Telecommunication Systems, Vol. 5, No. 1, pp. 177-208, 1996.
- [**Minkenberg00**] C. Minkenberg, T. Engbersen: A combined input and output queued packet-switched system based on PRIZMA switch-on-a-chip technology. IEEE Communications Magazine, Vol. 38, No. 12, pp. 70-77, 2000.
- [**Miyoshi02**] N. Miyoshi, F. Ishizaki: A unified approach to the proportional relation for discrete-time single-server queues. Queueing Systems, Vol. 42, No. 2, pp. 201-212, 2002.
- [**Moltchanov03**] D. Moltchanov, Y. Koucheryavy, J. Harju: Superposed and per-process analysis in  $\Sigma$ D-BMAP/D/1/K queueing system. Proc. HET-NET '03, pp. 42/1-42/11, 2003.
- [**Neuts79**] M.F. Neuts: A versatile Markovian point process. Journal of Applied Probability, Vol. 16, No. 4, pp. 764-779, 1979.
- [**Neuts84**] M.F. Neuts: Matrix-analytic methods in queueing theory. European Journal of Operational Research, Vol. 15, pp. 2-12, 1984.
- [**Neuts05**] M.F. Neuts, J. Guo, M. Zukerman, H.L. Vu: The waiting time distribution for a TDMA model with a finite buffer and state-dependent service. IEEE Transactions on Communications, Vol. 53, No. 9, pp. 1522-1533, 2005.
- [**Ng99**] C.H. Ng et al.: Cell loss probability of a finite ATM buffer queue. IEE Proceedings Communications, Vol. 146, No. 1, pp. 9-14, 1999.
- [**Nojima87**] S. Nojima, E. Tsutsui, H. Fukuda, M. Hashimoto: Integrated services packet network using bus matrix switch. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 5, No. 8, pp. 1284-1292, 1987.
- [**Norros91**] I. Norros, J.W. Roberts, A. Simonian J.T. Virtamo: The superposition of variable bit rate sources in an ATM multiplexer. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 9, No. 3, pp. 378-387, 1991.
- [**Oki00**] E. Oki, N. Yamanaka, M. Nabeshima: Performance of scalable-distributed-arbitration ATM switch supporting multiple QoS classes. IEICE Transactions on Communications, Vol. E83-B, No. 2, pp. 204-213, 2000.
- [**Pan06**] H. Pan, Z.-W. Sun: New identities involving Bernoulli and Euler polynomials. Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol. 113, No. 1, pp. 156-175, 2006.
- [**Patel81**] J.H. Patel: Performance of processor-memory interconnections for multiprocessors. IEEE Transactions on Computers, Vol. c-30, No. 10, pp. 771-780, 1981.
- [**Paxson95**] V. Paxson, S. Floyd: Wide area traffic: the failure of Poisson modeling. IEEE/ACM Transactions on Networking, Vol. 3, No. 3, pp. 226-244, 1995.
- [**Petersen93**] J. Petersen, T. Gillen: Multiplexers  $\Sigma$ D/D/1 with service in cyclic order and service in the order of arrival. European Transactions on Telecommunications, Vol. 4, No. 4, pp. 455-463, 1993.

- [**Petersen97**] J. Petersen, C. Zang: Busy periods in the output of a time-discrete queueing system NGeo/D/1. *AEÜ International Journal of Electronics and Communications*, Vol. 51, No. 5, pp. 263-266, 1997.
- [**Priese03**] L. Priese, H. Wimmel: *Petri-Netze*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [**Pólya25**] G. Pólya, G. Szegő: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Band 1: Reihen, Integralrechnung, Funktionentheorie. Springer, Berlin, 1925.
- [**Radusinovic02**] I. Radusinovic, M. Pejanovic, Z. Petrovic: An efficient model for performance analysis of the dual Banyan switch under uniform and non-uniform traffics. *IEICE Transactions on Communications*, Vol. E85-B, No. 7, pp. 1410-1414, 2002.
- [**Ramaswami80**] The N/G/1 queue and its detailed analysis. *Advances in Applied Probability*, Vol. 12, No. 1, pp. 222-261, 1980.
- [**Rathgeb97**] E. Rathgeb, E. Wallmeier: *ATM – Infrastruktur für die Hochleistungskommunikation*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [**Rego88**] V. Rego, L.M. Ni: Analytic models of cyclic service systems and their application to Token-Passing local networks. *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 37, No. 10, pp. 1224-1234, 1988.
- [**Reiser80**] M. Reiser, S.S. Lavenberg: Mean value analysis of closed multichain queueing networks. *Journal of the ACM*, Vol. 27, No. 2, pp. 313-322, 1980.
- [**Richter97**] H. Richter: *Verbindungsnetzwerke für parallele und verteilte Systeme*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1997.
- [**Riordan68**] J. Riordan: *Combinatorial identities*. J. Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1968.
- [**Roberts91a**] J.W. Roberts, J.T. Virtamo: The superposition of periodic cell arrival streams in an ATM multiplexer. *IEEE Trans. on Comm.*, Vol. 39, No. 2, pp. 298-303, 1991.
- [**Roberts91b**] J.W. Roberts: Variable-bit-rate traffic control in B-ISDN. *IEEE Communications Magazine*, Vol. 29, No. 9, pp. 50-56, 1991.
- [**Roberts96**] J. Roberts, U. Mocci, J. Virtamo (Eds.): *Broadband network teletraffic; final report of action COST 242*. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 1155, Springer, Berlin, Heidelberg, 1996.
- [**Robertazzi00**] T.G. Robertazzi: *Computer networks and systems: Queueing theory and performance evaluation*. 3<sup>rd</sup> Ed., Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 2000.
- [**Rubin91**] I. Rubin, Z. Zhang: Message delay and queue-size analysis for circuit-switched TDMA systems. *IEEE Trans. on Communications*, Vol. 39, No. 6, pp. 905-914, 1991.
- [**Rudin71**] H. Rudin: Performance of simple multiplexer-concentrators for data communication. *IEEE Trans. Commun. Technology*, Vol. COM-19, No. 2, pp. 178-187, 1971.
- [**Samanta07**] S.K. Samanta, U.C. Gupta, R.K. Sharma: Analyzing discrete-time D-BMAP/G/1/N queue with single and multiple vacations. *European Journal of Operational Research*, Vol. 182, pp. 321-339, 2007.
- [**Schmookler70**] M.S. Schmookler: Limited capacity discrete time queues with single or bulk arrival. *IBM Technical Report TR 00.2048*, 1970.
- [**Schott02**] R. Schott: Qualitätsdifferenzierte Dienste in IP-Netzen. In V. Jung, H.-J. Warnecke (Hrsg.), *Handbuch für die Telekommunikation*, Springer, Berlin, 2002.



- [Schulzrinne91] H. Schulzrinne, J.F. Kurose: Distribution of the loss period for some queues in continuous and discrete time. Proc. IEEE INFOCOM '91, pp. 1446-1455, 1991.
- [Schulzrinne92] H. Schulzrinne, J.F. Kurose, D.F. Towsley: Loss correlation for queues with single and multiple input streams. Technical Report UM-CS-1992-053, University of Massachusetts, 1992.
- [Shikata98] Y. Shikata, Y. Takahashi: Waiting-time distribution for a finite-capacity single server queue with constant service and vacation times. IEICE Transactions on Communications, Vol. E81-B, No. 11, pp. 2141-2146, 1998.
- [Simonot95] F. Simonot, Y.Q. Song, J.P. Thomesse: Message sojourn time for TDM schemes with any buffer capacity. IEEE Transactions on Communications, Vol. 43, No. 2-4, pp. 1013-1021, 1995.
- [Späth02] J. Späth: Entwurf und Bewertung von Verfahren zur Verkehrslenkung in WDM-Netzen. 82. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten, Universität Stuttgart, Institut für Kommunikationsnetze und Rechnersysteme, 2002.
- [Stavrakakis97] I. Stavrakakis and S. Tsakiridou: Study of a class of partially ordered service strategies for a system of two discrete-time queues. Performance Evaluation Journal, Vol. 29, pp. 15-33, 1997.
- [Suri07] P.K. Suri, K.D. Sharma, B. Kumar: Artificial traffic generation for a multi service network. International Journal of Computer Science and Network Security, Vol. 7, No. 4, pp. 250-254, 2007.
- [Syski60] R. Syski: Congestion theory in telephone systems. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1960.
- [Takagi87] H. Takagi: Analysis of polling systems. MIT Press, Cambridge, MA, 1986.
- [Takagi90] H. Takagi: Queueing analysis of polling models: an update. In H. Takagi (Ed.), Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems, Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland), IFIP, pp. 267-318, 1990.
- [Takagi91] H. Takagi: Queueing analysis, a foundation of performance evaluation, Vol. 1: Vacation and priority systems. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1991.
- [Takagi93] H. Takagi: Queueing analysis, a foundation of performance evaluation, Vol. 3: Discrete-time systems. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1993.
- [Takagi95] H. Takagi: Analysis of single-buffer polling models for time-slotted communication protocols. In T. Hasegawa, G. Pujolle, H. Takagi and Y. Takahashi (Eds.), Local and Metropolitan Communication Systems - LAN & MAN, Chapman and Hall, pp. 393-403, 1995.
- [Takagi97] H. Takagi: Queueing analysis of polling models: progress in 1990-1994. In J.H. Dshalalow (Ed.), Frontiers in Queueing, CRC Press, Boca Raton, pp. 119-146, 1997.
- [Takagi00] H. Takagi: Analysis and application of polling models. In G. Haring et al. (Eds.), Performance Evaluation, LNCS 1769, Springer, Berlin, pp. 423-442, 2000.
- [Takine88] T. Takine, Y. Takahashi, T. Hasegawa: Exact analysis of asymmetric polling systems with single buffers. IEEE Transactions on Communications, Vol. 36, No. 10, pp. 1119-1127, 1988.

- [**Takine95**] T. Takine, T. Suda, T. Hasegawa: Cell loss and output process analyses of a finite-buffer discrete-time ATM queueing system with correlated arrivals. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 43, No. 2/3/4, pp. 1022-1037, 1995.
- [**Tanenbaum98**] A.S. Tanenbaum: *Computer-Netzwerke*. Prentice Hall, München, London, Mexiko, New York, Singapur, Sydney, Toronto, 1998.
- [**TranGia88a**] P. Tran-Gia, T. Raith: Performance analysis of finite capacity polling systems with nonexhaustive service. *Performance Evaluation*, Vol. 9, No. 1, pp. 1-16, 1988.
- [**TranGia88b**] P. Tran-Gia, H. Ahmadi: Analysis of a discrete-time  $G^{[X]}/D/1-S$  queueing system with applications in packet-switching systems. *Proceedings IEEE INFOCOM '88*, pp. 861-870, 1988.
- [**TranGia92**] P. Tran-Gia: Analysis of polling systems with general input process and finite capacity. *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 40, No. 2, pp. 337-344, 1992.
- [**TranGia00**] P. Tran-Gia, N. Vicari (Eds.): *Impacts of new services on the architecture and performance of broadband networks*. COST-257 Final Report, 2000.
- [**TranGia05**] P. Tran-Gia: *Einführung in die Leistungsbewertung und Verkehrstheorie*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2005.
- [**Turner98**] J. Turner, N. Yamanaka: Architectural choices in large scale ATM switches. *IEICE Transactions on Communications*, Vol. E81-B, No. 2, pp. 120-137, 1998.
- [**Ulrich98**] R. Ulrich, U. Herzog, P. Kritzing: Modelling buffer utilisation in cell-based networks. *Performance Evaluation*, Vol. 31, No. 3-4, pp. 183-199, 1998.
- [**Vinck95**] B. Vinck, H. Bruneel: Relationship between delay and buffer contents in ATM queues. *Electronics Letters*, Vol. 31, No. 12, pp. 952-954, 1995.
- [**Viertl03**] R. Viertl: *Einführung in die Stochastik – mit Elementen der Bayes-Statistik und der Analyse unscharfer Information*. Springer, Wien, 2003.
- [**Vishnevskii06**] V.M. Vishnevskii, O.V. Semenova: Mathematical methods to study the polling systems. *Automation and Remote Control*, Vol. 67, No. 2, pp. 173-220, 2006.
- [**Welch83**] P.D. Welch: The statistical analysis of simulation results. In S.S. Lavenberg (Ed.), *Computer performance modeling handbook*, Academic Press, New York, pp. 267-329, 1983.
- [**Widjaja94**] I. Widjaja, A. Leon-Garcia: The Helical switch: a multipath ATM switch which preserves cell sequence. *IEEE Trans. on Comm.*, Vol. 42, No. 8, pp. 2618-2629, 1994.
- [**Winands09**] E.M.M. Winands, L.J.B.F. Adan, G.J.J.A.N. van Houtum, D.G. Down: A state-dependent polling model with  $k$ -limited service. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, Vol. 23, No. 2, pp. 385-408, 2009.
- [**Wittevrongel96**] S. Wittevrongel, H. Bruneel: Exact calculation of buffer contents variance and delay jitter in a discrete-time queue with correlated input traffic. *Electronics Letters*, Vol. 32, No. 14, pp. 1258-1259, 1996.
- [**Wolf01**] T. Wolf, J.S. Turner: Design issues for high performance active routers. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol. 19, No. 3, pp. 404-409, 2001.
- [**Woodward93**] M.E. Woodward: *Communication and computer networks*. J. Wiley & Sons, Canada, 1993.

- [Yeh87] Y.S. Yeh, M.G. Hluchyj, A.S. Acampora: The Knockout switch: a simple, modular architecture for high performance packet switching. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. 5, No. 8, pp. 1274-1283, 1987.
- [Zhang92] Z. Zhang: Finite buffer discrete-time queues with multiple Markovian arrivals and services in ATM networks. Proc. IEEE INFOCOM '92, pp. 2026-2035, 1992.
- [Zhang95] H. Zhang: Service disciplines for guaranteed performance service in packet-switching networks. Proceedings of the IEEE, Vol. 83, No. 10, pp. 1374-1396, 1995.
- [Zegura93] E.W. Zegura: Architectures for ATM switching systems. IEEE Communications Magazine, Vol. 31, No. 2, pp. 28-37, 1993.
- [Zhou97] B. Zhou, M. Atiquzzaman: Performance of ATM switch fabric using cross-point buffers. Computer Communications, Vol. 20, No. 13, pp. 1146-1159, 1997.
- [Zhou02] B. Zhou, M. Atiquzzaman: A performance comparison of four buffering schemes for multistage interconnection networks. International Journal of Parallel and Distributed Systems and Networks, Vol. 5, No. 1, pp. 17-25, 2002.



## Danksagung

Danken möchte ich an erster Stelle meiner Gattin Evelyn Lydia, ohne deren Zutun diese Arbeit ganz sicher nicht fertiggestellt worden wäre. Mit unendlicher Geduld, ständiger Gesprächsbereitschaft in vielen Belangen dieser Arbeit, den nützlichen Diskussionen und wertvollen Ratschlägen, sowie ihren aufmunternden Espressi an unzähligen langen Abenden und Wochenenden hat Sie maßgeblich zum Gelingen beigetragen.

Außerordentlich dankbar bin ich Herrn Professor P.J. Kühn für seine fachliche Betreuung und Beratung sowie für sein beständiges, umfassendes Engagement, das nicht vorbildlicher hätte sein können. Die Diskussionen mit ihm, seine Fragen und Anregungen waren für die inhaltliche Schwerpunktsetzung dieser Arbeit äußerst wertvoll. Dank gebührt auch Herrn Professor A. Wolisz sowie Herrn Professor A. Kirstädter für die Übernahme der Mitberichte und die damit verbundenen Mühen.

Von unschätzbarem Wert war die tägliche Zusammenarbeit völlig anderen Inhalts mit Frau Dr. J. Vučić, die dank ihrer hervorragenden Fähigkeiten und ihres Naturells neben dem Tagesgeschäft im Fraunhofer Heinrich-Hertz-Institut auch Zeit fand für fachliche Diskussionen und ermutigende Gespräche diese Arbeit betreffend.

Großen Dank schulde ich ferner Herrn I. Wiezorrek, der mich zuverlässig mit der notwendigen und manchmal schwierig zu beschaffenden Fachliteratur versorgte – mitunter von einem Tag auf den anderen. Ein weiteres Anliegen ist mir die Würdigung von Herrn Regierungsdirektor a.D. K. Schütz. Noch lange nach meiner Tätigkeit im Referat für informationstechnische Basistechnologien des Bundesministeriums für Bildung und Forschung motivierte er mich sehr mit seinem beständigen Interesse an dieser Arbeit.

Schließlich sei den vielen ungenannten Kollegen im Heinrich-Hertz-Institut und andernorts gedankt, von denen ich auf verschiedenste Weise Unterstützung erfahren habe. Mein Dank gilt auch all jenen Freunden, Bekannten und Verwandten, die im privaten Umfeld notwendige Voraussetzungen für eine solche Arbeit geschaffen haben, und die mir Verständnis für die oft eingeschränkte Kontaktpflege entgegenbrachten.