Ein Vorschlag zur Berechnung der Vertrauensintervalle bei Verkehrstests

von Karl Kümmerle*

Mitteilung aus dem Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart

(A.E.Ü. 23 [1969], Heft 10, 507–511; eingegangen am 12. Mai 1969)

DK 621.391:621.395.31:654.021

In der Fernsprechverkehrstheorie werden zur Prüfung der Genauigkeit von Näherungslösungen Simulationen mit künstlichem Verkehr durchgeführt. Die statistische Auswertung erfolgte bisher in der Regel mit Hilfe des Student- oder t-Tests und lieferte ein Vertrauensintervall für die gesuchte Größe, beispielsweise für die Verlustwahrscheinlichkeit. Bei dieser Art der Auswertung wird zwar berücksichtigt, daß die Stichprobenwerte der Verlustwahrscheinlichkeit von Teilauswertung zu Teilauswertung schwanken; es wird jedoch vernachlässigt, daß auch das (mit Pseudozufallszahlen erzeugte) Verkehrsangebot in den einzelnen Teilabschnitten der Simulation schwankt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren zur Berechnung des Vertrauensintervalls für die Verlustwahrscheinlichkeit vorgeschlagen, das auch die Schwankungen des Angebots berücksichtigt. Dabei wird sich herausstellen, daß die Vertrauensintervalle im allgemeinen enger werden.

A Proposal for Calculating the Confidence Limits in Traffic Tests

To check the accuracy of approximate methods for calculating switching arrangements simulations with artificial traffic are used. Up to now the statistical evaluation has been effected by means of the Student or t-test and yielded confidence limits for the unknown quantity, for instance for the probability of loss. However, it was not taken into account that not only the random sample values of loss vary, but also those of traffic offered.

In this paper a method for calculating confidence limits for the probability of loss is proposed which also takes into account the variation of the traffic offered. Generally the results show a decrease of the confidence limits.

1. Einleitung

In der Verkehrstheorie werden zur Prüfung der Genauigkeit von Näherungslösungen Simulationen mit künstlichem Verkehr durchgeführt. Ein Simulationslauf — kurz Test genannt — ist so aufgebaut, daß z.B. zehnmal nacheinander je 10000 Anrufe eintreffen und nach jeweils 10000 Anrufen die „interessierenden Größen" wie Verlustwahrscheinlichkeit, Streuwert, mittlere Wartedauer usw. festgestellt werden. Man sagt, der Test besteht aus 10 Teiltests zu je 10000 Anrufen. Die je Teiltest ermittelten Werte einer Größe weichen infolge statistischer Schwankungen voneinander ab. Das Ziel ist nun, aus diesen Werten eine statistische Aussage über die „interessierende Größe" zu gewinnen.

In der Sprache der mathematischen Statistik heißt dies: Einer Grundgesamtheit wird eine Stichprobe vom Umfang n entnommen (beispielsweise $n = 10$ Teiltests), um über ein Merkmal dieser Grundgesamtheit eine statistische Aussage zu erhalten.

2. Bezeichnungen

Mit großen Buchstaben werden Zufallsvariable bezeichnet: Z.

$E[Z] = \mu$ sei der Erwartungswert von Z.

$D^2[Z] = \sigma^2$ sei die Varianz von Z.

Mit den entsprechenden kleinen Buchstaben (z) werden bestimmte Werte bezeichnet, welche die Zufallsvariable angenommen hat, z.B. der Verlust je Teiltest. Man nennt diese Werte „Realisationen" von Z.

Der Stichprobenumfang, d.h. die Anzahl der Teiltests, wird mit n bezeichnet.

Alle übrigen Bezeichnungen und Abkürzungen werden an den entsprechenden Stellen eingeführt und erläutert.

3. Ergebnisse der Teiltests

Hier werden die Ergebnisse je Teiltest aus einem Simulationslauf mitgeteilt. Daran soll gezeigt werden, daß durch Verwendung von Informationen, die im Student-Test nicht berücksichtigt sind, eine genauere statistische Aussage möglich ist.

Es sollte die Verlustwahrscheinlichkeit eines unvollkommenen Bündels bei einem Verkehrsangebot von $A = 70{,}2$ Erl ermittelt werden. Bild 1 zeigt die Schwankung des Verlustes von Teiltest zu Teiltest (ausgezogene Linie). Außerdem ist zu erkennen, daß nicht genau das vorgegebene Angebot von $A = 70{,}2$ Erl wirksam war, sondern daß das tatsächlich wirksame Angebot — bedingt durch die Art seiner Erzeugung mit Pseudozufallszahlen — von Teiltest zu Teiltest um den vorgegebenen Wert schwankte (gestrichelte Linie). Weiterhin ist deutlich eine Korrelation zwischen Verlust und Angebot zu sehen; den Schwankungen der Angebotswerte entsprechen die Schwankungen der Verlustwerte.

* Dipl.-Ing. K. Kümmerle, im Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität, 7 Stuttgart 1, Breitscheidstraße 2.

TV 2

Auf Grund der gemessenen Teiltestergebnisse soll mit Hilfe eines statistischen Verfahrens ein Vertrauensintervall für die unbekannte Verlustwahrscheinlichkeit berechnet werden, d.h. es soll ein Intervall angegeben werden, das die unbekannte Größe mit einer gewissen vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überdeckt. Der bisher angewandte STUDENT-Test verwendet dazu lediglich die *Verlustwerte* je Teiltest und läßt das *Angebot* ganz außer acht. Bei dem im Abschnitt 5 vorgeschlagenen Verfahren wird dagegen die zusätzliche Information ausgenützt, die durch die Korrelation zwischen Angebot und Verlustwahrscheinlichkeit gegeben ist.

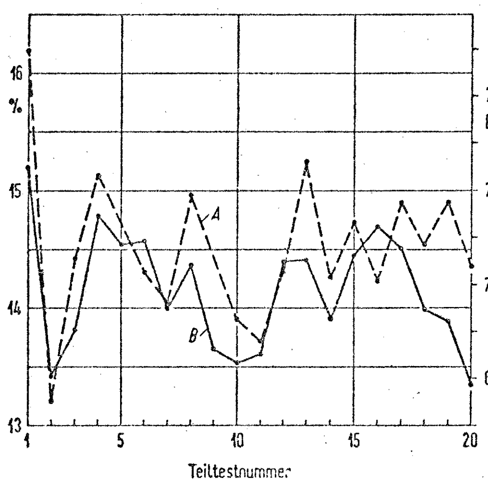

Bild 1. Teiltestergebnisse.

4. Student-Test

In diesem Abschnitt werden die Grundzüge des STUDENT- oder t-Tests erläutert; er wurde von GOSSET [3] unter dem Pseudonym STUDENT entwickelt. Dabei werden die in der mathematischen Statistik üblichen Symbole verwendet; auf ihre verkehrstheoretische Bedeutung wird hingewiesen.

Die Grundgesamtheit sei nach $N(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt. Wir nehmen also an, die Verteilung der einzelnen Meßergebnisse folge einer Gaußschen Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2.

Dieser Grundgesamtheit entnehmen wir eine Stichprobe vom Umfang n, d.h. wir stellen n-mal nacheinander Werte der interessierenden Größe fest. Auf Grund der Stichprobe soll eine Aussage über den unbekannten Erwartungswert μ gemacht werden, wenn auch die Varianz σ^2 unbekannt ist. Die Größe μ kann beispielsweise die Verlustwahrscheinlichkeit, den Streuwert oder eine mittlere Wartezeit bedeuten.

Zu dieser Untersuchung ziehen wir n Stichprobenvariable X_i heran — nämlich zur Beschreibung eines jeden Teiltests eine —, welche dieselbe $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung wie die Grundgesamtheit haben und voneinander unabhängig sind. Die je Teiltest gemessenen Werte x_i sind jetzt als Realisationen der Zufallsvariablen X_i zu betrachten, wobei die x_i beispielsweise gemessene Verlustwerte bedeuten.

Aus den Stichprobenvariablen X_i bilden wir zunächst die Schätzfunktion für den Erwartungswert

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1}$$

und die Schätzfunktion für die Varianz σ^2

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 . \tag{2}$$

Aus $\bar{X}$ und S^2 wird nach GOSSET [3] die neue Zufallsvariable

$$T_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \tag{3}$$

gebildet. Es kann gezeigt werden, daß die Zufallsvariable T_{n-1} einer t-Verteilung mit $n - 1$ Freiheitsgraden genügt. Ihre Wahrscheinlichkeitsdichte wird üblicherweise mit h_{n-1} bezeichnet.

Wesentlich ist, daß T_{n-1} nicht die unbekannte Varianz σ^2 enthält, sondern nur den unbekannten Erwartungswert μ, für den ein Vertrauensintervall ermittelt werden soll, sowie die beiden Schätzfunktionen $\bar{X}$ und S und den Stichprobenumfang n.

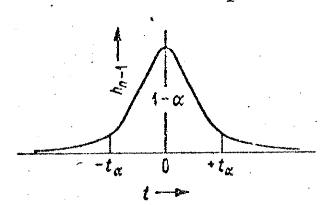

Bild 2. Dichte h_{n-1} einer t-verteilten Zufallsvariablen.

Zur Ermittlung eines Vertrauensintervalls für den unbekannten Erwartungswert μ der Grundgesamtheit wird eine Irrtumswahrscheinlichkeit α vorgegeben, deren Bedeutung aus Bild 2 ersichtlich wird. Übliche Werte für α liegen zwischen 0,1 und 0,01. (Das Komplement $1 - \alpha$ wird als statistische Sicherheit oder Aussagesicherheit des Tests bezeichnet.)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zufallsvariable T_{n-1} Werte außerhalb des symmetrisch zum Nullpunkt gelegenen Intervalls $(-t_\alpha, +t_\alpha)$ annimmt, soll gleich α sein, also

$$P(|T_{n-1}| > t_\alpha) = \alpha ,$$

oder mit Gl. (3)

$$P\left(\bar{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha . \tag{4}$$

Diese Gleichung können wir folgendermaßen interpretieren: Das Intervall mit den zufälligen Grenzen $\bar{X} - t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$ und $\bar{X} + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$ überdeckt den unbekannten Erwartungswert μ mit der Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$. Der Wert t_α wird aus einer t-Tafel bei $n - 1$ Freiheitsgraden abgelesen.

Wir gehen nun von den Zufallsvariablen $\bar{X}$ und S^2 zu ihren Realisationen $\bar{x}$ und s^2 über, d.h. zu den festen Werten, die sie im Test angenommen haben, und erhalten damit Realisationen der Intervallgrenzen in Gl. (4):

Realisation von $\bar{X}$: $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{5}$$

Realisation von S^2: $$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2. \tag{6}$$

Somit gilt nach Gl. (4)

$$\bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \leqq \mu \leqq \bar{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}$$

oder $$\mu = \bar{x} \pm t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{7}$$

mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$.

Wie oben bereits erwähnt wurde, können wir uns unter μ beispielsweise die unbekannte Verlustwahrscheinlichkeit, eine mittlere Wartedauer oder einen Streuwert vorstellen; der Wert $\bar{x}$ ist der Stichprobenmittelwert der entsprechenden Größen, d.h. der Mittelwert aus den einzelnen Teiltestergebnissen.

5. Die vorgeschlagene Methode

5.1. Grundzüge der Methode

Wie wir in Bild 1 gesehen haben, schwanken nicht nur die Verluste von Teiltest zu Teiltest, sondern auch das Verkehrsangebot schwankt um den vorgegebenen Wert. Überdies war deutlich eine Korrelation zwischen Angebot und Verlust festzustellen. Diese Tatsache war bisher nicht berücksichtigt worden. Im folgenden Vorschlag wollen wir bei der Berechnung eines Vertrauensintervalls für die Verlustwahrscheinlichkeit die Schwankungen des Angebots mitberücksichtigen, um dadurch eine genauere Aussage zu erhalten.

Dafür bietet sich das in der Statistik unter dem Namen „modifiziertes Regressionsproblem" bekannte Verfahren an, das auf unsere Verhältnisse übertragen werden kann.

Die Grundgesamtheit, der die Stichprobe entnommen wird, sei wieder nach $N(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt. Dabei soll der Erwartungswert μ näherungsweise linear von einem Parameter ξ abhängen (Gl. (8a)):

$$\mu = \beta + \gamma\xi, \qquad B_{\text{Wahr}} = \beta + \gamma A. \tag{8a,b}$$

β und γ sind Konstanten.

Im Hinblick auf Verkehrstests heißt das, daß wir den tatsächlich bestehenden Zusammenhang zwischen der unbekannten, gesuchten Verlustwahrscheinlichkeit B_{Wahr} und dem Verkehrsangebot A in der Umgebung des für die Simulation gewählten Angebotswertes näherungsweise durch eine lineare Funktion ersetzen (Gl. (8b)).

Zur Beschreibung der n Teiltests betrachten wir n Stichprobenvariablen X_i, die voneinander unabhängig und nach $N(\mu, \sigma^2)$ normalverteilt seien. Das Ergebnis einer Stichprobe liegt in Form von n Zahlenpaaren (x_i, ξ_i) bzw. (B_i, A_i) vor. Dabei ist (x_i, ξ_i) *nicht* Realisation einer zweidimensionalen Zufallsvariablen, denn ξ_i ist ein fester, spezieller Wert des Parameters ξ.

Für Verkehrstests bedeutet das, daß wir das *Angebot A* als *Parameter* betrachten, der im Teiltest Nr. i den *bestimmten* Wert A_i hat und zu dem sich *zufällig* der Verlustwert B_i ergeben hat.

Aus den festgestellten Stichprobenwerten (x_i, ξ_i) bzw. (B_i, A_i) können folgende Schätzwerte berechnet werden (zur Verdeutlichung werden die Gleichungen parallel zum allgemeinen Fall für Verlust und Angebot angegeben):

Mittelwert der Stichprobenwerte x_i, B_i:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B_i, \tag{9a,b}$$

Mittelwert der Parameterwerte ξ_i, A_i:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad \bar{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i, \tag{10a, b}$$

mittlere quadratische Abweichung der Stichprobenwerte x_i, B_i: (11a, b)

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \quad s_B^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(B_i - \bar{B})^2,$$

mittlere quadratische Abweichung der Parameterwerte ξ_i, A_i: (12a, b)

$$s_\xi^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2, \quad s_A^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A_i - \bar{A})^2.$$

Die beiden folgenden Größen erfassen die Abhängigkeit zwischen X und ξ bzw. zwischen B und A

$$s_{x\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(\xi_i - \bar{\xi}), \tag{13a}$$

$$s_{BA} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(B_i - \bar{B})(A_i - \bar{A}), \tag{13b}$$

$$r_{x\xi}^2 = \frac{s_{x\xi}^2}{s_x^2 s_\xi^2}, \quad r_{BA}^2 = \frac{s_{BA}^2}{s_B^2 s_A^2}. \tag{14a, b}$$

Zunächst berechnen wir für die Größen β, γ und σ^2 Schätzfunktionen nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip. Die Bestimmung der Schätzfunktionen für β und γ nach diesem Prinzip erweist sich hier identisch mit der Methode der kleinsten quadratischen Abweichung (vgl. [1], [2]). Es muß also gelten

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i - (\beta + \gamma\xi_i)]^2 = \text{Min}. \tag{15}$$

Als Realisationen der aus Gl. (15) berechneten Schätzfunktionen für β und γ erhalten wir die Schätzwerte

für β: $$b = \bar{x} - r_{x\xi}\frac{s_x}{s_\xi}\bar{\xi}, \tag{16}$$

für γ: $$g = r_{x\xi}\frac{s_x}{s_\xi}. \tag{17}$$

Die Schätzfunktion für σ^2 hat die Realisation

$$s_*^2 = s_x^2(1 - r_{x\xi}^2). \tag{18}$$

Die in den Gl. (16), (17) und (18) enthaltenen Größen sind durch die Gl. (9a) bis (14a) definiert.

Somit erhalten wir entsprechend der Beziehung (8a) einen Schätzwert x für den Erwartungswert μ

der Grundgesamtheit:

$$x = b + g\xi$$

oder mit Gl. (16) und (17)

$$x = \bar{x} + r_{x\xi}\frac{s_x}{s_\xi}(\xi - \bar{\xi}), \qquad (19\text{a})$$

$$B_{\text{Schätz}} = \bar{B} + r_{BA}\frac{s_B}{s_A}(A - \bar{A}). \qquad (19\text{b})$$

$B_{\text{Schätz}}$ ist der Schätzwert für die gesuchte, unbekannte Verlustwahrscheinlichkeit B_{Wahr}.

In Bild 3 sind die Gl. (19a, b) graphisch dargestellt. Formal ist die Gerade identisch mit der Regressionsgeraden von x bezüglich ξ, d.h. es ist diejenige Gerade, für welche die Abstände zu den Meßpunkten — parallel zur Ordinate gemessen — im quadratischen Mittel ein Minimum haben (vgl. Gl. (15)). Zum Wert $\xi = \bar{\xi}$ gehört der Wert $x = \bar{x}$, d.h. dem Mittelwert der Parameterwerte ξ_i ist der Mittelwert der Stichprobenwerte x_i zugeordnet. Wenn wir nun dem Parameter ξ einen bestimmten Wert aus der Umgebung von $\bar{\xi}$ geben, gehört dazu nach Gl. (8a) der unbekannte Erwartungswert $\mu = \beta + \gamma\xi$ mit dem Schätzwert x aus der Geraden. Für Verlust und Angebot bedeutet dies: Zu einem bestimmten Angebotswert A gehört der uns interessierende, aber unbekannte Verlust B_{Wahr}. Aus Bild 3, dessen Werte aus den gemessenen Verlust- und Angebotswerten je Teiltest berechnet wurden, kann ein Schätzwert $B_{\text{Schätz}}$ für B_{Wahr} abgelesen werden.

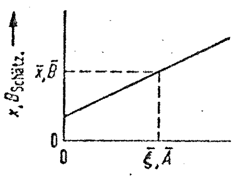

Bild 3. Graphische Darstellung von Gl. (19a, b).

Nun wird für den Erwartungswert μ ein Vertrauensintervall gesucht. Dazu müssen wir — wie oben beim t-Test besprochen wurde — eine geeignete Stichprobenfunktion konstruieren und ihre Verteilung berechnen. Die Herleitung überspringen wir hier (vgl. [2]) und geben sogleich die Resultate an.

Wir finden eine Zufallsvariable T_{n-2}, die einer t-Verteilung mit $n-2$ Freiheitsgraden genügt. Für das Vertrauensintervall des Erwartungswertes μ, der dem Parameter ξ zugeordnet ist, erhalten wir

$$\mu = x \pm t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-2}}\sqrt{1 + \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{s_\xi}\right)^2}, \qquad (20\text{a})$$

$$B_{\text{Wahr}} = B_{\text{Schätz}} \pm t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-2}}\sqrt{1 + \left(\frac{A - \bar{A}}{s_A}\right)^2} \qquad (20\text{b})$$

mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$. Der Wert für t_α wird aus einer t-Tafel bei $n-2$ Freiheitsgraden abgelesen.

Diskussion des Ergebnisses

Die Größe μ ist der unbekannte Erwartungswert der Grundgesamtheit, der dem Parameter ξ nach Gl. (8a) zugeordnet ist. Auf Grund der Stichprobenwerte haben wir die Gerade $x = f(\xi)$ gefunden, wir kennen also zu jedem ξ aus der Umgebung von $\bar{\xi}$ einen Schätzwert für das entsprechende μ. Gl. (20a) gibt dann das Vertrauensintervall für μ bei vorgegebener Irrtumswahrscheinlichkeit α an.

Übersetzt in die Sprache des Verkehrstests heißt dies: Die Verlustwahrscheinlichkeit irgendeiner Anordnung sei nach einem Näherungsverfahren berechnet worden und soll nun durch Simulation der Anordnung bei einem bestimmten Angebotswert überprüft werden. Die Werte je Teiltest tragen wir in einem Diagramm (Bild 4) auf (durch Kreuze gekennzeichnet) und berechnen die Gerade $B_{\text{Schätz}} = f(A)$ nach Gl. (19b). Die Teiltestergebnisse können wir uns jetzt als entfernt denken, denn sie werden durch die Gerade repräsentiert. — Nun müssen wir einen uns interessierenden Angebotswert aus dem Testbereich wählen. Als das Ist-Angebot des Tests verwenden wir zweckmäßigerweise den Mittelwert $\bar{A}$ aus den Teiltestangeboten. Dazu gehört der unbekannte Verlust.

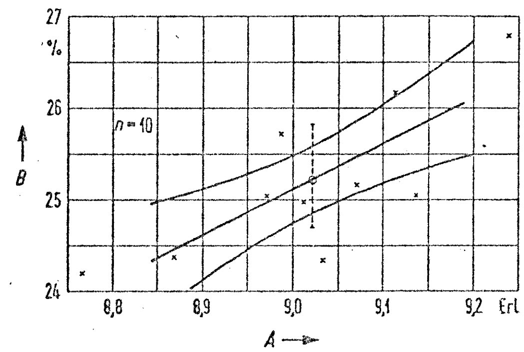

Bild 4. Ergebnisse einer Simulation; × Teiltestergebnisse, o Punkt $(\bar{A}, \bar{B})$.

$$B_{\text{Wahr}} = \beta + \gamma\bar{A}$$

mit dem Schätzwert

$$B_{\text{Schätz}} = \bar{B}$$

(durch o gekennzeichnet) und dem Vertrauensintervall

$$B_{\text{Wahr}} = \bar{B} \pm t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n-2}}. \qquad (21)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Gleichung dieselbe Struktur wie Gl. (7) beim t-Test hat, wobei jetzt s natürlich anders berechnet wird.

Wenn wir nun andere, benachbarte Angebotswerte wählen, z.B. das beim Test vorgegebene Angebot, das sich jedoch wegen der Schwankung der Zufallszahlen nicht genau eingestellt hat, so gehören dazu andere wahre Verluste B_{Wahr} mit Schätzwerten gemäß der Geraden und Vertrauensintervallen nach Gl. (20b). Als Grenzen für die Vertrauensintervalle ergibt sich eine Hyperbel. Zum Vergleich ist in Bild 4 das Vertrauensintervall mit dem STUDENT-Test nach Gl. (7) eingetragen (gestrichelte Linie). Es soll dabei noch einmal ausdrücklich betont werden, daß Bild 4 nur für eine einzige Simulation bei einem bestimmten Angebotswert gilt und nicht eine Verlustkurve $B = f(A)$ darstellt.

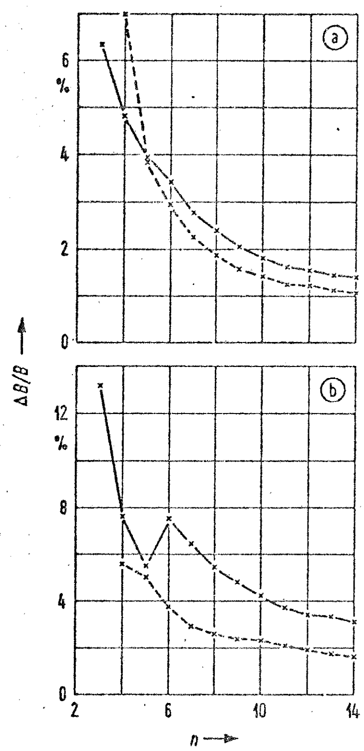

Bild 5. Relatives Vertrauensintervall in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n; ——— STUDENT-Test, — — — vorgeschlagene Methode.

In Bild 5 ist das relative Vertrauensintervall, d.h. die Intervallbreite bezogen auf den Mittelwert, in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang n für zwei Simulationen dargestellt.

5.2. Ergebnisse

Zusammenfassend können wir feststellen:

1. Mit der vorgeschlagenen Berechnungsmethode werden unter sonst gleichen Bedingungen die Vertrauensintervalle im allgemeinen durchschnittlich um 30% enger.
2. Der Rechenmehraufwand, insbesondere wenn nur das Vertrauensintervall bei $A = \bar{A}$ interessiert, ist unerheblich und fällt bei der Rechenzeit nicht ins Gewicht.
3. Da die Vertrauensintervalle im allgemeinen enger werden, kann umgekehrt zur Erzielung gleicher oder ähnlicher Intervallbreiten Simulationszeit eingespart werden.
4. Zu beliebigen Angebotswerten aus der Umgebung der Teiltestangebote läßt sich Schätzwert plus Vertrauensintervall für den zugehörigen, unbekannten Verlust berechnen.

Schrifttum

[1] KNÖDEL, W., Vorlesung über mathematische Statistik an der Universität Stuttgart, Wintersemester 1963/64.
[2] KENDALL, M. G. und STUART, A., The advanced theory of statistics, Band 2. C. Griffin, London 1967.
[3] FISZ, M., Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.