

Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Ing. A. Lotze

9. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten

Berechnungsverfahren für
mehrstufige Koppelanordnungen mit konjugierter
Durchschaltung

Systematik und Analyse

von KARL KÜMMERLE

1969

	Seite
INHALTSVERZEICHNIS	1
SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS	9
I. ABKÜRZUNGEN UND DEFINITIONEN	13
I.1 Strukturparameter eines S-stufigen Linksystems	13
I.2 Verkehrsparameter	13
I.3 Zustandsgrößen	14
I.4 Betriebsparameter	14
II. EINLEITUNG	15
III. EXAKTE BERECHNUNG	17
III.1 Allgemeines	17
III.2 Bascharin, G.P.: Derivation of Equations of State for Two-Stage Telephone Circuits with Losses	17
2.1 Übersicht	17
2.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	17
2.3 Die Entwicklung des Verfahrens	18
2.3.1 Die Beschreibung des Zufallsprozesses	18
2.3.2 Übergangswahrscheinlichkeiten	19
2.3.3 Zustandsgleichungen	21
2.4 Sonderfälle zur Reduzierung der Anzahl der Unbekannten	22
2.5 Beispiel zu 2.4	23
2.6 Zusammenfassung	25
III.3 Elldin, A.: On Equations of State for a Two-Stage Link System	26
3.1 Übersicht	26
3.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	26
3.3 Voraussetzungen und Bezeichnungen	27
3.3.1 Bezüglich des Systems	27
3.3.2 Zur Bezeichnung der Belegungszustände	27
3.4 Die Entwicklung des Verfahrens	28
3.4.1 Rufwahrscheinlichkeiten	28
3.4.2 Übergangswahrscheinlichkeiten	30
3.4.3 Allgemeine Zustandsgleichung	32
3.4.4 Bemerkungen zur Wahl von $\mathcal{L}(x_i)$	33
3.4.5 Zeitblockierung E und Rufblockierung B	33
3.5 Beispiele	34
3.6 Kritische Betrachtung des Verfahrens	34
IV. FUNKTIONELLE ABHÄNGIGKEIT UND TEILWEISE ODER VOLLSTÄNDIGE STATISTISCHE UNABHÄNGIGKEIT	36
IV.1 Allgemeines	36
IV.2 Elldin, A.: On the Dependence between the Stages in a Link System	37
2.1 Übersicht	37
2.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	37
2.3 Grundgedanke der Lösung	38
2.4 Entwicklung des Verfahrens, allgemeiner Fall	39
2.4.1 Verteilung $[x_{1i}]$ auf dem Zwischenleitungsbündel	39
2.4.2 Verteilung $[x_{2j}]$ auf dem Abnehmerbündel	41
2.4.3 Blockierungswahrscheinlichkeit E	44
2.4.4 Verlustwahrscheinlichkeit B	44
2.4.5 Durchführung des Iterationsprozesses	45
2.5 Der Sonderfall "gleichverteiltes Angebot"	46
2.6 Beispiele	49
2.7 Kritische Betrachtung und Erweiterung des Verfahrens	49

	Seite
IV.3 Bininda, N. und G. Daisenberger: Verlustberechnung bei Zwischen-	
leitungsanordnungen der Vermittlungstechnik	52
3.1 Übersicht	52
3.2 Beschreibung des Wegenetzes	52
3.3 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	53
3.4 Entwicklung des Verfahrens	53
3.5 Beispiele	56
3.6 Kritische Betrachtung des Verfahrens	56
3.7 Verbesserung des Verfahrens	57
V. FUNKTIONELLE UND STATISTISCHE UNABHÄNGIGKEIT	58
V.1 Allgemeines	58
V.2 Jacobaeus, Chr.: A Study on Congestion in Link Systems	59
2.1 Übersicht	59
2.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	59
2.3 Grundgedanke des Verfahrens und Grundgleichungen	60
2.3.1 Grundgleichungen	60
2.3.2 Die Verteilungsfunktionen	62
2.3.3 Herleitung einiger Beziehungen nach Jacobaeus	62
2.4 Zusammenstellung der behandelten Richtungswahlssysteme ohne	
Mischung	66
2.5 Systeme ohne Expansion oder Konzentration in der ersten	67
Stufe: $i_1 = k_1$	
2.5.1 $i_1 = k_1; k_{2r} = 1$; Bernoulli/Erlang	67
2.5.2 $i_1 = k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; Gleichbelastung aller	
Abnehmerleitungen	67
2.5.3 $i_1 = k_1; k_{2r} > 1$; Bernoulli/Erlang; keine Gleichbelastung	
aller Abnehmerleitungen	67
2.5.4 $i_1 = k_1; k_{2r} = 1$; Bernoulli/Bernoulli	69
2.5.5 $i_1 = k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Bernoulli; Gleichbelastung	
aller Abnehmerleitungen	69
2.5.6 $i_1 = k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r} = 1$; Bernoulli/Erlang	69
2.5.7 $i_1 = k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r} = 1$; Bernoulli/Bernoulli	69
2.5.8 $i_1 = k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Bernoulli; Gleich-	
belastung aller Abnehmer-	
leitungen	70
2.5.9 $i_1 = k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; keine	
Gleichbelastung aller Ab-	
nehmerleitungen	70
2.6 Systeme mit Expansion in der ersten Stufe: $i_1 < k_1$	70
2.6.1 $i_1 < k_1; k_{2r} = 1$; Bernoulli/Erlang	70
2.6.2 $i_1 < k_1; k_{2r} > 1$; Bernoulli/Erlang; Gleichbelastung	
aller Abnehmerleitungen	71
2.6.3 $i_1 < k_1; k_{2r} > 1$; Bernoulli/Erlang; keine Gleichbe-	
lastung aller Abnehmerleitungen	71
2.6.4 $i_1 < k_1; k_{2r} = 1$; Bernoulli/Bernoulli; Gleichbelastung	72
2.6.5 $i_1 < k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Bernoulli; Gleichbelastung	
aller Abnehmerleitungen	72
2.7 Systeme mit Konzentration in der ersten Stufe: $i_1 > k_1$	72
2.7.1 $i_1 > k_1; k_{2r} = 1$; Bernoulli/Erlang	72
2.7.2 $i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; Gleichbelastung	
aller Abnehmerleitungen	73
2.7.3 $i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; keine Gleichbe-	
lastung aller Abnehmerleitungen	74
2.7.4 $i_1 > k_1; k_{2r} = 1$; Bernoulli/Bernoulli	74
2.7.5 $i_1 > k_1; k_{2r} = 1$; Erlang/Erlang	74
2.7.6 $i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; Erlang/Erlang; Gleichbelastung	
aller Abnehmerleitungen	76
2.7.7 $i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; Erlang/Erlang; keine Gleichbe-	
lastung aller Abnehmerleitungen	76
2.7.8 $i_1 > k_1; l_{12} > 1; k_{2r} = 1$; Erlang/Erlang; Gleichbe-	
lastung der Leitungen im	
Zwischenleitungs-bündel	77
2.7.9 $i_1 > k_1; l_{12} > 1; k_{2r} = 1$; Erlang/Erlang; keine	
Gleichbelastung der Lei-	
tungen im Zwischenlei-	
tungs-bündel	77
2.7.10 $i_1 > k_1; l_{12} > 1; k_{2r} > 1$; Erlang/Erlang	78
2.8 Formeln für die Verlustwahrscheinlichkeit B	78

2.9	Systeme mit Mischung hinter der letzten Stufe	80
2.9.1	Das Berechnungsverfahren von O'Dell	81
2.9.2	Übertragung des O'Dell-Verfahrens auf Linksysteme mit Mischung am Ausgang	82
2.10	Dreistufige Systeme	84
2.10.1	Bernoulli/Bernoulli/Bernoulli	85
2.10.2	Bernoulli/Bernoulli/Erlang	85
2.10.3	$l_{12}, l_{23} \geq 1$; Bernoulli/Bernoulli/Bernoulli	86
2.10.4	$l_{12}, l_{23} \geq 1$; Bernoulli/Bernoulli/Erlang	86
2.11	Vierstufige Systeme	86
2.11.1	Bernoulli/Bernoulli/Bernoulli	87
2.11.2	Bernoulli/Erlang/Bernoulli	88
2.12	Berechnungsbeispiele - Vergleich mit Tests	89
2.13	Kritische Betrachtung des Verfahrens	90
2.13.1	Zweistufige Systeme ohne Mischung	90
2.13.2	Zweistufige Systeme mit Mischung hinter der letzten Stufe	90
2.13.3	Dreistufige Systeme	90
2.14	Verbesserungsvorschläge	91
2.15	Zweistufige Systeme ohne Mischung - Verbesserung des Verfahrens von Jacobaeus durch $A \neq Y$	92
2.15.1	$i_1 \leq k_1$; $k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen	93
2.15.2	$i_1 > k_1$; $k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; Gleichbelastung sämtlicher Abnehmerleitungen	93
2.15.3	$i_1 > k_1$; $k_{2r} = 1$; Erlang/Erlang	94
2.15.4	$i_1 > k_1$; $k_{2r} \geq 1$; Erlang/Erlang; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen	95
2.15.5	$i_1 > k_1$; $k_{2r} > 1$; Erlang/Erlang; keine Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen	95
2.16	Zweistufige Systeme ohne Mischung - Verbesserung des Verfahrens von Jacobaeus durch Anwendung der Erlang-Bernoulli-Verteilung	95
2.16.1	$i_1 > k_1$; $k_{2r} \geq 1$; EB/Erlang; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen	96
2.16.2	$i_1 \geq k_1$; $k_{2r} = 1$; EB/EB	96
2.17	Zweistufige Systeme ohne Mischung - Verteilung im Zwischenleitungs-bündel abhängig von der vorgegebenen Verteilung im Abnehmerbündel	98
2.18	Zweistufige Systeme ohne Mischung - Verteilung im Abnehmerbündel abhängig von der vorgegebenen Verteilung im Zwischenleitungs-bündel	100
2.19	Zweistufige Systeme mit Mischung hinter Stufe 2	102
2.19.1	Verbesserung des Verfahrens von Jacobaeus durch $A \neq Y$	102
2.19.2	Verteilung im Zwischenleitungs-bündel abhängig von der vorgegebenen Verteilung im Abnehmerbündel	103
2.20	Beispiele zu den Abschnitten 2.15 - 2.17 und 2.19	103
V.3	Fortet, R. und B. Canceill: Probabilités de perte en sélection conjuguée	106
	Pröhl, G.: Gefahrzeit zweistufiger Linksysteme in der Fernsprech-vermittlungstechnik	106
3.1	Übersicht	106
3.2	Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	106
3.3	Grundgedanke des Verfahrens und Grundgleichungen	107
3.3.1	Grundgleichungen	107
3.3.2	Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen	107
3.4	Berechnung von $[x_1]$, $[x_2]$, $[g_2-x_1]$, $[g_2-x_2]$	108
3.4.1	Berechnung von $[x_1]$	108
3.4.2	Berechnung von $[x_2]$	111
3.4.3	Berechnung von $[g_2-x_1]$	111
3.4.4	Berechnung von $[g_2-x_2]$	111
3.5	Sonderfälle aus Gleichung (16)	112
3.5.1	$i_1 < k_1 = g_2 \cdot l_{12}$	112
3.5.2	$i_1 = k_1$	113
3.5.3	$i_1 > k_1$	113

	Seite
3.6 Die Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E	114
3.6.1 $l_1 = k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$	114
3.6.2 $l_1 < k_1; l_{12} = 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$	114
3.6.3 $l_1 > k_1; l_{12} = 1; k_{2r} \geq 1; n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}$	115
3.6.4 $l_1 \leq k_1; l_{12} = 1; k_{2r} > 1; n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}$	115
3.6.5 $l_1 < k_1; l_{12} > 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$	115
3.6.6 $l_1 > k_1; l_{12} > 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$	116
3.6.7 $l_1 \geq k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r} \geq 1; n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}$	116
3.7 Systeme mit Mischung hinter der letzten Stufe	117
3.8 Zusammenfassung	118
V.4 Lotze, A.: Zur Bemessung zweistufiger Koppelanordnungen - Scheinverkehrsverfahren	119
4.1 Übersicht	119
4.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	119
4.3 Grundgedanke der Lösung	120
4.4 Entwicklung des Verfahrens	121
4.4.1 Grundblockierung E ₀	121
4.4.2 Belastung der Zwischenleitungen durch Schein- verkehr	121
4.4.3 Eingangsblockierung [k ₁] [*]	122
4.4.4 Verlustwahrscheinlichkeit B	123
4.5 Zusammenfassung des Ablaufs der Verlustberechnung	123
4.6 Berechnungsbeispiele - Vergleich mit Tests	123
4.7 Kritische Betrachtung des Verfahrens	124
V.5 Lee, C.Y.: Analysis of Switching Networks	125
Le Gall, P.: Etude du blocage dans des systèmes de commutation téléphonique automatique utilisant des commutateurs électroniques du type crossbar	
Methode de calcul de l'encombrement dans les systèmes téléphoniques automatiques à marquage	
Les trafics téléphoniques et la sélection conjuguée en téléphonie automatique	125
5.1 Übersicht	125
5.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	125
5.3 Entwicklung des Verfahrens	126
5.3.1 Dreistufige Systeme	126
5.3.2 Vierstufige Systeme	127
5.3.3 Verallgemeinerung	127
5.4 Beispiele	128
5.5 Kritische Betrachtung des Verfahrens	129
V.6 Bininda, N., G. Daisenberger und M. Didlaukis: Verlust- berechnung für Zwischenleitungsanordnungen beliebiger Stufenzahl	129
6.1 Übersicht	129
6.2 Beschreibung des Wegenetzes	130
6.3 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	131
6.4 Entwicklung des Verfahrens	131
6.4.1 Grundgedanke	131
6.4.2 Herleitung der Rekursionsformel	132
6.4.3 Zusammenfassende Darstellung des Rechengangs	134
6.5 Berechnungsbeispiele	134
6.6 Kritische Betrachtung des Verfahrens	135
6.7 Weitere Verfahren auf der Grundlage von Jacobaeus	135
6.7.1 Bossche, M. van den und R.G. Knight: Traffic and Blocking Problems in a Three Link Switching System	136
6.7.2 Bosse, J.G. van: Some Recursive Aids for Switching Network Blocking Computations	136
6.7.3 Huber, M.: On the Congestion in TDM Systems	136

	Seite
VI. BERECHNUNG DER VERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT B MIT HILFE EINER SPERRWAHRSCHEINLICHKEIT	138
VI.1 Allgemeines	138
VI.2 Grundgleichungen	138
VI.3 Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Bridgford	139
3.1 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	139
3.2 Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$	139
VI.4 Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Rohde und Störmer	141
4.1 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	141
4.2 Allgemeine Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$	141
4.2.1 Berechnung der Aufteilungswahrscheinlichkeit $W(x_2, s)$	143
4.2.2 Wahrscheinlichkeit $W_{x_2}(s, v)$ für direkte Sperrung	144
4.2.3 Wahrscheinlichkeit $W_{x_2}(s, v, \beta_2 - v)$ für rückwärtige Sperrung	145
4.3 Sonderfall: $k_1 = g_2$	146
4.4 Berichtigung der Berechnung der rückwärtigen Sperrung	147
VI.5 Andere Möglichkeiten der Berechnung einer Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$	148
VI.6 Berechnungsbeispiele zu den Abschnitten VI.3 und VI.4	148
VI.7 Kritische Betrachtung zu VI.3 und VI.4	149
7.1 Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Bridgford	149
7.2 Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Rohde und Störmer mit Richtigstellung der rückwärtigen Sperrung durch Kirsch	149
VII. BERECHNUNG BEI TEILWEISER BERÜCKSICHTIGUNG DER FUNKTIONELLEN ABHÄNGIGKEIT DER WAHRSCHEINLICHKEITVERTEILUNGEN	150
VII.1 Allgemeines	150
VII.2 Bretschneider, G.: Die Leistungsfähigkeit von zweistufigen Zwischenleitungsanordnungen	150
2.1 Übersicht	150
2.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	150
2.3 Entwicklung des Verfahrens	151
2.3.1 Belastungsverteilungs-Verfahren mit Erreichbarkeitsausgleich	151
2.3.2 Erreichbarkeits-Verfahren mit Belastungsausgleich	154
2.4 Verbesserung des Belastungsverteilungs-Verfahrens mit Erreichbarkeitsausgleich bei Zufallsverkehr zweiter Art	156
2.5 Beispiele	156
2.6 Kritische Betrachtung des Verfahrens	157
2.6.1 Belastungsverteilungs-Verfahren mit Erreichbarkeitsausgleich	157
2.6.2 Erreichbarkeits-Verfahren mit Belastungsausgleich	158
VII.3 Martinez, R.: Probabilité de perte en sélection conjuguée sur un nombre quelconque d'étages	159
3.1 Übersicht	159
3.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	159
3.3 Entwicklung des Verfahrens	160
3.3.1 Grundgedanke	160
3.3.2 Herleitung der Rekursionsformel	160
3.3.3 Zusammenfassende Darstellung des Rechengangs	163
3.4 Kritische Betrachtung des Verfahrens	164
3.5 Verbesserung des Verfahrens	164
3.5.1 Verbesserung des Verfahrens von Martinez durch $A \neq Y$	164
3.5.2 Verlustwahrscheinlichkeit B	165
3.5.3 Erweiterung des Verfahrens für Zufallsverkehr erster Art	165
3.5.4 Erweiterung des Verfahrens von Martinez zur Berechnung des Bündelverlusts	165
3.6 Beispiele zu Abschnitt 3.5	166

	Seite
VIII. EFFEKTIVE ERREICHBARKEIT	167
VIII.1 Allgemeines	167
VIII.2 Charkevitsch, A.D.: An Approximate Method for Calculating the Number of Junctions in a Crossbar System Exchange	167
2.1 Übersicht	167
2.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	167
2.3 Entwicklung des Verfahrens	168
2.3.1 Herleitung der effektiven Erreichbarkeit	168
2.3.2 Vereinfachungen für die Berechnung von k_{eff}	170
VIII.3 Bininda, N. und A. Wendt: Die effektive Erreichbarkeit für Abnehmerbündel hinter Zwischenleitungsanordnungen	172
3.1 Übersicht	172
3.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	172
3.3 Entwicklung des Verfahrens	173
3.3.1 Allgemeine Berechnung der effektiven Erreichbarkeit aus der Momentanerreichbarkeit	173
3.3.2 Vereinfachte Berechnung der effektiven Erreichbarkeit	174
3.3.3 Berechnung der mittleren Erreichbarkeit als Näherungs- wert für die effektive Erreichbarkeit	175
3.3.4 Beispiel für die Berechnung der mittleren Erreichbar- keit k_m	176
VIII.4 Kritische Betrachtung der Verfahren in VIII.2 und VIII.3	179
4.1 Verfahren von Charkevitsch, Abschnitt VIII.2	179
4.2 Verfahren von Bininda und Wendt, Abschnitt VIII.3	179
IX. KOMBINIERT EINGANGS- UND ABNEHMERBLOCKIERUNG	180
Lotze, A.: Das Näherungsverfahren der "Kombinierten Eingangs- und Abnehmerblockierung" zur Berechnung zwei- und mehrstufiger Linksysteme	180
IX.1 Übersicht	180
IX.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter	180
IX.3 Grundgedanke des Verfahrens	181
3.1 Eingangsblockierung	181
3.2 Abnehmerblockierung	181
IX.4 Berechnung der Eingangsblockierung	182
4.1 Zufallsverkehr erster Art	182
4.1.1 $i_1 > k_1$	182
4.1.2 $i_1 \leq k_1$ (Abgeschnittenes Poisson-Angebot)	182
4.2 Zufallsverkehr zweiter Art	182
4.2.1 $i_1 > k_1$	182
4.2.2 $i_1 \leq k_1$	183
IX.5 Berechnung der Abnehmerblockierung	183
5.1 Mittlere Prüfbarkeit p	183
5.2 Abnehmerblockierungswahrscheinlichkeit $[p]$	185
5.2.1 Zufallsverkehr erster Art	185
5.2.2 Zufallsverkehr zweiter Art	185
IX.6 Verlustwahrscheinlichkeit B	185
6.1 Zufallsverkehr erster Art	186
6.1.1 $i_1 > k_1$	186
6.1.2 $i_1 \leq k_1$	186
6.2 Zufallsverkehr zweiter Art	186
6.2.1 $i_1 > k_1$	186
6.2.2 $i_1 \leq k_1$; keine Mischung zwischen Stufe 1 und 2	187
IX.7 Berechnungsbeispiele und Vergleich mit Verkehrstests	187
IX.8 Kritische Betrachtung des Verfahrens	188
X. ZUSAMMENFASSUNG	190

	Seite
ANHANG A. SYSTEMSKIZZEN	194
A.1 Zweistufige Systeme	194
1.1 L 2024; Mischwahl	194
1.2 Mp I9a; Mischwahl	194
1.3 L 2034; Richtungswahl, symmetrische Richtungsaufteilung	194
1.4 L 2022; Richtungswahl, symmetrische Richtungsaufteilung	195
1.5 L 2033; Richtungswahl, symmetrische Richtungsaufteilung	195
1.6 L 2001; Richtungswahl, keine symmetrische Richtungsaufteilung	195
1.7 L 2032; Richtungswahl, symmetrische Richtungsaufteilung; Mischung der Ausgänge verschiedener Linkgruppen	195
A.2 Dreistufige Systeme	196
2.1 L 3006; Richtungswahl, symmetrische Richtungsaufteilung	196
2.2 L 3003; Mischwahl	197
A.3 Vierstufige Systeme	197
3.1 L 4001; Richtungswahl, symmetrische Richtungsaufteilung	197
3.2 L 4015; Richtungswahl, symmetrische Richtungsaufteilung	197
ANHANG B. DIAGRAMME	198

SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

1922

- /1/ Mc Henry, C.: An investigation of the loss involved in trunking from primary line switches to first selectors via secondary line switches in Strowger Automatic Exchanges. Post Office Electr. Engrs' Journal 14 (1922), S. 217-227.

1927

- /2/ O'Dell, C.F.: An outline of the trunking aspect of automatic telephony. J. Inst. Electr. Engrs. 65 (1927), S. 185-222.

1934

- /3/ Berkeley, C.S.: Traffic and trunking principles in automatic telephony. London 1934, 1937, 1949.

1936

- /4/ Langer, M.: Studien über Aufgaben der Fernsprechtechnik. Berlin, München 1936.

1942

- /5/ Lundkvist, K.: Bestämning av sannolikheten för spärrning vid s.k. stel koppling. Tekn. Medd. fran kungl. Telegrafstyrelsen 4-6 (1942).
- /6/ Modée, G.: Undersökning av kombinationsgruppernas ut nyttjande vid det amerikanska koordinatväljarsystemet. Tekn. Medd. fran kungl. Telegrafstyrelsen 7-9 (1942).

1943

- /7/ Modée, G.: Om återgående spärrningsmarkering och beräkning av därvid uppkommande spärrningar. Tekn. Medd. fran kungl. Telegrafstyrelsen 1-3 (1943).

1948

- /8/ Lundkvist, K.: Method of Computing the Grade of Service in a Selection Stage Composed of Primary and Secondary Switches. Ericsson Review 1 (1948), S. 11-17.

1950

- /9/ Jacobaeus, C.: A study on congestion in link systems. Ericsson Technics 48 (1950), S. 1-68.

1952

- /10/ Jensen, A.: Et grundlag for beregning of spaerringer i koordinatvaelgersystemet. Teleteknik 4 (1952 I), S. 123-148.
- /11/ Jensen, A.: Spaerringsberegninger i koordinatvaelgersystemet. Teleteknik 4 (1952 II), S. 176-200.

1953

- /12/ Clos, C.: A study of non-blocking switching networks. Bell System Tech. J. 32 (1953), S. 406-424.
- /13/ Rohde, K. und H. Störmer: Durchlaßwahrscheinlichkeit bei Vermittlungseinrichtungen der Fernmeldetechnik. Mitteilungsblatt für mathem. Statistik 5 (1953), S. 185-200.

1954

- /14/ Bähler, W.Th.; J.W. Cohen und M.M. Jung: Calculation of the number of first group selectors for telephone systems provided with first and second concentration stages, taking into account the internal blocking. Communication News 14 (1954), S. 51-58.

1955

- /15/ Elldin, A.: Automatic telephone exchanges with Crossbar switches - Switch Calculations, general survey. LM Ericsson Book B 11265, November 1955.
- /16/ Lee, C.Y.: Analysis of switching networks. Bell System Tech. J. 34 (1955), S. 1287-1315.

1956

- /17/ Elldin, A.: On equations of state for two-stage link systems. Ericsson Technics 12 (1956), S. 61-104.

- /18/ Fortet, R.: Les fonctions aléatoires en téléphonie automatique - Probabilités de perte en sélection conjuguée. Ann. Télécomm. 11 (1956), S. 85-88.
- /19/ Le Gall, P.: Etude du blocage dans des systèmes de commutation téléphonique automatique utilisant commutateurs électroniques du type crossbar. Ann. Télécomm. 11 (1956), S. 159-171, S. 180-194.

1957

- /20/ Charkevitsch, A.D.: Metod priblizhennoj ozenki propusknoj sposobnosti dvuchzvenevoj kommutacionnoj sistemy (Näherungsmethode zur Bestimmung der Leistungsfähigkeit eines zweistufigen Linksystems). Dokl. Akad. Nauk SSSR 114 (1957), S. 308-309.
- /21/ Charkevitsch, A.D.: Mnogostupentschatoe postroenie polnodostupnych kommutacionnyh sistem (Mehrstufige Koppelanordnungen für vollkommene Vermittlungssysteme). Dokl. Akad. Nauk SSSR 112 (1957), S. 1043-1046.
- /22/ Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications. 2. Aufl., Band 1; New York: Wiley 1957
- /23/ Fortet, R. und B. Canceill: Probabilités de perte en sélection conjuguée. Teletechnik 1 (1957), S. 41-55.
- /24/ Le Gall, P.: Méthode de calcul de l'encombrement dans les systèmes téléphoniques automatiques à marquage. Ann. Télécomm. 12 (1957), S. 374-386.

1958

- /25/ Bascharin, G.P.: Teoretiko-verojatnostnoe issledovanie dvuch-kaskadnoj telefonnoj sistemy s otkasami, rabotajuschtschej v regime svobodnovo iskanija (Probability-theoretic investigations of two-stage telephone systems with busy signals, working under free seeking). Dokl. Akad. Nauk SSSR 121 (1958), S. 101-104.
- /26/ Bascharin, G.P.: Finalnye verojatnosti mnogomernovo Markovskovo prozessa, opisy vajuščtschevo dejstvie nekotorych dvuchkaskadnyh telefonnyh sistem s otkasami (Final probabilities for multi-dimensional markov processes which describe the action of some two-stage telephone systems with busy-signals). Teorija verojatnosti i jejo primeneie 3 (1958), S. 452-458 (engl.: Theory of Probability and its Applications, S. 420-425).
- /27/ Bossche, H. van den und R.G. Knight: Traffic and blocking problems in a three link switching system. 2. ITC Den Haag 1958, Doc. 2.
- /28/ Fisz, M.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Berlin: VEB Dt. Verlag der Wissenschaften 1958.
- /29/ Fortet, R. und J. Chastang: Contribution à l'étude de la congestion dans les systèmes "links" à sélection conguguée. 1. ITC Den Haag 1958, Doc. 28.
- /30/ Karlsson, S.A.: Eine allgemeine Formel zur Berechnung der Verkehrssperrung in Telefonanlagen. S. ITC Den Haag, 1958, Doc. 8.
- /31/ Le Gall, P.: Les trafics téléphoniques et la sélection conjuguée an téléphonie automatique. Ann. Télécomm. 13 (1958), S. 186-207, S. 239-253, S. 278-300.
- /32/ Lotze, A.: Zur Bemessung zweistufiger Koppelanordnungen. a) 2. ITC Den Haag 1958, Doc. 38; b) Het PTT Bedrijf (1960), S. 197 (Kurzfassung).

1959

- /33/ Bininda, N. und W. Wendt: Die effektive Erreichbarkeit für Abnehmerbündel hinter Zwischenleitungsanordnungen. Nachr.-techn. Z. 12 (1959), S. 579-585; 14 (1961), S. 40.
- /34/ Charkevitsch, A.D.: Priblizhennyj metod rastscheta tschisla soeditelnyh ustrojstv v ATS koordinatnoj sistemy (An Approximate Method for Calculating the Number of Junctions in a Crossbar System Exchange). Elektrosvjaz (1959), S. 55-63; (engl.: Telecommunications (1960), S. 185-197).
- /35/ Livschitz, B.C.; W.N. Blumenfeld und W.P. Parilov: Sovremennoe sostojanie teorii telefonnovo soobschenija (Gegenwärtiger Stand der Telefonverkehrstheorie). Sbornik nautschnyh trudov (1959), S. 5-63.
- /36/ Livschitz, B.C. und W.E. Rodsjanko: Rastschot neravnodostupnovo svenevovo vkjutscheniya putschka linij (Berechnung von Linksystemen mit Mischungen). Sbornik Trudov NIITS (1959), S. 12-26.

1960

- /37/ Adelaar, H.H. und D.G.N. Hunter: Use of "Stantec Zebra" to calculate a traffic table for a three link time-division-multiplex telephone exchange. Electrical Communication 36 (1960) S. 189-196
- /38/ Bascharin, G.P.: O vyvode sistem uravnenij sostojanija dlja dvuchkaskadnych telefonnych schem s poterjami (Derivation of Equations of State for Two-Stage Telephone Circuits with Losses). Elektrosvjaz (1960), S. 56-64; (engl.: Telecommunications (1960), S. 79-90).
- /39/ Bascharin, G.P.: O novom priblizennom metode vytschislenija verojatsnostej poter v dvuchkaskadnych schemach (A New Approximate Method of Calculating the Probabilities of Losses in Two-Stage Circuits). Elektrosvjaz (1960), S. 52-63; (engl.: Telecommunications (1960), S. 1020-1034).
- /40/ Syski, R.: Introduction to congestion theory in telephone systems. Edinburgh, London: Oliver and Boyd 1960.

1961

- /41/ Bascharin, G.P.: Ob analititscheskom opredelenij i metodach vytschislenija verojatsnostej poter v kummutazionnych schemach (Über eine analytische Bestimmung und Berechnungsmethode der Verlustwahrscheinlichkeiten in Vermittlungssystemen). Problemy Peredatschi Informazij, Vupusk 9, Moskva 1961.
- /42/ Bretschneider, G.: Die Leistungsfähigkeit von zweistufigen Zwischenleitungsanordnungen. Archiv elektr. Übertragung 15 (1961), S. 166-174.
- /43/ Elldin, A.: On the dependence between the two stages in a link system. Ericsson Technics 17 (1961), S. 183-259.
- /44/ Hoffmann, E. und H. Wahl: Zweistufige Zwischenleitungsanordnungen in Fernsprech-Vermittlungsanlagen. Siemens Z.35 (1961), S. 841-847.
- /45/ Martinez, R.: Probabilité de perte en sélection conjuguée sur un nombre quelconque d'étages. 3. ITC Paris 1961, Doc. 29.
- /46/ Smith, N.M.H.: More accurate calculation of overflow traffic from link trunked cross-bar group selectors. 3. ITC Paris 1961, Doc. 36.
- /47/ Wallström, B.: Alternative routing in a two-stage link system - Congestion theory and simulated traffic-studies. Ericsson Technics 17 (1961), S. 261-285.

1962

- /48/ Lotze, A. und W. Wagner: Table of the modified Palm-Jacobaens loss formula. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart, 1962.
- /49/ Pröhl, G.: Gefahrzeit zweistufiger Linksysteme in der Fernsprechvermittlungstechnik. Nachrichtentechnik 12 (1962), S. 24-31.

1963

- /50/ Bascharin, G.P.: Issledovanie kommutazionnych sistem v regime gruppovogo iskanija (Untersuchung von Schaltsystemen mit Richtungswahl). Elektrosvjaz, Gesamtausgabe (1963), S. 58-67.
- /51/ Lotze, A.: 3. Bericht über verkehrstheoretische Untersuchungen (CIRB). Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart, 1963.

1964

- /52/ Bosse, J.G. van: Some recursive aids for switching network blocking computation. 4. ITC London 1964, Doc. 21.
- /53/ Bretschneider, G.: Modern Concepts concerning single- and two-stage switching arrays as derived from exact loss calculations. 4. ITC London 1964, Doc. 22.
- /54/ Bridgford, J.N.: The geometric group concept and its application to the dimensioning of link access systems. 4. ITC London 1964, Doc. 13.
- /55/ Huber, M.: On the congestion in tdm systems. 4. ITC London 1964.
- /56/ Pollen, L.K.: A method for reducing the probability of blocking in a 3-stage link connecting network. 4. ITC London 1964, Doc. 70.
- /57/ Wagner, H.: Ein Iterationsverfahren zur Bemessung vierstufiger Richtungskoppelfelder. SEL-Nachrichten 12 (1964), S. 84-89.

1965

- /58/ Bininda, N.; G. Daisenberger und M. Didlaukis: Verlustberechnung für Zwischenleitungsanordnungen beliebiger Stufenzahl. Nachr.-techn. Z. 18 (1965), S. 634-636.

1966

- /59/ Bininda, N. und G. Daisenberger: Verlustberechnung bei Zwischenleitungsanordnungen der Vermittlungstechnik. Nachr.-techn. Z. 19 (1966), S. 509-512.
- /60/ Bowers, T.L.: Blocking in 3-stage "folded" Switching Arrays. IEEE Transactions on Communication Technology (1966), S. 14-37.
- /61/ Lee, L. und J.A. Brzozowski: An approximate method for computing blocking probability in switching networks. IEEE Transactions on Communication Technology Com. 14(1966), S.85-93.
- /62/ Bächle, A.: Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit für unvollkommen erreichbare Bündel bei Zufallsverkehr zweiter Art. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart, Aufgabe 156, 1966.

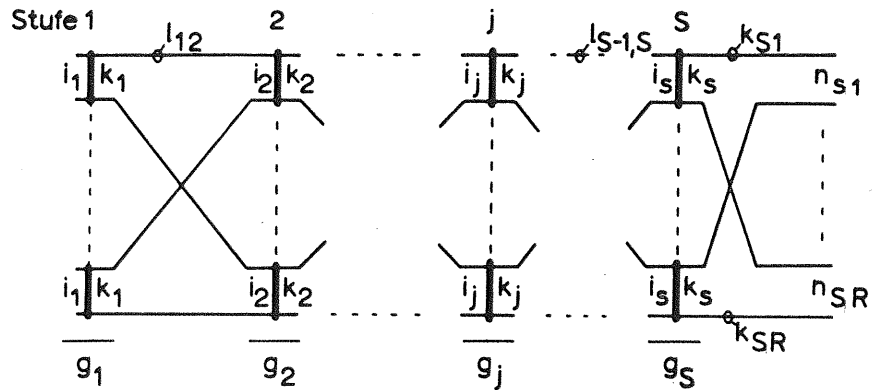
1967

- /63/ Bazlen, D.: Näherungsweise Berechnung der Verlust- und Blockierungswahrscheinlichkeit von Linksystemen. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart, Aufgabe 201, 1967.
- /64/ Graf, M.: Berechnung von zweistufigen Linksystemen nach Bretschneider. Semesterarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart, Aufgabe 229, 1967.
- /65/ Lörcher, W.: Exakte Berechnung von zweistufigen Linksystemen für Mischwahl nach Bascharin. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart, Aufgabe 202, 1967.
- /66/ Kirsch, R.: Untersuchung über die Sperrwahrscheinlichkeiten ein- und zweistufiger Koppelanordnungen. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart, Aufgabe 227, 1967.
- /67/ Lotze, A.: Optimum Link Systems. 5. ITC New York 1967, Pre-Book S. 242-251.
- /68/ Lundgren, : Two-, three- and four-stage link systems - A comparison between congestion results obtained from calculation and simulation. 5. ITC New York 1967, Pre-Book S. 337-350.
- /69/ Seefeld, J.: Näherungsweise Berechnung der Verlust- und Blockierungswahrscheinlichkeit von Linksystemen. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart, Aufgabe 200, 1967.

I. ABKÜRZUNGEN UND DEFINITIONEN

Abkürzungen sind in der Fernsprechverkehrstheorie bisher noch nicht genormt. Es werden in dieser Arbeit soweit wie möglich die in der Literatur gebräuchlichen Symbole verwendet.

I.1 Strukturparameter eines S-stufigen Linksystems



- S Anzahl der Stufen des Systems; $S = 2, 3, \dots$
- g_j Anzahl der Koppelvielfache in Stufe j ; $j = 1, 2, \dots, S$
- i_j Anzahl der Eingänge je Koppelvielfach in Stufe j ; $j = 1, 2, \dots, S$
- k_j Anzahl der Ausgänge je Koppelvielfach in Stufe j ; $j = 1, 2, \dots, S$
- $l_{j,j+1}$ Anzahl der Zwischenleitungen von einem Koppelvielfach in Stufe j zu einem Koppelvielfach in Stufe $j+1$; $j = 1, 2, \dots, S-1$
- $m_j = \frac{g_j \cdot k_j}{g_{j+1} \cdot i_{j+1}}$ Mischungsverhältnis der Mischung zwischen Stufe j und Stufe $j+1$;
 $j = 1, 2, \dots, S-1$
- R Anzahl der Richtungen hinter Stufe S
- k_{Sr} Anzahl der Ausgänge je Koppelvielfach in Stufe S nach Richtung r ;
 $r = 1, 2, \dots, R$
- n_{Sr} Anzahl der Abnehmerleitungen des Bündels in Richtung r ; $r = 1, 2, \dots, R$

I.2 Verkehrsparameter

- A_i Angebot an das Koppelvielfach Nr. i in Stufe 1; $i = 1, 2, \dots, g_1$
- A_{Sr} Angebot an das Bündel in Richtung r hinter Stufe S; $r = 1, 2, \dots, R$
- A_0 Erzeugendes Angebot
- α_i Anrufrichte je freie Verkehrsquelle in Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe; $i = 1, 2, \dots, g_1$
- h Mittlere Belegungsdauer
- Q_i Anzahl der Verkehrsquellen in Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe;
 $i = 1, 2, \dots, g_1$
- Y_j Belastung auf den k_j Ausgängen eines Koppelvielfachs in Stufe j ;
 $j = 1, 2, \dots, S$
- Y_{Sr} Belastung auf den n_{Sr} Ausgängen des Bündels in Richtung r ;
 $r = 1, 2, \dots, R$

P_{Ej}	Belastung je Eingang eines Koppelvielfachs in Stufe j ; $j = 1, 2, \dots, S$
P_{Aj}	Belastung je Ausgang eines Koppelvielfachs in Stufe j ; $j = 1, 2, \dots, S$
P_{Sr}	Belastung je Abnehmerleitung des Bündels in Richtung r ; $r = 1, 2, \dots, R$
δ_{ir}	Anteil von A_1 (Angebot an das Koppelvielfach Nr. i in Stufe 1) in Richtung r ; $i = 1, 2, \dots, g_1$ $r = 1, 2, \dots, R$
η_{ir}	Anteil der Belastung in Richtung r an der Belastung von Koppelvielfach Nr. i in Stufe 1; $i = 1, 2, \dots, g_1$ $r = 1, 2, \dots, R$
E	Zeitblockierung(wahrscheinlichkeit), time congestion
B	Verlust(wahrscheinlichkeit), call congestion
P	Prüfbarkeit

I.3 Zustandsgrößen

$\{x\}$	Zustand, daß in einem Bündel x Leitungen belegt sind
$[x]$	Wahrscheinlichkeit für den Zustand $\{x\}$
$\mu(x)$	Durchlaßwahrscheinlichkeit im Zustand $\{x\}$
$\sigma(x)$	Sperrwahrscheinlichkeit im Zustand $\{x\}$

I.4 Betriebsparameter

Zufallsverkehr erster Art: (ZV 1)	Die mittlere Anrufrate je Zeiteinheit ist konstant, unabhängig vom Belegungszustand des Systems.
Abgeschnittener Erlangverkehr:	Die mittlere Anrufrate je Zeiteinheit ist so lange konstant als noch mindestens eine Zubringerleitung im betrachteten Koppelvielfach frei ist; andernfalls gleich Null.
Zufallsverkehr zweiter Art: (ZV 2)	Die mittlere Anrufrate je Zeiteinheit ist der Zahl momentan freier Quellen proportional.
Geordnetes Absuchen:	Die Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1 werden ausgehend von einer festen Nullstellung geordnet abgesucht.
Zufälliges Absuchen:	Die Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1 werden ausgehend von einem zufällig bestimmten Startpunkt geordnet abgesucht.
Mischwahl:	Sämtliche Ausgänge hinter Stufe S führen in dieselbe Richtung (nur eine Richtung).
Richtungswahl:	Die Ausgänge hinter Stufe S führen in verschiedene Richtungen (mehrere Richtungen).
Gleichverteiltes Angebot:	Das Gesamtangebot ist zu gleichen Teilen auf die g_1 Koppelvielfache in Stufe 1 aufgeteilt.

An wenigen Stellen in dieser Arbeit werden aus Gründen der Zweckmäßigkeit etwas andere Bezeichnungen verwendet. Dies wird jeweils besonders hervorgehoben.

Für die Erlang'sche Funktion $E_{1,n}(A)$ wird der Einfachheit halber $E_n(A)$ geschrieben.

Die Bezeichnungen der in den Beispielen betrachteten Linksysteme (z.B. L 2022) wurden lediglich bei der Durchführung der Tests verwendet und sind ohne Bedeutung.

II. EINLEITUNG

Die Sprechwegenetze in modernen Fernsprechvermittlungssystemen bestehen häufig aus mehreren in Serie liegenden Wahlstufen, die von einer zentralen Einrichtung in "konjugierter Wahl" gesteuert werden: Freie Leitungen zwischen den Stufen werden dann und nur dann belegt, wenn sie zu einer freien, für den betreffenden Anruf in Betracht kommenden Abnehmerleitung durchgeschaltet werden können. Solche Systeme werden Zwischenleitungsanordnungen oder kurz Linksysteme genannt.

Zunächst war der Grund für die Anwendung solcher Systeme die Tatsache, daß ihr Bedarf an Koppelpunkten, verglichen mit entsprechenden einstufigen Anordnungen gleicher Verkehrsleistung wesentlich niedriger ist. In neuerer Zeit wünscht man außerdem die Möglichkeit einer freizügigen Beschaltung der Ausgänge großer Systeme. Sie kann durch mehrstufige vermaschte Zwischenleitungsanordnungen am besten erreicht werden. Man erzielt mit sehr wirtschaftlichem Aufwand an Koppelpunkten eine praktisch vollkommene Erreichbarkeit aller Ausgänge des Systems von jedem beliebigen Eingang aus.

Für die Berechnung der Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit derartiger Linksysteme als Funktion ihrer Struktur und des angebotenen Fernsprechverkehrs ist eine große Anzahl von Verfahren vorgeschlagen worden. Die meisten davon gelten nur für zweistufige Systeme mit speziellen Strukturen (Symmetrieannahmen), und nur wenige sind universell anwendbar.

Die Analyse der einzelnen Verfahren zeigte, daß einige Grundprinzipien der Berechnung unterschieden werden können, nach denen eine Klassifizierung und Beurteilung der verschiedenen Berechnungsvorschläge möglich ist.

Aus der großen Anzahl von Publikationen sind solche ausgewählt und in der Arbeit möglichst einheitlich dargestellt worden, welche die charakteristischen Merkmale eines Prinzips am deutlichsten zeigen. Berechnungsbeispiele und deren Vergleich mit Ergebnissen aus Verkehrstests auf einem Digitalrechner, ferner eine kritische Betrachtung der einzelnen Methoden lassen ihren Anwendungsbereich und ihre Genauigkeit erkennen. Darüber hinaus wurde in manchen Fällen versucht, durch Verbesserungsvorschläge die Genauigkeit des Verfahrens zu erhöhen.

Ganz allgemein können zwei große Gruppen von Berechnungsprinzipien unterschieden werden: die mathematisch exakten Verfahren und die Lösungen, welche auf Näherungsannahmen beruhen.

Die in Kapitel II behandelten mathematisch exakten Verfahren führen auf ein lineares Gleichungssystem für die Zustandswahrscheinlichkeiten des Systems, aus denen dann Blockierungswahrscheinlichkeit und Verlustwahrscheinlichkeit berechnet werden können. Infolge der riesigen Anzahl von möglichen Belegungszuständen bereitet sowohl die Aufstellung des Gleichungssystems als auch vor allem dessen numerische Auswertung erhebliche Schwierigkeiten.

Die große Gruppe der Näherungslösungen kann in sechs verschiedene Prinzipien aufgegliedert werden:

1. In Kapitel IV werden Berechnungsmethoden untersucht, welche einerseits die gegenseitige funktionelle Abhängigkeit zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen in den einzelnen Stufen berücksichtigen und andererseits die statistische Abhängigkeit zwischen den Belegungszuständen (Belegungsmustern) in aufeinanderfolgenden Stufen nicht oder nur teilweise in Rechnung stellen. Verglichen mit Näherungsverfahren nach anderen Prinzipien werden damit die genauesten Ergebnisse erzielt. Der Aufwand ist entsprechend hoch.

2. Die größte Anzahl der vorgeschlagenen Berechnungsverfahren verwendet das in Kapitel V behandelte Näherungsprinzip. Es enthält im Vergleich mit dem unter 1) erwähnten Prinzip die größten Vereinfachungen. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung der Belegungszustände in den einzelnen Stufen werden als voneinander *f u n k t i o n e l l u n a b h ä n g i g* betrachtet (daher müssen bekannte Verteilungstypen angenommen werden), außerdem werden die Belegungszustände in benachbarten Stufen als voneinander *s t a t i s t i s c h u n a b h ä n g i g* angenommen. Dazu kommt noch häufig als weitere Näherungsannahme, daß die Verkehrsbelastung Y gleich dem Verkehrsangebot A sei.

Die in den Kapiteln VI bis IX untersuchten Berechnungsprinzipien sind dadurch gekennzeichnet, daß zwischen den beiden "Extremen", die in den Kapiteln IV und V behandelt sind, Kompromisse geschlossen werden.

3. Verfahren, bei denen auf dem Abnehmerbündel hinter der letzten Stufe die Rekursionsformel für das statistische Gleichgewicht angesetzt wird, werden in Kapitel VI besprochen. Die dafür benötigte Sperrwahrscheinlichkeit wird entweder rein kombinatorisch bestimmt und ist nur von der Struktur des Systems und von der momentanen Gesamtzahl an Belegungen abhängig, oder sie wird in Abhängigkeit von der Belastung des Systems ermittelt (es wären noch weitere Arten möglich).

4. In Kapitel VII werden Verfahren diskutiert, welche die funktionelle Abhängigkeit zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen in den einzelnen Abschnitten eines Systems nur teilweise berücksichtigen. Die Wege, wie diese Abhängigkeit erfaßt wird, sind dabei sehr unterschiedlich.

5. Eine weitere Möglichkeit (Kapitel VIII) besteht darin, die mehrstufige Koppelanordnung zu vergleichen mit einem einstufigen System, das eine entsprechend gewählte Erreichbarkeit besitzt, nämlich die sog. "effektive Erreichbarkeit des Linksystems" (oder näherungsweise die mittlere Erreichbarkeit). Dadurch wird die Berechnung von Linksystemen auf die Berechnung von einstufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit zurückgeführt.

6. Das letzte Näherungsprinzip (Kapitel IX) teilt die gesamte Blockierung auf in zwei oder mehr voneinander unabhängig angenommene Komponenten (Eingangsblockierung, Zwischenblockierung und Abnehmerblockierung) und verwendet zur Berechnung der Abnehmerblockierung eine Modifikation der in Kapitel VIII eingeführten mittleren Erreichbarkeit.

III. EXAKTE BERECHNUNG

III.1 Allgemeines

Die exakte Berechnung von Linkssystemen führt auf ein lineares System von Gleichungen für die Zustandswahrscheinlichkeiten. Mathematisch gesehen sind die Zustandswahrscheinlichkeiten die zeitinvarianten "End"-wahrscheinlichkeiten eines ein- oder mehrdimensionalen Markoff-Prozesses mit einer endlichen Anzahl von Zuständen. Wir sagen, das System befinde sich im statistischen Gleichgewicht. Wenn die Lösung des Systems der Zustandsgleichungen gefunden ist, kann die Verlustwahrscheinlichkeit leicht durch Linearkombination aus bestimmten Zustandswahrscheinlichkeiten gewonnen werden.

Infolge der riesigen Anzahl möglicher Zustände eines Systems macht erstens die Aufstellung des linearen Gleichungssystems und zweitens vor allem dessen numerische Auswertung erhebliche Schwierigkeiten. Selbst mit Relaxationsmethoden zur Lösung der Gleichungssysteme - mit großen Digitalrechnern kann man Systeme mit etwa 10^5 Unbekannten gerade noch rechnen - können bis jetzt nur sehr kleine zweistufige Anordnungen exakt berechnet werden, die kaum Bedeutung für die Praxis haben.

Aus der Literatur sind zwei Verfahren bekannt /17/, /38/, die sich mit der exakten Berechnung befassen.

III.2 Bascharin, G.P.: Derivation of Equations of State for Two-Stage Telephone Circuits with Losses (1960).

2.1 Übersicht

Bascharin hat ein Verfahren zur exakten Berechnung zweistufiger Systeme für Mischwahl entwickelt für den Fall, daß den Koppelvielfachen in der ersten Stufe Zufallsverkehr erster Art angeboten wird und die Ausgänge dieser Koppelvielfache zufallsmäßig abgesucht werden.

Zunächst leitet er den allgemeinsten Fall (mit beliebig auf die Zubringerteilgruppen aufgeteiltem Angebot) ab und betrachtet dann den Sonderfall mit gleichverteiltem Angebot und zufallsmäßigem Absuchen. Dadurch kann der Grad des Gleichungssystems erheblich reduziert werden, da jetzt bestimmte Belegungsmuster eines Belegungszustandes mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten und in einer Klasse zusammengefaßt werden können.

2.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Die Struktur eines zweistufigen Linksystems für Mischwahl (ohne Richtungswahl) zeigt Bild III.1.

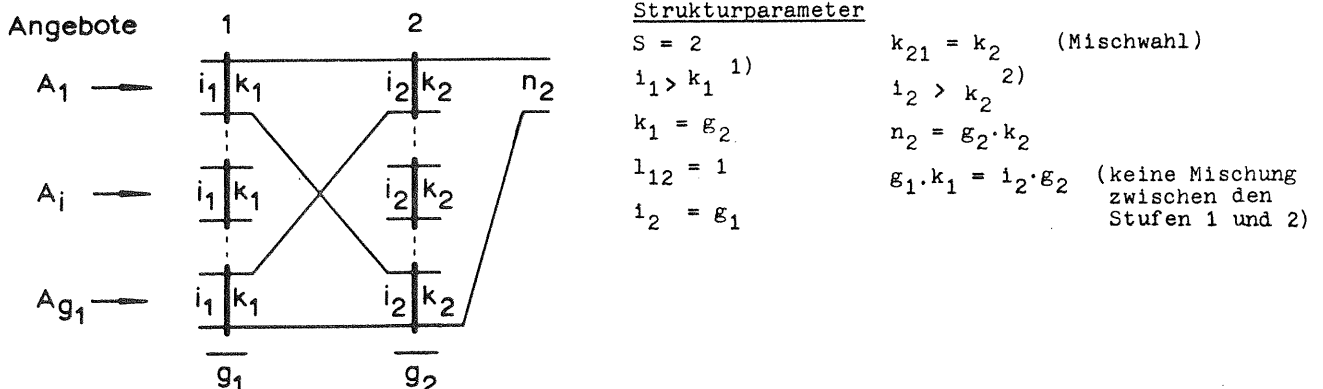


Bild III.1 Zweistufiges Linksystem für Mischwahl

1) Der Fall $i_1 \leq k_1$ kann durch eine analoge Betrachtung behandelt werden.

2) Die Sonderfälle $k_2=1$ und $i_2 \leq k_2$ wurden von Bascharin schon in früheren Arbeiten mit einfacheren Methoden behandelt.

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Angebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1 (die Erweiterung für den Fall von ZV2 wurde in /65/ durchgeführt).
- Angebote $A_i = C_{Ai} \cdot h_i = \text{const}$ (vgl. oben); unabhängig vom Belegungszustand des betrachteten Koppelvielfachs; $i = 1, 2, \dots, g_1$.
- Belegungsdauern negativ exponentiell verteilt; Mittelwerte h_i ($i = 1, 2, \dots, g_1$). Die Belegungsdauer einer Leitung sei unabhängig von den Belegungsdauern anderer Leitungen und unabhängig von den einfallenden Rufen.
- Zufallsmässiges Absuchen der Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1.
- Freiwahl hinter Stufe 2. Die Zustandswahrscheinlichkeiten hängen nicht vom Absuchmodus in der Stufe 2 ab.

Vorgegebene Größen sind:

- Strukturparameter des Systems
- Angebotswerte A_i bzw. die mittleren Anrufraten je Zeiteinheit C_{Ai} ; $i = 1, 2, \dots, g_1$
- Mittlere Belegungsdauern h_i , $i = 1, 2, \dots, g_1$

Gesuchte Größen sind:

- Gesamtverlustwahrscheinlichkeit B bei gleichverteiltem Angebot
- Verlustwahrscheinlichkeiten B_i ($i = 1, 2, \dots, g_1$) je Koppelvielfach in Stufe 1 bei beliebig verteiltem Angebot.

2.3 Die Entwicklung des Verfahrens

2.3.1 Die Beschreibung des Zufallsprozesses

Wir betrachten einen $g_1 \cdot k_1$ -dimensionalen Zufallsprozeß $\xi(t)$, durch den das Verkehrsgeschehen im System beschrieben wird. Es sei:

$$\xi(t) = \left\| \xi_{ij}(t) \right\| \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, g_1 \\ j = 1, 2, \dots, k_1 = g_2 \end{array} \quad (1)$$

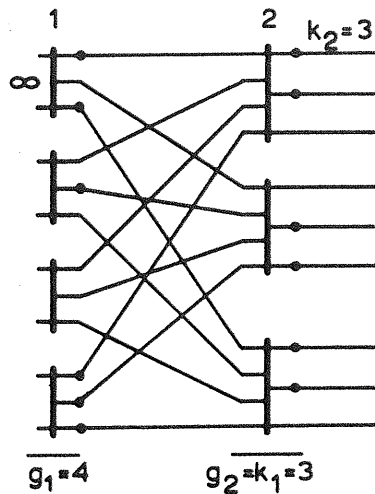
Die Zufallsvariablen $\xi_{ij}(t)$ können zwei verschiedene Werte annehmen:

$$\xi_{ij}(t) = 1 \quad \text{wenn zum Zeitpunkt } t \text{ die Zwischenleitung vom } i\text{-ten Koppelvielfach in Stufe 1 zum } j\text{-ten Koppelvielfach in Stufe 2 belegt ist;}$$

andernfalls $\xi_{ij}(t) = 0$.

Die Realisationen der $g_1 \cdot k_1$ -dimensionalen Zufallsvariablen $\xi(t)$ bedeuten die momentanen Belegungszustände und sind jeweils durch eine Matrix $\|s_{ij}\|$ darstellbar. Deren Elemente haben entweder die Werte 0 oder 1 und stehen für Freisein oder Belegung einer bestimmten Zwischenleitung.

Bild III.2 zeigt irgendein Belegungsmuster in einem System und die dazugehörige Matrix $\|s_{ij}\|$ für die Zwischenleitungen.



	1	2	3 = k ₁ = g ₂
1	1	0	1
2	0	1	0
3	0	0	0
4 = g ₁	1	1	1

• Belegte Leitung

Zur abkürzenden Schreibweise führen wir ein:

$$s_{.j} = \sum_{i=1}^{g_1} s_{ij} \quad (2a)$$

$$s_{i.} = \sum_{j=1}^{k_1} s_{ij} \quad (2b)$$

$$s_{..} = \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{j=1}^{k_1} s_{ij} \quad (2c)$$

Bild III.2 Momentanes Belegungsmuster und zugehörige Matrix $\|s_{ij}\|$.

- $s_{.j}$: Anzahl der Belegungen in der Spalte j
- $s_{i.}$: Anzahl der Belegungen in der Zeile i = Anzahl der belegten Ausgänge im i -ten Koppelvielfach der ersten Stufe
- $s_{..}$: Gesamtzahl der Belegungen im System.

Wegen der für alle betrachteten Strukturen geltenden Vorschriften $i_2 > k_2$ und $g_1 = i_2$ gilt für Gleichung (2a) die Beschränkung:

$$s_{.j} \leq k_2 \quad (3)$$

Gleichung (3) bringt zum Ausdruck, daß maximal k_2 Eingänge je Koppelvielfach in Stufe 2 belegt sein können.

Die Gesamtzahl N verschiedener Belegungsmuster, d.h. verschiedener Matrizen $\|s_{ij}\|$, ist gleich der Anzahl der möglichen Zustände des Systems. Mit der eingangs gemachten Vorschrift $i_1 > k_1$ erhalten wir:

$$N = \left[\sum_{v=0}^{k_2} \binom{g_1}{v} \right]^{g_2} \quad (4)$$

Bemerkung zu Gleichung (4):

In einer Spalte der Matrix seien v Einsen. Dafür sind $\binom{g_1}{v}$ Muster möglich. Nach Gleichung (3) kann v sämtliche Werte zwischen 0 und k_2 annehmen, $0 \leq v \leq k_2$. Somit sind in einer Spalte insgesamt $\sum_{v=0}^{k_2} \binom{g_1}{v}$ Muster denkbar. Da die Matrix g_2 Spalten enthält, können im ganzen System

$$N = \left(\sum_{v=0}^{k_2} \binom{g_1}{v} \right)^{g_2} \quad \text{Belegungszustände auftreten.}$$

Es sei Ω der Wahrscheinlichkeitsraum, in dem der Prozeß $\xi(t)$ definiert ist. Unter der Voraussetzung negativ exponentiell verteilter Belegungsdauern, der Unabhängigkeit der Belegungsdauer einer Leitung von den Belegungsdauern der anderen Leitungen und der Unabhängigkeit der Belegungsdauern von den einfallenden Anrufen folgt, daß der in Ω definierte Prozeß $\xi(t)$ ein homogener Markoff-Prozeß ist (Bascharin).

2.3.2 Übergangswahrscheinlichkeiten

Nun sind die Übergangswahrscheinlichkeiten des Prozesses $\xi(t)$ zu berechnen. Dazu treffen wir die Annahme, daß während eines Zeitintervalls Δt höchstens ein Ruf einfällt oder höchstens eine der bestehenden Belegungen endet. Deshalb kann während Δt die Zahl der bestehenden Be-

legungen um eine zunehmen oder um eine abnehmen oder unverändert bleiben (die Wahrscheinlichkeit für mehr als ein Ereignis während Δt sei klein von höherer Ordnung).

Zunächst definieren wir eine weitere Größe zur Beschreibung der rückwärtigen Sperrung. Es sei v_i die Anzahl jener Ausgänge im Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe, die zwar frei sind, jedoch wegen rückwärtiger Sperrung für einen Verbindungsaufbau nicht in Frage kommen. D.h. einfallende Rufe können nicht in solchen Spalten der Matrix $\|s_{ij}\|$ zu Belegungen führen, in denen bereits k_2 Einsen stehen.

Folgende Bezeichnungen werden eingeführt:

- $P(\|s_{ij}\|, t)$: Wahrscheinlichkeit, daß das System zur Zeit t ($t \geq 0$) im Zustand $\|s_{ij}\|$ ist.
 $P(\|s_{ij}\|, \Delta t, \|u_{ij}\|)$: Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand $\|s_{ij}\|$ in den Zustand $\|u_{ij}\|$ während der Zeit Δt .
 Dabei gilt: $\|s_{ij}\|, \|u_{ij}\| \in \Omega$.
 $P(\|s_{ij}\|, t) = 0$ in jenen Punkten des $g_1 \cdot k_1$ -dimensionalen Raumes, die nicht zur Menge Ω der technisch möglichen Zustandsmuster gehören.

a) Übergang in die Zustandsmatrix $\|s_{ij}\|$ durch Rufeinfall

Im Koppelvielfach Nr. k der ersten Stufe seien s_k Ausgänge belegt und v_k freie Ausgänge rückwärts gesperrt. Also kann durch einen einfallenden Ruf irgendeiner von $k_1 - s_k - v_k$ Ausgängen belegt werden. Mit $C_{Ak} \cdot \Delta t$ bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit für das Einfallen eines Rufes in das betrachtete Koppelvielfach Nr. k der ersten Stufe während des Zeitintervalls Δt .

Der Zustand $\|s_{ij}\|$ kann durch Rufeinfall aus einem "benachbarten niedrigeren" Zustand entstehen, der genau eine Belegung weniger enthält als der betrachtete. Folglich ist $\frac{C_{Ak} \cdot \Delta t}{k_1 - s_k - v_k + 1}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß während Δt ein Ruf in das betrachtete Koppelvielfach einfällt und aus $k_1 - s_k - v_k + 1$ Zwischenleitungen eine bestimmte belegt; dadurch entsteht der Zustand $\|s_{ij}\|$.

Somit gilt für die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P(\|s_{kl} - \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}\|, \Delta t, \|s_{ij}\|) = \frac{C_{Ak} \cdot \Delta t \cdot s_{kl}}{k_1 - s_k - v_k + 1} + O(\Delta t) \quad (5)$$

mit $\delta_{ik} = 0$ für $i \neq k$ $i, k = 1, 2, \dots, g_1$
 $\delta_{ik} = 1$ für $i = k$ $j, l = 1, 2, \dots, k_1$
 $\delta_{jl} = 0$ für $j \neq l$
 $\delta_{jl} = 1$ für $j = l$

Bemerkung zu Gleichung (5)

s_{kl} ist jenes Element in der betrachteten Matrix $\|s_{ij}\|$, welches durch den betrachteten Ruf belegt wurde. Durch $\|s_{kl} - \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}\|$ wird eine Matrix bezeichnet, die sich nur an der Stelle (k, l) durch das Element 0 anstelle von 1 von der Matrix $\|s_{ij}\|$ unterscheidet. Wenn in der Matrix $\|s_{ij}\|$, deren "niedrigere" Nachbarzustände gesucht werden, das Element $s_{kl} = 0$ ist, so würde $(s_{kl} - \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}) = -1$ sein. Solche physikalisch nicht sinnvollen Zustandsmuster werden in Gleichung (5) durch die Multiplikation mit s_{kl} unterdrückt.

b) Übergang in die Zustandsmatrix $\|s_{ij}\|$ durch Belegungsende

Die Zustandsmatrix (kurz Zustand) $\|s_{ij}\|$ kann durch Belegungsende aus einem "benachbarten höheren" Zustand entstehen, welcher genau eine zusätzliche Belegung enthält. $\Delta t/h_k$ ist die Wahrscheinlichkeit für das Enden einer Belegung im Zeitintervall Δt , wenn sie vom Koppelviel-

fach Nr. k in der ersten Stufe ausging. Dabei ist noch zu beachten, daß nur solche "höheren" Zustände betrachtet werden, die der Bedingung Gleichung (3) genügen. Deshalb definieren wir noch eine Hilfsvariable x_1 , die nur zwei Werte annehmen kann und zum Ausblenden der technisch nicht möglichen Zustände dient.

$$x_1 = 1 \text{ für } s_{.1} < k_2$$

$$x_1 = 0 \text{ für } s_{.1} = k_2$$

Ferner könnte durch die Operation $s_{kl} + \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$ ein Element den Wert Zwei erhalten. Solche Fälle werden durch die Multiplikation mit $(1-s_{kl})$ unterdrückt.

Somit gilt für die Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P(\|S_{kl} + \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}\|, \Delta t, \|S_{ij}\|) = \frac{(1-s_{kl}) \cdot x_l}{h_k} \cdot \Delta t + O(\Delta t) \quad (6)$$

Bemerkung: Hier ist s_{kl} jenes Element in der betrachteten Matrix $\|s_{ij}\|$, dessen Belegungszustand im Zeitelement Δt geendet hat.

c) Wahrscheinlichkeit, daß während Δt weder ein erfolgreicher Ruf einfällt noch eine Belegung endet

$$P(\|S_{ij}\|, \Delta t, \|S_{ij}\|) = 1 - \sum_{K=1}^{g_1^*} C_{AK} \cdot \Delta t - \sum_{K=1}^{g_1} \sum_{l=1}^{k_1} \frac{\Delta t}{h_K} \cdot S_{Kl} + O(\Delta t) \quad (7)$$

In der Summe \sum^* sind jene $C_{AK} \cdot \Delta t$ nicht zu addieren, für die $k_1 - s_{.k} - v_k = 0$, denn dann können einfallende Rufe nicht erfolgreich sein. Das heißt jedoch nicht, daß während dieser Zeit keine Rufe in das Koppelpvielfach Nr. k der ersten Stufe einfallen.

2.3.3 Zustandsgleichungen

Mit der Kolmogoroff-Chapman Gleichung für den Markoff-Prozeß (1) und mit den Übergangswahrscheinlichkeiten nach (5) bis (7) erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(\|S_{ij}\|, t + \Delta t) &= \sum_{K=1}^{g_1} \sum_{l=1}^{k_1} P(\|S_{kl} - \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}\|, t) \cdot \frac{C_{AK} \cdot \Delta t \cdot S_{Kl}}{K_1 - S_{K.} - v_K + 1} + \sum_{K=1}^{g_1} \sum_{l=1}^{k_1} P(\|S_{kl} + \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}\|, t) \cdot \frac{(1-s_{kl}) \cdot x_l}{h_K} \cdot \Delta t \\ &+ P(\|S_{ij}\|, t) \cdot \left(1 - \sum_{K=1}^{g_1^*} C_{AK} \cdot \Delta t - \sum_{K=1}^{g_1} \sum_{l=1}^{k_1} \frac{S_{Kl}}{h_K} \cdot \Delta t \right) + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (8)$$

Aus (8) ergibt sich mit $\Delta t \rightarrow 0$ das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{dP(\|S_{ij}\|, t)}{dt} &= \sum_{K=1}^{g_1} \sum_{l=1}^{k_1} P(\|S_{kl} - \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}\|, t) \cdot \frac{C_{AK} \cdot S_{Kl}}{K_1 - S_{K.} - v_K + 1} + \sum_{K=1}^{g_1} \sum_{l=1}^{k_1} P(\|S_{kl} + \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}\|, t) \cdot \frac{(1-s_{kl}) \cdot x_l}{h_K} \\ &- P(\|S_{ij}\|, t) \cdot \left(\sum_{K=1}^{g_1^*} C_{AK} + \sum_{K=1}^{g_1} \sum_{l=1}^{k_1} \frac{S_{Kl}}{h_K} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

mit der Anfangsverteilung $P(\|s_{ij}\|, 0)$

und der Bedingung $\sum_{\Omega} P(\|s_{ij}\|, t) = 1$ für $t \geq 0$

Als Lösung des Gleichungssystems (9) erhält man die Wahrscheinlichkeiten $P(\|s_{ij}\|, t)$, die außer von t noch von der vorgegebenen Anfangsverteilung $P(\|s_{ij}\|, 0)$ zur Zeit t=0 abhängen. Diese Lösungen streben jedoch mit $t \rightarrow \infty$ gegen von t und den Anfangswerten unabhängige Werte $p(\|s_{ij}\|)$, die dem folgenden linearen homogenen Gleichungssystem genügen.

$$\sum_{k=1}^{g_1} \sum_{l=1}^{k_1} p(\|s_{kl} - \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}\|) \cdot \frac{c_{AK} \cdot s_{kl}}{k_1 - s_{kl} - v_k + 1} + \sum_{k=1}^{g_1} \sum_{l=1}^{k_1} p(\|s_{kl} + \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}\|) \cdot \frac{(1 - s_{kl}) \cdot x_l}{h_k} - p(\|s_{ij}\|) \cdot \left(\sum_{k=1}^{g_1} c_{AK} + \sum_{k=1}^{g_1} \sum_{l=1}^{k_1} \frac{s_{kl}}{h_k} \right) = 0 \quad (10)$$

mit $\sum_{\Omega} p(\|s_{ij}\|) = 1$ für alle $\|s_{ij}\| \in \Omega$ (11)

Dieses Gleichungssystem gilt also für den stationären Zustand der Linkanordnung, der von A.K. Erlang auch als "Zustand mit statistischem Gleichgewicht" bezeichnet wurde.

Nun kann die Verlustwahrscheinlichkeit B aus den entsprechenden Zustandswahrscheinlichkeiten berechnet werden. Dies wollen wir später an einem Beispiel zeigen.

Das allgemeine Gleichungssystem (10) gestattet, die Zustandswahrscheinlichkeiten und damit die Verlustwahrscheinlichkeit bei gleicher und schiefer Angebotsverteilung sowie bei zufallsmäßigem Absuchen der Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1 zu berechnen. Allerdings ist der Rang N des linearen Gleichungssystems bereits für kleine Systeme so groß, daß die numerische Auswertung selbst mit großen und schnellen Digitalrechnern erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Tabelle III.1 enthält einige Werte für N.

2.4 Sonderfälle zur Reduzierung der Anzahl der Unbekannten

Aus der Matrizenrechnung sind folgende Begriffe übernommen worden:

- Links-äquivalente Matrizen: sie gehen durch Vertauschung von Zeilen auseinander hervor.
- Rechts-äquivalente Matrizen: sie gehen durch Vertauschung von Spalten auseinander hervor.
- Äquivalente Matrizen: sie gehen durch Vertauschung von Zeilen und Spalten auseinander hervor.

Nach der allgemeinen Herleitung untersucht Bascharin einen Sonderfall, der wie folgt charakterisiert ist:

a) Das Angebot an die Koppelvielfache der ersten Stufe soll gleichverteilt sein. Deshalb sind alle jene Zustände gleichwahrscheinlich, die durch Vertauschung der Zeilen auseinander hervorgehen (vgl. Bild III.2). Denn eine Vertauschung der Zeilen in Bild III.2 bedeutet lediglich eine Umnummerierung der Koppelvielfache in Stufe 1, was wegen der Annahme über die Gleichverteilung des Angebots erlaubt ist.

b) Wie bereits erwähnt wurde, gelten alle abgeleiteten Gleichungen für zufallsmäßiges Absuchen der Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1. Daher sind alle Zustände gleichwahrscheinlich, die durch Vertauschung der Spalten auseinander hervorgehen. Denn eine Vertauschung der Spalten in Bild III.2 bedeutet lediglich eine Umnummerierung der Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1, was wegen der Annahme über das zufallsmäßige Absuchen erlaubt ist.

Durch a) und b) zusammen werden die Voraussetzungen der äquivalenten Matrizen erfüllt. Alle Belegungszustände, die in dieselbe Klasse äquivalenter Matrizen fallen, sind gleichwahrscheinlich. Die Ordnungszahl des linearen Gleichungssystems (10) wird dadurch von N auf die Anzahl N_1 verschiedener Klassen äquivalenter Matrizen reduziert.

Bei einfachen, kleinen Systemen sind diese Klassen durch Auszählen der zugehörigen Zustandsmuster bestimmbar (siehe Beispiel in Tabelle III.1). Eine allgemeine Lösung zur Bestimmung der N_1 Klassen äquivalenter Matrizen ist bis jetzt noch nicht bekannt.

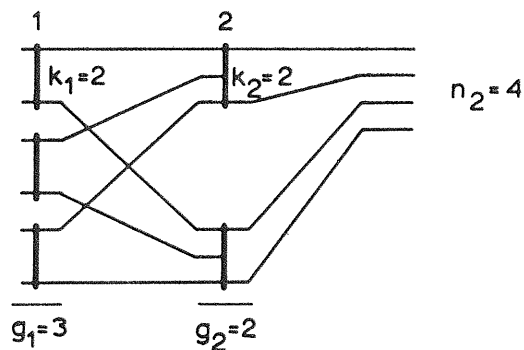
	N	N_1		N	N_1
$g_1 = 3$ $k_1 = g_2 = 2$ $k_2 = 2$	49	9	$g_1 = 6$ $k_1 = g_2 = 3$ $k_2 = 2$	10 648	33
$g_1 = 5$ $k_1 = g_2 = 2$ $k_2 = 2$	256	10	$g_1 = 10$ $k_1 = g_2 = 3$ $k_2 = 2$	175 616	33

Tabelle III.1

Anzahl N von Zustandswahrscheinlichkeiten in Gleichung (10)
 Anzahl N_1 von Klassen äquivalenter Matrizen

2.5 Beispiel zu 2.4

Nach Bascharin wollen wir an einem kleinen zweistufigen System (L 2024 Bild III.3) die Aufstellung des reduzierten Gleichungssystems durchführen.



Daten:

- Angebot gleichverteilt
- Stufe 1 zufallsmäßig abgesucht
- $h_i = h = 1 \rightarrow C_{Ai} = C_A = A$

Bild III.3 System L 2024

Durch einfaches Auszählen finden wir, daß in diesem Fall neun Klassen äquivalenter Matrizen existieren. Wir haben also neun Zustandsklassen, deren einzelne Muster mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten (Zusammenstellung in Tabelle III.2). Aus der allgemeinen Gleichung (10) finden wir neun Gleichungen für die Klassenwahrscheinlichkeiten $p_i (i=1,2,\dots,9)$.

Nr.d.Klasse	s..	Matrix	Anzahl d. Matr. i. d. Klasse	Klassenwahrsch.
1	4	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	3	p_1
2	4	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	6	p_2
3	3	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	12	p_3
4	3	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	6	p_4
5	2	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	3	p_5
6	2	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	6	p_6
7	2	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	6	p_7
8	1	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	6	p_8
9	0	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	1	p_9

N = 49

Tabelle III.2 Zur Berechnung des Systems L2024

Aus Gleichung (10) folgt:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	
-4		A							0
	-4	A	2A						0
4	2	-3-2A		2A	2A	2A			0
	2		-3-2A		A	A			0
		1		-2-2A			A		0
		1	1		-2-3A		A		0
		1	2			-2-3A	A		0
				2	2	2	-1-3A	3A	0
							1	-3A	0

Bemerkung: Die Summe der Elemente in den einzelnen Spalten muß 0 sein (Eigenschaft einer sog. stochastischen Matrix).

Zusätzlich gilt die Bedingung:
$$\sum_{i=1}^g p_i = 1$$

Aus den Klassenwahrscheinlichkeiten p_i berechnet sich die Verlustwahrscheinlichkeit B wie folgt (vgl. Spalte 3 in Tabelle III.2):

$$B = p_1 + p_2 + 1/g_1 \cdot (p_3 + p_4 + p_5)$$

Die numerische Auswertung geschah auf der elektronischen Rechenanlage TR 4. In Diagramm III.1 ist die Verlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Belastung je Abnehmerleitung dargestellt; außerdem sind die Ergebnisse der Tests mit künstlichem Zufallsverkehr eingetragen (ZV 1) .

2.6 Zusammenfassung

Wegen der ungeheuer großen Anzahl von Unbekannten können bis jetzt nur sehr kleine Linksysteme exakt berechnet werden (vgl. Tabelle III.1). Sie sind zwar für die Praxis kaum von Bedeutung, für die Theorie jedoch von großem Interesse.

Zur numerischen Lösung des allgemeinen Gleichungssystems (10), das für Zufallsverkehr erster Art, beliebig verteiltes Angebot und zufallsmäßiges Absuchen der Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1 gilt, wurde ein Algolprogramm geschrieben /65/, welches nach einem Relaxationsverfahren arbeitet. Dadurch können auf der elektronischen Rechenanlage TR 4 Gleichungssysteme mit ungefähr 10^4 Unbekannten gelöst werden.

Die Ausdehnung des Lösungsweges von Bascharin auch auf Zufallsverkehr zweiter Art ist möglich /65/. Dazu definieren wir zusätzlich folgende Größen:

α_{1i} : Anrufrichte je freie Quelle im Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe;
 $i = 1, 2, \dots, g_1.$

$\alpha_i(s_i.)$: Momentane Anrufrichte im Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe, wenn $s_i.$ Belegungen in diesem Koppelvielfach existieren.

Es gilt:

$$\alpha_i(s_i.) = (i_1 - s_i.) \alpha_{1i}$$

In Gleichung (10) ist nun lediglich die Anrufrate C_{Ai} durch die momentane Anrufrichte $\alpha_i(s_i.)$ zu ersetzen. Wenn die Zustandswahrscheinlichkeiten ermittelt sind, können die Zeitblockierung E und die Verlustwahrscheinlichkeit B berechnet werden.

Eine Ausdehnung des Verfahrens auf Systeme mit Richtungswahl und auf Systeme mit mehr als zwei Stufen ist selbstverständlich denkbar. Die theoretischen Schwierigkeiten zur Formulierung des allgemeinen Gleichungssystems und vor allem die Schwierigkeiten bei der numerischen Lösung sind allerdings so groß, daß sie noch nicht bewältigt sind.

III.3. Elldin, A.: On Equations of State for a Two-Stage Link System (1956).
 Some Comments on the Paper "On Equations of State for a
Two-Stage Link System" (1957).

3.1 Übersicht

Im Gegensatz zu der im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Methode von Bascharin ist Elldins Verfahren zur Berechnung von zweistufigen Linksystemen für Richtungswahl nicht im strengsten Sinne als exakt zu bezeichnen ¹⁾. Er arbeitet mit einem System von Gleichungen für die Zustandswahrscheinlichkeiten, betrachtet jedoch nicht die gesamte Koppelanordnung, sondern nur eine sog. Linkeinheit, um den Rechenaufwand zu reduzieren.

3.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Es werden zweistufige Systeme für Richtungswahl berechnet. Skizze des Systems und Bezeichnungen siehe Bild III.4.

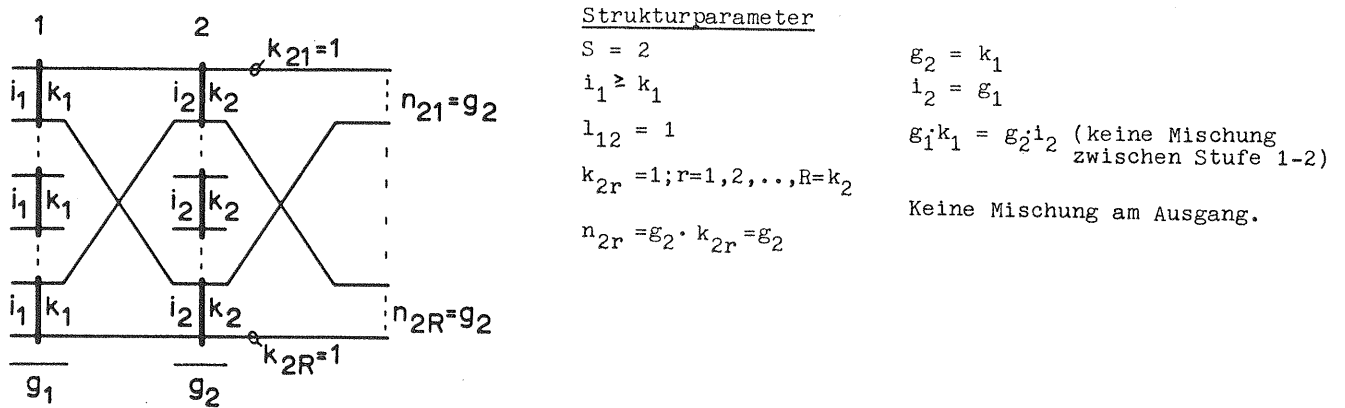


Bild III.4 Zweistufiges Linksystem für Richtungswahl

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Angebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1 oder ZV2
- Zufallsmäßiges Absuchen der Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1
- Angebote je Koppelvielfach in Stufe 1 gleich.

Vorgegebene Größen sind: - Strukturparameter des Systems
 - Rufintensität α_1 je freie Zubringerleitung bei ZV2; Angebot A je Koppelvielfach in Stufe 1 bei ZV1.

Gesuchte Größen sind: - Blockierungswahrscheinlichkeit E und Verlustwahrscheinlichkeit B für das betrachtete Abnehmerbündel.

1) Trotzdem wird dieses Verfahren im Kapitel "Exakte Berechnung" eingereicht, da mit einem System von Gleichungen für die Zustandswahrscheinlichkeiten gearbeitet wird. Deshalb sind der Aufwand, aber auch die Genauigkeit wesentlich höher als bei Methoden, welche stärkere Näherungsannahmen machen. Allerdings ist der Anwendungsbereich des Verfahrens auf sehr einfache zweistufige Strukturen, die in der Praxis selten vorkommen, beschränkt.

Ein unbenutzbares Paar - Zwischenleitung/Abnehmerleitung - kann auf vier verschiedene Arten entstehen:

- $\bar{1}\bar{2}$: Zwischenleitung belegt, entsprechende Abnehmerleitung ist nicht belegt (Verbindung in eine andere Richtung).
- $\bar{1}2$: Zwischenleitung nicht belegt, entsprechende Abnehmerleitung belegt (Belegung von einem anderen Koppelvielfach in Stufe 1).
- 12 : Zwischenleitung belegt, entsprechende Abnehmerleitung belegt (Es handelt sich jedoch um verschiedene Belegungen).
- $\widehat{1}2$: Zwischenleitung belegt, entsprechende Abnehmerleitung belegt (Es handelt sich um dieselbe Belegung).

3.4 Die Entwicklung des Verfahrens

3.4.1 Rufwahrscheinlichkeiten

Vorbemerkung: Damit die Näherungen, die später eingeführt werden, deutlich zu erkennen sind, bezeichnen wir vorläufig mit x_{1i} ($i = 1, 2, \dots, g_1$) die momentane Anzahl der Belegungen im Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe und mit x_{2r} ($r = 1, 2, \dots, R$) die momentane Gleichzeitigkeit im Abnehmerbündel nach Richtung r . Die betrachtete Linkeinheit soll in der ersten Stufe das Koppelvielfach Nr. $i = 1$ enthalten, die betrachtete Richtung habe die Nr. $r = 1$.

- Wahrscheinlichkeit für das Einfallen eines Rufes im Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe während der Zeit dt :

$$\alpha_i(x_{1i}) \cdot dt \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, g_1$$

- Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ruf, der im Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe eintrifft, das Abnehmerbündel Nr. r belegen will, sei δ_{ir} . Dabei gilt

$$\sum_{r=1}^R \delta_{ir} = 1 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, g_1$$

a) Wahrscheinlichkeit für einen **e r f o l g r e i c h e n** Ruf während dt von dem betrachteten Koppelvielfach der ersten Stufe in das betrachtete Abnehmerbündel am Ausgang der zweiten Stufe (Typ $\widehat{1}2$):

$$F(x_1) \cdot dt = \delta_{11} \cdot \alpha_1(x_{11}) \cdot dt \tag{1}$$

b) Wahrscheinlichkeit für einen **e r f o l g r e i c h e n** Ruf während dt ins betrachtete Abnehmerbündel aus den restlichen $(g_1 - 1)$ Koppelvielfachen in Stufe 1, wenn x_{21} Leitungen im betrachteten Abnehmerbündel belegt sind (Typ $\bar{1}2$):

$$D(x_{21}) \cdot dt = \sum_{i=2}^{g_1} \delta_{i1} \cdot \alpha_i(x_{1i}) \cdot dt \cdot \mu_i(k_1 - x_{21} | x_{1i}) \tag{2}$$

Dabei ist $\mu_i(k_1 - x_{21} | x_{1i})$ die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß im i -ten Koppelvielfach der ersten Stufe mindestens einer **j e n e r** $(k_1 - x_{21})$ Ausgänge frei ist, die Zugang zu den $(g_2 - x_{21}) = (k_1 - x_{21})$ freien Abnehmerleitungen der betrachteten Richtung Nr. 1 haben, und zwar dann, wenn gerade x_{1i} Ausgänge dieses Koppelvielfachs belegt sind.

Aus Gleichung (2) ist ersichtlich, daß die Rufintensität $D(x_{21})$ ins betrachtete Abnehmerbündel vom momentanen Belegungszustand in den restlichen $(g_1 - 1)$ Koppelvielfachen der ersten Stufe und von der Position dieser Belegungen, d.h. von den **B e l e g u n g s - m u s t e r n**, abhängt.

Deshalb müssen entweder neben den bereits genannten Zustandsgrößen u , x_1 , x_2 , s weitere Parameter zur Beschreibung des allgemeinen Zustandes eines Systems eingeführt werden, um damit die Durchlaßwahrscheinlichkeit μ_i berechnen zu können, oder Gleichung (2) ist durch

einen einfacheren Ansatz zu approximieren. Elldin schlägt einen Ansatz für diese zweite Möglichkeit vor:

$$D^*(x_{21}) dt = \left\{ \sum_{i=2}^{g_1} \sum_{x_{1i}=0}^{k_1} d_{i1} \cdot \alpha_i(x_{1i}) \cdot [x_{1i}] \right\} dt \cdot \mu(k_1 - x_{21})$$

\longleftarrow \longrightarrow
 mittlere Anrufintensität ins betrachtete
 Bündel aus den restlichen $(g_1 - 1)$ Koppelvielfachen in Stufe 1.

$[x_{1i}]$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß im Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe x_{1i} Ausgänge belegt sind.

$\mu(k_1 - x_{21})$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens einer von jenen $(g_2 - x_{21}) = (k_1 - x_{21})$ Ausgängen in den Koppelvielfachen der ersten Stufe frei ist, welche die freien Ausgänge im betrachteten Bündel erreichen (Bedingung für erfolgreichen Anruf).

Als weitere vereinfachende Annahme wird eingeführt: Die restlichen $(g_1 - 1)$ Koppelvielfache in Stufe 1 haben dieselbe Gleichzeitigkeitsverteilung $[x_1]$ wie das betrachtete Koppelvielfach. Dann erhalten wir (überflüssige Indices weggelassen):

$$D^*(x_2) dt = (g_1 - 1) \cdot d \cdot \sum_{x_1=0}^{k_1} \alpha(x_1) [x_1] dt \cdot \mu(k_1 - x_2) \quad (2a)$$

Die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(k_1 - x_2)$ ergibt sich zu

$$\sigma(k_1 - x_2) = \sum_{x_1=k_1-x_2}^{k_1} [x_1] \cdot \frac{\binom{x_2}{x_1 - (k_1 - x_2)}}{\binom{k_1}{x_1}} \quad (3)$$

Daraus folgt für die Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu(k_1 - x_2)$

$$\mu(k_1 - x_2) = 1 - \sigma(k_1 - x_2)$$

Bemerkung zu Gleichung (3):

Von den x_1 Belegungen eines Koppelvielfachs in der ersten Stufe denken wir uns $(k_1 - x_2)$ auf solchen Zwischenleitungen bestehend, daß gerade die noch freien $(g_2 - x_2) = (k_1 - x_2)$ Abnehmerleitungen blockiert sind. Die restlichen $(x_1 - (k_1 - x_2))$ Belegungen können auf $k_1 - (k_1 - x_2) = x_2$ Positionen noch $\binom{x_2}{x_1 - (k_1 - x_2)}$ Muster bilden. Insgesamt existieren $\binom{k_1}{x_1}$ Muster. Dabei wird die Gleichwahrscheinlichkeit der Muster eines bestimmten Belegungszustands angenommen.

Die Wahrscheinlichkeit $[x_1]$ ergibt sich durch Summation der Zustandswahrscheinlichkeiten $[u, x_1, x_2, s]$ bei konstantgehaltenem x_1 :

$$[x_1] = \sum_{u=x_1}^{k_1} \sum_{x_2=u-x_1}^u \sum_{s=0}^{x_1+x_2-u} [u, x_1, x_2, s] \quad (4)$$

c) Die Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Ruf während dt von dem betrachteten Koppelvielfach in der ersten Stufe nach irgendeiner der n i c h t betrachteten $(k_2 - 1)$ anderen Richtungen (Typ 12), wenn x_{11} Ausgänge in diesem Koppelvielfach belegt sind, ergibt sich zu

$$C(x_{11}) dt = \sum_{r=2}^R d_{1r} \cdot \alpha_r(x_{11}) dt \cdot \tilde{\mu}_r(k_1 - x_{11} / x_{2r}) \quad (5)$$

Dabei ist $\tilde{\mu}_r(k_1 - x_{11} / x_{2r})$ die Wahrscheinlichkeit, daß im Abnehmerbündel Nr. r mindestens eine jener $(k_1 - x_{11}) = (g_2 - x_{11})$ Leitungen frei ist, die von den $(k_1 - x_{11})$ freien Ausgängen des betrach-

teten Koppelvielfachs in der ersten Stufe erreichbar sind, wenn x_{2r} Leitungen in diesem Bündel belegt sind.

Aus Gleichung (5) ist ersichtlich, daß $C(x_{11})$ vom momentanen Belegungszustand in den restlichen (k_2-1) Abnehmerbündeln und von der Lage dieser Belegungen auf den Abnehmerbündeln abhängt.

Analog zu den Gleichungen (2a), (3) und (4) gilt:

$$C^*(x_1) \cdot dt = (1-d) \cdot \alpha(x_1) dt \cdot \bar{\mu}(k_1-x_1) \quad (5a)$$

$$\bar{\mu}(k_1-x_1) = 1 - \bar{\sigma}(k_1-x_1)$$

$$\bar{\sigma}(k_1-x_1) = \sum_{x_2=k_1-x_1}^{k_1} [x_2] \cdot \frac{\binom{x_1}{x_2-(k_1-x_1)}}{\binom{k_1}{x_2}} \quad (6)$$

$$[x_2] = \sum_{u=x_2}^{k_1} \sum_{x_1=u-x_2}^u \sum_{s=0}^{x_1+x_2-u} [u, x_1, x_2, s] \quad (7)$$

3.4.2 Übergangswahrscheinlichkeiten

2.1 Rufeinfall im Zwischenleitungsbündel der betrachteten Zwischenleitungseinheit

2.1.1 Ruf in ein anderes (nicht betrachtetes) Abnehmerbündel belegt eine der (k_1-x_1) freien Zwischenleitungen der betrachteten Zwischenleitungseinheit. Dann sind folgende Fälle denkbar:

a) Es wird irgendeine der $(u-x_1)$ Zwischenleitungen belegt, die zum Typ $\bar{1}\bar{2}$ gehören. Dann entsteht folgender Übergang:

$$\{u, x_1, x_2, s\} \rightarrow \{u, x_1 + 1, x_2, s\} \text{ mit d. Wsch.} \\ C^*(x_1) \cdot dt \cdot \frac{u-x_1}{k_1-x_1} \quad (8)$$

b) Es wird irgendeine der (k_1-u) Zwischenleitungen belegt, die zum Typ $\bar{1}\bar{2}$ gehören.

$$\{u, x_1, x_2, s\} \rightarrow \{u+1, x_1+1, x_2, s\} \text{ mit d. Wsch.} \\ C^*(x_1) \cdot dt \cdot \frac{k_1-u}{k_1-x_1} \quad (9)$$

N.B.: Es ist stets $k_1 = \xi_2 = n_{2r}$; $r = 1, 2, \dots, R$.

2.1.2 Ruf in das betrachtete Abnehmerbündel

Es können nur Paare $\bar{1}\bar{2}$ belegt werden und in Paare $\widehat{1}\widehat{2}$ übergehen.

$$\{u, x_1, x_2, s\} \rightarrow \{u+1, x_1+1, x_2+1, s+1\} \text{ mit d. Wsch.} \\ F(x_1) \cdot dt \quad (10)$$

2.2 Rufeinfall ins betrachtete Abnehmerbündel von anderen Koppelvielfachen der ersten Stufe aus

Irgendeine der (g_2-x_2) freien Abnehmerleitungen kann belegt werden. Folgende Fälle sind denkbar:

- a) Es wird irgendeine der $(u-x_2)$ freien Abnehmerleitungen belegt, die zum Typ $\bar{1}\bar{2}$ gehören.

$$\{u, x_1, x_2, s\} \rightarrow \{u, x_1, x_2+1, s\} \text{ mit d. Wsch.} \quad (11)$$

$$D^*(x_2) \cdot dt \cdot \frac{u-x_2}{g_2-x_2}$$

- b) Es wird irgendeine der (g_2-u) freien Abnehmerleitungen belegt, die zum Typ $\bar{1}\bar{2}$ gehören.

$$\{u, x_1, x_2, s\} \rightarrow \{u+1, x_1, x_2+1, s\} \text{ mit d. Wsch.} \quad (12)$$

$$D^*(x_2) \cdot dt \cdot \frac{g_2-u}{g_2-x_2}$$

2.3 Belegungsende im betrachteten Zwischenleitungsbündel

Voraussetzung: Die Belegungsdauern sind negativ exponentiell verteilt mit der mittleren Belegungsdauer $h=1$.

- a) Ende irgendeiner der $(u-x_2)$ Belegungen, die zu $\bar{1}\bar{2}$ gehören.

$$\{u, x_1, x_2, s\} \rightarrow \{u-1, x_1-1, x_2, s\} \text{ mit d. Wsch.} \quad (13)$$

$$(u - x_2) \cdot dt$$

- b) Ende irgendeiner der (x_1+x_2-u-s) Belegungen, die zu 12 gehören.

$$\{u, x_1, x_2, s\} \rightarrow \{u, x_1-1, x_2, s\} \text{ mit d. Wsch.} \quad (14)$$

$$(x_1+x_2-u-s) \cdot dt$$

- c) Ende irgendeiner der s Belegungen, die zu $\widehat{1}\widehat{2}$ gehören.

$$\{u, x_1, x_2, s\} \rightarrow \{u-1, x_1-1, x_2-1, s-1\} \text{ mit d. Wsch.} \quad (15)$$

$$s \cdot dt$$

2.4 Belegungsende im betrachteten Abnehmerbündel

- a) Ende irgendeiner der $(u-x_1)$ Belegungen, die zu $\bar{1}2$ gehören.

$$\{u, x_1, x_2, s\} \rightarrow \{u-1, x_1, x_2-1, s\} \text{ mit d. Wsch.} \quad (16)$$

$$(u-x_1) \cdot dt$$

- b) Ende irgendeiner der (x_1+x_2-u-s) Belegungen, die zu 12 gehören.

$$\{u, x_1, x_2, s\} \rightarrow \{u, x_1, x_2-1, s\} \text{ mit d. Wsch.} \quad (17)$$

$$(x_1+x_2-u-s) \cdot dt$$

3.4.3 Allgemeine Zustandsgleichung

Nachdem die Übergangswahrscheinlichkeiten (8) - (17) bekannt sind, können wir die Beziehung dafür aufstellen, daß sich das System im Zeitpunkt $(t+dt)$ im Zustand $\{u, x_1, x_2, s\}$ befindet.

$$\begin{aligned}
 [u, x_1, x_2, s]_{t+dt} &= [u, x_1, x_2, s]_t \cdot (1 - (F(x_1) + C^*(x_1) + D^*(x_2)) \cdot dt - (x_1 + x_2 - s) \cdot dt) \\
 &+ [u, x_1 - 1, x_2, s]_t \cdot C^*(x_1 - 1) \cdot dt \cdot \frac{u - x_1 + 1}{k_1 - x_1 + 1} + [u - 1, x_1 - 1, x_2, s]_t \cdot C^*(x_1 - 1) \cdot dt \cdot \frac{k_1 - u + 1}{k_1 - x_1 + 1} \\
 &+ [u, x_1, x_2 - 1, s]_t \cdot D^*(x_2 - 1) \cdot dt \cdot \frac{u - x_2 + 1}{g_2 - x_2 + 1} + [u - 1, x_1, x_2 - 1, s]_t \cdot D^*(x_2 - 1) \cdot dt \cdot \frac{g_2 - u + 1}{g_2 - x_2 + 1} \\
 &+ [u - 1, x_1 - 1, x_2 - 1, s - 1]_t \cdot F(x_1 - 1) \cdot dt + [u, x_1 + 1, x_2, s]_t \cdot (x_1 + 1 + x_2 - u - s) \cdot dt \\
 &+ [u + 1, x_1 + 1, x_2, s]_t \cdot (u + 1 - x_2) \cdot dt + [u, x_1, x_2 + 1, s]_t \cdot (x_1 + 1 + x_2 - u - s) \cdot dt \\
 &+ [u + 1, x_1, x_2 + 1, s]_t \cdot (u + 1 - x_1) \cdot dt + [u + 1, x_1 + 1, x_2 + 1, s + 1]_t \cdot (s + 1) \cdot dt
 \end{aligned}$$

Daraus folgt unter der Voraussetzung der Stationarität - statistisches Gleichgewicht, Zeitinvarianz der Zustandswahrscheinlichkeiten - d.h. mit der Bedingung

$$\frac{[u, x_1, x_2, s]_{t+dt} - [u, x_1, x_2, s]_t}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned}
 &[u, x_1, x_2, s] \cdot (F(x_1) + C^*(x_1) + D^*(x_2)) - [u, x_1 + 1, x_2, s] \cdot (x_1 + 1 + x_2 - u - s) - [u + 1, x_1 + 1, x_2, s] \cdot (u - x_2 + 1) \\
 &- [u, x_1, x_2 + 1, s] \cdot (x_1 + 1 + x_2 - u - s) - [u + 1, x_1, x_2 + 1, s] \cdot (u - x_1 + 1) - [u + 1, x_1 + 1, x_2 + 1, s + 1] \cdot (s + 1) = \\
 &= [u, x_1 - 1, x_2, s] \cdot C^*(x_1 - 1) \cdot \frac{u - x_1 + 1}{k_1 - x_1 + 1} + [u - 1, x_1 - 1, x_2, s] \cdot C^*(x_1 - 1) \cdot \frac{k_1 - u + 1}{k_1 - x_1 + 1} \\
 &+ [u, x_1, x_2 - 1, s] \cdot D^*(x_2 - 1) \cdot \frac{u - x_2 + 1}{g_2 - x_2 + 1} + [u - 1, x_1, x_2 - 1, s] \cdot D^*(x_2 - 1) \cdot \frac{g_2 - u + 1}{g_2 - x_2 + 1} \\
 &+ [u - 1, x_1 - 1, x_2 - 1, s - 1] \cdot F(x_1 - 1) - [u, x_1, x_2, s] \cdot (x_1 + x_2 - s)
 \end{aligned}$$

$$0 \leq u < g_2$$

Aus diesem Gleichungssystem können mit $\sum_u \sum_{x_1} \sum_{x_2} \sum_s [u, x_1, x_2, s] = 1$ die unbekannt Zustandswahrscheinlichkeiten berechnet werden.

Dabei sind folgende Randbedingungen für die Anrufrichten zu beachten (Verbesserung der Angaben von Elldin):

- a) $u = g_2$: $F(x_1) = 0$ (vgl. Gleichung (1); für $u < g_2$ ist $F(x_1) = f \cdot \alpha(x_1)$)
- b) $u = g_2; x_1 < k_1$: $C_1^*(x_1) \neq 0$
- c) $x_2 = g_2$: $D^*(g_2) = 0$ (vgl. Gleichung (2a); gilt, da $D^*(x_2)$ die Anrufrichte für erfolgreiche Rufe ist)
- d) $u = g_2; x_2 < g_2$: $D^*(x_2) \neq 0$

3.4.4 Bemerkungen zur Wahl von $\alpha(x_1)$

Je nachdem, ob wir dem Linksystem Zufallsverkehr erster Art (ZV1) oder Zufallsverkehr zweiter Art (ZV2) anbieten, gilt nach Elldin:

Für ZV2 und $i_1 \geq k_1$: $\alpha(x_1) = (i_1 - x_1) \cdot \alpha_1$ wobei α_1 die Anrufrichte je freie Quelle ist.

Für ZV1 : $\alpha(x_1) = \alpha = \text{const}$
 $\alpha \cdot i_1 = A$, wegen $h = 1$.

3.4.5 Zeitblockierung E und Rufblockierung B

a) Zeitblockierung E

Für $u = g_2$ sind alle Verbindungswege von dem betrachteten Koppelvielfach der Stufe 1 in die gewünschte Richtung blockiert. Die Blockierungszustände können von folgender Form sein:

$$\{g_2, x_1, x_2, s\}, \{g_2, g_2, x_2, s\}, \{g_2, x_1, g_2, s\}, \{g_2, g_2, g_2, s\}, \{g_2, g_2, g_2, g_2\}.$$

Alle Zustandsmuster mit u belegten "Paaren" können zu einem Zustand $\{u\}$ zusammengefaßt werden. Die Zustandswahrscheinlichkeit für $\{u\}$ sei mit $[u]$ bezeichnet. $[u]$ setzt sich aus den Zustandswahrscheinlichkeiten $[u, x_1, x_2, s]$ wie folgt zusammen:

$$[u] = \sum_{x_1=0}^u \sum_{x_2=u-x_1}^u \sum_{s=0}^{x_1+x_2-u} [u, x_1, x_2, s] \quad (19)$$

Außerdem gilt:

$$\sum_{u=0}^{g_2} [u] = 1 \quad (20)$$

Somit erhalten wir für die Blockierungswahrscheinlichkeit E:

$$E = [g_2] = \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=g_2-x_1}^{g_2} \sum_{s=0}^{x_1+x_2-g_2} [g_2, x_1, x_2, s] \quad (21)$$

b) Rufblockierung B

Laut Definition ist die Rufblockierung B gleich dem Quotienten aus der Anzahl der Verlustrufe und der Anzahl der eingefallenen Rufe. Daher ist für Zufallsverkehr erster Art und $i_1 > k_1$

$$B = E \quad (22)$$

Für Zufallsverkehr zweiter Art gilt:

Anzahl C_V der Verlustrufe

$$C_V = \sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot \alpha_1 \cdot [x_1] \cdot \tilde{\sigma}(x_1)$$

Anzahl C_A der angebotenen Rufe

$$C_A = \sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot \alpha_1 \cdot [x_1]$$

Damit erhalten wir:

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot [x_1] \cdot \tilde{\sigma}(x_1)}{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot [x_1]} \quad (23)$$

Die Wahrscheinlichkeit $[x_1]$ wird nach Gleichung (4) und die Sperrwahrscheinlichkeit $\tilde{\sigma}(x_1)$ nach Gleichung (6) berechnet.

3.5 Beispiele

Die numerische Auswertung ist nur mit Hilfe eines elektronischen Digitalrechners möglich. Die Rechenzeiten für praktisch interessierende Systeme, wie beispielsweise Nr. L2022 (Bild A.4, Anhang A), werden bei wachsenden Angebotswerten jedoch so groß, daß sie bei weitem die für eine hinreichend genaue Simulation erforderlichen Zeiten auf demselben Rechner übersteigen. Die Rechenergebnisse sind selbstverständlich von grundsätzlichem theoretischem Interesse, z.B. für den Vergleich mit einfacheren Näherungsverfahren. Aus wirtschaftlichen Gründen verbietet sich jedoch die Berechnung von Linksyste men üblicher Größe mit dem hier besprochenen Verfahren.

Nachstehend wird deshalb das sehr kleine zweistufige System L2034 (Bild A.3, Anhang A) betrachtet.

a) $\underline{i_1 = k_1 = 4}$

Die Ergebnisse sind in Diagramm III.2 (Anhang B) zusammengefasst.

Erklärungen: Kurve: Rechenwerte mit Wahl von $\alpha(x_1)$ nach Abschnitt 3.4.4 (ZV2)
Test: Zufallsverkehr zweiter Art mit $Q = 4$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1.

b) $\underline{i_1 > k_1; i_1 = 8}$

Die Ergebnisse sind in Diagramm III.3 (Anhang B) dargestellt.

Erklärungen: Kurve: Rechenwerte mit Wahl von $\alpha(x_1)$ nach Abschnitt 3.4.4 (ZV2).
Test: Zufallsverkehr zweiter Art mit $Q = 8$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1.

c) $\underline{i_1 > k_1}$

Die Ergebnisse sind in Diagramm III.4 (Anhang B) aufgezeichnet.

Erklärungen: Kurve: Rechenwerte mit Wahl von $\alpha(x_1)$ nach Abschnitt 3.4.4 (ZV1).
Test: Zufallsverkehr erster Art.

3.6 Kritische Betrachtung des Verfahrens

Wie bereits angedeutet wurde, ist das Berechnungsverfahren von Elldin nicht im strengsten Sinne exakt, da nicht das gesamte Linksyste m betrachtet wird, sondern nur eine Linkeinheit. Dies bedingt eine Reihe von Näherungen:

- a) Die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den Ausgängen der g_1 verschiedenen Koppelvielfache in Stufe 1 wird nicht erfaßt.

- b) Die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den R Abnehmerbündeln der verschiedenen Richtungen wird nicht in Rechnung gestellt.
- c) Die Gesetzmäßigkeit über das Einfallen von **e r f o l g r e i c h e n** Rufen aus den (g_1-1) nicht betrachteten Koppelvielfachen der ersten Stufe in das betrachtete Ausgangsbündel kann nicht genau berücksichtigt werden (vgl. Gleichung (2) und (2a)), da hierfür die (nicht berechenbaren) momentanen Belegungszustände in diesen Koppelvielfachen und deren Belegungsmuster benötigt würden. Deshalb unterstellt Elldin näherungsweise, daß die (g_1-1) nicht betrachteten Koppelvielfache in Stufe 1 dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung wie das betrachtete Koppelvielfach besitzen. Außerdem nimmt er die Gleichwahrscheinlichkeit aller Muster eines bestimmten Belegungszustandes an (kombinatorische Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_2)$ in Gleichung (3)).
- d) Die Gesetzmäßigkeit über das Einfallen von erfolgreichen Rufen aus dem betrachteten Koppelvielfach in Stufe 1 nach den nicht betrachteten (k_2-1) Abnehmerbündeln kann ebenfalls nur näherungsweise erfaßt werden, da sie von den momentanen Belegungszuständen in diesen Abnehmerbündeln und von deren Belegungsmuster abhängt. Wie in Punkt c) ausgeführt wurde, wird auch hier die Gleichheit der Gleichzeitigkeitsverteilungen auf allen R Abnehmerbündeln und die Gleichwahrscheinlichkeit aller Belegungsmuster eines gewissen Belegungszustandes angenommen.

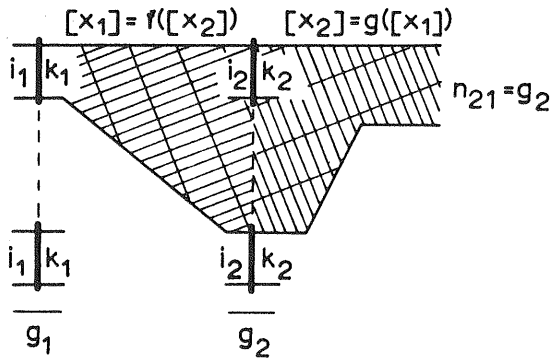
Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Abhängigkeit des Verkehrs, der über die betrachtete Zwischenleitungseinheit fließt, von dem Verkehr über die anderen Verbindungswege des Systems nur näherungsweise erfaßt werden kann. Bei einer streng exakten Lösung müßten wir das System der Zustandsgleichungen für die gesamte Linkanordnung aufstellen. Dazu wären weitere Parameter erforderlich, und damit würde der bereits jetzt erhebliche Aufwand - besonders auch die Rechenzeiten für die numerische Auswertung auf Digitalrechnern - enorm ansteigen. Die noch zu erwartende Steigerung der Genauigkeit rechtfertigt diesen Aufwand nicht.

Die Auswirkungen der einzelnen Näherungsannahmen auf das numerische Ergebnis können nicht angegeben werden; jedoch ist zu vermuten, daß die Näherungen a) und b) von geringem Einfluß sind.

IV. FUNKTIONELLE ABHÄNGIGKEIT UND TEILWEISE ODER VOLLSTÄNDIGE STATISTISCHE UNABHÄNGIGKEIT

IV.1 Allgemeines

Das erste Prinzip zur näherungsweise Berechnung der Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit von Linksystemen berücksichtigt die funktionelle Abhängigkeit zwischen den Verteilungen auf den Zwischenleitungsbündeln und auf den Abnehmerbündeln. Dies soll an Bild IV.1 erläutert werden.



Funktionelle Abhängigkeit heißt, daß die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl x_1 von belegten Zwischenleitungen eine Funktion jener Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, welche die Anzahl x_2 der belegten Abnehmerleitungen beschreibt und umgekehrt. Oder anders ausgedrückt: Die Wahrscheinlichkeit $[x_1]$ ist eine Funktion f der Wahrscheinlichkeit $[x_2]$ bzw. die Wahrscheinlichkeit $[x_2]$ ist eine Funktion g der Wahrscheinlichkeit $[x_1]$. Im Bild ist dies durch gekreuzte Schraffuren dargestellt.

Bild IV.1 Funktionelle Abhängigkeit

Damit die Schwierigkeiten bei der Berechnung - vor allem der Umfang der numerischen Auswertung - nicht zu groß werden, machen die in diesem Kapitel behandelten Verfahren teilweise oder vollständig von einer zusätzlichen Vereinfachung Gebrauch, nämlich von der Näherungsannahme der statistischen Unabhängigkeit der Belegungszustände.

Betrachten wir beispielsweise die Zustände $\{x_1$ Linkleitungen in der betrachteten Zwischenleitungseinheit belegt $\}$ (vgl. Bild IV.1) und $\{x_2$ Abnehmerleitungen im betrachteten Abnehmerbündel belegt $\}$, so sind diese Belegungszustände offensichtlich voneinander statistisch abhängig, denn ein Teil der x_2 Belegungen wird über die betrachteten Zwischenleitungen durchgeschaltet (für das gesamte System bedeutet dies, daß die Summe aller Belegungen auf den Zwischenleitungen stets gleich der Summe aller Belegungen auf sämtlichen Abnehmerleitungen sein muß). Statistische Abhängigkeiten dieser Art werden in den folgenden Verfahren entweder teilweise oder ganz vernachlässigt.

Dennoch kann die funktionelle Abhängigkeit zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen berücksichtigt werden. Dies äußert sich im obigen Beispiel so, daß sich zwar die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Zustände $\{x_1\}$ und $\{x_2\}$ gegenseitig beeinflussen, jedoch die statistische Verträglichkeit zwischen den Belegungszuständen $\{x_1\}$ und $\{x_2\}$ nur teilweise oder überhaupt nicht in Rechnung gestellt wird.

Die später in Kapitel V behandelten Verfahren rechnen vereinfachend mit der Näherungsannahme funktioneller und statistischer Unabhängigkeit.

Die Berücksichtigung der funktionellen Abhängigkeit führt stets auf Gleichungssysteme, die nur mit Iterationsverfahren gelöst werden können.

Soweit durch Vergleich mit Simulationsergebnissen bekannt ist, sind die Verlustwahrscheinlichkeiten, welche nach diesen Verfahren berechnet werden, bis zu hohen Verlustwerten ziemlich genau. Wegen der teilweisen oder vollständigen Vernachlässigung der statistischen Abhängigkeit liegen die berechneten Verluste in der Regel etwas zu hoch, also auf der sicheren Seite.

Im folgenden werden zwei typische Verfahren /43/, /59/ dieser Art behandelt. Dabei wird in /43/ die statistische Abhängigkeit teilweise berücksichtigt, während sie in /59/ ganz vernachlässigt wird.

IV.2 Elldin, A.: On the Dependence between the two Stages in a Link System (1961).

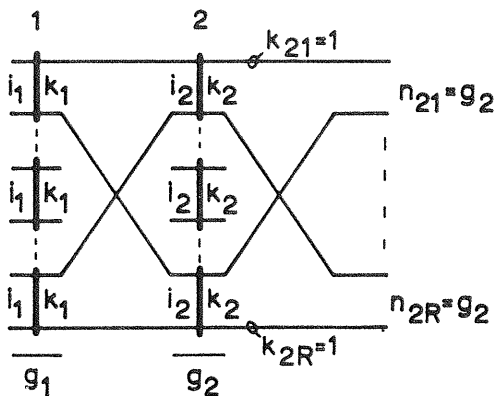
2.1 Übersicht

Elldin berechnet die Blockierungswahrscheinlichkeit E und die Verlustwahrscheinlichkeit B von zweistufigen Linksystemen für Richtungswahl, wenn Zufallsverkehr zweiter Art angeboten wird.

Zunächst behandelt Elldin den allgemeinsten Fall der unsymmetrischen Verteilung des Gesamtangebots auf die Koppelvielfache der ersten Stufe. Daraus leitet er den Sonderfall für gleichverteiltes Angebot ab, dessen numerische Auswertung wesentlich einfacher ist. Der "Eigenbeitrag" eines Koppelvielfachs der ersten Stufe zum Belegungszustand im betrachteten Abnehmerbündel wird in beiden Fällen berücksichtigt.

2.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Die Skizze eines zweistufigen Linksystems für Richtungswahl zeigt Bild IV.2.



Strukturparameter

- $S = 2$
- $i_1 \geq k_1$
- $i_{12} = 1$
- $k_{2r} = 1; r = 1, 2, \dots, R$
- $n_{2r} = g_2; r = 1, 2, \dots, R$
- $g_2 = k_1$
- $i_2 = g_1$
- Keine Mischung zwischen Stufe 1 und 2
- Keine Mischung am Ausgang

Bild IV.2 Zweistufiges Linksystem für Richtungswahl

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Angebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV2 (die Erweiterung für ZV1 ist möglich und wurde durchgeführt)
- Zufallsmäßiges Absuchen der Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1
- Angebot an die Koppelvielfache in Stufe 1 beliebig verteilt.

Gegebene Größen sind:

- Strukturparameter
- Anrufrichte α_{1i} je freie Verkehrsquelle in den Koppelvielfachen der Stufe 1, $i = 1, 2, \dots, g_1$
- Aufteilungsfaktor δ_{ir} für das Verkehrsangebot: Anteil des Angebots an das Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe in Richtung r; $i = 1, 2, \dots, g_1; r = 1, 2, \dots, R$.

Gesuchte Größen sind:

- Blockierungswahrscheinlichkeit E
- Verlustwahrscheinlichkeit B.

2.3 Grundgedanke der Lösung

Anstelle des gesamten Linksystems wird nur eine Linkeinheit betrachtet (vgl. Bild IV.3 und die Ausführungen Kapitel III., Abschnitt 3.2.1). Die funktionelle Abhängigkeit zwischen den Verteilungen auf dem Zwischenleitungsbündel und auf dem Abnehmerbündel der betrachteten Richtung wird dadurch in Rechnung gestellt, daß im Zustand $\{x_1\}$ die Belegung einer weiteren Zwischenleitung abhängt von der Durchlaßwahrscheinlichkeit des nachfolgenden Abnehmerbündels und umgekehrt. Gemäß Abschnitt IV.1 gilt:

$$[x_1] = f([x_2]) ; [x_2] = g([x_1]) \quad (1)$$

Für die numerische Auswertung werden Anfangsverteilungen $[x_1]_0$ und $[x_2]_0$ bekannten Typs vorgegeben, z.B. Erlang-Bernoulli-Verteilung, Erlang-Verteilung usw.

Mit $[x_2]$ und einem kombinatorischen Ansatz werden die Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_1)$ und die Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu(x_1) = 1 - G(x_1)$ im Belegungszustand $\{x_1\}$ des Zwischenleitungsbündels berechnet. Es ist $\mu(x_1)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf, der im Zustand $\{x_1\}$ einfällt, über eine freie Zwischenleitung auch eine Abnehmerleitung belegen kann. In ähnlicher Weise folgen aus $[x_1]$ die Werte $G^*(x_2)$ und $\mu^*(x_2)$. Dabei bedeutet $\mu^*(x_2)$ die Wahrscheinlichkeit, daß zu einer freien Leitung des betrachteten Abnehmerbündels auch eine geeignete freie Zwischenleitung verfügbar ist.

Folgender Iterationsprozeß (schematisch) ist deshalb durchzuführen:

1. Die Anfangsverteilungen $[x_1]_0$ und $[x_2]_0$ werden angenommen.
2. Aus $[x_2]_0$ und einem kombinatorischen Ansatz werden die Werte $G(x_1)_0$ und $\mu(x_1)_0$ berechnet.
3. Mit Hilfe des "statistischen Gleichgewichts" für den Verkehr auf den k_1 Leitungen einer Linkeinheit und unter Verwendung von $\mu(x_1)_0$ wird eine verbesserte Verteilung $[x_1]_1$ berechnet.
4. Aus $[x_1]_1$ und einem kombinatorischen Ansatz werden die Werte $G^*(x_2)_1$ und $\mu^*(x_2)_1$ berechnet.
5. Mit Hilfe des "statistischen Gleichgewichts" für den Verkehr auf den g_2 Abnehmerleitungen der betrachteten Richtung wird unter Verwendung von $\mu^*(x_2)_1$ eine verbesserte Verteilung $[x_2]_1$ berechnet.
6. Damit wird gemäß 2. und 3. die Verteilung $[x_1]_2$ berechnet usw.

Der Iterationsprozeß ist beendet, wenn eine vorgeschriebene Genauigkeit erreicht ist:

$$| [x_1]_v - [x_1]_{v-1} | < \epsilon_1 \quad (2a)$$

$$| [x_2]_v - [x_2]_{v-1} | < \epsilon_2 \quad (2b)$$

$$| \sum_{x_1} x_1 \cdot [x_1]_v - \sum_{x_2} x_2 \cdot [x_2]_v | < \epsilon_3 \quad (2c)$$

Aus $[x_1]$ und $[x_2]$ können dann die Zeitblockierung E und die Verlustwahrscheinlichkeit B berechnet werden.

2.4 Entwicklung des Verfahrens, allgemeiner Fall

2.4.1 Verteilung $[x_{1i}]$ auf dem Zwischenleitungsbündel

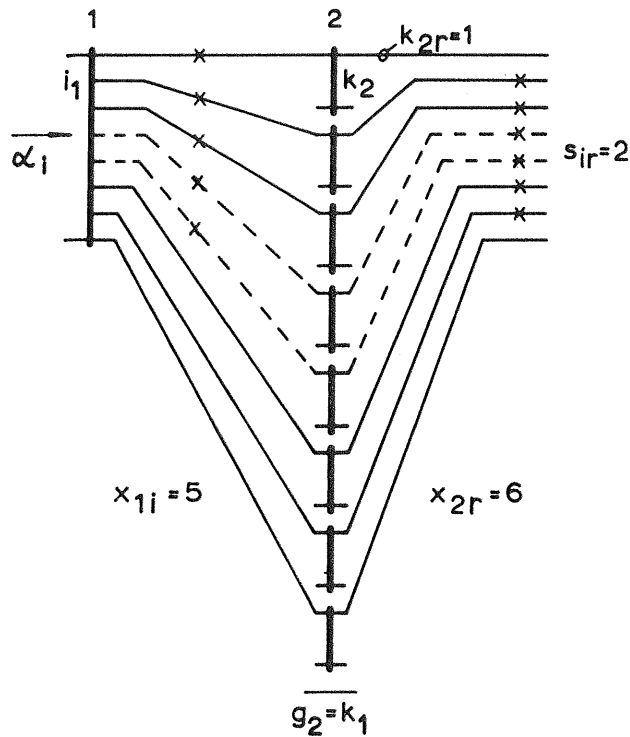


Bild IV.3 Zwischenleitungseinheit

Für stationären Verkehr ergibt sich (mittlere Belegungsdauer $h = 1$) die Zustandsgleichung:

$$[x_{ri}] \cdot (\lambda(x_{ri}) + x_{ri}) = [x_{ri}-1] \cdot \lambda(x_{ri}-1) + [x_{ri}+1] \cdot (x_{ri}+1) \quad (3)$$

Dabei bedeuten:

$$\lambda(x_{ri}) = (i_1 - x_{ri}) \cdot \alpha_{ri} \cdot \mu(x_{ri}) \quad (4)$$

$\lambda(x_{1i})$: Wahrscheinlichkeitsdichte für erfolgreiche Rufe am Eingang des betrachteten Koppelvielfachs Nr. 1 der ersten Stufe im Belegungszustand $\{x_{1i}\}$.

α_{1i} : Anrufrichte je freie Verkehrsquelle = mittlere Anzahl von Rufen je Zeiteinheit aus einer freien Verkehrsquelle in Koppelvielfach Nr. 1 der Stufe 1.

$\mu(x_{1i})$: Durchlaßwahrscheinlichkeit im Belegungszustand $\{x_{1i}\}$.

$$\lambda(x_{1i}) > 0 \quad \text{für } 0 \leq x_{1i} < k_1, \text{ falls } i_1 \geq k_1$$

$$= 0 \quad \text{sonst}$$

$$\lambda(x_{1i}) > 0 \quad \text{für } 0 \leq x_{1i} < i_1, \text{ falls } i_1 < k_1$$

Wenn wir annehmen, daß sämtliche $\binom{k_1}{x_{1i}}$ Belegungsmuster eines Belegungszustands $\{x_{1i}\}$ gleichwahrscheinlich sind, folgt aus Gleichung (3):

$$[x_{ri}] \cdot x_{ri} = [x_{ri}-1] \cdot \lambda(x_{ri}-1)$$

mit Gleichung (4): $[x_{ri}] \cdot x_{ri} = [x_{ri}-1] \cdot (i_1 - (x_{ri}-1)) \cdot \alpha_{ri} \cdot \mu(x_{ri}-1)$

(5)

Aus Gleichung (5) erhalten wir in bekannter Weise mit $\sum_{x_{11}} [x_{11}] = 1$ Gleichung (6a):

$$[x_{ii}] = \frac{\binom{i_1}{x_{ii}} \cdot \alpha_{ii}^{x_{ii}} \cdot \prod_{z=0}^{x_{ii}-1} \mu(z)}{\sum_{\xi=1}^T \binom{i_1}{\xi} \cdot \alpha_{ii}^{\xi} \cdot \prod_{z=0}^{\xi-1} \mu(z)} \quad (6a) \quad [x] = \frac{\binom{i}{x} \cdot \alpha^x}{\sum_{\xi=0}^n \binom{i}{\xi} \cdot \alpha^{\xi}} \quad (6b)$$

$$T = k_1 \quad \text{für} \quad i_1 \geq k_1$$

$$T = i_1 \quad \text{für} \quad i_1 < k_1$$

Die Verteilung gemäß Gleichung (6a) stellt eine "Deformation" der bekannten sogenannten Erlang-Bernoulli-Verteilung in Gleichung (6b) dar. Durch die "deformierenden" Durchlaßwahrscheinlichkeiten $\mu(z)$ wird die funktionelle Abhängigkeit der Verteilung $[x_{11}]$ von den Verteilungen $[x_{2r}]$, $r=1,2,\dots,R$, auf den R Abnehmerbündeln berücksichtigt.

Bestimmung der Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu(x_{11})$:

Im Belegungszustand $\{x_{11}\}$ sind $(k_1 - x_{11})$ Zwischenleitungen in der betrachteten Linkeinheit Nr. 1 frei. Die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(k_1 - x_{11})$ gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein in das betrachtete Koppelvielfach Nr. 1 der Stufe 1 einfallender Ruf nicht durchgeschaltet werden kann (gleichgültig für welche Richtung der Ruf bestimmt war). Es gilt:

$$\sigma(k_1 - x_{ii}) = \sum_{r=2}^{k_2} \left\{ \delta_{ir} \cdot \sum_{s_{ir}=0}^{x_{ii}} [s_{ir}, x_{ii}]_r \cdot [(k_1 - x_{ii}) | s_{ir}]_r \right\} \quad (7)$$

$$\text{und} \quad \mu(k_1 - x_{ii}) = 1 - \sigma(k_1 - x_{ii}) \quad (8)$$

Dabei bedeuten:

- δ_{ir} : Anteil des Gesamtangebots am Angebot an das Koppelvielfach Nr. 1 in Stufe 1 für die Richtung r.
- $[s_{ir}, x_{11}]_r$: Wahrscheinlichkeit, daß s_{ir} der x_{11} Belegungen der betrachteten Linkeinheit in das betrachtete Abnehmerbündel der Richtung r durchgeschaltet sind.
- $[(k_1 - x_{11}) | s_{ir}]_r$: Wahrscheinlichkeit, daß bei Vorhandensein von s_{ir} Direktbelegungen mindestens jene $(k_1 - x_{11}) = (g_2 - x_{11})$ Abnehmerleitungen der betrachteten Richtung Nr. r belegt sind, die von den $(k_1 - x_{11})$ freien Zwischenleitungen erreicht werden.

Für $[s_{ir}, x_{11}]_r$ wird von Elldin eine Binomialverteilung angesetzt:

$$[s_{ir}, x_{ii}]_r = \binom{x_{ii}}{s_{ir}} \cdot \eta_{ir}^{s_{ir}} \cdot (1 - \eta_{ir})^{x_{ii} - s_{ir}} \quad (9)$$

η_{ir} bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, daß eine belegte Zwischenleitung vom Koppelvielfach Nr. 1 in Stufe 1 ins Abnehmerbündel der Richtung r durchgeschaltet ist.

Zur Berechnung von $[(k_1 - x_{11}) | s_{ir}]_r$ betrachten wir Bild IV.3. Damit Blockierung auftreten kann, müssen in dem betrachteten Abnehmerbündel $x_{2r} \geq k_1 - x_{11} + s_{ir}$ Belegungen existieren. Von $(x_{2r} - s_{ir})$ Belegungen denkt sich Elldin $(k_1 - x_{11})$ so "festgehalten", daß sie die freien $(k_1 - x_{11})$ Zwischenleitungen sperren. In dieser Lage können die restlichen $(x_{2r} - s_{ir} - (k_1 - x_{11}))$ Belegungen noch auf $(k_1 - s_{ir} - (k_1 - x_{11}))$ Positionen in

$\binom{k_1 - s_{1r} - (k_1 - x_{11})}{x_{2r} - s_{1r} - (k_1 - x_{11})}$ verschiedenen Mustern auftreten.

Die Gesamtzahl der überhaupt zugelassenen Belegungsmuster im Abnehmerbündel beträgt

$\binom{k_1 - s_{1r}}{x_{2r} - s_{1r}}$. Unter der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit aller Muster aus x_{2r} Belegungen auf $n_{2r} = k_1$ Abnehmerleitungen erhalten wir die momentane Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_{11}, s_{1r} | x_{2r})$:

$$G(x_{11}, s_{1r} | x_{2r}) = \frac{\binom{k_1 - s_{1r} - k_1 + x_{11}}{x_{2r} - s_{1r} - k_1 + x_{11}}}{\binom{k_1 - s_{1r}}{x_{2r} - s_{1r}}} = \frac{\binom{x_{11} - s_{1r}}{k_1 - x_{2r}}}{\binom{k_1 - s_{1r}}{x_{2r} - s_{1r}}} \quad (10)$$

Ferner ist die relative Wahrscheinlichkeit

$$[x_{2r} | s_{1r}] = \frac{[x_{2r}]}{P(x_{2r} \geq s_{1r})} \quad (11)$$

Mit den Gleichungen (10) und (11) ergibt sich für die in Gleichung (7) benötigte Wahrscheinlichkeit $[(k_1 - x_{11}) | s_{1r}]_r$:

$$[(k_1 - x_{11}) | s_{1r}]_r = \sum_{x_{2r} = k_1 - x_{11} + s_{1r}}^{k_1} [x_{2r} | s_{1r}] \cdot \frac{\binom{x_{11} - s_{1r}}{k_1 - x_{2r}}}{\binom{k_1 - s_{1r}}{x_{2r} - s_{1r}}} \quad (12)$$

Zur Bestimmung der Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu(x_{11})$ und damit zur Ermittlung der Verteilungen $[x_{11}]$ nach Gleichung (6a) müssen daher die Verteilungen sämtlicher R Abnehmerbündel, d.h. alle $[x_{2r}]$, $r=1,2,\dots, R=k_2$, bekannt sein. Weiterhin wird sich zeigen, daß auch umgekehrt zur Berechnung der Verteilung $[x_{2r}]$ sämtliche Verteilungen $[x_{11}]$, $i=1,2,\dots, g_1$ verfügbar sein müssen (vgl. Abschnitt IV.2.4.2, Seite 42).

2.4.2 Verteilung $[x_{2r}]$ auf dem Abnehmerbündel

Wie für das Zwischenleitungsbündel wird auch für das Abnehmerbündel der betrachteten Richtung r eine Zustandsgleichung aufgestellt. Entsprechend Gleichung (5) gilt (mittlere Belegungsdauer $h=1$):

$$[x_{2r}] \cdot x_{2r} = [x_{2r} - 1] \cdot L(x_{2r} - 1) \quad (13)$$

Dabei bedeutet $L(x_{2r})$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für erfolgreiche Rufe aus allen g_1 Koppelvielfachen der Stufe 1 in das betrachtete Bündel der Richtung r im Belegungszustand $\{x_{2r}\}$.

Aus Gleichung (13) folgt mit der Bedingung $\sum_{x_{2r}=0}^{g_2} [x_{2r}] = 1$:

$$[x_{2r}] = \frac{\frac{1}{x_{2r}!} \cdot \prod_{z=0}^{x_{2r}-1} L(z)}{\sum_{\xi=1}^{g_2} \frac{1}{\xi!} \prod_{z=0}^{\xi-1} L(z)} \quad (14)$$

Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeitsdichte $L(x_{2r})$ ist exakt nicht möglich, da sie von den unbekanntem Belegungszuständen aller Zwischenleitungseinheiten während des Zustands $\{x_{2r}\}$ im betrachteten Abnehmerbündel abhängt. Elldin leitet deshalb einen Näherungsausdruck für $L(x_{2r})$ her, welcher jedoch für die numerische Auswertung noch zu kompliziert ist. Deshalb schlägt er schließlich folgenden vereinfachten Ansatz vor, der strenggenommen nur für ein Poisson-Angebot, d.h. für ZV1, zulässig wäre. (Die Erweiterung des Elldin-Verfahrens von ZV2 auf ZV1 (Abschnitte 2.6 und 2.7, Seite 49 ff.) zeigt deshalb auch, daß im letzteren Falle dieses Näherungsverfahren wesentlich genauer ist):

$$L(x_{2r}) = A_{2r} \cdot \mu^*(x_{2r}) \quad (15)$$

- A_{2r} : Konstante für das Abnehmerbündel in Richtung r
 $\mu^*(x_{2r})$: Wahrscheinlichkeit für einen erfolgreichen Ruf ins betrachtete Abnehmerbündel im Belegungszustand $\{x_{2r}\}$.

Mit Gleichung (15) folgt aus Gleichung (14):

$$L(x_{2r}) = \frac{A_{2r} \prod_{z=0}^{x_{2r}-1} \mu^*(z)}{x_{2r}!} \quad (16)$$

$$\sum_{\xi=1}^{\infty} \frac{A_{2r}^{\xi} \xi^{-1}}{\xi!} \prod_{z=0}^{\xi-1} \mu^*(z)$$

Die Konstante A_{2r} kann iterativ so gewählt werden, daß die Bedingung erfüllt ist: Gesamte Belastung auf den Zwischenleitungsbündeln = gesamte Belastung auf den Abnehmerbündeln.

$$\sum_{i=1}^{g_1} \sum_{x_{1i}=0}^T x_{1i} \cdot L(x_{1i}) = \sum_{r=1}^{k_2} \sum_{x_{2r}=0}^{g_2} x_{2r} \cdot L(x_{2r}) \quad (17)$$

$$T = k_1 \quad \text{für } i_1 \geq k_1$$

$$T = i_1 \quad \text{für } i_1 < k_1$$

$\mu^*(x_{2r})$ kann formal gleich wie $G(k_1 - x_{11})$ mit Hilfe der Gleichungen (7) und (8) berechnet werden. Im Belegungszustand $\{x_{2r}\}$ sind $(g_2 - x_{2r})$ Abnehmerleitungen in der betrachteten Richtung r frei. Die Sperrwahrscheinlichkeit $G^*(g_2 - x_{2r})$ gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit Rufe mangels geeigneter freier Zwischenleitungen in die betrachtete Richtung r nicht durchgeschaltet werden können, wenn der Belegungszustand $\{x_{2r}\}$ existiert. Analog zu den Gleichungen (7) und (8) gilt:

$$G^*(g_2 - x_{2r}) = \sum_{i=1}^{g_1} \left\{ d_{ir}^* \sum_{s_{ir}=0}^z [s_{ir}, x_{2r}]_i \cdot [(g_2 - x_{2r}) | s_{ir}]_i \right\} \quad (18)$$

$$\mu^*(g_2 - x_{2r}) = 1 - G^*(g_2 - x_{2r}) \quad (19)$$

$$z = \min(x_{2r}, g_2, i_1)$$

d_{ir}^* : Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf für die betrachtete Richtung r aus dem Koppelvielfach Nr. i der Stufe 1 kommt ($\hat{=}$ Anteil der Rufe aus Koppelvielfach Nr. i in Stufe 1 an der Gesamtzahl der Rufe für die betrachtete Richtung Nr.r).

$[s_{ir}, x_{2r}]_i$: Wahrscheinlichkeit, daß s_{ir} der x_{2r} Belegungen der betrachteten Richtung r aus dem betrachteten Koppelvielfach Nr. i der ersten Stufe kommen.

$[(g_2 - x_{2r}) | s_{1r}]_i$: Wahrscheinlichkeit, daß bei Vorhandensein von s_{1r} Direktbelegungen mindestens jene $(g_2 - x_{2r}) = (k_1 - x_{2r})$ Zwischenleitungen der betrachteten Linkeinheit Nr. 1 belegt sind, welche die freien $(g_2 - x_{2r})$ Abnehmerleitungen der betrachteten Richtung Nr. r erreichen könnten.

Für $[s_{1r}, x_{2r}]_i$ wird eine Binomial- oder eine Erlang-Bernoulli-Verteilung angenommen:

$$[s_{1r}, x_{2r}]_i = \binom{x_{2r}}{s_{1r}} \cdot \eta_{1r}^{*s_{1r}} \cdot (1 - \eta_{1r}^*)^{x_{2r} - s_{1r}} \quad (20a)$$

für $i_1 \geq k_1$, immer

für $i_1 < k_1$, falls $x_{2r} \leq i_1$

$$[s_{1r}, x_{2r}]_i = \frac{\binom{x_{2r}}{s_{1r}} \cdot \eta_{1r}^{*s_{1r}} \cdot (1 - \eta_{1r}^*)^{x_{2r} - s_{1r}}}{\sum_{\xi=0}^{i_1} \binom{x_{2r}}{\xi} \cdot \eta_{1r}^{*\xi} \cdot (1 - \eta_{1r}^*)^{x_{2r} - \xi}} \quad (20b)$$

für $i_1 < k_1$, falls $x_{2r} > i_1$

wobei η_{1r}^* die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß eine Belegung im Bündel der Richtung r vom Koppelvielfach Nr. 1 in der ersten Stufe ausgeht. Die Gleichungen (20a, b) sind durch folgende Ungleichungen bedingt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq s_{1r} \leq x_{1i} \leq i_1 \quad \text{für } i_1 < k_1 \\ 0 &\leq s_{1r} \leq x_{1i} \leq k_1 \quad \text{für } i_1 \geq k_1 \\ 0 &\leq s_{1r} \leq x_{2r} \leq g_2 = k_1 \end{aligned} \quad (21)$$

Weiterhin erhalten wir in Analogie zu den Gleichungen (10), (11) und (12):

$$[x_{1i} | s_{1r}] = \frac{[x_{1i}]}{P(x_{1i} \geq s_{1r})} \quad (22)$$

$$[(g_2 - x_{2r}) | s_{1r}]_i = \sum_{x_{1i} = k_1 - x_{2r} + s_{1r}}^T [x_{1i} | s_{1r}] \cdot \frac{\binom{x_{2r} - s_{1r}}{g_2 - x_{1i}}}{\binom{g_2 - s_{1r}}{x_{1i} - s_{1r}}} \quad (23)$$

$$T = k_1 - g_2, \quad \text{für } i_1 \geq k_1$$

$$T = i_1, \quad \text{für } i_1 < k_1.$$

Zur Bestimmung der Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu^*(x_{2r})$ und damit zur Ermittlung der Verteilungen $[x_{2r}]$ nach Gleichung (16) müssen daher die Verteilungen sämtlicher g_1 Zwischenleitungsbündel, d.h. alle $[x_{1i}]$, $i=1, 2, \dots, g_1$, bekannt sein (vgl. Abschnitt IV, 2.4.1, Seite 40). Weiterhin ist für $[x_{2r}]$ notwendig, daß die Faktoren A_{2r} gemäß Gleichung (17) gewählt werden (vgl. Seite 42).

2.4.3 Blockierungswahrscheinlichkeit E

Nun soll die Blockierungswahrscheinlichkeit E_{1r} für die betrachtete Zwischenleitungseinheit Nr. 1 bezüglich der betrachteten Richtung r berechnet werden.

Wahrscheinlichkeit, daß beliebige x_{11} Zwischenleitungen belegt sind: $[x_{11}]$.

Wahrscheinlichkeit, daß mindestens $(k_1 - x_{11})$ bestimmte Abnehmerleitungen im Bündel der betrachteten Richtung belegt sind (nämlich diejenigen, welche von den $(k_1 - x_{11})$ freien Linkleitungen abgesucht werden können):

$$\sum_{s_{1r}=0}^{x_{11}} [s_{1r, x_{11}}]_r \cdot [(k_1 - x_{11}) | s_{1r}]_r \cdot$$

Die zu diesen Wahrscheinlichkeiten gehörenden Belegungszustände (vgl. Abschnitt IV.1, Seite 36) werden als statistisch unabhängig angenommen. Der Einfluß des Eigenbeitrags s_{1r} ist jedoch berücksichtigt.

$$E_{1r} = \sum_{x_{11}=0}^T \left\{ [X_{11}] \cdot \sum_{s_{1r}=0}^{x_{11}} [S_{1r, x_{11}}]_r \cdot [(k_1 - x_{11}) | s_{1r}]_r \right\} \quad (24)$$

$$T = k_1 \quad \text{für } i_1 \geq k_1$$

$$T = i_1 \quad \text{für } i_1 < k_1$$

wobei

$$[x_{11}] \quad \text{nach Gleichung (6a)}$$

$$[s_{1r, x_{11}}]_r \quad \text{nach Gleichung (9)}$$

$$[(k_1 - x_{11}) | s_{1r}]_r \quad \text{nach den Gleichungen (11) und (12)}$$

zu berechnen sind.

2.4.4 Verlustwahrscheinlichkeit B

Entsprechend der Blockierungswahrscheinlichkeit E_{1r} wollen wir noch die zugehörige Verlustwahrscheinlichkeit B_{1r} für die betrachtete Zwischenleitungseinheit Nr. 1 bezüglich der betrachteten Richtung r berechnen.

Mittlere Zahl von Rufen in das Koppelvielfach Nr. 1 der ersten Stufe für Richtung r:

$$C_{A1} = \sum_{x_{11}=0}^T \alpha_{11} \cdot d_{1r} \cdot (i_1 - x_{11}) \cdot [X_{11}]$$

Mittlere Zahl von Verlustrufen aus dem Koppelvielfach Nr. 1 der ersten Stufe in die betrachtete Richtung Nr. r:

$$C_{Vr} = \sum_{x_{11}=0}^T \left\{ \alpha_{11} \cdot d_{1r} \cdot (i_1 - x_{11}) \cdot [X_{11}] \cdot \sum_{s_{1r}=0}^{x_{11}} [S_{1r, x_{11}}]_r \cdot [(k_1 - x_{11}) | s_{1r}]_r \right\}$$

$$\text{Verlustwahrscheinlichkeit } B_{1r} = \frac{C_{Vr}}{C_{A1}}$$

$$B_{ir} = \frac{\sum_{x_{ri}=0}^T \left\{ (i_1 - x_{ri}) \cdot [x_{ri}] \cdot \sum_{s_{ir}=0}^{x_{ri}} [s_{ir}, x_{ri}]_r \cdot [(k_1 - x_{ri}) | s_{ir}]_r \right\}}{\sum_{x_{ri}=0}^T (i_1 - x_{ri}) \cdot [x_{ri}]} \quad (25)$$

$$T = k_1 \quad \text{für } i_1 \geq k_1$$

$$T = i_1 \quad \text{für } i_1 < k_1$$

2.4.5 Durchführung des Iterationsprozesses

In Abschnitt 2.3 (Seite 38) stellten wir den Grundgedanken des Verfahrens dar. Nun wollen wir den Ablauf der einzelnen Iterationsschritte näher betrachten; sie seien durch den Index v gekennzeichnet.

Iterationsprozeß

- a) Die Anfangsverteilungen $[x_{1i}]_0$ ($i = 1, 2, \dots, g_1$) und $[x_{2r}]_0$ ($r = 1, 2, \dots, k_2 = R$) werden mit Hilfe der vorgegebenen Verkehrsparameter α_{1i} berechnet. Es gilt:

$$[x_{1i}]_0 = \frac{\binom{i_1}{x_{1i}} \cdot \alpha_{1i}^{x_{1i}}}{\sum_{\xi=0}^T \binom{i_1}{\xi} \cdot \alpha_{1i}^{\xi}} \quad i = 1, 2, \dots, g_1 \quad (26)$$

$$\text{Für } i_1 \geq k_1 : \quad T = k_1$$

$$\text{Für } i_1 < k_1 : \quad T = i_1$$

Zur Berechnung der Anfangsverteilungen $[x_{2r}]_0$ auf dem Abnehmerbündel müssen zunächst die Anfangswerte $A_{2r,0}$ bestimmt werden.

Bemerkung: Die nachstehende Gleichung (27), die für den Iterationsprozeß notwendig ist, wird am Ende von Abschnitt 2.5 hergeleitet (Seite 48).

$$A_{2r,0} = \sum_{i=0}^{g_1} i_1 \cdot \frac{\alpha_{1i}}{1 + \alpha_{1i}} \cdot \delta_{ir} \quad r = 1, 2, \dots, k_2 = R \quad (27)$$

Mit den Gleichungen (26) und (27) können aus Gleichung (16) die Verteilungen $[x_{2r}]_0$ ermittelt werden.

- b) Nun werden die Verteilungen $[x_{2r}]$ bei gleichbleibender Verteilung $[x_{1i}]$ durch Änderung der Parameter A_{2r} so lange korrigiert, bis Gleichung (17) erfüllt ist (siehe unten).
- c) Mit den dadurch gewonnenen neuen Verteilungen $[x_{2r}]$ werden die verbesserten Verteilungen $[x_{1i}]$ berechnet.
- d) Nun werden die Verteilungen $[x_{2r}]$ wieder so lange korrigiert, bis Gleichung (17) für die neuen Verteilungen $[x_{1i}]$ erfüllt ist.

e) Der Iterationsprozeß wird in dieser Weise so lange fortgesetzt, bis folgende Gleichungen erfüllt sind:

$$| [X_{1i}]_V - [X_{1i}]_{V-1} | < \epsilon_1 \quad (28a)$$

$$| [X_{2r}]_V - [X_{2r}]_{V-1} | < \epsilon_2 \quad (28b)$$

$$\left| \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{x_{1i}=0}^T x_{1i} [X_{1i}]_V - \sum_{r=1}^{k_2} \sum_{x_{2r}=0}^{g_2} x_{2r} [X_{2r}]_V \right| < \epsilon_3 \quad (28c)$$

$$T = k_1 \quad \text{für } i_1 \geq k_1$$

$$T = i_1 \quad \text{für } i_1 < k_1$$

Die Korrektur der Werte A_{2r} geschieht auf folgende Weise: Wir berechnen die Gesamtbelastungen $Y_{G1,V}$ und $Y_{G2,V}$ (V = Nummer des Iterationsschrittes) in den Zwischenleitungs- und Abnehmerleitungs-bündeln (siehe Gleichung (28c)):

$$Y_{G1,V} = \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{x_{1i}=0}^T x_{1i} [X_{1i}]_V \quad (29a)$$

$$Y_{G2,V} = \sum_{r=1}^{k_2} \sum_{x_{2r}=0}^{g_2} x_{2r} [X_{2r}]_V \quad (29b)$$

$$T = k_1 \quad \text{für } i_1 \geq k_1$$

$$T = i_1 \quad \text{für } i_1 < k_1$$

Falls Gleichung (28c) nicht erfüllt ist, werden solange neue Werte $A_{2r,V}$ bestimmt, bis die Schranke ϵ_3 in Gleichung (28c) unterschritten wird. In jedem Fall muß auch Gleichung (30) erfüllt sein:

$$\sum_{r=1}^{k_2} A_{2r,V} = \frac{Y_{G1,V-1}}{Y_{G2,V-2}} \cdot \sum_{r=1}^{k_2} A_{2r,V-1} \quad (30)$$

Gleichung (30) wird am Ende von Abschnitt 2.5 (Seite 49) hergeleitet.

2.5 Der Sonderfall "gleichverteiltes Angebot"

Die numerische Auswertung gemäß Abschnitt 2.4 wird erheblich vereinfacht, wenn jedes Zwischenleitungsbündel dieselben Verkehrsangebote erhält und ferner vollkommen symmetrische Verkehrsaufteilung auf die einzelnen einheitlich großen Abnehmerbündel vorgeschrieben wird. Wir wollen im folgenden zunächst die Symmetriebedingungen formulieren und dann die zu Abschnitt 2.4 korrespondierenden Gleichungen angeben.

Symmetriebedingungen

$$\alpha_{11} = \alpha_1 \quad (31)$$

$$\delta_{1r} = \eta_{1r} = 1/k_2 \quad (32)$$

$$\delta_{1r}^* = \eta_{1r}^* = 1/g_1 \quad (33)$$

$$[x_{11}] = [x_1] \quad (34)$$

$$[x_{2r}] = [x_2] \quad (35)$$

$$E_{1r} = E \quad (36)$$

$$B_{1r} = B \quad (37)$$

Berechnung

Für sämtliche nachstehend aufgeführten Gleichungen gilt stets:

$$T = k_1 \quad \text{für } i_1 \geq k_1$$

$$T = i_1 \quad \text{für } i_1 < k_1$$

$$[x_1] = \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot \alpha_1^{x_1} \prod_{z=0}^{x_1-1} \mu(z)}{\sum_{\xi=1}^T \binom{i_1}{\xi} \cdot \alpha_1^{\xi} \prod_{z=0}^{\xi-1} \mu(z)} \quad (6a^*)$$

$$G(k_1 - x_1) = \sum_{s=0}^{x_1} [s, x_1] \cdot [(k_1 - x_1) | s] \quad (7a)$$

$$\mu(k_1 - x_1) = 1 - G(k_1 - x_1) \quad (8a)$$

$$[s, x_1] = \binom{x_1}{s} \cdot \left(\frac{1}{k_2}\right)^s \cdot \left(1 - \frac{1}{k_2}\right)^{x_1-s} \quad (9a)$$

$$[x_2 | s] = \frac{[x_2]}{P(x_2 \geq s)} \quad (11a)$$

$$[(k_1 - x_1) | s] = \sum_{x_2=k_1-x_1+s}^{k_1} [x_2 | s] \cdot \frac{\binom{x_1-s}{k_1-x_2}}{\binom{k_1-s}{x_2-s}} \quad (12a)$$

$$[x_2] = \frac{\frac{A_2}{x_2!} \prod_{z=0}^{x_2-1} \mu^*(z)}{\sum_{\xi=1}^{\frac{g_2}{\beta}} \frac{A_2}{\xi!} \prod_{z=0}^{\xi-1} \mu^*(z)} \quad (16a)$$

A_2 wird iterativ so bestimmt, daß gilt:

$$g_1 \cdot \sum_{x_1=0}^T x_1 \cdot [x_1] = k_2 \cdot \sum_{x_2=0}^{\frac{g_2}{\beta}} x_2 \cdot [x_2] \quad (17a)$$

$$G^*(g_2 - x_2) = \sum_{s=0}^z [s, x_2] \cdot [(g_2 - x_2) | s] \quad (18a)$$

wo $z = \min(x_2, i_1, g_2)$

$$\mu^*(g_2 - x_2) = 1 - G^*(g_2 - x_2) \quad (19a)$$

$$[s, x_2] = \binom{x_2}{s} \cdot \left(\frac{1}{g_1}\right)^s \cdot \left(1 - \frac{1}{g_1}\right)^{x_2-s} \quad (20a^*)$$

für $i_1 \geq k_1$ und für $i_1 < k_1$, falls $x_2 \leq i_1$

$$[s, x_2] = \frac{\binom{x_2}{s} \left(\frac{1}{g_1}\right)^s \cdot \left(1 - \frac{1}{g_1}\right)^{x_2-s}}{\sum_{\xi=0}^{i_1} \binom{x_2}{\xi} \left(\frac{1}{g_1}\right)^{\xi} \cdot \left(1 - \frac{1}{g_1}\right)^{x_2-\xi}} \quad (20b^*)$$

für $i_1 < k_1$, falls $x_2 > i_1$

$$[x_1 | s] = \frac{[x_1]}{P(x_1 \geq s)} \quad (22a)$$

$$[(g_2 - x_2) | s] = \sum_{x_1=g_2-x_2+s}^T [x_1 | s] \cdot \frac{\binom{x_2-s}{g_2-x_1}}{\binom{g_2-s}{x_1-s}} \quad (23a)$$

$$E = \sum_{x_1=0}^T [x_1] \cdot G(k_1 - x_1) \quad (24a)$$

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^T (i_1 - x_1) \cdot [x_1] \cdot G(k_1 - x_1)}{\sum_{x_1=0}^T (i_1 - x_1) \cdot [x_1]} \quad (25a)$$

Bemerkung zu Gleichung (24a):

Formal betrachtet hat der Ausdruck für E dieselbe Struktur wie bei Jacobaeus (Kapitel V, Abschnitt 2.3.1) und die einzelnen Terme haben dieselbe Bedeutung. Bei Elldin ist jedoch der Eigenbeitrag s eines Koppelvielfachs der Stufe 1 zur Gleichzeitigkeit x_2 und damit teilweise auch die statistische Abhängigkeit der Belegungszustände berücksichtigt. Ferner ist bei

Elldin über die Sperrwahrscheinlichkeiten die Deformation der ursprünglich angenommenen Anfangsverteilungen infolge ihrer gegenseitigen funktionellen Abhängigkeit in Rechnung gestellt.

Der Iterationsprozeß zur numerischen Bestimmung der Verteilungen $[x_1]$ und $[x_2]$ sowie der Blockierungswahrscheinlichkeit E und der Verlustwahrscheinlichkeit B wird wie in Abschnitt 2.4.5 ausgeführt. Anstelle von Gleichung (27) und Gleichung (30) treten die vereinfachten Formen Gleichung (27a) und Gleichung (30a), die wir im folgenden begründen wollen:

$$A_{2,0} = g_1 \cdot i_1 \cdot \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1}{k_2} \quad (27a)$$

$$A_{2,v} = \frac{Y_{G1,v-1}}{Y_{G2,v-1}} \cdot A_{2,v-1} \quad (30a)$$

Zu Gleichung (27a)

Angebot an das Abnehmerbündel der betrachteten Richtung:

$$A_2 = g_1 \cdot \frac{1}{k_2} \cdot \sum_{x_1=0}^T (i_1 - x_1) \cdot \alpha_1 \cdot [x_1] = \frac{g_1}{k_2} \cdot \alpha_1 (i_1 - Y_1) = \frac{g_1}{k_2} \cdot \alpha_1 (i_1 - A_2(1-B))$$

$$A_2 = \frac{g_1 \cdot i_1}{k_2} \cdot \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1(1-B)}$$

Daraus gewinnen wir mit $B = 0$ den Anfangswert

$$A_{20} = g_1 \cdot i_1 \cdot \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} \cdot \frac{1}{k_2} \quad (27a)$$

Zu Gleichung (30a)

Aufgrund der Gleichungen (13) und (15) gilt:

$$Y_2 = A_2(1-E) \quad (38)$$

Nach Gleichung (17) bzw. (28c) sollen die Belastungen im Zwischenleitungsbündel und auf den Abnehmerleitungen gleich sein:

$$g_1 \cdot \sum_{x_1=0}^T x_1 \cdot [x_1] = k_2 \cdot \sum_{x_2=0}^T x_2 \cdot [x_2]$$

$$g_1 \cdot Y_1 = k_2 \cdot Y_2 \quad (39)$$

$$\underbrace{Y_{G1}} = \underbrace{Y_{G2}}$$

wird festgehalten wird durch Iteration erfüllt

Aus Gleichung (38) folgt für den v -ten Iterationsschritt:

$$Y_{2,v} = A_{2,v}(1-E_v)$$

Damit erhalten wir aus (39):

$$k_2 \cdot A_{2,v}(1-E_v) = g_1 \cdot Y_{1,v} \quad (40)$$

Da wir E_v nur aus den noch nicht bekannten Größen $Y_{2,v}$ und $A_{2,v}$ berechnen können, müssen wir als Näherungswert E_{v-1} verwenden. Somit gilt:

$$k_2 \cdot A_{2,v} \cdot \frac{Y_{2,v-1}}{A_{2,v-1}} = g_1 \cdot Y_{1,v-1}$$

$$A_{2,v} = \frac{g_1 \cdot Y_{1,v-1}}{k_2 \cdot Y_{2,v-1}} \cdot A_{2,v-1}$$

$$A_{2,v} = \frac{Y_{G1,v-1}}{Y_{G2,v-1}} \cdot A_{2,v-1}$$

2.6 Beispiele

Die Genauigkeit der Berechnungsmethode wollen wir an den Systemen L2034 und L2022 (Bilder A.3 und A.4, Anhang A) prüfen. Außerdem führen wir an dieser Stelle die Ergebnisse der analogen Lösung für Zufallsverkehr erster Art auf, die von Elldin nicht behandelt wurde (vgl. Abschnitt 2.7).

Die verschiedenen Fälle sind in der folgenden Tabelle erläutert.

System (Anhang A)	Eingangsparameter	Diagramm (Anhang B)	Test
L2034	$i_1 = k_1 = 4$	IV.1	ZV2; Q=4 Quellen je Koppelvielfach
	$i_1 > k_1; i_1 = 8$	IV.2	ZV2; Q=8 Quellen je Koppelvielfach
	$i_1 > k_1$	IV.3	ZV1
L2022	$i_1 < k_1; i_1 = 8$	IV.4	ZV2; Q=8 Quellen je Koppelvielfach
	$i_1 = k_1 = 10$	IV.5	ZV2; Q=10 Quellen je Koppelvielfach
	$i_1 > k_1; i_1 = 15$	IV.6	ZV2; Q=15 Quellen je Koppelvielfach
	$i_1 > k_1$	IV.7	ZV1

Bemerkung zu den Diagrammen IV.1, IV.4 und IV.5:

Wir stellen eine schlechtere Übereinstimmung der Rechenergebnisse mit den Simulationsergebnissen als bei den Diagrammen IV.2, IV.3, IV.6 und IV.7 fest. Grund: Die Quellenzahl ist gleich oder ungefähr gleich der Anzahl von Abnehmerleitungen. Die Rechnung nimmt aber auf dem Abnehmerbündel eine Verteilung mit konstanter Anrufrichte an (vgl. mit der Bemerkung bei der Herleitung, Abschnitt 2.4.2, Gleichung (15), Seite 42).

2.7 Kritische Betrachtung und Erweiterung des Verfahrens

2.7.1 Die hier besprochene Methode von Elldin liefert aus folgenden Gründen unter allen bekannt gewordenen Näherungsverfahren für zweistufige Systeme mit Richtungswahl die genauesten Ergebnisse:

- Es wird die funktionelle Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit Hilfe eines Iterationsprozesses erfaßt.
- Es wird teilweise auch die statistische Abhängigkeit der Belegungszustände im Zwischenleitungsbündel und im Abnehmerbündel erfaßt, und zwar dadurch, daß der Eigenbeitrag eines Koppelvielfachs der ersten Stufe zum Belegungszustand im Abnehmerbündel der betrachteten Richtung mit berücksichtigt wird.

2.7.2 Außerdem ist dieses Verfahren neben den Methoden von Bascharin /38/ und Lotze /51/ das einzige Verfahren, welches auch eine unsymmetrische Verteilung der Angebote auf die Koppelvielfache in der ersten Wahlstufe zuläßt.

2.7.3

- a) Wie die Berechnungsbeispiele (Diagramme IV.1 - IV.7, Anhang B) zeigen, ergibt sich im ganzen Verlustbereich eine sehr gute Übereinstimmung der Rechenwerte mit den Testergebnissen. Die geringe Differenz zwischen Test und Rechnung bei sehr hohen Verlustwahrscheinlichkeiten ist dadurch bedingt, daß in der Rechnung jeweils nur eine Linkeinheit betrachtet und deshalb die statistische Abhängigkeit der Zustandsmuster nicht voll berücksichtigt wird.
- b) Gewisse Einschränkungen in der Anwendbarkeit des Verfahrens ergeben sich aus den Vorschriften bezüglich der Symmetrie der betrachteten Systeme ($k_1=g_2, l_{12}=1$) und aus der Bedingung, daß jedes Koppelvielfach in der zweiten Stufe nur einen Ausgang in die betrachtete Richtung haben darf ($k_{2r}=1; r=1,2,\dots,R$). Um den Rechenaufwand in vernünftigen Grenzen zu halten, kann man auf diese Symmetriebedingungen nicht verzichten.
- c) Als Näherungsannahme ist noch die Anwendung von Gleichung (17) während des Iterationsprozesses zur Korrektur der Angebotswerte $A_{2r,\nu}$ zu erwähnen. Dadurch wird gefordert, daß die mittlere Anzahl von Belegungen im gesamten Zwischenleitungsbündel einerseits und in allen Abnehmerbündeln andererseits gleich groß ist. Dies hat zur Folge, daß die Erwartungswerte der Wahrscheinlichkeitsverteilungen stets richtig sind; die Einzelwahrscheinlichkeiten $[x_1]$ bzw. $[x_2]$ brauchen jedoch nicht exakt der Wirklichkeit zu entsprechen. Wie Elldin selbst feststellt, wäre die Berücksichtigung der Anzahl der Momente im Zwischenleitungsbündel und im Abnehmerleitungsbündel belegten Leitungen genauer, würde jedoch die numerische Auswertung außerordentlich erschweren.

2.7.4 Da Elldin nur eine endliche Anzahl von Verkehrsquellen betrachtet (Zufallsverkehr 2. Art), soll das Verfahren nachstehend für unendliche Quellenzahl (Zufallsverkehr 1. Art) erweitert werden und zwar für die Fälle

- a) $i_1 \geq k_1$ und
- b) $i_1 < k_1$ (abgeschnittener Erlangverkehr).

Das Grundprinzip der Berechnung bleibt erhalten; lediglich die Rekursionsformeln (3) bzw. (5) (Abschnitt 2.4.1) für das statistische Gleichgewicht im Zwischenleitungsbündel und einige daraus resultierende Beziehungen werden sich ändern.

Für Gleichung (5) erhält man:

$$[x_{1i}] \cdot x_{1i} = A_i \cdot [x_{1i-1}] \cdot \mu(x_{1i-1}) \tag{5V}$$

A_i : Angebot an das Koppelvielfach Nr. i in Stufe 1; $i=1,2,\dots,g_1$

Für Gleichung (6a):

$$[x_{1i}] = \frac{A_i^{x_{1i}} \cdot \prod_{z=0}^{x_{1i}-1} \mu(z)}{\sum_{z=1}^{\infty} \frac{A_i^z}{z!} \cdot \prod_{z=0}^{z-1} \mu(z)} \quad \begin{matrix} T=k_1 & \text{für } i_1 \geq k_1 \\ T=i_1 & \text{für } i_1 < k_1 \end{matrix} \tag{6aV}$$

Für Gleichung (25): Fall a)

$$B_{ir} = E_{ir} = \sum_{x_{ii}=0}^{k_1} \left\{ [x_{ii}] \cdot \sum_{s_{ir}=0}^{x_{ii}} [s_{ir}, x_{ii}]_r \cdot [(k_1 - x_{ii}) | s_{ir}]_r \right\} \quad (25V1)$$

$i_1 > k_1$

Fall b)

$$B_{ir} = \frac{\sum_{x_{ii}=0}^{i_1-1} [x_{ii}] \cdot \sum_{s_{ir}=0}^{x_{ii}} [s_{ir}, x_{ii}]_r \cdot [(k_1 - x_{ii}) | s_{ir}]_r}{\sum_{x_{ii}=0}^{i_1-1} [x_{ii}]} \quad (25V2)$$

$i_1 \leq k_1$

Für Gleichung (26):

$$[x_{ii}]_0 = \frac{\frac{A_i^{x_{ii}}}{x_{ii}!}}{\sum_{\xi=0}^T \frac{A_i^\xi}{\xi!}} \quad (26V)$$

Für Gleichung (27):

$$A_{2r,0} = \sum_{i=0}^{g_1} A_i \cdot d_{ir} \quad r=1, 2, \dots, k_2=R \quad (27V)$$

Die Gleichungen in Abschnitt 2.5 für den vollständig symmetrischen Fall können in entsprechender Weise abgeändert werden.

Die Ergebnisse (Test + Rechnung) sind bei den Beispielen im vorhergehenden Abschnitt aufgeführt (Seite 49).

IV.3 Bininda, N. und G. Dalsenberger:

Verlustberechnung bei Zwischenleitungsanordnungen der Vermittlungstechnik (1966).

3.1 Übersicht

Im Gegensatz zu den vorhergehenden Berechnungsverfahren wird hier zunächst der Fall untersucht, daß ein Ruf von einem bestimmten Eingang in Stufe 1 zu einem bestimmten Ausgang in Stufe S (also einem bestimmten Koppelvielfach) nicht durchgeschaltet werden kann ("Punktverlust"). Ob der markierte Ausgang frei oder belegt ist, soll nachstehend ohne Belang sein. Ein Ruf gelte als erfolgreich, wenn das Zielkoppelvielfach in Stufe S, an das der betrachtete Ausgang angeschlossen ist, erreicht wurde.

Betrachtet man nunmehr die i_s Eingänge eines Koppelvielfachs in Stufe S als Abnehmerbündel einer bestimmten Richtung eines nur (S-1)-stufigen Systems, so erhält man mit dem hier besprochenen Verfahren den Bündelverlust dieser (S-1)-stufigen Anordnung.

Auf den einzelnen Zwischenleitungsbündeln werden für die spätere Iteration als Anfangsverteilungen bekannte Verteilungen für vollkommene Bündel angenommen. Die Berücksichtigung der gegenseitigen funktionellen Abhängigkeit der Verteilungen macht anschließend ein Iterationsverfahren notwendig. Abweichend von Elldin /43/ berücksichtigen Bininda und Dalsenberger den "Eigenbeitrag" eines Koppelvielfachs zur momentanen Belegungszahl der nachfolgenden Stufen nicht; sie nehmen also statistische Unabhängigkeit zwischen sämtlichen Belegungszuständen in aufeinanderfolgenden Abschnitten des Systems an. Deshalb liegen die mit diesem Verfahren berechneten Verlustwerte mehr auf der sicheren Seite als bei Elldin.

3.2 Beschreibung des Wegenetzes

Aus allen Zwischenleitungen zwischen erster und letzter Stufe des gesamten Linksystems sind im Belegungszustand "Null" für den Aufbau der gewünschten Verbindung von einem Eingangskoppelvielfach zu einem Zielkoppelvielfach nur eine bestimmte Anzahl von "Wegen" geeignet. Die Gesamtheit dieser geeigneten Wege nennen wir das Wegenetz für den jeweils betrachteten Fall.

In Bild IV.4 ist das zwischen den Punkten T_1 und T_2 gelegene Wegenetz eines vierstufigen Linksystems hervorgehoben. Bild IV.5 zeigt die zum ersten Mal von C.Y. Lee /16/ verwendete Graphendarstellung zur Beschreibung des Wegenetzes, welche wir der Berechnung zugrunde legen. Sie ist dann zweckmäßig, wenn wir (als Näherung) annehmen, daß die einzelnen Abschnitte eines Weges unabhängig voneinander belegt werden.

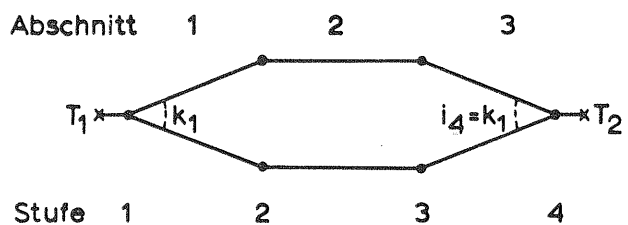
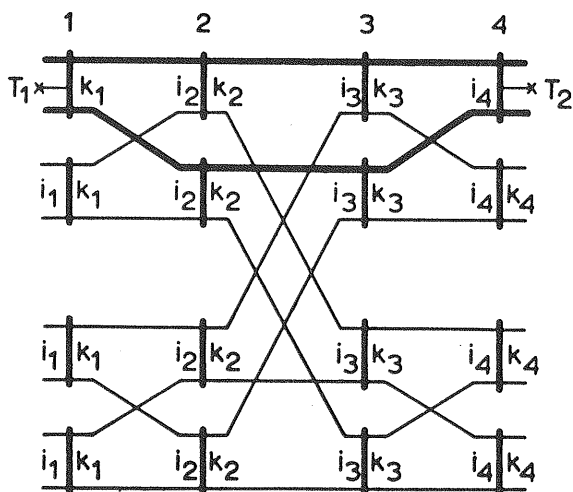


Bild IV.4 4-stufiges Linksystem

Bild IV.5 Wegenetz zu Bild IV.4

3.3 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Es wird entweder der **P u n k t v e r l u s t** - mit anderen Worten die Wahrscheinlichkeit für innere Blockierung - oder die Bündelblockierung bei Richtungswahl für **b e l i e b i g - s t u f i g e** Systeme berechnet. Das betrachtete Wegenetz hat folgende allgemeine Struktur (Bild IV.6):

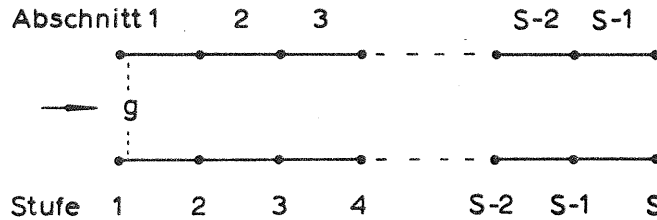


Bild IV.6 Wegenetz

Bininda/Daisenberger geben an, daß die Struktur des Wegenetzes auch komplizierter gewählt werden könnte. Beispielsweise brauchte man sich nicht auf Serien-Parallel-Graphen zu beschränken, sondern könnte vermaschte Wegenetze zulassen.

Strukturparameter

$$S \geq 2$$

$$i_j \geq k_j, \quad j = 1, 2, \dots, S$$

Keine Mischungen zwischen den Stufen

$$l_{j, j+1} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, S-1$$

Das Wegenetz habe die in Bild IV.6 gezeigte Struktur.

Streng genommen müßte der Fall $i_j > k_j$ ausgeschlossen werden, weil bei Koppelvielfachen mit Konzentration jene Belegungsmuster nicht richtig erfaßt werden können, bei denen alle Ausgänge eines Koppelvielfachs belegt sind (Blockierung an den Koppelvielfachen).

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Angebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1
- Zufällsmäßige Auswahl der Wege
- Angebot auf alle Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt.

- Gegebene Größen sind:
- Strukturparameter des Systems, d.h. die Struktur des Wegenetzes
 - Angebotswerte A_j für die Zwischenleitungsbündel Nr. j ($j = 1, 2, \dots, S-1$)
 - Anfangsverteilungen $[x]_{j,0}$ ($j = 1, 2, \dots, S-1$) für die Belegungszustände auf den Zwischenleitungsbündeln.

- Gesuchte Größe ist:
- Blockierungswahrscheinlichkeit E .

3.4 Entwicklung des Verfahrens

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf Bild IV.6.

Bezeichnungen:

- A_j : Angebot für das Zwischenleitungsbündel (im Wegenetz nach Bild IV.6) Nr. j , $j = 1, 2, \dots, S-1$. Für jedes Zwischenleitungsbündel wird eine Zustandsgleichung angesetzt (Gleichung (1)). A_j ist der darin fest vorgegebene Verkehrsparameter.
- $[x]_j$: Wahrscheinlichkeit, daß auf einem Zwischenleitungsbündel Nr. j beliebige x Belegungen existieren; $j = 1, 2, \dots, S-1$; $x = 1, 2, \dots, g$.

k_j : Momentanerreichbarkeit für das Bündel des jeweils betrachteten Wegabschnitts Nr. j. Es bedeutet k_j die Anzahl der über alle anderen Abschnitte durchgehend freien Wege, über welche der betrachtete Wegabschnitt Nr. j erreichbar ist (vgl. Beispiel in Bild IV.7A).

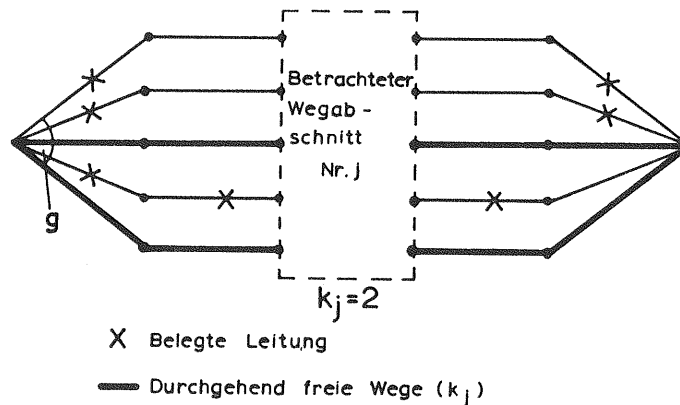


Bild IV.7A Zur Definition der Momentanerreichbarkeit

Die Rechnung ordnet die Abschnitte derart um, daß der jeweils betrachtete Wegabschnitt Nr. j stets der zuletzt erreichte ist. Bild IV.7B zeigt das in Bild IV.7A dargestellte Beispiel in umgeordneter Form.

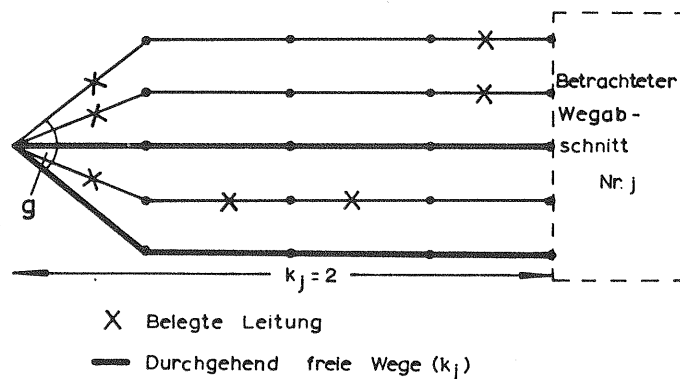


Bild IV.7B Umgeordnetes Wegenetz

$[k_j]$: Wahrscheinlichkeit, daß für das Zwischenleitungsbündel Nr. j die Momentanerreichbarkeit den Wert k_j hat. $[k_j]$ ist eine Funktion der Verteilungen $[x]_v$ mit $v \neq j$.

$G_j(x, k_j)$: Momentane Sperrwahrscheinlichkeit; Wahrscheinlichkeit, daß bei k_j momentan erreichbaren Leitungen des betrachteten Zwischenleitungsbündels Nr. j kein durchgehend freier Weg vorhanden ist, wenn in Abschnitt Nr. j genau x der g Zwischenleitungen belegt sind.

$G_j(x)$: Mittlere Sperrwahrscheinlichkeit; Erwartungswert der momentanen Sperrwahrscheinlichkeit $G_j(x, k_j)$. Es ist $G_j(x)$ die Wahrscheinlichkeit, daß durch das Wegenetz kein freier Weg vorhanden ist, wenn im betrachteten Zwischenleitungsbündel Nr. j genau x Leitungen belegt sind.

Zustandsgleichung für das Zwischenleitungsbündel Nr. j:

$$(x+1) \cdot [x+1]_j = A_j \cdot [x]_j \cdot (1 - G_j(x)) \quad (1)$$

mit $\sum_{x=0}^g [x]_j = 1 ; j = 1, 2, \dots, S-1$

Berechnung von $G_j(x)$

Momentane Sperrwahrscheinlichkeit:

$$\sigma_j(x, k_j) = \frac{\binom{x}{k_j}}{\binom{g}{k_j}} \quad (2)$$

Dieser kombinatorische Ansatz gilt unter der Näherungsannahme, daß alle $\binom{g}{x}$ Belegungsmuster eines bestimmten Belegungszustands $\{x\}$ gleichwahrscheinlich sind.

Somit erhalten wir:

$$\bar{\sigma}_j(x) = E[\sigma_j(x, k_j)] = \sum_{k_j=0}^g \sigma_j(x, k_j) \cdot [k_j] \quad (3)$$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit $[k_j]$

Zunächst muß $[k_j]$ als Funktion der Zustandswahrscheinlichkeiten $[x]_v$ berechnet werden ($v \neq j$). Dazu wird - wie in den Bildern IV.7A,B gezeigt wurde - der betrachtete Wegabschnitt Nr. j als der zuletzt erreichte angesehen.

Wie erwähnt, ist $[k_j]$ die Wahrscheinlichkeit, daß im umgeordneten Wegenetz über (S-2) Abschnitte genau k_j durchgehend freie Wege bis zum betrachteten Abschnitt Nr. j existieren. Falls sämtliche Verteilungen $[x]_v$, $v \neq j$, für die Belegungszustände auf den einzelnen Zwischenleitungsbündeln als bekannt angenommen wären, könnten wir die Wahrscheinlichkeit $[k_j]$ nach der in Kapitel V, Abschnitt 6 dargestellten einfacheren Methode von Bininda/Daisenberger/Didlaukis /58/ ohne Iterationsverfahren berechnen.

In unserem Fall lassen sich die Verteilungen $[x]_v$ durch folgenden Iterationsprozeß ermitteln:

1. Vorgabe von Anfangsverteilungen $[x]_{j,0}$; $j = 1, 2, \dots, S-1$, (z.B. Erlang-Verteilung).
2. Berechnung von $[k_j]$ aus den Anfangsverteilungen $[x]_{v,0}$ ($v \neq j$) nach demselben Verfahren wie in Kapitel V, Abschnitt 6.
3. Berechnung der verbesserten Verteilung $[x]_{j,1}$ nach Gleichung (1) beginnend mit $j=1$ bis $j=S-1$. Dabei werden zur Bestimmung der mittleren Sperrwahrscheinlichkeit $G_j(x)$ in allen anderen (S-2) Abschnitten deren Anfangsverteilungen $[x]_{v,0}$ ($v \neq j$) benötigt.
4. Anschließend wird jeweils für alle j mit den verbesserten Verteilungen $[x]_{j,1}$, $[x]_{j,2}$ usw. die Berechnung von $G_j(x)$ und von $[k_j]$ so lange wiederholt, bis die Verteilungen $[x]_j$ hinreichend genau berechnet sind. Gefordert wird:

$$|[x]_{j,\mu} - [x]_{j,\mu-1}| < \epsilon \quad (4)$$

Bininda/Daisenberger weisen darauf hin, daß die Konvergenz des Verfahrens nicht allgemein bewiesen werden konnte.

Nunmehr sind alle Verteilungen $[x]_j$ ($j = 1, 2, \dots, S-1$) bekannt. Es fehlt noch die Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E, daß kein durchgehend freier Weg über sämtliche (S-1) Abschnitte des Wegenetzes vorhanden ist. Es gilt für alle j:

$$E = \sum_{x=0}^g \sigma_j(x) \cdot Lx_j = \sum_{x=0}^g \sum_{k_j=0}^g \sigma_j(x, k_j) \cdot [k_j] \cdot Lx_j \quad (5)$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der aus den endgültigen Verteilungen $[x]_j$ über alle (S-1) Abschnitte berechneten Wahrscheinlichkeit $[k]$ für $k=0$, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit für "kein durchgehender Weg über alle (S-1) Abschnitte des Wegenetzes ist frei". Die Wahrscheinlichkeit $[k]$ wird formal wie $[k_j]$, jedoch über (S-1) statt über (S-2) Abschnitte, nach dem Verfahren in Kapitel V, Abschnitt 6, berechnet.

3.5 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir je ein Beispiel für die Berechnung des Bündelverlustes und des Punktverlustes betrachten. In den Diagrammen IV.8 und IV.9 ist die Verlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Belastung je Abnehmerleitung dargestellt.

System Anhang A	Diagramm Anhang B	Verlustart	Test
L 2022 Bild A.4	IV.8	Bündelverlust	ZV1
L 3003 Bild A.9	IV.9	Punktverlust	ZV1

Für die Simulation des Punktverlustes wurde ein Programm verwendet, mit dem ein stationärer Verkehr erzeugt wird und zwar so, daß einfallende Rufe irgendeine freie Leitung des gewünschten Abnehmerbündels belegen können (Bündelverkehr). Zusätzlich wurde an zufälligen Zeitpunkten die innere Blockierung durch Stichproben zwischen einem zufällig ausgewählten Paar von Eingang-Ausgang ermittelt. Dabei wurde festgestellt, ob der markierte Ausgang - gleichgültig ob er frei oder belegt war - vom fixierten Eingang aus hätte erreicht werden können.

Die in Diagramm IV.9 eingetragenen Testergebnisse sind die relativen Häufigkeiten dafür, daß das Zielkoppelvielfach in der letzten Stufe nicht erreicht werden kann und der markierte Ausgang entweder frei oder belegt ist.

3.6 Kritische Betrachtung des Verfahrens

a) Der Vergleich der Rechenergebnisse mit den Werten aus Verkehrstests (Diagramm IV.8, Anhang B) zeigt über den ganzen Bereich eine für die Praxis befriedigende Übereinstimmung. Die größeren Abweichungen (relativ 7% - 12%), welche sich bei wachsender Belastung ab etwa $Y_{2r}/n_{2r} = 0,55$ Erl einstellen, sind durch die Annahme der statistischen Unabhängigkeit der Belegungszustände in aufeinanderfolgenden Zwischenleitungsbündeln bedingt. (Die Ergebnisse für Punktverlust werden im Rahmen dieser Arbeit nicht diskutiert).

b) Das Verfahren unterscheidet nicht zwischen Systemen mit $i_j \geq k_j$ ($j=1,2,\dots,S$) in den einzelnen Stufen.

c) Soweit den Ausführungen von Bininda und Daisenberger zu entnehmen ist, werden im Fall der unendlichen Quellenzahl (Zufallsverkehr erster Art) die Angebotswerte A_j für die Zwischenleitungsbündel fest vorgegeschrieben. Wenn sämtliche A_j gleich sind, liefert das Iterationsverfahren aus Symmetriegründen für jedes Zwischenleitungsbündel dieselbe Verteilung und Belastung.

Schreiben wir jedoch unterschiedliche Angebote A_j vor, da auch die Belastungen in den einzelnen Abschnitten unterschiedlich sind, so erhalten wir Wahrscheinlichkeitsverteilungen $[x]_j$ und damit Belastungen Y_j , die nicht unbedingt zutreffen.

3.7 Verbesserung des Verfahrens

Für den Fall unterschiedlicher Belastungen Y_j läßt sich das Verfahren von Bininda und Daisenberger wie folgt verbessern:

Es werden nicht die Angebote A_j , sondern die Belastungen Y_j ($j = 1, 2, \dots, S-1$) auf den einzelnen Abschnitten des Wegenetzes für die Berechnung fest vorgegeben. Über einen weiteren Iterationsprozeß wird das zu einer Belastung Y_j gehörende Angebot A_j jeweils so lange korrigiert, bis die Verkehrswertbilanz der Belastungen Y_j ($j = 1, 2, \dots, S-1$) erfüllt ist, also die vorgegebenen Belastungswerte erreicht sind.

V. FUNKTIONELLE UND STATISTISCHE UNABHÄNGIGKEIT

V.1 Allgemeines

Bei der Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung, wenn wir die in Kapitel IV berücksichtigte funktionelle Abhängigkeit zwischen den Verteilungen in den Zwischenleitungsbündeln und im Abnehmerbündel vernachlässigen. Außerdem wird auch die statistische Abhängigkeit der Belegungszustände in aufeinanderfolgenden Abschnitten eines Systems nicht in Rechnung gestellt.

Statt dessen benutzen die in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren die beiden folgenden Näherungsannahmen: F u n k t i o n e l l e Unabhängigkeit und s t a t i s t i s c h e Unabhängigkeit.

- a) Die Annahme F u n k t i o n e l l e U n a b h ä n g i g k e i t bedeutet, daß zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen in den verschiedenen Abschnitten eines Systems kein f u n k t i o n e l l e r Zusammenhang besteht. Mit anderen Worten: Die Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit für genau x_1 gleichzeitig belegte Linkleitungen angibt, ist beispielsweise bei einem zweistufigen System unabhängig von jener Funktion, welche die Wahrscheinlichkeit angibt, daß genau x_2 Leitungen im Abnehmerbündel einer betrachteten Richtung gleichzeitig belegt sind. Dies ist in Bild V.1 durch Schraffuren angedeutet, welche sich n i c h t kreuzen.

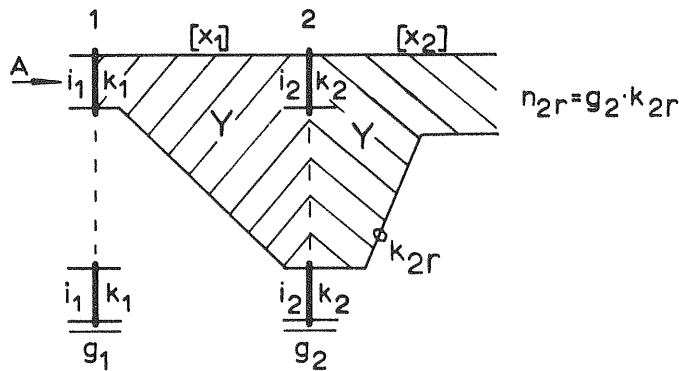


Bild V.1
Funktionelle Unabhängigkeit

Daher verwenden wir bei Näherungsberechnungen dieser Art für die einzelnen Verteilungen bekannte Verteilungstypen, die von einstufigen Koppelanordnungen her bekannt sind, z.B. den Typ der Erlang-Verteilung, der Bernoulli-Verteilung, der Erlang-Bernoulli-Verteilung usw. Je nach der Wahl des Verteilungstyps kann man unter Umständen sehr unterschiedliche numerische Ergebnisse erhalten.

- b) Die Annahme S t a t i s t i s c h e U n a b h ä n g i g k e i t bedeutet, daß man das Auftreten beliebiger Belegungs m u s t e r in den verschiedenen Abschnitten eines Linksystems als voneinander unabhängig behandelt.

Die Näherungsannahmen a) und b) werden in zahlreichen Veröffentlichungen verwendet: /9/, /10/, /11/, /14/, /15/, /16/, /18/, /19/, /23/, /24/, /27/, /29/, /31/, /37/, /49/, /52/, /55/, /58/, /61/.

Bei zweistufigen Systemen lassen sich die Ausdrücke für die Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit oft auf sehr einfache Formeln bringen, die mit bekannten Funktionstafeln ausgewertet werden können, z.B. Palm's Tafeln der Erlang'schen Funktion $E_{1,n}(A)$ (manchmal auch erst nach weiteren Näherungen /9/).

Es ist besonders hervorzuheben, daß Jacobaeus deshalb in seiner grundlegenden Arbeit /9/ und davon ausgehend auch viele spätere Autoren (vgl. Seite 58) zusätzlich die Näherungsannahme "Angebot A gleich Belastung Y" benutzen. Alle mit dieser letztgenannten Näherung behafteten Verfahren können hinreichend wirklichkeitstreue Werte von B und E prinzipiell nur im Bereich von kleinen Verlusten (<2%) liefern.

Alle diese Verfahren werden genauer, wenn statt der Näherung $A = Y$ nur von der Belastung Y ausgegangen wird /10/, /11/, /32/, /55/. In der Regel werden dann Iterationsverfahren erforderlich.

Das Grundprinzip dieser Berechnungsverfahren lässt sich auch auf drei- und mehrstufige Linkssysteme übertragen /52/, /58/.

V.2 Jacobaeus, Chr.: A Study on Congestion in Link Systems (1950).

2.1 Übersicht

Abgesehen von einigen älteren und heute nicht mehr angewandten Verfahren kann die Arbeit von Jacobaeus für die mit numerisch tragbarem Aufwand ausführbaren Methoden der Näherungsberechnung von Blockierungswahrscheinlichkeit und Verlustwahrscheinlichkeit in Linkssystemen als grundlegend angesehen werden.

Der Hauptteil der Arbeit von Jacobaeus behandelt zweistufige Systeme für Richtungswahl, und zwar aufgeteilt in

- Systeme ohne Expansion oder Konzentration in Stufe 1,
- Systeme mit Expansion in Stufe 1, und
- Systeme mit Konzentration in Stufe 1.

Außerdem wird für zweistufige Systeme neben der Blockierungswahrscheinlichkeit E in manchen Fällen auch die Verlustwahrscheinlichkeit B berechnet.

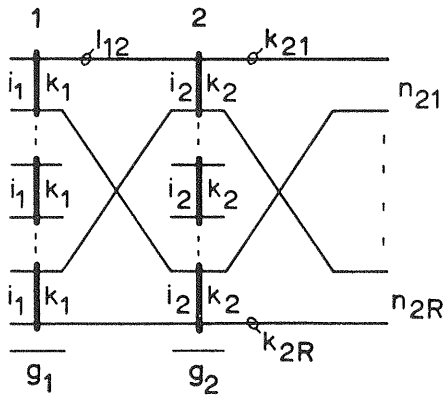
Die Berechnung von Systemen mit einer Mischung hinter der letzten Stufe verwendet die Näherungsmethode von O'Dell für einstufige Mischungen /2/.

Anschließend dehnt Jacobaeus sein Berechnungsprinzip für die Blockierungswahrscheinlichkeit E von Abnehmerbündeln auch auf d r e i stufige Systeme aus. Bei v i e r stufigen Linkssystemen wird dagegen nicht der B ü n d e l verlust, sondern der "P u n k t verlust" berechnet.

In der folgenden Darstellung werden die Jacobaeus-Verfahren für zweistufige (2.2 - 2.8) bzw. für mehrstufige Systeme (2.9 - 2.10) getrennt diskutiert.

2.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter zweistufiger Systeme

Die Berechnungen zweistufiger Linkssysteme werden für Richtungswahl durchgeführt (Bild V.2).



Strukturparameter

- $S = 2$
- $i_1 \geq k_1$
- $l_{12} \geq 1$
- $k_{2r} \geq 1; r=1,2,\dots,R$
- $n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}; r=1,2,\dots,R$

$$g_2 = k_1 / l_{12}$$

$$i_2 = g_1 \cdot l_{12}$$

$$g_1 \cdot k_1 = g_2 \cdot i_2 \text{ (keine Mischung hinter Stufe 1)}$$

Bild V.2 Zweistufiges Linksystm für Richtungswahl

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Verkehrsangebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1 oder ZV2
- Gleichbelastung aller Ausgänge eines Koppelvielfachs in Stufe 1
- Angebot auf alle Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt
- Annahme $A = Y$: die Formeln liefern daher nur für kleine Werte der Blockierungswahrscheinlichkeit brauchbare Ergebnisse.

Gegebene Größen sind:

- Strukturparameter
- Absuchmodus (Belastungsverteilung) im Abnehmerbündel bei $k_{2r} > 1$.
- Angebot A je Koppelvielfach in Stufe 1. Mit A und den gegebenen Strukturparametern sind aufgrund der Näherungsannahme $A = Y$ alle für die numerische Auswertung vorzuschreibenden Verkehrswerte bekannt.

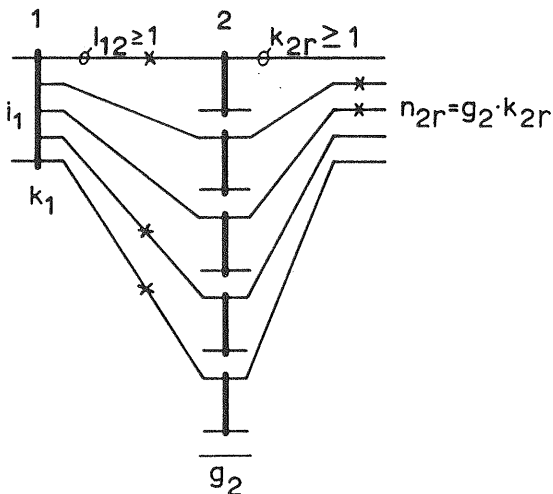
Gesuchte Größen:

- Zeitblockierung E
- Verlustwahrscheinlichkeit B .

2.3 Grundgedanke des Verfahrens und Grundgleichungen

2.3.1 Grundgleichungen

Bild V.3 zeigt eine Zwischenleitungseinheit des Systems aus Bild V.2:



Festsetzung: Da im folgenden stets e i n e bestimmte Richtung r betrachtet wird, kann der Index r weggelassen werden.

Bild V.3
Zwischenleitungseinheit

Im betrachteten Abnehmerbündel seien momentan x_2 Leitungen belegt. Ein Anruf, der in ein Koppelvielfach der ersten Stufe der betrachteten Linkeinheit einfällt, kann dann nicht vermittelt werden, wenn mindestens diejenigen Linkleitungen anderweitig belegt sind, die zu den $(g_2 - x_2)$ Koppelvielfachen in der zweiten Stufe führen, die ihrerseits noch freie Abnehmerleitungen der gewünschten Richtung besitzen. Die Wahrscheinlichkeit dafür sei $[g_2 - x_2]$. Unter der Näherungsannahme der statistischen Unabhängigkeit der Zustände $\{x_2\}$ und $\{g_2 - x_2\}$ erhalten wir für die Blockierungswahrscheinlichkeit E:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} [x_2] \cdot [g_2 - x_2]$$

Zusammenstellung der Grundgleichungen

$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} [x_2] \cdot [g_2 - x_2]$	(1a)
$E = \sum_{x_1=0}^{k_1/l_2} [x_1] \cdot [g_2 - x_1]$	(1b)

- $[x_2]$: Wahrscheinlichkeit, daß in genau x_2 beliebigen Koppelvielfachen der zweiten Stufe sämtliche k_{2r} Ausgänge in das betrachtete Abnehmerbündel der Richtung r belegt sind.
- $[g_2 - x_2]$: Wahrscheinlichkeit, daß mindestens $(g_2 - x_2) \cdot l_{12}$ bestimmte Linkleitungen anderweitig belegt sind (nämlich diejenigen, die zu den Koppelvielfachen in der zweiten Stufe führen, die noch freie Abnehmerleitungen der gewünschten Richtung besitzen).
- $[x_1]$: Wahrscheinlichkeit, daß genau x_1 beliebige Linkbündel der Stärke l_{12} (von einem Koppelvielfach der ersten Stufe zu jedem Koppelvielfach in der zweiten Stufe führen l_{12} Linkleitungen) belegt sind, d.h., daß x_1 beliebige Koppelvielfache in der zweiten Stufe nicht mehr erreicht werden können.
- $[g_2 - x_1]$: Wahrscheinlichkeit, daß in mindestens $(g_2 - x_1)$ bestimmten Koppelvielfachen der zweiten Stufe sämtliche k_{2r} Ausgänge in das betrachtete Abnehmerbündel der Richtung r anderweitig belegt sind (nämlich diejenigen, die von freien Zwischenleitungen noch zu erreichen wären).

Die Gleichungen (1a) und (1b) sind völlig gleichwertig. Es können sich bei der Weiterrechnung höchstens formale Vorteile ergeben, je nachdem, ob man von Gleichung (1a) oder von Gleichung (1b) ausgeht.

Bemerkungen

- a) Obwohl bei Jacobaeus stets mit $A = Y$ gerechnet wird, werden diese beiden Größen in den folgenden Gleichungen getrennt und jeweils ihrem Sinne nach eingesetzt. Die ursprünglichen Gleichungen von Jacobaeus ergeben sich, wenn man $A = Y$ setzt.
- b) Falls nicht ausdrücklich anderes bestimmt wird, gelte der Einfachheit halber im folgenden $k_{2r} = 1$ für alle r, sowie $l_{12} = 1$.

2.3.2 Die Verteilungsfunktionen

Es werden im folgenden drei verschiedene Typen von Verteilungsfunktionen, welche aus der Theorie einstufiger Koppelanordnungen mit vollkommener Erreichbarkeit wohlbekannt sind, als Näherungsfunktionen für die Gleichzeitigkeiten auf Zwischenleitungsbündeln oder auf Abnehmerbündeln von Linksystemen benutzt.

a) Erlang-Verteilung, Zufallsverkehr erster Art

$$[x] = \frac{A^x/x!}{\sum_{v=0}^n A^v/v!} \quad (2)$$

Wahrscheinlichkeit, genau x Leitungen im Bündel mit n Leitungen und dem Angebot A belegt.

b) Erlang-Bernoulli-Verteilung, Zufallsverkehr zweiter Art

$$[x] = \frac{\binom{i_1}{x} (\alpha_1 \cdot h)^x}{\sum_{v=0}^n \binom{i_1}{v} (\alpha_1 \cdot h)^v} \quad (3)$$

Wahrscheinlichkeit, genau x Leitungen im Bündel mit n Leitungen belegt, wenn i_1 Verkehrsquellen jeweils mit der Anrufrichte α_1 vorhanden sind.

Dieser Verteilungstyp wird zweckmäßig dann verwendet werden, wenn die Anzahl der Verkehrsquellen endlich ist, aber merklich größer als die Leitungszahl n des betrachteten Bündels; mit anderen Worten dann, wenn die Gesamtanrufrichte etwa linear von der Anzahl freier Quellen abhängt.

c) Bernoulli-Verteilung

$$[x] = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{Y}{n}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{Y}{n}\right)^{n-x} \quad (4)$$

Diese Verteilung ergibt sich aus b) für das vollkommen erreichbare Bündel mit $n = i_1$.

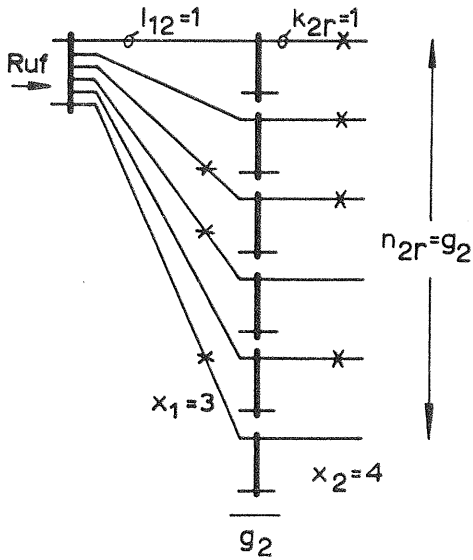
Bemerkung: Jacobaeus verwendet für seine Betrachtungen nur die Erlang-Verteilung gemäß Gleichung (2) und die Bernoulli-Verteilung gemäß Gleichung (4).

2.3.3 Herleitung einiger Beziehungen nach Jacobaeus

Zunächst sollen Formeln für $[g_2-x_2]$ und $[g_2-x_1] = [k_1-x_1]$ in Gleichung (1a) bzw. (1b), d.h. die Wahrscheinlichkeiten für die Belegung von m i n d e s t e n s (g_2-x_2) oder $(g_2-x_1) = (k_1-x_1)$ Leitungen hergeleitet werden.

2.3.3.1 Sperrwahrscheinlichkeit für einen bestimmten Belegungszustand.

Voraussetzung: Sämtliche Belegungsmuster einer bestimmten Gleichzeitigsbelegung seien gleich wahrscheinlich.



Damit ein einfallender Ruf nicht in die betrachtete Richtung r vermittelt werden kann, wenn dort x_2 Abnehmerleitungen belegt sind, müssen mindestens die $(g_2 - x_2)$ "günstigen" Zwischenleitungen anderweitig belegt sein. Im Zwischenleitungsbündel müssen deshalb mindestens $x_1 \geq (g_2 - x_2)$ Belegungen existieren (Bild V.4). Von den x_1 Belegungen denken wir uns $(g_2 - x_2)$ festgehalten, um die "günstigen" Zwischenleitungen zu sperren. Es können also die restlichen $(x_1 - (g_2 - x_2))$ Belegungen auf $(g_2 - (g_2 - x_2))$ Zwischenleitungen noch beliebig angeordnet werden. Insgesamt sind

$$\binom{g_2}{x_1} = \binom{k_1}{x_1} \text{ Muster im Zwischenleitungsbündel}$$

möglich. Damit erhalten wir für die Sperrwahrscheinlichkeit:

Bild V.4 Linkeinheit

$$\sigma(x_1, x_2 = \text{const}) = \frac{\binom{g_2 - (g_2 - x_2)}{x_1 - (g_2 - x_2)}}{\binom{g_2}{x_1}} = \frac{\binom{x_1}{g_2 - x_2}}{\binom{g_2}{x_1}}$$

$$\sigma > 0 \text{ für } x_1 \geq g_2 - x_2$$

$$\sigma = 0 \text{ für } x_1 < g_2 - x_2$$

Analog ergibt sich:

$$\sigma(x_2, x_1 = \text{const}) = \frac{\binom{k_1 - (k_1 - x_1)}{x_2 - (k_1 - x_1)}}{\binom{k_1}{x_2}} = \frac{\binom{x_2}{k_1 - x_1}}{\binom{k_1}{x_2}}$$

$$\sigma > 0 \text{ für } x_2 \geq k_1 - x_1$$

$$\sigma = 0 \text{ für } x_2 < k_1 - x_1$$

2.3.3.2 Somit ergeben sich für die in den Gleichungen (1a,b) benötigten Terme $[g_2 - x_2]$ und $[g_2 - x_1] = [k_1 - x_1]$:

$$[g_2 - x_2] = \sum_{x_1 = g_2 - x_2}^{k_1} \frac{\binom{x_1}{g_2 - x_2}}{\binom{g_2}{g_2 - x_2}} \cdot [x_1] \quad (5a)$$

$$[k_1 - x_1] = \sum_{x_2 = g_2 - x_1}^{g_2} \frac{\binom{x_2}{k_1 - x_1}}{\binom{k_1}{k_1 - x_1}} \cdot [x_2] \quad (5b)$$

2.3.3.3 Spezialisierungen aus den Gleichungen (5a,b) durch Annahme verschiedener Verteilungen.

a) Mit Erlang-Verteilung für $[x_1]$ und $i_1 = k_1$:

Gleichung (2) eingesetzt in Gleichung (5a) ergibt:

$$\begin{aligned}
 [g_2 - x_2] &= \sum_{x_1 = g_2 - x_2}^{k_1} \frac{\binom{x_1}{g_2 - x_2} \cdot \frac{A^{x_1}}{x_1!}}{\sum_{v=0}^{k_1 - g_2 + x_2} \frac{A^v}{v!}} = \sum_{x_1 = g_2 - x_2}^{k_1} \frac{x_1! \cdot (g_2 - x_2)! \cdot x_2! \cdot A^{x_1}}{(g_2 - x_2)! \cdot (x_1 - (g_2 - x_2))! \cdot g_2! \cdot x_1! \cdot \sum_{v=0}^{g_2} \frac{A^v}{v!}} \\
 &= \frac{x_2!}{g_2! \sum_{v=0}^{g_2} \frac{A^v}{v!}} \cdot \sum_{x_1 = g_2 - x_2}^{k_1} \frac{A^{x_1}}{(x_1 - (g_2 - x_2))!}
 \end{aligned}$$

Substitution: $x_1 - (g_2 - x_2) = \xi$
 $x_1 = g_2 - x_2$ für $\xi = 0$
 $x_1 = g_2 - k_1$ für $\xi = x_2$

Somit:

$$[g_2 - x_2] = \frac{x_2!}{g_2! \sum_{v=0}^{g_2} \frac{A^v}{v!}} \cdot \sum_{\xi=0}^{x_2} \frac{A^{\xi + g_2 - x_2}}{\xi!} = \frac{\frac{A^{g_2}}{g_2!} : \sum_{v=0}^{g_2} \frac{A^v}{v!}}{\frac{A^{x_2}}{x_2!} : \sum_{f=0}^{x_2} \frac{A^f}{f!}}$$

$$[g_2 - x_2] = \frac{E_{g_2}(A)}{E_{x_2}(A)} \tag{6a}$$

$$[k_1 - x_1] = \frac{E_{k_1}(A_{2r})}{E_{x_1}(A_{2r})} \tag{6b}$$

Die Gleichungen (6a,b) sind in der Literatur unter dem Namen Palm-Jacobaeus-Formel bekannt.

b) Mit Erlang-Verteilung für $[x_1]$ und $i_1 > k_1$:

Gleichung (2) eingesetzt in Gleichung (5a) ergibt:

$$[g_2 - x_2] = \sum_{x_1 = g_2 - x_2}^{k_1} \frac{\binom{x_1}{g_2 - x_2} \cdot \frac{A^{x_1}}{x_1!}}{\sum_{v=0}^{i_1} \frac{A^v}{v!}} + \sum_{x_1 = k_1 + 1}^{i_1} \frac{\frac{A^{x_1}}{x_1!}}{\sum_{v=0}^{i_1} \frac{A^v}{v!}} \tag{6c}$$

Bemerkung zu Gleichung (6c): Sie gilt nur bei einer Näherungsbetrachtung, welche unterstellt, daß während der Blockierung aller k_1 Ausgänge eines Koppelvielfachs auf den restlichen - nicht durchschaltbaren $(i_1 - k_1)$ Eingängen - weitere Belegungen existieren können. (Summation im Nenner des ersten Terms von 0 bis i_1 und Addition von Term zwei).

c) Mit Bernoulli-Verteilung für $[x_1]$ und $i_1 < k_1$

Gleichung (4) in Gleichung (5a) eingesetzt ergibt:

$$[g_2 - x_2] = \sum_{x_1 = g_2 - x_2}^{i_1} \frac{\binom{x_1}{g_2 - x_2}}{\binom{g_2}{g_2 - x_2}} \cdot \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1}$$

Dabei ist angenommen, daß die Anzahl der Verkehrsquellen pro Koppelvielfach in Stufe 1 gleich der Anzahl i_1 von Eingängen in ein solches Koppelvielfach ist.

Nach einer Umformung ergibt sich:

$$[g_2 - x_2] = P_{E1}^{g_2 - x_2} \cdot \frac{x_2! i_1!}{g_2! (i_1 - (g_2 - x_2))!} = P_{E1}^{g_2 - x_2} \cdot \frac{\binom{i_1}{g_2 - x_2}}{\binom{g_2}{g_2 - x_2}} \quad (7a)$$

d) Mit Bernoulli-Verteilung für $[x_1]$ und $i_1 = k_1$

Aus Gleichung (7a) erhält man mit $i_1 = k_1 = g_2$:

$$[g_2 - x_2] = P_{E1}^{g_2 - x_2} = \left(\frac{Y_1}{i_1} \right)^{g_2 - x_2} \quad (7b)$$

e) Mit Bernoulli-Verteilung $[x_1]$ und $i_1 > k_1$

Gleichung (4) in Gleichung (5a) eingesetzt liefert entsprechend Gleichung (6c):

$$[g_2 - x_2] = \sum_{x_1 = g_2 - x_2}^{k_1} \frac{\binom{x_1}{g_2 - x_2}}{\binom{g_2}{g_2 - x_2}} \cdot \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1} + \sum_{x_1 = k_1 + 1}^{i_1} \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1} \quad (7c)$$

Die Bemerkung zu Gleichung (6c) gilt hier in entsprechender Weise.

Näherung

In den zweiten Term von Gleichung (7c) wird von Jacobaeus ein Faktor $\frac{\binom{x_1}{g_2 - x_2}}{\binom{g_2}{g_2 - x_2}}$ eingeführt. Dann können beide Summen in dieser Gleichung zusammengefasst werden:

$$[g_2 - x_2] \approx \sum_{x_1 = g_2 - x_2}^{i_1} \frac{\binom{x_1}{g_2 - x_2}}{\binom{g_2}{g_2 - x_2}} \cdot \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1}$$

also:

$$[g_2 - x_2] = P_{E1}^{g_2 - x_2} \cdot \frac{x_2! i_1!}{g_2! (i_1 - g_2 + x_2)!} \quad (7d)$$

Bemerkung:

Da $\frac{\binom{x_1}{g_2 - x_2}}{\binom{g_2}{g_2 - x_2}} > 1$ für $x_1 > g_2$, wird $[g_2 - x_2]$ zu groß. Man liegt damit gegenüber Gleichung

(7c) auf der sicheren Seite bezüglich der Berechnung der Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit.

2.4 Zusammenstellung der behandelten Richtungswahlssysteme ohne Mischung

Die nachstehende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der in den folgenden Abschnitten 2.5 - 2.7 abgeleiteten Beziehungen zur Berechnung z w e i stufiger Richtungswahlssysteme o h n e Mischung.

Eingang	Verteilungen	Zwischenleitungen / Abnehmerleitungen					
		$i_{12} = 1$			$i_{12} > 1$		
		$k_{2r} = 1$	$k_{2r} > 1$		$k_{2r} = 1$	$k_{2r} > 1$	
	Gleichbelastung der Abnehmerleitungen	Gleichbelastung der Abnehmerleitungen	keine Gleichbelastung der Abn. leit.	Gleichbelastung der Abnehmerleitungen	Gleichbelastung der Abnehmerleitungen	keine Gleichbelastung der Abn. leit.	
$i_1 = k_1$	Bernoulli/Erlang	Abschnitt 2.5.1 Seite 67	Abschnitt 2.5.2 Seite 67	Abschnitt 2.5.3 Seite 67	Abschnitt 2.5.6 Seite 69	-	Abschnitt 2.5.9 Seite 70
	Bernoulli/Bernoulli	Abschnitt 2.5.4 Seite 69	Abschnitt 2.5.5 Seite 69	-	Abschnitt 2.5.7 Seite 69	Abschnitt 2.5.8 Seite 70	-
$i_1 < k_1$	Bernoulli/Erlang	Abschnitt 2.6.1 Seite 70	Abschnitt 2.6.2 Seite 71	Abschnitt 2.6.3 Seite 71	-	-	-
	Bernoulli/Bernoulli	Abschnitt 2.6.4 Seite 72	Abschnitt 2.6.5 Seite 72	-	-	-	-
$i_1 > k_1$	Bernoulli/Erlang	Abschnitt 2.7.1 Seite 72	Abschnitt 2.7.2 Seite 73	Abschnitt 2.7.3 Seite 74	-	-	-
	Bernoulli/Bernoulli	Abschnitt 2.7.4 Seite 74	-	-	-	-	-
	Erlang/Erlang	Abschnitt 2.7.5 Seite 77	Abschnitt 2.7.6 Seite 76	Abschnitt 2.7.7 Seite 76	Abschnitt 2.7.8/2.7.9 Seite 77	-	Abschnitt 2.7.10 Seite 78

2.5 Systeme ohne Expansion oder Konzentration in der ersten Stufe: $i_1=k_1$

Durch spezielle Wahl der in Abschnitt 2.3 behandelten Verteilungstypen werden nun Ausdrücke für die Blockierungswahrscheinlichkeit E berechnet.

2.5.1 $i_1=k_1; k_{2r}=1$; Bernoulli/Erlang

Gleichungen (2) und (7b) in Gleichung (1a) eingesetzt ergibt:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} P_{A1}^{g_2-x_2} \cdot \frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!} \cdot \frac{\frac{A_{2r}^{g_2}}{g_2!}}{\sum_{v=0}^{g_2} \frac{A_{2r}^v}{v!}} \quad \text{wo } P_{A1} = \frac{Y_1}{k_1}$$

$$E = \frac{E_{g_2}(A_{2r})}{E_{g_2}\left(\frac{A_{2r}}{P_{A1}}\right)} \quad \begin{array}{l} i_1=k_1; k_{2r}=1 \\ \text{Bernoulli/Erlang} \end{array} \quad (8)$$

Anmerkung: Wenn man die Näherung $A=Y$ aufgibt, ist ein Iterationsverfahren zur Berechnung von E notwendig (vgl. Abschnitt 2.15).

2.5.2 $i_1=k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Bei Gleichbelastung aller $n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}$ Abnehmerleitungen gilt nach Gleichung (1b):

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \binom{k_1}{x_1} P_{A1}^{x_1} (1-P_{A1})^{k_1-x_1} \cdot \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{E_{x_1 \cdot k_{2r}}(A_{2r})} \quad (9)$$

2.5.3 $i_1=k_1; k_{2r} > 1$; Bernoulli/Erlang; keine Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Annahme: Von den k_{2r} Ausgängen eines Koppelvielfachs der zweiten Stufe in die gewünschte Richtung r soll so lange mindestens einer frei sein, als die Zahl der belegten Leitungen im Abnehmerbündel kleiner als $g_2 \cdot (k_{2r}-1)$ ist.

Diese Bedingung kann näherungsweise erfüllt werden, wenn das Abnehmerbündel in zwei Schritten abgesucht wird, bei Jacobaeus "Two-Step Hunting". Zunächst werden die $(k_{2r}-1)$ Ausgänge eines jeden Koppelvielfachs in der zweiten Stufe abgesucht. Wenn dies erfolglos ist, wird der letzte Ausgang von jedem Koppelvielfach abgesucht.

Dies führt zu folgendem Ansatz:

$$E = \underbrace{\sum_{x_2=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} P_{A1}^{g_2 \cdot k_{2r} - x_2} \cdot \frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!} \cdot \frac{g_2 \cdot k_{2r} \cdot \sum_{v=0}^{x_2} A_{2r}^v / v!}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot k_{2r} - x_2} A_{2r}^v / v!}}_{\text{Blockierung durch Belegung der "günstigen" Zwischenleitungen für } x_2 \geq g_2 \cdot (k_{2r}-1)} + \underbrace{P_{A1}^{k_1} \cdot \sum_{x_2=0}^{g_2 \cdot (k_{2r}-1) - 1} \frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!} \cdot \frac{g_2 \cdot k_{2r} \cdot \sum_{v=0}^{x_2} A_{2r}^v / v!}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot k_{2r} - x_2} A_{2r}^v / v!}}_{\text{Blockierung, wenn alle } k_1 = g_2 \text{ Zwischenleitungen belegt sind}}$$

Blockierung durch Belegung der "günstigen" Zwischenleitungen für $x_2 \geq g_2 \cdot (k_{2r}-1)$

Blockierung, wenn alle $k_1 = g_2$ Zwischenleitungen belegt sind

Näherung: Im allgemeinen kann der zweite Term gegenüber dem ersten vernachlässigt werden, weil $P_{A1}^{k_1} \ll 1$. Deshalb können wir näherungsweise schreiben:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} P_{A1}^{g_2 \cdot k_{2r} - x_2} \cdot \frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!} \cdot \frac{g_2 \cdot k_{2r} \cdot \sum_{v=0}^{x_2} A_{2r}^v / v!}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot k_{2r} - x_2} A_{2r}^v / v!}, \text{ umgeformt ergibt sich}$$

$$E = \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{E_{g_2 \cdot k_{2r}}\left(\frac{A_{2r}}{P_{A1}}\right)}$$

$i_1 = k_1; k_{2r} > 1$
wie Gleichung (9), jedoch (10)
Two-Step-Hunting

Für $k_{2r} = 1$ geht Gleichung (10) in Gleichung (8) über; jedoch nur deshalb weil Gleichung (10) mit obiger Näherung gewonnen wurde.

Anmerkung:

Vergleichen wir Gleichung (10) mit Gleichung (8), so erhalten wir folgendes Ersatzschaltbild:

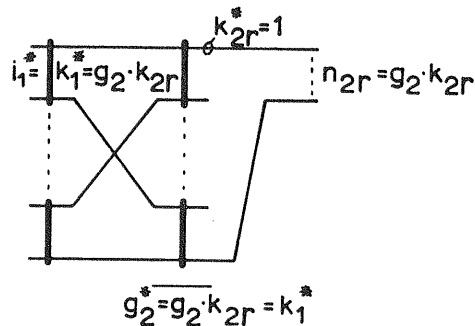
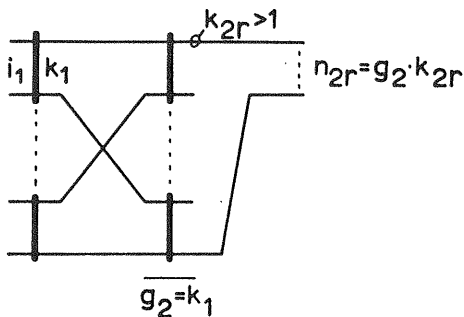


Bild V.5 System zu Gleichung (10)

Bild V.6 "Ersatzschaltbild" zu Gleichung (10)

2.5.4 $i_1=k_1; k_{2r}=1$; Bernoulli/Bernoulli

Gleichungen (4) und (7b) in Gleichung (1a) eingesetzt ergibt:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} P_{A1}^{g_2-x_2} \cdot \binom{g_2}{x_2} \cdot P_{A2}^{x_2} \cdot (1-P_{A2})^{g_2-x_2}$$

,umgeformt erhält man

$$E = (P_{A1} + P_{A2} - P_{A1} \cdot P_{A2})^{g_2}$$

(11)

2.5.5 $i_1=k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Bernoulli; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Bei Gleichbelastung aller Leitungen des Abnehmerbündels gilt mit Gleichung (1b)

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} P_{A1}^{g_2-x_2} \cdot \binom{g_2}{x_2} \cdot P_{A2}^{x_2} \cdot (1-P_{A2})^{g_2-x_2}$$

umgeformt erhält man:

$$E = (P_{A1} + P_{A2}^{k_{2r}} - P_{A1} \cdot P_{A2}^{k_{2r}})^{g_2}$$

(12)

2.5.6 $i_1=k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r}=1$; Bernoulli/Erlang

In Gleichung (8), Abschnitt 2.5.1, ist die Belastung P_{A1} pro Ausgang eines Koppelvielfachs in der ersten Stufe lediglich durch $P_{A1}^{l_{12}}$ zu ersetzen, wenn Gleichbelastung der k_1 Ausgänge vorausgesetzt wird. Somit erhalten wir:

$$E = \frac{E_{g_2}(A_{2r})}{E_{g_2}\left(\frac{A_{2r}}{P_{A1}^{l_{12}}}\right)}$$

(13)

$i_1=k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r}=1$
Bernoulli/Erlang

2.5.7 $i_1=k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r}=1$; Bernoulli/Bernoulli

Entsprechend Gleichung (11) in Abschnitt 2.5.4 und mit Ersetzen von P_{A1} durch $P_{A1}^{l_{12}}$ wie in Gleichung (13) erhalten wir die von Jacobaeus nicht angegebene Beziehung:

$$E = (P_{A1}^{l_{12}} + P_{A2} - P_{A1}^{l_{12}} \cdot P_{A2})^{g_2}$$

(14)

2.5.8 $i_1=k_1; i_{12} \geq 1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Bernoulli; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Entsprechend Gleichung (12) in Abschnitt 2.5.5 und mit Ersetzen von P_{A1} durch P_{A1}^{112} ergibt sich bei Gleichbelastung aller Leitungen des betrachteten Abnehmerbündels die von Jacobaeus nicht angegebene Beziehung:

$$E = \left(P_{A1}^{i_{12}} + P_{A2}^{k_{2r}} - P_{A1}^{i_{12}} \cdot P_{A2}^{k_{2r}} \right) g_2 \quad (15)$$

2.5.9 $i_1=k_1; i_{12} \geq 1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; keine Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Entsprechend Gleichung (10) in Abschnitt 2.5.3 und mit Ersetzen von P_{A1} durch P_{A1}^{112} ergibt sich bei ungleicher Belastung der Leitungen des betrachteten Abnehmerbündels (Two-Step-Hunting):

$$E = \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{E_{g_2 \cdot k_{2r}}\left(\frac{A_{2r}}{P_{A1}^{i_{12}}}\right)} \quad (16)$$

2.6 Systeme mit Expansion in der ersten Stufe: $i_1 < k_1$

Im Falle der Expansion in der ersten Stufe ist stets $P_{E1} > P_{A1}$. Wie bisher werden durch spezielle Wahl der Verteilungen für die Belegungszustände Ausdrücke für die Blockierungswahrscheinlichkeit E berechnet. Wir erhalten:

2.6.1 $i_1 < k_1; k_{2r}=1$; Bernoulli/Erlang

Gleichungen (2) und (7a) in Gleichung (1a) eingesetzt ergibt:

$$E = \sum_{x_2 = g_2 - i_1}^{g_2} P_{E1}^{g_2 - x_2} \cdot \frac{x_2! \cdot i_1!}{g_2! \cdot (i_1 - (g_2 - x_2))!} \cdot \frac{\frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!}}{\sum_{v=0}^{g_2} \frac{A_{2r}^v}{v!}} \quad (17)$$

Die Summation erfolgt von $x_2 = (g_2 - i_1) = (k_1 - i_1)$ aus, da für $x_2 < (k_1 - i_1)$ die Wahrscheinlichkeit $[k_1 - x_2] = 0$ ist.

Umformung von Gleichung (17)

$$E = \frac{i_1! \cdot P_{E1}^{g_2}}{g_2! \cdot \sum_{v=0}^{g_2} \frac{A_{2r}^v}{v!}} \cdot \sum_{x_2 = g_2 - i_1}^{g_2} \frac{\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)^{x_2}}{(x_2 - (g_2 - i_1))!}$$

Substitution: $\eta = x_2 - (g_2 - i_1)$
 $\eta = 0$ für $x_2 = g_2 - i_1$
 $\eta = i_1$ für $x_2 = g_2$

Somit:

$$E = \frac{i_1! P_{E1}^{g_2}}{g_2! \sum_{v=0}^{g_2} A_{2r}/v!} \cdot \sum_{\eta=0}^{i_1} \frac{\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)^{\eta+(g_2-i_1)}}{\eta!} = \frac{\frac{A_{2r}}{g_2!}}{\sum_{v=0}^{g_2} A_{2r}/v!} \cdot \frac{\sum_{\eta=0}^{i_1} \frac{(A_{2r}/P_{E1})^\eta}{\eta!}}{\frac{(A_{2r}/P_{E1})^{i_1}}{i_1!}} = \frac{E_{g_2}(A_{2r})}{E_{i_1}\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)}$$

$$E = \frac{E_{g_2}(A_{2r})}{E_{i_1}\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)}$$

$i_1 < k_1; k_{2r} = 1$
Bernoulli/Erlang

(18)

2.6.2 $i_1 < k_1; k_{2r} > 1$; Bernoulli/Erlang; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Bei Gleichbelastung aller Leitungen des betrachteten Abnehmerbündels lautet der Ansatz analog zu Gleichung (9) in Abschnitt 2.5.2:

$$E = \sum_{x_1=0}^{i_1} \binom{i_1}{x_1} P_{E1}^{x_1} (1-P_{E1})^{i_1-x_1} \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{E_{x_1 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}$$

(19)

2.6.3 $i_1 < k_1; k_{2r} > 1$; Bernoulli/Erlang; keine Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Für Two-Step-Hunting gilt analog zu Gleichung (10) in Abschnitt 2.5.3 folgender Ansatz:

$$E = \sum_{x_2=g_2-i_1}^{g_2} P_{E1}^{g_2-x_1} \frac{g_2^{x_1}}{g_2!(x_2-(g_2-i_1))!} \cdot \frac{x_2! i_1!}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} A_{2r}/v!} \cdot \frac{A_{2r}^{g_2 \cdot (k_{2r}-1) + x_2}}{(g_2 \cdot (k_{2r}-1) + x_2)!} + P_{E1}^{i_1} \sum_{\eta=0}^{g_2 \cdot k_{2r} - i_1 - 1} \frac{A_{2r}^\eta}{\eta!} \frac{1}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} A_{2r}/v!}$$

Nach weiteren Vereinfachungen erhält man als Näherungsformel:

$$E = \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{E_{i_1 \cdot k_{2r}}\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)}$$

$i_1 < k_1; k_{2r} > 1$
Bernoulli/Erlang
Two-Step-Hunting

(20)

Anmerkung

Vergleichen wir Gleichung (20) mit Gleichung (18), so erhalten wir folgende Ersatzstruktur:

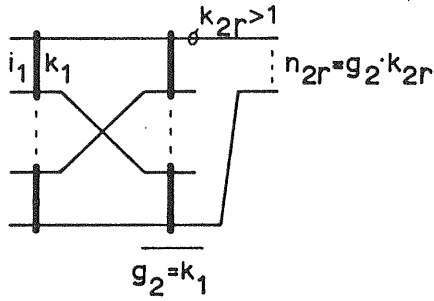


Bild V.7 System zu Gleichung (20)

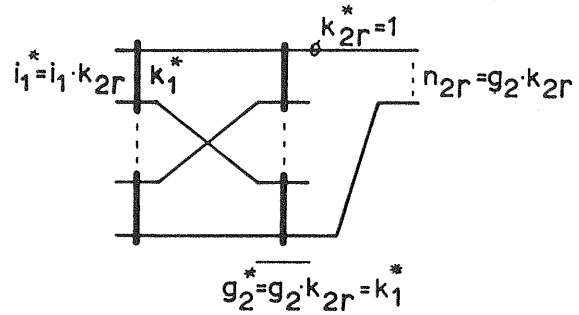


Bild V.8 Ersatzstruktur zu Gleichung (18)

2.6.4 $i_1 < k_1$; $k_{2r} = 1$; Bernoulli/Bernoulli

Gleichungen (4) und (7b) in Gleichung (1b) eingesetzt ergibt:

$$E = \sum_{x_1=0}^{i_1} \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1} \cdot P_{A2}^{k_1 - x_1}$$

$$E = P_{A2}^{k_1 - x_1} \cdot (P_{E1} + P_{A2} - P_{E1} \cdot P_{A2})^{i_1}$$

(21)

2.6.5 $i_1 < k_1$; $k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Bernoulli; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

$$E = \sum_{x_1=0}^{i_1} \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1} \cdot P_{A2}^{(k_1 - x_1) \cdot k_{2r}}$$

$$E = P_{A2}^{(k_1 - i_1) \cdot k_{2r}} \cdot (P_{E1} + P_{A2}^{k_{2r}} - P_{E1} \cdot P_{A2}^{k_{2r}})^{i_1}$$

(22)

2.7 Systeme mit Konzentration in der ersten Stufe: $i_1 > k_1$

Im Falle der Konzentration in der ersten Stufe ist stets $P_{E1} < P_{A1}$.

2.7.1 $i_1 > k_1$; $k_{2r} = 1$; Bernoulli/Erlang

Gleichungen (2) und (7d) in Gleichung (1a) eingesetzt ergibt:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} \frac{g_2! \cdot i_1!}{g_2! \cdot (i_1 - g_2 + x_2)!} \cdot P_{E1}^{g_2 - x_2} \cdot \frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!} \cdot \frac{g_2!}{\sum_{v=0}^{g_2} A_{2r}^v / v!} \quad (23)$$

Zur Umformung von Gleichung (23):

$$E = \frac{i_1! \cdot P_{E1}^{g_2}}{g_2! \cdot \sum_{v=0}^{g_2} A_{2r}^v / v!} \cdot \sum_{x_2=0}^{g_2} \frac{\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)^{x_2}}{(x_2 - (g_2 - i_1))!}$$

Substitution:

$$\begin{aligned} \eta &= x_2 - (g_2 - i_1) \\ \eta &= x_2 - (k_1 - i_1) \\ x_2 = 0; \quad \eta &= i_1 - g_2 = i_1 - k_1 \\ x_2 = g_2 &= k_1; \quad \eta = i_1 \end{aligned}$$

Somit:

$$E = \frac{i_1! \cdot P_{E1}^{g_2}}{g_2! \cdot \sum_{v=0}^{g_2} A_{2r}^v / v!} \cdot \sum_{\eta=i_1-g_2}^{i_1} \frac{\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)^{\eta+(g_2-i_1)}}{\eta!} = \frac{i_1! \cdot \left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)^{-i_1} \cdot A_{2r}^{g_2}}{g_2! \cdot \sum_{v=0}^{g_2} A_{2r}^v / v!} \cdot \sum_{\eta=i_1-g_2}^{i_1} \frac{\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)^\eta}{\eta!}$$

Näherung: Die Summe wird statt von $\eta = i_1 - g_2 = i_1 - k_1$ von $\eta = 0$ aus erstreckt. Dadurch läßt sich die Blockierungswahrscheinlichkeit E durch Erlang'sche Funktionen darstellen. Wir erhalten:

$$E = \frac{E_{g_2}(A_{2r})}{E_{i_1}\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)} \quad \begin{array}{l} i_1 > k_1; \quad k_{2r} = 1 \\ \text{Bernoulli/Erlang} \end{array} \quad (24)$$

2.7.2 $i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Bei Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen im Bündel der betrachteten Richtung ergibt sich mit einer ähnlichen Näherung wie in Gleichung (6c), Abschnitt 2.3.3:

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1} \cdot \frac{E_{k_1, k_{2r}}(A_{2r})}{E_{x_1, k_{2r}}(A_{2r})} + \sum_{x_1=k_1+1}^{i_1} \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1} \quad (25)$$

2.7.3 $i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$: Bernoulli/Erlang; keine Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Bei ungleicher Belastung der Leitungen im betrachteten Abnehmerbündel (Two-Step-Hunting) macht Jacobaeus folgenden Ansatz:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} \frac{g_2^{x_2}}{P_{E1}} \cdot \frac{x_2! \cdot i_1!}{g_2! (i_1 - g_2 + x_2)!} \cdot \frac{A_{2r}^{g_2(k_{2r}-1) + x_2}}{(g_2(k_{2r}-1) + x_2)!} \cdot \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} \frac{A_{2r}^\nu}{\nu!}} + \sum_{x_2=g_2+1}^{i_1} \binom{i_1}{x_2} \cdot P_{E1}^{x_2} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_2} \cdot \sum_{\mu=0}^{g_2(k_{2r}-1)-1} \frac{A_{2r}^\mu}{\mu!} \cdot \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} \frac{A_{2r}^\nu}{\nu!}}$$

Näherungsweise erhält man (ähnlich wie in Abschnitt 2.5.3, Seite 67):

$E = \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{E_{i_1 \cdot k_{2r}}\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)}$	$i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$ Bernoulli/Erlang Two-Step-Hunting	(26)
---	--	------

2.7.4 $i_1 > k_1; k_{2r} = 1$: Bernoulli/Bernoulli

Ansatz:

$$E = \sum_{x_1=0}^{i_1} \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1} \cdot P_{A2}^{k_1 - x_1}$$

In diesem Ansatz ist eine ähnliche Näherung wie in Gleichung (6c), Abschnitt 2.3.3, enthalten. Nach einer einfachen Umformung erhalten wir:

$E = P_{A2}^{k_1 - x_1} \cdot (P_{E1} + P_{A2} - P_{E1} \cdot P_{A2})^{i_1}$	(27)
--	------

2.7.5 $i_1 > k_1; k_{2r} = 1$: Erlang/Erlang

Bezeichnungen: A : Verkehrsangebot je Koppelvielfach in Stufe 1

A_{2r} : Verkehrsangebot für das Abnehmerbündel der betrachteten Richtung r .

Gleichungen (2) und (6a) in Gleichung (1b) eingesetzt ergibt:

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \frac{A^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{E_{k_1}(A_{2r})}{E_{x_1}(A_{2r})} \quad (28)$$

Umformung von Gleichung (28):

$$E = \frac{E_{K_1}(A_{2r})}{\sum_{\nu=0}^{K_1} A^\nu/\nu!} \cdot \sum_{x_1=0}^{K_1} \frac{A^{x_1}}{x_1!} E_{K_1}(A_{2r}) = \frac{E_{K_1}(A_{2r})}{\sum_{\nu=0}^{K_1} A^\nu/\nu!} \cdot \left\{ 1 + \frac{A}{A_{2r}} \cdot (1+A_{2r}) + \left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^2 \cdot \left(1+A_{2r} + \frac{A_{2r}^2}{2!}\right) + \dots + \left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^{K_1} \cdot \left(1+A_{2r} + \dots + \frac{A_{2r}^{K_1}}{K_1!}\right) \right\}$$

Zur Abkürzung führen wir ein: $S = \{ \dots \dots \dots \}$

Zunächst wird nun der Ausdruck $\frac{A}{A_{2r}} \cdot S - S$ berechnet.

$$\begin{aligned} \frac{A}{A_{2r}} \cdot S - S &= \left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^{K_1+1} \cdot \left(1+A_{2r} + \dots + \frac{A_{2r}^{K_1}}{K_1!}\right) + \left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^{K_1} \cdot \left(1+A_{2r} + \dots + \frac{A_{2r}^{K_1-1}}{(K_1-1)!}\right) + \dots \\ &+ \left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^3 \cdot \left(1+A_{2r} + \frac{A_{2r}^2}{2!}\right) + \left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^2 \cdot (1+A_{2r}) + \frac{A}{A_{2r}} \\ &- \left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^{K_1} \cdot \left(1+A_{2r} + \dots + \frac{A_{2r}^{K_1}}{K_1!}\right) - \dots - \left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^2 \cdot \left(1+A_{2r} + \frac{A_{2r}^2}{2!}\right) - \frac{A}{A_{2r}} (1+A_{2r}) - 1 \\ &= \left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^{K_1+1} \cdot \left(1+A_{2r} + \dots + \frac{A_{2r}^{K_1}}{K_1!}\right) - \left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^{K_1} + \frac{A^{K_1-1}}{(K_1-1)!} + \dots + \frac{A^2}{2!} + A + 1 \end{aligned}$$

Also:

$$S = \frac{\left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^{K_1+1} \cdot \sum_{\nu=0}^{K_1} \frac{A^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=0}^{K_1} \frac{A^\nu}{\nu!}}{\frac{A}{A_{2r}} - 1}$$

Somit:

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_{K_1}(A_{2r})}{\sum_{\nu=0}^{K_1} A^\nu/\nu!} \cdot \frac{\left(\frac{A}{A_{2r}}\right)^{K_1+1} \cdot \sum_{\nu=0}^{K_1} \frac{A^\nu}{\nu!} - \sum_{\nu=0}^{K_1} \frac{A^\nu}{\nu!}}{\frac{A}{A_{2r}} - 1} = \frac{E_{K_1}(A_{2r}) \cdot A^{K_1} \cdot \sum_{\nu=0}^{K_1} \frac{A^\nu}{\nu!} \cdot K_1!}{A_{2r} \cdot A_{2r} \cdot \sum_{\nu=0}^{K_1} A^\nu/\nu! \cdot \left(\frac{A}{A_{2r}} - 1\right) \cdot K_1!} - \frac{E_{K_1}(A_{2r})}{\frac{A}{A_{2r}} - 1} \\ &= \frac{A \cdot E_{K_1}(A) - A_{2r} \cdot E_{K_1}(A_{2r})}{A_{2r} \left(\frac{A}{A_{2r}} - 1\right)} \end{aligned}$$

$$E = \frac{A \cdot E_{K_1}(A) - A_{2r} E_{K_1}(A_{2r})}{A - A_{2r}}$$

$i_1 > k_1; k_{2r} = 1$
Erlang/Erlang

(29)

2.7.5a Sonderfall zu 2.7.5: $i_1 > k_1$; $k_{2r} = 1$; $A = A_{2r}$

Gleichung (29) ist für $A = A_{2r}$ nicht anwendbar. Deshalb führen wir in Gleichung (29) den Grenzübergang nach Bernoulli-l'Hospital aus: Wir erhalten

$$E = E_{k_1}(A) \cdot \left\{ k_1 + 1 - k_1 \cdot \frac{E_{k_1}(A)}{E_{k_1-1}(A)} \right\} = E_{k_1}(A) \cdot \left\{ k_1 + 1 - A(1 - E_{k_1}(A)) \right\} \quad (30)$$

2.7.6 $i_1 > k_1$; $k_{2r} \geq 1$; Erlang/Erlang; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Bei Gleichbelastung aller Leitungen des betrachteten Abnehmerbündels erhalten wir analog zu Gleichung (9) in Abschnitt 2.5.2 die von Jacobaeus nicht angegebene Gleichung:

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \frac{A^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{E_{k_1, k_{2r}}(A_{2r})}{\sum_{v=0}^{k_1} \frac{A^v}{v!} \cdot E_{x_1, k_{2r}}(A_{2r})} \quad (31)$$

Gleichung (31) kann nicht weiter vereinfacht werden.

2.7.7 $i_1 > k_1$; $k_{2r} \geq 1$; Erlang/Erlang; keine Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Entsprechend dem Ansatz für Two-Step-Hunting (Gleichung (10), Abschnitt 2.5.3) erhalten wir die von Jacobaeus nicht angegebene Beziehung:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A)}{E_{x_2}(A)} \cdot \frac{\frac{A^{x_2}}{x_2!}}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} \frac{A^v}{v!}} + \sum_{x_2=0}^{g_2 \cdot (k_{2r}-1)-1} \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A)}{E_{g_2 \cdot (k_{2r}-1)}(A)} \cdot \frac{\frac{A^{x_2}}{x_2!}}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} \frac{A^v}{v!}} \quad (32)$$

Näherung: Die beiden Terme in Gleichung (32) werden zu einer Summe zusammengefaßt:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A)}{E_{x_2}(A)} \cdot \frac{\frac{A^{x_2}}{x_2!}}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} \frac{A^v}{v!}}$$

Daraus folgt entsprechend der Herleitung zu Gleichung (29), Abschnitt 2.7.5:

$$E = \frac{A \cdot E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A) - A_{2r} \cdot E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{A - A_{2r}} \quad \begin{array}{l} i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1 \\ \text{Erlang/Erlang} \\ \text{Two-Step-Hunting} \end{array} \quad (33)$$

2.7.8 $i_1 > k_1$; $l_{12} > 1$; $k_{2r} = 1$; Erlang/Erlang; Gleichbelastung der Leitungen im Zwischenleitungs**ü**ndel

Gemäß Gleichung (1a) ergibt sich:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} \frac{g_2}{\sum_{v=0}^{x_2} \frac{A_{2r}^v}{v!}} \cdot \frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!} \cdot \frac{E_{g_2, l_{12}}(A)}{E_{x_2, l_{12}}(A)} \quad (34)$$

Dieser Ausdruck kann nicht weiter umgeformt werden.

2.7.9 $i_1 > k_1$; $l_{12} > 1$; $k_{2r} = 1$; Erlang/Erlang; keine Gleichbelastung der Leitungen im Zwischenleitungs**ü**ndel

Der Ansatz gilt unter der Voraussetzung, daß im Zwischenleitungs**ü**ndel Two-Step-Hunting durchgeführt wird (vgl. Gleichung (26), Abschnitt 2.7.3).

$$E = \sum_{x_1=0}^{g_2 \cdot \frac{k_1}{l_{12}}} \frac{A^{g_2 \cdot (l_{12}-1) + x_1}}{(g_2 \cdot (l_{12}-1) + x_1)!} \cdot \frac{E_{g_2}(A_{2r})}{E_{x_1}(A_{2r})} + E_{g_2}(A_{2r}) \cdot \sum_{x_1=0}^{g_2 \cdot (l_{12}-1)} \frac{A^{x_1}}{\sum_{v=0}^{k_1} \frac{A^v}{v!}} \quad (35)$$

Umformung von Gleichung (35):

$$E = \frac{E_{g_2}(A_{2r}) \cdot E_{k_1}(A)}{A^{k_1}} \cdot k_1! \cdot \left\{ A^{g_2 \cdot (l_{12}-1)} \cdot \sum_{x_1=0}^{g_2} \left(\frac{A}{A_{2r}} \right)^{x_1} \cdot \frac{x_1!}{(g_2 \cdot (l_{12}-1) + x_1)!} \cdot (1 + A_{2r} + \dots + \frac{A_{2r}^{x_1}}{x_1!}) + \sum_{x_1=0}^{g_2 \cdot (l_{12}-1)} \frac{A^{x_1}}{x_1!} \right\}$$

Die erste Summe in der Klammer kann abgeschätzt werden:

$$\frac{g_2!}{k_1!} \sum_{x_1=0}^{g_2} \left(\frac{A}{A_{2r}} \right)^{x_1} \cdot \frac{g_2 \cdot l_{12} \cdot (g_2 \cdot l_{12} - 1) \cdot \dots \cdot (g_2 \cdot (l_{12}-1) + x_1 + 1)}{g_2 \cdot (g_2 - 1) \cdot \dots \cdot (x_1 + 1)} \cdot (1 + A_{2r} + \dots + \frac{A_{2r}^{x_1}}{x_1!}) \leq \frac{g_2!}{k_1!} \cdot l_{12} \cdot \sum_{x_1=0}^{g_2} \left(\frac{A}{l_{12} \cdot A_{2r}} \right)^{x_1} \cdot (1 + A_{2r} + \dots + \frac{A_{2r}^{x_1}}{x_1!})$$

Dieser Ausdruck wird nun in den obigen umgeformten Ansatz eingesetzt:

Entsprechend der Herleitung zu Gleichung (29), Abschnitt 2.7.5, erhalten wir:

$$E = \frac{E_{k_1}(A)}{E_{g_2}(A/l_{12})} \cdot \frac{\frac{A}{l_{12}} \cdot E_{g_2}(A/l_{12}) - A_{2r} \cdot E_{g_2}(A_{2r})}{\frac{A}{l_{12}} - A_{2r}} + \frac{k_1! \cdot E_{g_2}(A_{2r}) \cdot E_{k_1}(A)}{A^{g_2} \cdot E_{g_2(l_{12}-1)}(A) \cdot (g_2 \cdot (l_{12}-1))!} \quad (36)$$

Weitere Näherung: Der letzte Term wird näherungsweise durch $E_{g_2}(A_{2r})$ ersetzt.

Dann erhält man:

$$E = \frac{E_{k_1}(A)}{E_{g_2}(A/l_{12})} \cdot \frac{\frac{A}{l_{12}} \cdot E_{g_2}(A/l_{12}) - A_{2r} \cdot E_{g_2}(A_{2r})}{\frac{A}{l_{12}} - A_{2r}} + E_{g_2}(A_{2r}) \quad (37)$$

$i_1 > k_1; l_{12} > 1; k_{2r} = 1$
 Erlang/Erlang
 Two-Step-Hunting im
 Zwischenleitungsbündel

2.7.10 $i_1 > k_1; l_{12} > 1; k_{2r} > 1$; Erlang/Erlang

Für Two-Step-Hunting im Abnehmerbündel u n d angenommener Gleichbelastung der Zwischenleitungen ergibt sich die Näherungsformel:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} \frac{\frac{g_2 \cdot (k_{2r}-1) + x_2}{A_{2r}}}{\frac{g_2 \cdot k_{2r}}{\sum_{v=0}^v A_{2r}/v!}} \cdot \frac{E_{k_1}(A)}{E_{x_2/l_{12}}(A)} + E_{k_1}(A) \quad (38)$$

2.8 Formeln für die Verlustwahrscheinlichkeit B

Bisher betrachteten wir nur die Z e i t blockierung E, d.h. das Verhältnis jener Zeit zur Zeiteinheit, in der einfallende Rufe nicht vermittelt werden können. Jetzt wollen wir die Verlustwahrscheinlichkeit B berechnen, d.h. das Verhältnis der verlorengegangenen Rufe C_V zur Gesamtzahl der angebotenen Rufe C_A , also:

$$B = \frac{C_V}{C_A} \quad (39)$$

Bezeichnen wir mit α_1 die Anrufrichte, oder mit anderen Worten den Erwartungswert der Zahl von Anrufen je Zeiteinheit aus einer freien Verkehrsquelle, so gilt für die mittlere Anzahl der im Belegungszustand $\{x_1\}$ während der Zeiteinheit einfallenden Rufe:

$$C_A(x_1) = (i_1 - x_1) \cdot \alpha_1 \cdot [x_1]$$

Dabei ist angenommen, daß die Anzahl von Quellen in einem Koppelvielfach der ersten Stufe gleich der Anzahl i_1 von Zubringerleitungen ist. Durch Aufsummieren über alle Zustände $\{x_1\}$ erhalten wir:

$$C_A = \sum_{x_1=0}^T \alpha_1 \cdot (i_1 - x_1) \cdot [x_1] \quad \begin{matrix} T = k_1 & \text{für } i_1 \geq k_1 \\ T = i_1 & \text{für } i_1 < k_1 \end{matrix} \quad (40)$$

Ein Ruf, der im Belegungszustand $\{x_1\}$ einfällt, geht dann verloren, wenn mindestens die Ausgänge derjenigen Koppelvielfache in der zweiten Stufe in die betrachtete Richtung anderweitig belegt sind, welche von den freien Zwischenleitungen noch erreicht werden können. Daher erhalten wir für die Zahl der Verlustrufe:

$$C_V = \sum_{x_1=0}^T \alpha_1 \cdot (i_1 - x_1) \cdot [x_1] \cdot [k_1 - x_1] \quad (41)$$

Damit ergibt sich aus der Definitionsgleichung (39):

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^T (i_1 - x_1) \cdot [x_1] \cdot [k_1 - x_1]}{\sum_{x_1=0}^T (i_1 - x_1) \cdot [x_1]} \quad \begin{array}{l} T = k_1 \text{ für } i_1 \geq k_1 \\ T = i_1 \text{ für } i_1 < k_1 \end{array} \quad (42)$$

Im Fall $i_1 \rightarrow \infty$ erhalten wir (Zufallsverkehr erster Art):

$$B = E = \sum_{x_1=0}^T [x_1] \cdot [k_1 - x_1] \quad (43)$$

Gleichung (42) wird man in der Praxis mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage auswerten.

Nur in zwei Sonderfällen kann man Gleichung (42) so umformen, daß ein Ausdruck entsteht, der mit bekannten Funktionstabellen für einstufige Anordnungen auch manuell ausgewertet werden kann. Nur für diese Sonderfälle wird bei Jacobaeus außer der Blockierungswahrscheinlichkeit E auch die Verlustwahrscheinlichkeit B hergeleitet. (Bei den Berechnungsbeispielen in Abschnitt 2.12 wurde, falls nicht die nachstehend bereits von Jacobaeus angegebenen Gleichungen (44) - (47) in Frage kamen, Gleichung (42) verwendet).

Sonderfälle $i_1 \leq k_1, l_{12} = 1$

a) Bernoulli/Erlang

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $[x_1]$ der Belegungen auf den i_1 Eingängen eines Koppelvielfachs der Stufe 1 gilt nach Gleichung (4), Seite 62 :

$$[x_1] = \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1} \quad (4)$$

Die Wahrscheinlichkeit $[k_1 - x_1]$, daß mindestens die Ausgänge von $(k_1 - x_1)$ bestimmten Koppelvielfachen in der zweiten Stufe belegt sind, ist nach Gleichung (6b) in Abschnitt 2.3.3:

$$[k_1 - x_1] = \frac{E_{K_1}(A_{2r})}{E_{X_1}(A_{2r})} \quad (6b)$$

Mit den Gleichungen (4) und (6b) erhalten wir nach einer Umformung aus Gleichung (42):

$$B = \frac{E_{k_1}(A_{2r})}{E_{i_1-1}\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)} \quad \begin{array}{l} i_1 \leq k_1; k_{2r}=1; l_{12}=1 \\ \text{Bernoulli/Erlang} \end{array} \quad (44)$$

und näherungsweise:

$$B = \frac{E_{k_1 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{E_{(i_1-1) \cdot k_{2r}}\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)} \quad \begin{array}{l} i_1 \leq k_1; k_{2r} > 1; l_{12}=1 \\ \text{Bernoulli/Erlang} \end{array} \quad (45)$$

b) Bernoulli/Bernoulli

Anstelle von Gleichung (6b) tritt in diesem Fall Gleichung (7b):

$$[K_1 - x_1] = \frac{P_{A2}^{k_1 - x_1}}{A_2} \quad (8a)$$

Mit den Gleichungen (4) und (7b) erhalten wir aus Gleichung (42):

$$B = \frac{P_{A2}^{k_1 - i_1 + 1} \cdot (P_{E1} + P_{A2} - P_{E1} \cdot P_{A2})^{i_1 - 1}}{A_2} \quad \begin{array}{l} i_1 \leq k_1; k_{2r}=1; l_{12}=1 \\ \text{Bernoulli/Bernoulli} \end{array} \quad (46)$$

und analog:

$$B = \frac{P_{A2}^{(k_1 - i_1 + 1) \cdot k_{2r}} \cdot (P_{E1} + P_{A2}^{k_{2r}} - P_{E1} \cdot P_{A2}^{k_{2r}})^{i_1 - 1}}{A_2} \quad \begin{array}{l} i_1 \leq k_1; k_{2r} > 1; l_{12}=1 \\ \text{Bernoulli/Bernoulli} \end{array} \quad (47)$$

2.9 Systeme mit Mischung hinter der letzten Stufe

Wir betrachten hier Links-systeme nach Bild V.9, die aus mehreren Linkgruppen zusammengesetzt sind. Die Ausgänge nach einer bestimmten Richtung aus verschiedenen Linkgruppen erreichen über eine Mischung das Abnehmerbündel mit n_{2r} Leitungen. Das Verfahren verwendet eine Berechnungsmethode für einstufig abgesuchte, unvollkommene Bündel von O'Dell /2/.

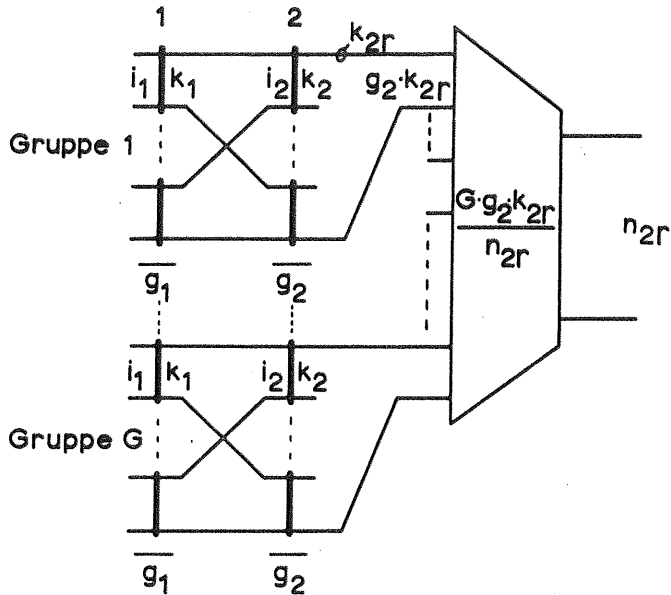


Bild V.9 Linksystm mit Mischung der Ausgänge verschiedener Linkgruppen

Zunächst soll das Berechnungsverfahren von O'Dell für unvollkommene Bündel kurz skizziert werden. Anschließend wird es dann auf das vorliegende System angewandt.

2.9.1 Das Berechnungsverfahren von O'Dell /2/

- Bezeichnungen:
- k: Erreichbarkeit
 - A_{ist} : Tatsächliches Angebot für die Mischung
 - A_0 : Angebot an ein vollkommenes Bündel mit der Leitungszahl $n=k$ bei derselben Blockierungswahrscheinlichkeit E
 - A_{max} : Angebot an ein unvollkommenes Bündel mit $n \rightarrow \infty$ Leitungen
 - C: Angebotszuwachs je Leitung
 - n: Leitungszahl

Ein sehr großes Bündel (strenggenommen $n \rightarrow \infty$) hat die Blockierungswahrscheinlichkeit

$$E = \left(\frac{A_{max}}{n} \right)^k \tag{48}$$

Für ein vollkommenes Bündel mit nur $n=k$ Leitungen gilt die Erlang-Formel:

$$E = E_{1k}(A_0) \tag{49}$$

Hinter der Mischung ist $n > k$; deshalb gilt für das tatsächliche Angebot A_{ist} :

$$\frac{A_0}{k} < \frac{A_{ist}}{n} < \frac{A_{max}}{n} = \sqrt[k]{E}$$

O'Dell nimmt nun an, daß der Angebotszuwachs von A_0 auf A_{ist} dem Zuwachs an Leitungen proportional sei, also:

$$A_{ist} - A_0 = C(n-k)$$

daraus:

$$n = \kappa + \frac{A_{ist} - A_0}{C} \quad (50)$$

Der Proportionalitätsfaktor C, welcher den Angebotszuwachs je Leitung bedeutet, kann durch Linearkombination aus dem unteren Grenzwert $\frac{A_0}{\kappa}$ und dem oberen Grenzwert $A_{max/n} = \sqrt[k]{E}$ durch folgenden empirischen Ansatz gewonnen werden:

$$C = f \cdot \sqrt[k]{E} + (1-f) \cdot \frac{A_0}{\kappa}$$

Die Konstante f wurde von O'Dell für den von ihm betrachteten einfachen Mischungstyp bestimmt; und zwar zu

$$f = 0,53 \text{ für reinen Zufallsverkehr}$$

$$f = 1,0 \text{ für geglätteten Verkehr.}$$

Für Abnehmerbündel hinter Linkssystemen wird von Jacobaeus $f = 1,0$ gewählt. Somit:

$$C = \sqrt[k]{E} \quad (51)$$

Abgekürzt schreiben wir:

$$K = \kappa - \frac{A_0}{C} \quad (52)$$

Damit folgt aus Gleichung (50):

$$n = \frac{A_{ist}}{C} + K \quad (53)$$

Gleichung (53) gibt bei O'Dell jene Leitungszahl n an, die notwendig ist, damit eine vorgeschriebene Blockierungswahrscheinlichkeit E erreicht wird.

2.9.2 Übertragung des O'Dell-Verfahrens auf Linkssysteme mit Mischung am Ausgang

Wir gehen von den Formeln (50) oder (53) aus. Für die beiden Grenzwerte des Angebots je Abnehmerleitung bei einstufigen Anordnungen $\frac{A_0}{\kappa}$ und $C = \sqrt[k]{E}$ müssen entsprechende Werte für das Linkssystem gefunden werden. Wir erhalten sie nachstehend durch Annahme einer Erlang-Verteilung bzw. einer Bernoulli-Verteilung auf dem Abnehmerbündel.

Untere Grenze des tatsächlichen Angebots: Analogon zu A_0 ; $E_{1,k}(A_0)$

Falls $n_{2r} = g_2 = k_1$, kann jede Abnehmerleitung von jedem Eingang des Linksystems aus über eine Zwischenleitung erreicht werden (im belegungsfreien Zustand, vgl. Bild V.9, Seite 81). Wenn wir weiterhin zur Erklärung des Prinzips den Fall $i_1 = k_1$ und die Kombination Bernoulli/Erlang voraussetzen, gilt nach Gleichung (8) in Abschnitt 2.5.1

$$E = \frac{E_{g_2}(A_{02r})}{E_{g_2}\left(\frac{A_{02r}}{A_1}\right)} \quad \begin{array}{l} i_1 = k_1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2 = k_1 \\ \text{Bernoulli/Erlang} \end{array} \quad (8)$$

Der Rechenwert A_{02r} wird aus Gleichung (8) bei vorgegebenen Werten E und P_{A1} durch Iteration bestimmt. P_{A1} ist die tatsächliche Belastung je Ausgang eines Koppelvielfachs in Stufe 1 im gegebenen Linksystem.

Obere Grenze des tatsächlichen Angebots: Analogon zu $C = \frac{A_{\max}}{n} = \sqrt[k]{E}$

Der obere Grenzwert des Angebots wird erreicht, wenn die Anzahl der Abnehmerleitungen in der Mischung sehr groß ist ($n_{2r} \gg g_2 = k_1$). Auf dem Abnehmerbündel wird hierzu eine Bernoulli-Verteilung angenommen, da dann die zulässige Belastung je Leitung (also auch das Angebot) am größten ist. Nach Gleichung (11) in Abschnitt 2.5.4 gilt in diesem Fall:

$$E = (P_{A1} + P_{A2} - P_{A1} \cdot P_{A2})^{g_2} \quad \begin{matrix} i_1 = k_1; k_{2r} = 1 \\ \text{Bernoulli/Bernoulli} \end{matrix} \quad (11)$$

Aus Gleichung (11) wird die Größe P_{A2} (die zu A_{\max}/n in Gleichung (48) analoge Größe) bei vorgegebenen Werten E und P_{A1} bestimmt.

Zusammenfassend dargestellt ergibt sich folgender Gang der Rechnung. Vorgegeben sind:

- Gewünschte Blockierungswahrscheinlichkeit E der betrachteten Richtung
- Belastung P_{A1} je Ausgang eines Koppelvielfachs in Stufe 1
- Strukturparameter einer Linkgruppe
- Anzahl G der Linkgruppen, welche zusammengemischt werden
- Angebot A_{2r} in die betrachtete Richtung Nr. r .

Gesucht ist: Abnehmerleitungszahl n_{2r} hinter der Mischung (vgl. Bild V.9) für die betrachtete Richtung Nr. r .

Damit erhält man:

P_{A2} aus

$$E = (P_{A1} + P_{A2} - P_{A1} \cdot P_{A2})^{g_2} \quad (54a)$$

A_{02r} durch Iteration aus

$$E = \frac{E g_2 (A_{02r})}{E g_2 \left(\frac{A_{02r}}{P_{A1}} \right)} \quad (54b)$$

Damit gemäß Gleichung (52)

$$K = g_2 - \frac{A_{02r}}{P_{A2}} = k_1 - \frac{A_{02r}}{P_{A2}} \quad (54c)$$

und schließlich

$$n_{2r} = \frac{A_{2r}}{P_{A2}} + K = g_2 + \frac{A_{2r} - A_{02r}}{P_{A2}} \quad (54d)$$

Für andere Systemstrukturen ($i_1 \geq k_1, k_{2r} > 1, l_{12} > 1$) werden in den Gleichungen (54a,b) die entsprechenden Gleichungen für Bernoulli- bzw. Erlang-Verteilung auf dem Abnehmerbündel eingesetzt (vgl. die Abschnitte 2.5.2, 2.5.3, 2.5.5-2.5.9, 2.6, 2.7).

Die Gleichungen (54a-d) können auch zur Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E verwendet werden, wenn statt E die Leitungszahl n_{2r} des betrachteten Abnehmerbündels vorgeschrieben wird. Die numerische Auswertung geschieht dann durch Iteration (vgl. die Abschnitte 2.12 und 2.20).

Für den Gültigkeitsbereich der Gleichungen (54a - d) gibt Jacobaeus an:

$$g_2 \cdot k_{2r} \leq n_{2r} \leq \frac{1}{2} G \cdot g_2 \cdot k_{2r} \quad (55)$$

Das bedeutet, daß ein Mischungsverhältnis $m \geq 2$ gefordert wird.

2.10 Dreistufige Systeme

Das bei zweistufigen Systemen angewandte Berechnungsprinzip wird jetzt sinngemäß auf dreistufige Systeme für Richtungswahl übertragen. Skizze des Systems und Bezeichnungen siehe Bild V.10:

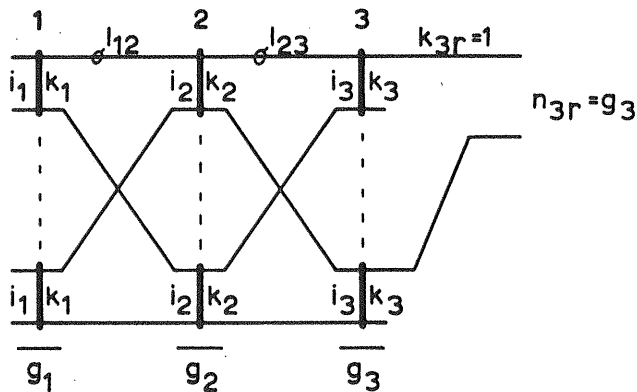


Bild V.10:
Dreistufiges Maschensystem

Strukturparameter

$$\begin{aligned}
 S &= 3 & \varepsilon_2 &= k_1 / l_{12} \\
 i_1 &= k_1 & i_2 &= \varepsilon_1 \cdot l_{12} \\
 l_{12}, l_{23} &\geq 1 & \varepsilon_1 k_1 &= \varepsilon_2 i_2 \quad (\text{keine Mischung zwischen Stufe 1 und 2}) \\
 k_{3r} &= 1; \quad r=1,2,\dots, R=k_3 & \varepsilon_3 &= k_2 / l_{23} \\
 n_{3r} &= g_3; \quad r=1,2,\dots, R=k_3 & i_3 &= \varepsilon_2 \cdot l_{23} \\
 & & \varepsilon_2 \cdot k_2 &= \varepsilon_3 \cdot i_3 \quad (\text{keine Mischung zwischen Stufe 2 und 3})
 \end{aligned}$$

Die Annahmen über die Verkehrs- und Betriebsparameter sind dieselben wie in Abschnitt 2.2 dieses Kapitels (Seite 60).

Vorbemerkung: Jacobaeus berechnet dreistufige Linksysteine nur für den Fall $i_1=k_1$ (weder Konzentration noch Expansion in der ersten Stufe).

Ansatz der Grundgleichungen

Von den k_1 Ausgängen des betrachteten Koppelvielfachs in der ersten Stufe seien genau beliebige x_1 belegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür werde mit $[x_1]$ bezeichnet. Blockierung tritt auf, wenn sämtliche von den (k_1-x_1) freien Zwischenleitungen von Stufe 1 nach Stufe 2 weiterführenden Zwischenleitungen von Stufe 2 nach Stufe 3 belegt sind oder keine freien Abnehmerleitungen der gewünschten Richtung erreichen. Die Wahrscheinlichkeit dafür werde mit $[k_1-x_1]$ bezeichnet. Für die Blockierungswahrscheinlichkeit E erhalten wir somit - entsprechend Gleichung (1b) - den Ausdruck:

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} [x_1] \cdot [k_1 - x_1] \quad (56)$$

Die Berechnung von $[k_1 - x_1]$ wird an dem einfachen Fall $l_{12} = l_{23} = 1$ gezeigt:
 Im betrachteten Abnehmerbündel seien genau x_3 beliebige Leitungen belegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür sei $[x_3]$. Blockierung tritt auf, wenn zwischen Stufe 2 und 3 mindestens jene $(k_1 - x_1) \cdot (n_{3r} - x_3)$ bestimmten Zwischenleitungen belegt sind, welche die noch freien $(n_{3r} - x_3) = (g_3 - x_3)$ Abnehmerleitungen erreichen würden (vgl. Bild V.10). Die Wahrscheinlichkeit dafür heiße $[(k_1 - x_1) \cdot (g_3 - x_3)]$. Somit erhalten wir analog zu Gleichung (1a):

$$[k_1 - x_1] = \sum_{x_3=0}^{g_3 - n_{3r}} [x_3] \cdot [(k_1 - x_1) \cdot (g_3 - x_3)] \quad (57)$$

Gleichung (57) in Gleichung (56) eingesetzt ergibt:

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \left\{ [x_1] \cdot \sum_{x_3=0}^{g_3} [x_3] \cdot [(k_1 - x_1) \cdot (g_3 - x_3)] \right\} \quad (58)$$

Gleichung (58) ist Ausgangspunkt für die Berechnung dreistufiger Systeme. Durch Wahl bekannter Verteilungstypen für die Zwischenleitungs- und Abnehmerbündel können wir wieder spezielle Ausdrücke für die Blockierungswahrscheinlichkeit E gewinnen.

2.10.1 Bernoulli/Bernoulli/Bernoulli

Gleichungen (4) und (7b) in Gleichung (58) eingesetzt liefert:

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \left\{ \binom{k_1}{x_1} \cdot P_{A1}^{x_1} \cdot (1 - P_{A1})^{k_1 - x_1} \cdot \sum_{x_3=0}^{g_3} \left(\binom{g_3}{x_3} \cdot P_{A3}^{x_3} \cdot (1 - P_{A3})^{g_3 - x_3} \cdot P_{A2}^{(k_1 - x_1) \cdot (g_3 - x_3)} \right) \right\}$$

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \binom{k_1}{x_1} \cdot P_{A1}^{x_1} \cdot (1 - P_{A1})^{k_1 - x_1} \cdot \left(P_{A3} + P_{A2} \cdot P_{A3} \cdot P_{A2}^{k_1 - x_1} \right)^{g_3} \quad (59)$$

2.10.2 Bernoulli/Bernoulli/Erlang

Gleichungen (2), (4) und (7b) in Gleichung (58) eingesetzt ergibt:

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \left\{ \binom{k_1}{x_1} \cdot P_{A1}^{x_1} \cdot (1 - P_{A1})^{k_1 - x_1} \cdot \sum_{x_3=0}^{g_3} \frac{A_{3r}^{x_3}}{x_3!} \cdot P_{A2}^{(k_1 - x_1) \cdot (g_3 - x_3)} \right\}$$

Daraus mit Hilfe von Gleichung (8):

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \binom{k_1}{x_1} \cdot P_{A1}^{x_1} \cdot (1-P_{A1})^{k_1-x_1} \cdot \frac{E_{g_3}(A_{3r})}{E_{g_3}\left(\frac{A_{2r}}{P_{A2}^{k_1-x_1}}\right)} \quad \begin{array}{l} \text{mit } g_3 = k_2 \\ \text{für } l_{23} = 1 \end{array} \quad (60)$$

2.10.3 $l_{12}, l_{23} \geq 1$; Bernoulli/Bernoulli/Bernoulli

Entsprechend Gleichung (59) erhalten wir:

$$E = \sum_{x_1=0}^{g_2} \binom{g_2}{x_1} \cdot P_{A1}^{l_{12} \cdot x_1} \cdot (1-P_{A1})^{l_{12} \cdot g_2 - x_1} \cdot \left(\frac{P_{A3} + P_{A2}^{l_{23}(g_2-x_1)}}{P_{A3} \cdot P_{A2}^{l_{23}(g_2-x_1)}} \right)^{g_3} \quad (61)$$

2.10.4 $l_{12}, l_{23} \geq 1$; Bernoulli/Bernoulli/Erlang

Entsprechend Gleichung (60) erhalten wir:

$$E = \sum_{x_1=0}^{g_2} \binom{g_2}{x_1} \cdot P_{A1}^{l_{12} \cdot x_1} \cdot (1-P_{A1})^{l_{12} \cdot g_2 - x_1} \cdot \frac{E_{g_3}(A_{3r})}{E_{g_3}\left(\frac{A_{3r}}{P_{A2}^{l_{23}(g_2-x_1)}}\right)} \quad (62)$$

2.11 Vierstufige Systeme

Im Gegensatz zur Berechnung zwei- und dreistufiger Systeme wird bei vierstufigen Anordnungen nicht der Bündelverlust berechnet, sondern die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bestimmter Eingang nicht mit einem bestimmten markierten Ausgang verbunden werden kann (Punkt-Punkt-Verlust). Der Belegungszustand des markiert gedachten Ausgangs wird dabei nicht berücksichtigt (siehe auch /16/, /19/, /52/, /58/).

Skizze des Systems und Bezeichnungen siehe Bild V.11:

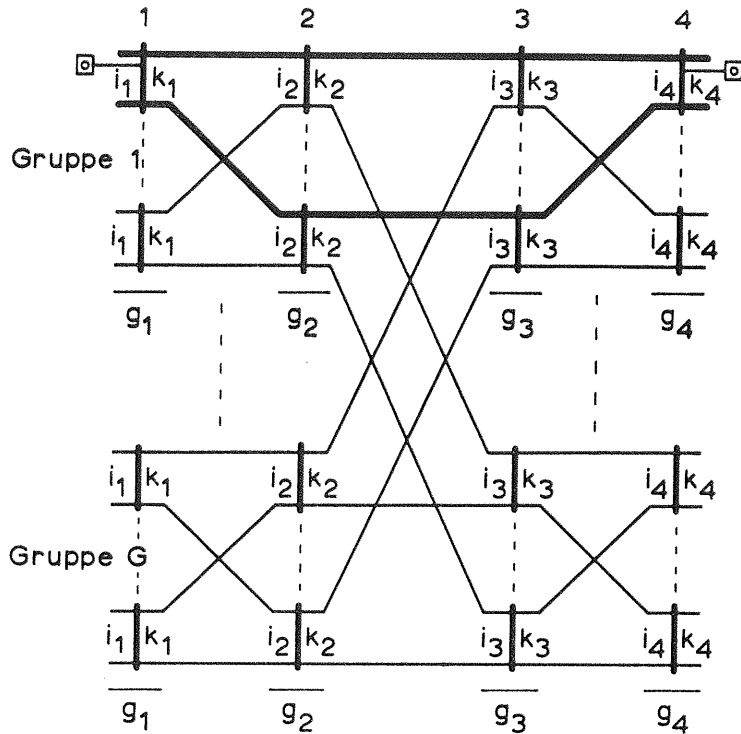


Bild V.11
Vierstufiges Linksystem

Für die Struktur-, Verkehrs- und Betriebsparameter gilt sinngemäß das Entsprechende wie bei dreistufigen Systemen.

Wir wollen in diesem Fall nicht eine allgemeine Lösung herleiten, sondern das Prinzip so gleich an einem übersichtlichen Sonderfall erläutern. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei bestimmte Punkte - siehe Bild V.11 - nicht miteinander verbunden werden können.

2.11.1 Bernoulli/Bernoulli/Bernoulli

Wir nehmen (mit Jacobaeus) an, daß in den Zwischenleitungsbündeln die Anzahl gleichzeitig belegter Leitungen in ausreichend guter Näherung jeweils Bernoulli-Verteilungen gehorcht.

Im belegungs-freien Zustand sind k_1 "Wege" zwischen den beiden markierten Punkten möglich (siehe Bild V.11).

Vereinfachende Annahmen: Die Wegabschnitte 1-2, 2-3, 3-4 können unabhängig voneinander belegt werden.

Wahrscheinlichkeit, genau x_2 beliebige Wegabschnitte 2-3 sind belegt: $\binom{k_1}{x_2} \cdot P_{A2}^{x_2} \cdot (1-P_{A2})^{k_1-x_2}$

Wahrscheinlichkeit, ein Wegabschnitt 1-2 ist belegt: P_{A1}

Wahrscheinlichkeit, ein Wegabschnitt 3-4 ist belegt: P_{A3}

Wahrscheinlichkeit, irgendein Wegabschnitt 1-2
o d e r irgendein Wegabschnitt
3-4 ist belegt: $(P_{A1}+P_{A3}-P_{A1} \cdot P_{A3})$

Wahrscheinlichkeit, mindestens bestimmte (k_1-x_2) Wegabschnitte 1-2, 3-4 sind belegt: $(P_{A1}+P_{A3}-P_{A1} \cdot P_{A3})^{k_1-x_2}$

Somit erhalten wir für die Blockierungswahrscheinlichkeit E:

$$E = \sum_{x_2=0}^{k_1} \binom{k_1}{x_2} \cdot P_{A_2}^{x_2} \cdot (1 - P_{A_2})^{k_1 - x_2} \cdot (P_{A_1} + P_{A_3} - P_{A_1} \cdot P_{A_3})^{k_1 - x_2}, \text{ umgeformt}$$

$$E = (P_{A_2} + (1 - P_{A_2}) \cdot (P_{A_1} + P_{A_3} - P_{A_1} \cdot P_{A_3}))^{k_1}$$

$E = (P_{A_1} + P_{A_2} + P_{A_3} - P_{A_1} \cdot P_{A_2} - P_{A_1} \cdot P_{A_3} - P_{A_2} \cdot P_{A_3} + P_{A_1} \cdot P_{A_2} \cdot P_{A_3})^{k_1}$	(63)
---	------

2.11.2 Bernoulli/Erlang/Bernoulli

Entsprechend dem Ansatz zu Gleichung (63) gilt:

$$E = \sum_{x_2=0}^{k_1} \frac{A^{x_2}}{x_2!} \cdot \frac{1}{\sum_{y=0}^{k_1} A^y / y!} \cdot (P_{A_1} + P_{A_3} - P_{A_1} \cdot P_{A_3})^{k_1 - x_2}$$

umgeformt:

$E = \frac{E_{k_1}(A)}{E_{k_1}\left(\frac{A}{P_{A_1} + P_{A_3} - P_{A_1} \cdot P_{A_3}}\right)}$
--

A ist das gesamte Verkehrsangebot an die k_1 Wegabschnitte 2-3 (mit $A=Y$)

(64)

2.12 Berechnungsbeispiele - Vergleich mit Tests

In diesem Abschnitt wollen wir für einige Systeme die Verlustwahrscheinlichkeit als Funktion des Angebots für die betrachtete Richtung berechnen und die Ergebnisse mit Werten aus Verkehrstests vergleichen. (Vgl. die Bemerkung nach Gleichung (43), Seite 79).

Die folgende Tabelle zeigt eine Zusammenstellung aller Untersuchungen.

System Anhang A	Eingang	Diagramm Anhang B	Kurve Nr.	Berechnung	Test
L 2022 Bild A.4	$i_1 = k_1$	V.1	1	Bernoulli/Erlang	ZV2; $Q=i_1=10$
	$i_1 = 10$		2	Bernoulli/Bernoulli	Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1
	$i_1 < k_1$	V.2	1	Bernoulli/Erlang	ZV2; $Q=i_1=8$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1
	$i_1 = 8$		2	Bernoulli/Bernoulli	
	$i_1 > k_1$	V.3	1	Erlang/Erlang	ZV2; $Q=i_1=15$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1
$i_1 = 15$	2		Bernoulli/Erlang		
	$i_1 > k_1$	V.4	1	Erlang/Erlang	ZV1
L 2033 Bild A.5	$i_1 = k_1$	V.5	1	Bernoulli/Erlang	ZV2; $Q=i_1=10$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1; Gleichbelastung der Ausgänge
	$i_1 = 10$		2	Bernoulli/Bernoulli	
		$i_1 > k_1$	V.6	1	Erlang/Erlang
L 2001 Bild A.6	$i_1 > k_1$	V.7	1	Erlang/Erlang; Rchtg 1	ZV1
	$i_1 > k_1$	V.8	1	Erlang/Erlang; Rchtg 2	
L 2032 Bild A.7	$i_1 = 10$	V.9	1	vgl. nachstehende Bemerkung, Ziffer 2	ZV2; $Q=i_1=10$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1
L 3006 Bild A.8	$i_1 = k_1$	V.11	1	Bern./Bern./Erlang	Jacobaeus verwendet für die Dimensionierung 3-stufiger Systeme die Z e i tblockierung E. Die Testwerte geben die V e r l u s t - Wahrscheinlichkeit B für ZV2, $Q=i_1=10$, an.
	$i_1 = 10$		2	Bern./Bern./Bern.	

Bemerkungen:

1. Für Systeme mit $k_{2r} > 1$ (L 2033) wurden stets die Formeln für zufälliges Absuchen der Ausgänge in der letzten Stufe (Gleichbelastung) verwendet.
2. Zu L 2032: Die Gleichungen in Abschnitt 2.9.2 (Gleichung (54a-d)) erlauben, bei vorgeschriebenen Werten der Blockierungswahrscheinlichkeit E, des Angebots A_{2r} und der Strukturparameter des Linksystems, die notwendige Abnehmerleitungszahl n_{2r} ($r=1,2,\dots,R$) hinter der Mischung zu berechnen.

Nachstehend wurde jedoch der Rechengang nach Jacobaeus mit Hilfe eines Iterationsverfahrens dahingehend verbessert /63/, daß auch bei vorgegebenen Strukturparametern und vorgegebenen Angebotswerten die Verlustwahrscheinlichkeit und die Blockierungswahrscheinlichkeit berechnet werden können. Die Näherungsannahme $A=Y$ wird z u n ä c h s t auch hier noch belassen und erst in Abschnitt 2.19.1 dieses Kapitels verlassen. Die Verlustwahrscheinlichkeit B wurde nach Gleichung (44) berechnet, wobei die darin auftretenden Parameter aus den Gleichungen (54a-d) ermittelt wurden.

2.13 Kritische Betrachtung des Verfahrens

Nachstehend vergleichen wir die Rechenergebnisse für zwei- und dreistufige Linksyste me mit den Resultaten aus Verkehrstests.

2.13.1 Zweistufige Systeme ohne Mischungen

(Anhang B: Diagramme V.1 - V.3, Kurven 1 und 2; Diagramm V.4, Kurve 1; Diagramm V.5, Kurven 1 und 2; Diagramme V.6 - V.8, Kurve 1)

- a) Bei Zufallsverkehr erster Art (ZV1) und mit der Annahme Erlang/Erlang sowie bei Zufallsverkehr zweiter Art (ZV2) und mit der Annahme Bernoulli/Erlang ergibt sich im Bereich kleiner Verlustwerte ($B < 2\%$) eine brauchbare Übereinstimmung mit Verkehrstests. Die Rechenwerte liegen stets oberhalb der Simulationsergebnisse. Für $B \geq 2\%$ wird die Ungenauigkeit im allgemeinen nicht mehr toleriert werden (vgl. Anhang B: Diagramme V.1 - V.8, jeweils Kurve 1). Diese Verfahren werden in den Abschnitten 2.15 und 2.16 verbessert (Diagramme V.1 - V.3, Kurven 3-6; Diagramm V.4, Kurven 2 und 3; Diagramm V.5, Kurven 3 und 4; Diagramm V.6, Kurven 2 und 3; Diagramme V.7 und V.8, Kurve 2).
- b) Bei Zufallsverkehr zweiter Art (ZV2) und mit der Annahme Bernoulli/Bernoulli ergeben sich unterhalb von $B=10\%$ eindeutig zu kleine Rechenwerte des Verlusts; das Verfahren ist deshalb für diese Verteilungskombination nicht ratsam (vgl. Anhang B: Diagramme V.1, V.2 und V.5, jeweils Kurve 2). Die Ursache liegt darin, daß die Gesamtquellenzahl $Q = g_1 \cdot i_1 = 100$ größer ist als die Anzahl von Abnehmerleitungen $n_{2r}=10$ (System L2022) bzw. $n_{2r}=20$ (System L2033) im Bündel der gewünschten Richtung. Diese Tatsache wirkt sich offenbar stärker aus als die an sich verlusterhöhenden Annahmen der funktionellen und statistischen Unabhängigkeit, welche sich in den angegebenen Beispielen erst oberhalb von $B=10\%$ so stark auswirken, daß die Abweichungen von Rechnung und Test kleiner werden.

2.13.2 Zweistufige Systeme mit Mischung hinter der letzten Stufe

(Anhang B: Diagramm V.9, Kurve 1)

Die Abweichungen von Rechnung und Test rühren offenbar her von den widersprüchlichen Annahmen, die bei der Anwendung des O'Dell-Prinzips in Verbindung mit der Annahme $A=Y$ gemacht werden. Die Annahme von $f=1$ in Gleichung (51), Abschnitt 2.9.1, impliziert eine Bernoulli-Verteilung auf dem Abnehmerbündel. Andererseits legt die Berechnung von E nach Gleichung (54b), Abschnitt 2.9.2, eine Erlang-Verteilung auf jenen $k_1=g_2$ aus n_{2r} Abnehmerleitungen zugrunde, die von einer Linkgruppe aus abgesucht werden. Diese beiden Annahmen sind streng genommen miteinander nicht verträglich. Das Verfahren wird in Abschnitt 2.19 verbessert (Diagramm V.9, Kurven 2 und 3).

2.13.3 Dreistufige Systeme

(Anhang B: Diagramm V.11, Kurven 1 und 2)

Die nach Jacobaeus berechneten Kurven stellen die Zeitblockierung in Abhängigkeit vom Angebot für die betrachtete Richtung dar und zwar für die beiden Fälle Bernoulli/Bernoulli/Bernoulli (Kurve 2) und Bernoulli/Bernoulli/Erlang (Kurve 1).

Dabei ist allgemein zu bemerken, daß trotz der Annahmen der funktionellen und statistischen Unabhängigkeit, die zu einer Überschätzung der tatsächlichen Werte führen, im Fall Bernoulli/Bernoulli/Bernoulli die berechnete Zeitblockierung zu klein ist (vgl. Abschnitt 2.13.1).

Die zum Vergleich verwendeten Testwerte geben im Gegensatz zur Rechnung die Verlustwahrscheinlichkeit B an, die bei Zufallsverkehr zweiter Art stets kleiner ist als die Zeitblockierung E . Vergleichen wir nun diese Testwerte mit den Rechenergebnissen für den Fall

Bernoulli/Bernoulli/Erlang (Kurve 1), so zeigt sich, daß die Simulationswerte unterhalb von Kurve 1 liegen. Aus der Größe der Abweichungen von Test und Rechnung kann gefolgert werden, daß zumindest im Bereich $E < 5\%$ das Verfahren von Jacobaeus ausreichend wirklichkeitstreue Ergebnisse liefert.

Zu den Näherungsannahmen der in den Abschnitten 2.13.1 und 2.13.3 diskutierten Verfahren wird zusammenfassend noch bemerkt:

Für die numerische Auswertung müßten eigentlich Angebot A und Belastung Y vorgegeben werden, was die Kenntnis der gesuchten Verlustwahrscheinlichkeit voraussetzen würde. Weil kein Iterationsverfahren verwendet wird, folgt daraus zwingend die Näherungsannahme $A=Y$, die nur im Bereich kleiner Verluste zulässig ist. Bei wachsendem Angebot wirkt sich diese Annahme verluststeigernd aus, da in die Formeln bei einem bestimmten Angebotswert zu große Belastungen eingesetzt werden.

Da funktionelle Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen angenommen wird, werden als Verteilungsfunktionen solche Typen gewählt, die von einstufigen Anordnungen her bekannt sind. Dadurch entstehen in zweierlei Hinsicht Näherungen:

Erstens können keine eindeutigen Kriterien für die Wahl bestimmter Typen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen angegeben werden; die Ergebnisse können sich erheblich unterscheiden (vgl. z.B. in den Diagrammen V.1-3 die Kurven 1 und 2).

Zweitens sind die tatsächlichen Verteilungen wegen ihrer gegenseitigen funktionellen Abhängigkeit - bedingt durch die innere Blockierung - im Vergleich zu den angenommenen Verteilungen deformiert. Im Bereich kleiner Verlustwahrscheinlichkeiten wirkt sich diese Näherung nicht besonders stark aus, da die innere Blockierung gering ist. Mit wachsender Belastung liegen die berechneten Verlustwerte jedoch immer mehr auf der sicheren Seite (vgl. auch Kapitel IV).

Ähnlich wirkt sich die Vernachlässigung der statistischen Abhängigkeit der Belegungszustände aus. Bei schwachen Belastungen können die Belegungsmuster in den verschiedenen Abschnitten eines Systems noch in guter Näherung als voneinander unabhängig betrachtet werden. Steigt die Belastung an, so überdecken sich die Belegungsmuster in den verschiedenen Abschnitten häufiger und sind gegenseitig stärker abhängig. Die Vernachlässigung dieses Sachverhalts wirkt sich so aus, als ob weniger freie Verbindungswege als in Wirklichkeit vorhanden wären; auch dadurch wird der rechnerische Verlust höher als der tatsächliche Verlust.

2.14 Verbesserungsvorschläge

Die kritische Analyse des Berechnungsprinzips in Abschnitt 2.13 zeigt gleichzeitig, welche Möglichkeiten bestehen, um die Genauigkeit der Verlustberechnung, insbesondere im Bereich größerer Verluste, zu erhöhen.

Folgende verbesserten Verfahren werden beschrieben und die damit erzielten Ergebnisse in Abschnitt 2.20 mit Testergebnissen verglichen:

- a) Verzicht auf die Näherung $A=Y$.
- b) Verwendung von Erlang's-Bernoulli-Verteilung.
- c) Näherungsweise Berücksichtigung der funktionellen Abhängigkeit der Verteilung im Zwischenleitungsbündel von der angenommenen Verteilung auf dem Abnehmerbündel.
- d) Näherungsweise Berücksichtigung der funktionellen Abhängigkeit der Verteilung im Abnehmerbündel von der angenommenen Verteilung auf dem Zwischenleitungsbündel. (Für diesen Fall werden keine numerischen Resultate angegeben).

Die nachstehend aufgeführte Tabelle enthält eine Zusammenstellung der Verbesserungsvorschläge.

Art der Verbesserung	Systemstruktur und Verteilungen	Abschnitt u. Gleichungen
2-stufige Systeme ohne Mischung A ≠ Y	$i_1 \leq k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang	2.15.1; Gln. (65-67)
	$i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang	2.15.2; Gln. (68-70)
	$i_1 > k_1; k_{2r} = 1$; Erlang/Erlang	2.15.3; Gln. (71-73)
	$i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; Erlang/Erlang	2.15.4; Gln. (74, 75)
	$i_1 > k_1; k_{2r} > 1$; Erlang/Erlang	2.15.5; Gl. (76)
2-stufige Systeme ohne Mischung Verwendung von Erlang's-Bernoulli-Verteilung	$i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; Erlang's-Bernoulli/Erlang	2.16.1; Gln. (77-79)
	$i_1 \geq k_1; k_{2r} = 1$; Erlang's-Bernoulli/Erlang's-Bernoulli	2.16.2; Gln. (80-82)
2-stufige Systeme ohne Mischung Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Zwischenleitungs-bündel abhängig von der angenommenen Verteilung auf dem Abnehmerbündel	Zwischenleitungs-bündel: Rekursionsformel des statist. Gleichgewichts für ZV1 oder ZV2	2.17; Gln. (83a-c) oder Gln. (84a-c)
	Abnehmerbündel: Erlang-Verteilung oder Erlang's-Bernoulli-Verteilung vorgeschrieben	Gl. (87a) Gl. (87b)
	Verlust- und Blockierungswahrscheinlichkeit	Gln. (88-90)
2-stufige Systeme ohne Mischung Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Abnehmerbündel abhängig von der angenommenen Verteilung auf Zwischenleitungs-bündel	Zwischenleitungs-bündel: Erlang-Verteilung	2.18; Gl. (93)
	Abnehmerbündel: Rekursionsformel des statist. Gleichgewichts für ZV1	Gln. (91a-c)
	Verlust- und Blockierungswahrscheinlichkeit	Gl. (94)
2-stufige Systeme mit Mischung	$i_1 = k_1$; Verbesserung des Verfahrens von Jacobaeus, A ≠ Y	2.19.1
	$i_1 \geq k_1$; analog zu Abschnitt 2.17	2.19.2

2.15 Zweistufige Systeme ohne Mischung - Verbesserung des Verfahrens von Jacobaeus durch A ≠ Y

Vorbemerkung: Die Fälle, in denen sowohl im Zwischenleitungs-bündel als auch im Abnehmer-bündel eine Bernoulli-Verteilung angesetzt wird, können in dieser Hinsicht nicht verbessert werden und bleiben daher außer Betracht.

Grundgedanke der Verbesserung

Die Rechnung geht nicht wie bisher vom Angebot A=Y, sondern von der Belastung Y < A aus. Für sämtliche Erlang-Verteilungen berechnen wir zunächst iterativ (vgl. Abschnitt V.4) "Erzeugende Angebote A₀" so, daß die vorgegebene Belastung Y auftritt. Also

$$L(x) = \frac{A_0^x}{x!} \cdot \frac{1}{\sum_{v=0}^n \frac{A_0^v}{v!}} \quad \text{mit} \quad Y = \sum_{x=1}^n x \cdot L(x) = A_0 \cdot (1 - E_n(A_0))$$

Die Iteration kann ohne Schwierigkeit auf einem Digitalrechner durchgeführt werden. Der Wert A₀ ist als Rechengröße zu verstehen, die keine physikalische Bedeutung hat; sie erzeugt lediglich mit dem vorgeschriebenen Verteilungstyp die vorgegebene Belastung Y (erzeugendes Angebot).

Im folgenden wollen wir entsprechend der Gliederung in den Abschnitten 2.5, 2.6 und 2.7 die wichtigsten der dort aufgeführten Lösungen auf diese Weise verbessern:

2.15.1 $i_1 \leq k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Analog zu Gleichung (19) in Abschnitt 2.6.2 gilt:

$$E = \sum_{x_1=0}^{i_1} \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1-P_{E1})^{i_1-x_1} \cdot \frac{E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r})}{E_{x_1, k_{2r}}(A_{02r})} \quad (65)$$

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^{i_1} (i_1-x_1) \cdot \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1-P_{E1})^{i_1-x_1} \cdot \frac{E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r})}{E_{x_1, k_{2r}}(A_{02r})}}{\sum_{x_1=0}^{i_1} (i_1-x_1) \cdot \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1-P_{E1})^{i_1-x_1}} \quad (66)$$

mit

$$Y_{2r} = A_{02r} \cdot (1 - E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r}))$$

Aus der vorgeschriebenen Belastung Y_{2r} und dem berechneten Verlust B erhält man das tatsächliche Angebot A_{2r} :

$$A_{2r} = \frac{Y_{2r}}{1 - B} \quad (67)$$

Bemerkungen zu Gleichung (65):

Für $i_1=k_1; k_{2r}=1$: Gleichung (65) kann in die Gleichung (8), Abschnitt 2.5.1, entsprechende Form gebracht werden.

Für $i_1=k_1; k_{2r}>1$: Gleichung (65) entspricht Gleichung (9) in Abschnitt 2.5.2.

Für $i_1 < k_1; k_{2r}=1$: Gleichung (65) entspricht Gleichung (17) in Abschnitt 2.6.1.

2.15.2 $i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; Bernoulli/Erlang; Gleichbelastung sämtlicher Abnehmerleitungen

Analog zu Gleichung (25) in Abschnitt 2.7.2 gilt jetzt:

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1-P_{E1})^{i_1-x_1} \cdot \frac{E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r})}{E_{x_1, k_{2r}}(A_{02r})} + \sum_{x_1=k_1+1}^{i_1} \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1-P_{E1})^{i_1-x_1} \quad (68)$$

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E_1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E_1})^{i_1 - x_1} \cdot \frac{E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r})}{E_{x_1, k_{2r}}(A_{02r})}}{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E_1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E_1})^{i_1 - x_1}} \quad (69)$$

mit

$$Y_{2r} = A_{02r} \cdot (1 - E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r}))$$

Aus der vorgeschriebenen Belastung Y_{2r} und dem berechneten Verlust B erhält man wiederum für das tatsächliche Angebot A_{2r} :

$$A_{2r} = \frac{Y_{2r}}{1 - B} \quad (70)$$

2.15.3 $i_1 > k_1$; $k_{2r}=1$; Erlang/Erlang

Analog zu Gleichung (29) in Abschnitt 2.7.5 erhalten wir jetzt

$$E = B = \frac{A_0 \cdot E_{k_1}(A_0) - A_{02r} \cdot E_{k_1}(A_{02r})}{A_0 - A_{02r}} \quad (71)$$

mit

$$Y_1 = A_0 (1 - E_{k_1}(A_0)), \quad Y_{2r} = A_{02r} (1 - E_{k_1}(A_{02r}))$$

und entsprechend oben

$$A_{2r} = \frac{Y_{2r}}{1 - B} \quad (72)$$

Im symmetrischen Fall $Y_1 = Y_{2r}$ ergibt sich aus Gleichung (71) nach einem Grenzübergang (Bernoulli-l'Hospital) die bei Huber /55/ angegebene Lösung (vgl. auch Abschnitt V.6.7.3).

$$E = B = E_{k_1}(A_0) \cdot (k_1 + 1 - Y_1) \quad (73)$$

mit

$$Y_1 = A_0 \cdot (1 - E_{k_1}(A_0))$$

2.15.4 $i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; Erlang/Erlang; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Der Ansatz lautet analog zu Gleichung (31) in Abschnitt 2.7.6:

$$E = B = \frac{\sum_{x_1=0}^{k_1} \frac{A_0^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r})}{\sum_{v=0}^{k_1} \frac{A_0^v}{v!} \cdot \frac{E_{x_1, k_{2r}}(A_{02r})}{E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r})}}{\quad} \quad (74)$$

mit

$$Y_1 = A_0 \cdot (1 - E_{k_1}(A_0)) ; Y_{2r} = A_{02r} \cdot (1 - E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r}))$$

Das tatsächliche Angebot A_{2r} ergibt sich anschließend zu

$$A_{2r} = \frac{Y_{2r}}{1 - B} \quad (75)$$

2.15.5 $i_1 > k_1; k_{2r} > 1$; Erlang/Erlang; keine Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Entsprechend der Gleichung (33), Abschnitt 2.7.7, gilt nun die Näherungsformel

$$E = B = \frac{A_0 \cdot E_{g_2, k_{2r}}(A_0) - A_{02r} \cdot E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r})}{A_0 - A_{02r}} \quad (76)$$

mit

$$Y_1 = A_0 \cdot (1 - E_{k_1}(A_0)) ; Y_{2r} = A_{02r} \cdot (1 - E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r}))$$

Die Verbesserung der Formeln für drei- und vierstufige Systeme (Abschnitte 2.10 und 2.11) geschieht in entsprechender Weise.

2.16 Zweistufige Systeme ohne Mischung - Verbesserung des Verfahrens von Jacobaeus durch Anwendung der Erlang-Bernoulli-Verteilung

Jacobaeus verwendet in seiner Arbeit aus Gründen der Einfachheit der numerischen Auswertung nur Binomial- und Erlang-Verteilungen. Da zu erwarten ist, daß im Falle $n < Q < \infty$ mit Erlang's-Bernoulli-Verteilung (siehe Gleichung (3), Seite 62) die wirklichen Verhältnisse besser erfasst werden als mit der Binomialverteilung, wird nachstehend diese Verteilung in einigen Gleichungen eingeführt. Gleichzeitig geht die Rechnung wie im vorhergehenden Abschnitt von der tatsächlichen Belastung $Y < A$ aus. Im folgenden werde Erlang's-Bernoulli-Verteilung mit EB abgekürzt.

2.16.1 $i_1 > k_1; k_{2r} \geq 1$; EB/Erlang; Gleichbelastung aller Abnehmerleitungen

Ansatz:

$$E = \frac{\sum_{x_1=0}^{k_1} \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot \alpha_0^{x_1}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot \alpha_0^v} \cdot \frac{E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r})}{E_{x_1, k_{2r}}(A_{02r})}}{\quad} \quad (77)$$

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot \alpha_0^{x_1}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot \alpha_0^v} \cdot \frac{E_{g_2, k_{2r}}(A_{02r})}{E_{x_1, k_{2r}}(A_{02r})}}{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot \alpha_0^{x_1}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot \alpha_0^v}} \quad (78)$$

mit
$$Y_{2r} = A_{02r} \cdot (1 - E_{k_1, k_{2r}}(A_{02r}))$$

und der "erzeugenden Anrufrichte" α_0 so, daß

$$Y_1 = \sum_{x_1=1}^{k_1} x_1 \cdot [x_1] = \sum_{x_1=1}^{k_1} x_1 \cdot \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot \alpha_0^{x_1}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot \alpha_0^v}$$

Das tatsächliche Angebot A_{2r} ergibt sich anschließend zu:

$$A_{2r} = \frac{Y_{2r}}{1 - B} \quad (79)$$

2.16.2 $i_1 \geq k_1; k_{2r}=1$; EB/EB

Die Grundgleichung für die Blockierungswahrscheinlichkeit E lautet:

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} [x_1] \cdot [k_1 - x_1] \quad (1b)$$

Dabei ist

$$[x_1] = \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot \alpha_0^{x_1}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot \alpha_0^v}$$

die EB-Verteilung auf den k_1 Ausgängen des betrachteten Koppelvielfachs in Stufe 1

mit α_0 so, daß

$$Y_1 = \sum_{x_1=1}^{k_1} x_1 \cdot [x_1]$$

Nach Gleichung (5b), Abschnitt 2.3.3 gilt:

$$[k_1 - x_1] = \sum_{x_2=k_1-x_1}^{k_1-g_2} \frac{\binom{x_2}{k_1-x_1}}{\binom{k_1}{k_1-x_1}} \cdot [x_2]$$

Dabei ist

$$[x_2] = \frac{\binom{Q}{x_2} \alpha_{02}^{x_2}}{\sum_{v=0}^{g_2} \binom{Q}{v} \alpha_{02}^v}$$

die EB-Verteilung auf den $n_{2r} = g_2 = k_1$ Abnehmerleitungen im Bündel der betrachteten Richtung

mit α_{02} so, daß

$$Y_{2r} = \sum_{x_2=1}^{g_2} x_2 \cdot [x_2]$$

Aus Gleichung (1b) folgt damit:

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} \left\{ \frac{\binom{i_1}{x_1} \alpha_0^{x_1}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \alpha_0^v} \cdot \sum_{x_2=k_1-x_1}^{k_1-g_2} \frac{\binom{x_2}{k_1-x_1}}{\binom{k_1}{k_1-x_1}} \cdot \frac{\binom{Q}{x_2} \alpha_{02}^{x_2}}{\sum_{v=0}^{g_2} \binom{Q}{v} \alpha_{02}^v} \right\} \quad (80)$$

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot [x_1] \cdot [k_1 - x_1]}{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot [x_1]} \quad (81)$$

Das tatsächliche Angebot A_{2r} ergibt sich anschließend zu

$$A_{2r} = \frac{Y_{2r}}{1 - B} \quad (82)$$

Die Größe Q ist eine reduzierte Quellenzahl, welche berücksichtigt, daß nicht sämtliche $g_1 \cdot i_1$ Quellen in Stufe 1 in die betrachtete Richtung aktiv sind. Eine Mittelwertbetrachtung liefert:

$$Q = i_1 \cdot g_1 - Y_1 \cdot g_1 + \eta_r \cdot Y_1 \cdot g_1 \quad ; \quad \eta_r = k_{2r} / k_2$$

2.17 Zweistufige Systeme ohne Mischung - Verteilung im Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorgegebenen Verteilung auf dem Abnehmerbündel

Den Einfluß der Wahrscheinlichkeitsverteilung im Abnehmerbündel auf die Verteilung im Zwischenleitungsbündel können wir näherungsweise erfassen, indem wir auf den k_1 Ausgängen des betrachteten Koppelvielfachs in Stufe 1 die Rekursionsformel für das statistische Gleichgewicht ansetzen und die darin auftretende Sperrwahrscheinlichkeit mit Hilfe der angenommenen Verteilung im Abnehmerbündel berechnen.

In bekannter Weise lautet die Rekursionsformel für das statistische Gleichgewicht auf den k_1 Ausgängen des betrachteten Koppelvielfachs in Stufe 1:

Für ZV1:

$$[x_1] \cdot x_1 = A \cdot [x_1 - 1] \cdot (1 - \sigma(x_1 - 1)) \quad (83a)$$

Daraus folgt:

$$[x_1] = \frac{\frac{A^{x_1}}{x_1!} \prod_{z=0}^{x_1-1} (1 - \sigma(z))}{\sum_{v=1}^{k_1} \frac{A^v}{v!} \prod_{z=0}^{v-1} (1 - \sigma(z))} \quad (83b)$$

Wenn von der Belastung Y_1 ausgegangen wird, ist A so zu bestimmen, daß

$$Y_1 = \sum_{x_1=1}^{k_1} x_1 \cdot [x_1] \quad (83c)$$

Für ZV2:

$$[x_1] \cdot x_1 = (i_1 - (x_1 - 1)) \cdot \alpha_1 [x_1 - 1] \cdot (1 - \sigma(x_1 - 1)) \quad (84a)$$

Daraus folgt:

$$[x_1] = \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot \alpha_1^{x_1} \prod_{z=0}^{x_1-1} (1 - \sigma(z))}{\sum_{v=1}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot \alpha_1^v \prod_{z=0}^{v-1} (1 - \sigma(z))} \quad (84b)$$

Wenn von der Belastung Y_1 ausgegangen wird, ist α_1 so zu bestimmen, daß

$$Y_1 = \sum_{x_1=1}^{k_1} x_1 \cdot [x_1] \quad (84c)$$

Sämtliche nachstehenden Gleichungen werden der Übersichtlichkeit halber für $k_{2r}=1$ hergeleitet.

Die in den Gleichungen (83a, b, c) und (84a, b, c) auftretende Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_1)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein in das betrachtete Koppelvielfach der Stufe 1 einfallender Ruf nicht durchgeschaltet werden kann (gleichgültig, für welche Richtung der Ruf bestimmt war).

Es gilt:

$$G(x_1) = \sum_{r=1}^{k_2=R} \delta_r \cdot [k_1 - x_1]_r \quad (85)$$

Dabei bedeuten:

- δ_r : Anteil des Angebots für die Richtung r
 $[k_1 - x_1]_r$: Wahrscheinlichkeit, daß mindestens jene $(k_1 - x_1)$ Abnehmerleitungen der betrachteten Richtung r belegt sind, die von den $(k_1 - x_1)$ freien Zwischenleitungen erreicht werden.

Die Wahrscheinlichkeit $[k_1 - x_1]_r$ kann aus einem kombinatorischen Ansatz und mit Hilfe der auf dem Abnehmerbündel Nr. r angenommenen Gleichzeitigkeitsverteilung bestimmt werden.

Zur Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_1)$ nach Gleichung (85) muß daher für jedes Abnehmerbündel die Wahrscheinlichkeit $[k_1 - x_1]_r$ ermittelt werden, und folglich ist für jedes der $R = k_2$ Abnehmerbündel eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $[x_{2r}]$ vorzuschreiben.

Der Übersichtlichkeit halber nehmen wir nunmehr für die weiteren Betrachtungen an, daß erstens das Angebot an alle Abnehmerbündel gleich aufgeteilt wird: $\delta_r = 1/R$, und zweitens auf jedem Abnehmerbündel dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung existiere.

Damit folgt aus Gleichung (85):

$$G(x_1) = \sum_{r=1}^{k_2=R} \frac{1}{R} \cdot [k_1 - x_1] = [k_1 - x_1] \quad (86)$$

Für die Wahrscheinlichkeit $[k_1 - x_1]$ gilt:

Erlang-Verteilung im Abnehmerbündel (MPJ-Formel /48/):

$$G(x_1) = [k_1 - x_1] = \frac{E_{k_1}(A_{02r})}{E_{x_1}(A_{02r})} \quad (87a)$$

mit $Y_{2r} = A_{02r} \cdot (1 - E_{k_1}(A_{02r}))$

Erlang's-Bernoulli-Verteilung im Abnehmerbündel (nach Gleichung (5b), Abschnitt 2.3.3):

$$G(x_1) = [k_1 - x_1] = \sum_{x_2 = k_1 - x_1}^{k_1} \frac{\binom{x_2}{k_1 - x_1}}{\binom{k_1}{k_1 - x_1}} \cdot [x_2] \quad (87b)$$

Dabei ist

$$[x_2] = \frac{\binom{a}{x_2} \cdot a_{02}^{x_2}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{a}{v} \cdot a_{02}^v}$$

die EB-Verteilung auf den $n_{2r} = g_2 = k_1$ Abnehmerleitungen im Bündel der betrachteten Richtung

mit α_{02} so, daß

$$Y_{2r} = \sum_{x_2=1}^{k_1} x_2 \cdot [x_2]$$

und der Quellenzahl Q (vgl. Abschnitt 2.16.2)

$$Q = i_1 \cdot g_1 - Y_1 \cdot g_1 + \frac{1}{k_2} \cdot Y_1 \cdot g_1$$

Schließlich ergibt sich für die Verlustwahrscheinlichkeit B und die Blockierungswahrscheinlichkeit E:

Für ZV1:

$$B = E = \sum_{x_1=0}^{k_1} [x_1] \cdot [k_1 - x_1] \quad (88)$$

Für ZV2:

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot [x_1] \cdot [k_1 - x_1]}{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \cdot [x_1]} \quad (89)$$

$$E = \sum_{x_1=0}^{k_1} [x_1] \cdot [k_1 - x_1] \quad (90)$$

2.18 Zweistufige Systeme ohne Mischung - Verteilung im Abnehmerbündel abhängig von der vorgegebenen Verteilung auf dem Zwischenleitungsbündel

Umgekehrt wie in Abschnitt 2.17 kann näherungsweise der Einfluß der Wahrscheinlichkeitsverteilung im Zwischenleitungsbündel auf die Verteilung im Abnehmerbündel erfaßt werden, indem wir auf den $n_{2r}=g_2=k_1$ Abnehmerleitungen der betrachteten Richtung die Rekursionsformel für das statistische Gleichgewicht ansetzen und die darin auftretende Sperrwahrscheinlichkeit mit Hilfe der angenommenen Verteilung im Zwischenleitungsbündel berechnen. Der Übersichtlichkeit halber ist $k_{2r}=1$ angenommen; außerdem werden sämtliche Gleichungen für Zu- fallsverkehr erster Art (ZV1) hergeleitet.

Die Rekursionsformel für das statistische Gleichgewicht auf den $n_{2r}=g_2=k_1$ Abnehmerleitungen der betrachteten Richtung lautet:

$$[x_2] \cdot x_2 = A_{2r} \cdot [x_2 - 1] \cdot (1 - \sigma(x_2 - 1)) \quad (91a)$$

Daraus folgt:

$$[x_2] = \frac{\frac{A_{2r}}{x_2!} \cdot \prod_{z=0}^{x_2-1} (1-\sigma(z))}{\sum_{v=1}^{n_{2r}} \frac{A_{2r}}{v!} \cdot \prod_{z=0}^{v-1} (1-\sigma(z))} \quad (91b)$$

Wenn von der Belastung Y_{2r} ausgegangen wird, ist A_{2r} so zu bestimmen, daß

$$Y_{2r} = \sum_{x_2=0}^{n_{2r}} x_2 \cdot [x_2] \quad (91c)$$

Die in den Gleichungen (91a, b, c) auftretende Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_2)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in das betrachtete Abnehmerbündel kein Ruf durchgeschaltet werden kann (gleichgültig, in welches Koppelvielfach der ersten Stufe er einfällt).

Es gilt:

$$\sigma(x_2) = [n_{2r} - x_2] = [k_1 - x_2] \quad (92)$$

Es ist $[k_1 - x_2]$ die Wahrscheinlichkeit, daß in einer betrachteten Zwischenleitungseinheit mindestens jene $(n_{2r} - x_2) = (k_1 - x_2)$ Linkleitungen belegt sind, welche die $(n_{2r} - x_2)$ freien Abnehmerleitungen erreichen könnten.

Im Vergleich mit der Berechnung von $\sigma(x_1)$ nach Gleichung (85), Abschnitt 2.17, ist hervorzuheben, daß die Berechnung von $\sigma(x_2)$ nach Gleichung (92) einfacher ist und zwar aus folgenden Gründen:

- a) Da eine gleichmäßige Aufteilung des Gesamtangebots an alle Koppelvielfache der ersten Stufe vorausgesetzt wird, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf den Linkleitungen für sämtliche Zwischenleitungs-bündel gleich.
- b) Da auf dem Abnehmerbündel die Rekursionsformel für das statistische Gleichgewicht angesetzt wird und auf dem Zwischenleitungs-bündel der betrachteten Linkeinheit eine Verteilung angenommen wird, muß die Art der Angebotsaufteilung auf die verschiedenen Abnehmerbündel nicht in Rechnung gestellt werden. Es entfällt daher eine Fallunterscheidung gemäß den Gleichungen (85) und (86) in Abschnitt 2.17.

Für die Wahrscheinlichkeit $[k_1 - x_2]$ gilt (MPJ-Formel / 48 //):

$$\sigma(x_2) = [k_1 - x_2] = \frac{E_{k_1}(A_0)}{E_{x_2}(A_0)} \quad (93)$$

$$Y_1 = A_0 \cdot (1 - E_{k_1}(A_0))$$

Schließlich ergibt sich für die Verlustwahrscheinlichkeit B und die Blockierungswahrscheinlichkeit E:

$$B = E = \sum_{x_2=0}^{n_{2r}=k_1} [x_2] \cdot [k_1 - x_2] \quad (94)$$

2.19 Zweistufige Systeme mit Mischung hinter Stufe 2

2.19.1 Verbesserung des Verfahrens von Jacobaeus durch $A \neq Y$

In Abschnitt 2.12 (Beispiel System L2032, Diagramm V.9 in Anhang B) hatten wir die Blockierungswahrscheinlichkeit E und die Verlustwahrscheinlichkeit B berechnet, wenn die Belastung P_{A1} je Ausgang eines Koppelvielfachs in Stufe 1 und das Angebot $A_{2r}=Y_{2r}$ an das Abnehmerbündel in Richtung r gegeben waren.

Nun werden außer den Strukturparametern des Systems lediglich die Belastung P_{A1} je Ausgang eines Koppelvielfachs in Stufe 1 und die Belastung $Y_{2r} < A_{2r}$ auf dem betrachteten Abnehmerbündel vorgeschrieben.

Als Beispiel für die Berechnung wird wie in Abschnitt 2.9.2 der übersichtliche Fall $k_1=k_2=g_2$, $k_{2r}=1$ betrachtet. Nach Gleichung (54a-d) gilt:

$$E = (P_{A1} + P_{A2} - P_{A1} \cdot P_{A2})^{k_1} \quad (95)$$

$$E = \frac{E_{k_1}(A_{02r})}{E_{k_1}\left(\frac{A_{02r}}{P_{A1}}\right)} \quad (96)$$

$$n_{2r} = g_2 + \frac{Y_{2r} - Y_{02r}}{P_{A2}} = k_1 + \frac{Y_{2r} - Y_{02r}}{P_{A2}} \quad (97)$$

Die Größen P_{A2} , Y_{2r} und Y_{02r} haben die entsprechende Bedeutung wie P_{A2} , A_{2r} und A_{02r} in Gleichung (54a-d).

Zunächst setzen wir die beiden Gleichungen (95) und (96) einander gleich:

$$\frac{E_{k_1}(A_{02r})}{E_{k_1}\left(\frac{A_{02r}}{P_{A1}}\right)} = (P_{A1} + P_{A2} - P_{A1} \cdot P_{A2})^{k_1} \quad (98)$$

Aus Gleichung (97) folgt:

$$P_{A2} = \frac{Y_{2r} - Y_{02r}}{n_{2r} - k_1} \quad (99)$$

mit
$$Y_{02r} = A_{02r} \cdot (1 - E_{k_1}(A_{02r})) \quad (100)$$

Die Gleichungen (99) und (100) werden in Gleichung (98) eingesetzt, und daraus kann dann der Wert A_{02r} iterativ bestimmt werden.

Damit ergibt sich aus Gleichung (96) die Blockierungswahrscheinlichkeit E :

$$E = \frac{E_{k_1}(A_{02r})}{E_{k_1}\left(\frac{A_{02r}}{P_{A1}}\right)} \quad (96)$$

Für die Verlustwahrscheinlichkeit B gilt:

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \binom{i_1}{x_1} P_{A1}^{x_1} (1 - P_{A1})^{i_1 - x_1} \cdot \frac{E_{k_1}(A_{02r})}{E_{x_1}(A_{02r})}}{\sum_{x_1=0}^{k_1} (i_1 - x_1) \binom{i_1}{x_1} P_{A1}^{x_1} (1 - P_{A1})^{i_1 - x_1}} \quad (101)$$

2.19.2 Verteilung im Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorgegebenen Verteilung auf dem Abnehmerbündel

Wie in den Abschnitten 2.9 und 2.19.1 werden solche zweistufigen Systeme behandelt (vgl. Bild V.9), bei denen die Ausgänge aus verschiedenen Linkgruppen auf ein gemeinsames Abnehmerbündel gemischt werden.

Die Grundgedanken und Formeln wurden bereits in Abschnitt 2.17 dieses Kapitels ausführlich entwickelt und brauchen hier nicht wiederholt zu werden. Es sei nur darauf hingewiesen, daß in den Formeln zur Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_1)$ - Gleichungen (87a, b) in Abschnitt 2.17 - die Größe k_1 durch die Zahl n_{2r} von Abnehmerleitungen hinter der Mischung (vgl. Bild V.9) zu ersetzen ist; Y_{2r} ist die Belastung auf dem Abnehmerbündel mit n_{2r} Leitungen.

2.20 Beispiele zu den Abschnitten 2.15 - 2.17 und 2.19

Um die Brauchbarkeit der verbesserten Verfahren abschätzen zu können, berechnen wir dieselben Systeme wie in Abschnitt 2.12 und vergleichen wieder Test und Rechnung. Die Diagramme sind in Anhang B zusammengestellt.

2.20.1 System L2022 (Bild A.4, Anhang A)

a) $i_1 = k_1 = 10$; ZV2 ($Q = i_1 = 10$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1); Diagramm V.1

Erklärung: Kurve 3: Bernoulli/Erlang nach Gleichung (66), Abschnitt 2.15.1;

A \neq Y.

Kurve 4: Bernoulli/Erlang's-Bernoulli nach Gleichung (81), Abschnitt 2.16.2;

A \neq Y.

Kurve 5: Zustandsgleichung Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorgeschriebenen Erlang-Verteilung auf dem Abnehmerbündel nach den Gleichungen (84a, b, c), (87a) und (89), Abschnitt 2.17. Innerhalb der Zeichengenauigkeit ergibt sich Übereinstimmung mit Kurve 3.

Kurve 6: Zustandsgleichung Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorgeschriebenen EB-Verteilung im Abnehmerbündel nach den Gleichungen (84a, b, c), (87b) und (89), Abschnitt 2.17. Die Werte stimmen innerhalb der Zeichengenauigkeit mit Kurve 4 überein.

b) $i_1 < k_1$; $i_1=8$; ZV2 ($Q=i_1=8$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1); Diagramm V.2

- Erklärung: Kurve 3: Bernoulli/Erlang nach Gleichung (66), Abschnitt 2.15.1;
 $A \neq Y$
- Kurve 4: Bernoulli/Erlang's-Bernoulli nach Gleichung (81), Abschnitt 2.16.2;
 $A \neq Y$.
- Kurve 5: Zustandsgleichung Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorgeschriebenen Erlang-Verteilung auf dem Abnehmerbündel nach den Gleichungen (84a, b, c), (87a) und (89). Innerhalb der Zeichengenauigkeit ergibt sich Übereinstimmung mit Kurve 3.
- Kurve 6: Zustandsgleichung Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorgeschriebenen EB-Verteilung im Abnehmerbündel nach den Gleichungen (84a, b, c), (87b) und (89), Abschnitt 2.17. Innerhalb der Zeichengenauigkeit ergibt sich Übereinstimmung mit Kurve 4.

c) $i_1 > k_1$; $i_1=15$; ZV2 ($Q=i_1=15$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1) Diagramm V.3

- Erklärung: Kurve 3: Erlang/Erlang nach Gleichung (71), Abschnitt 2.15.3;
 $A \neq Y$.
- Kurve 4: Bernoulli/Erlang nach Gleichung (66), Abschnitt 2.15.1 (obere Summationsgrenzen k_1 und nicht i_1); $A \neq Y$.
- Kurve 5: Erlang's-Bernoulli/Erlang nach Gleichung (78), Abschnitt 2.16.1;
 $A \neq Y$. Innerhalb der Zeichengenauigkeit haben wir Übereinstimmung mit Kurve 4.
- Kurve 6: Erlang's-Bernoulli/Erlang's-Bernoulli nach Gleichung (81), Abschnitt 2.16.2; $A \neq Y$.
- Kurve 7: Zustandsgleichung Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorgeschriebenen EB-Verteilung im Abnehmerbündel nach den Gleichungen (84a, b, c), (87b) und (89), Abschnitt 2.17. Innerhalb der Zeichengenauigkeit ergibt sich Übereinstimmung mit Kurve 6.
- Kurve 8: Zustandsgleichung Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorgeschriebenen Erlang-Verteilung im Abnehmerbündel nach den Gleichungen (84a, b, c), (87a) und (89), Abschnitt 2.17. Die Werte stimmen innerhalb der Zeichengenauigkeit mit den Kurven 4 und 5 überein.

d) $i_1 > k_1$; ZV1; Diagramm V.4

- Erklärung: Kurve 2: Erlang/Erlang nach Gleichung (71), Abschnitt 2.15.3;
 $A \neq Y$.
- Kurve 3: Zustandsgleichung Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorgeschriebenen Erlang-Verteilung im Abnehmerbündel nach den Gleichungen (83a, b, c), (87a) und (88), Abschnitt 2.17.

2.20.2 System L2033 (Bild A.5, Anhang A)

a) $i_1=k_1=10$; ZV2 ($Q=i_1=10$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1); Diagramm V.5

- Erklärung: Kurve 3: Bernoulli/Erlang (Gleichbelastung der Ausgänge) nach Gleichung (66), Abschnitt 2.15.1; $A \neq Y$.

Kurve 4: Erlang's-Bernoulli/Erlang's-Bernoulli analog Gleichung (81),
Abschnitt 2.16.2; $A \neq Y$.

b) $i_1 > k_1$; ZV1; Diagramm V.6

Erklärung: Kurve 2: Erlang/Erlang (Gleichbelastung der Ausgänge) nach Gleichung (74),
Abschnitt 2.15.4; $A \neq Y$.

Kurve 3: Zustandsgleichung Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorgeschrie-
benen Erlang-Verteilung auf dem Abnehmerbündel analog zu den Gleich-
ungen (83a, b, c), (87a) und (88), Abschnitt 2.17.

2.20.3 System L2001 (Bild A.6, Anhang A); $i_1 > k_1$; ZV1

Diagramm V.7: Werte für Richtung 1 ($k_{21}=1$)
Kurve 2: Erlang/Erlang nach Gleichung (73), Abschnitt 2.15.3; $A \neq Y$.

Diagramm V.8: Werte für Richtung 2 ($k_{22}=3$)
Kurve 2: Erlang/Erlang nach Gleichung (74), Abschnitt 2.15.4; $A \neq Y$.

2.20.4 System L2032 (Bild A.7, Anhang A)

a) $i_1=k_1=10$; ZV2 ($Q=i_1=10$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1); Diagramm V.9

Erklärung: Kurve 2: Verbesserung des Verfahrens von Jacobaeus (mit O'Dell). Der Einfluß
der Näherungsannahme $A = Y$ ist jetzt beseitigt. Die Rechenwerte des
Verlusts oberhalb $B = 3\%$ sind kleiner als die Testergebnisse. Die
Ursache der Differenz zwischen Test und Rechnung liegt jetzt nur
noch in den übrigen Näherungen des Verfahrens (vgl. Abschnitt 2.9).

Kurve 3: Zustandsgleichung Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorge-
schriebenen Erlang-Verteilung auf dem Abnehmerbündel nach Abschnitt
2.19.2.

b) $i_1 > k_1$; ZV1; Diagramm V.10

Erklärung: Zustandsgleichung Zwischenleitungsbündel abhängig von der vorge-
schriebenen Erlang-Verteilung auf dem Abnehmerbündel nach Abschnitt
2.19.2.

Zusammenfassung:

Die verbesserten Verlustwerte nach den in den Abschnitten 2.15 - 2.19 angegebenen Formeln
liegen grundsätzlich unter den ursprünglich nach Jacobaeus berechneten Resultaten. Bei klei-
nen Verlusten ($< 1,5\%$) unterscheiden sich die verbesserten von den unverbesserten Werten
relativ nur um ungefähr 6 % und weniger; bei größeren Verlustwerten (Simulationsergebnisse
im Bereich von 10 % bis 25 %) liegen die verbesserten Rechenergebnisse relativ etwa um
12 % bis 35 % über den Testwerten (außer in den Diagrammen V.9 und V.10); mit der Nähe-
rungsannahme $A = Y$ lagen die Abweichungen dagegen zwischen 100 % und 150 %.

Die noch verbleibenden Abweichungen zwischen Test und Rechnung liegen darin begründet, daß
weiterhin die beiden Näherungsannahmen der funktionellen und statistischen Unabhängigkeit
verwendet werden.

- V.3 Fortet, R. - B. Canceill: Probabilités de perte en sélection conguguée (1955).
 Pröhl, G.: Gefahrzeit zweistufiger Linksysteme in der Fernsprechvermittlungstechnik (1962).

3.1 Übersicht

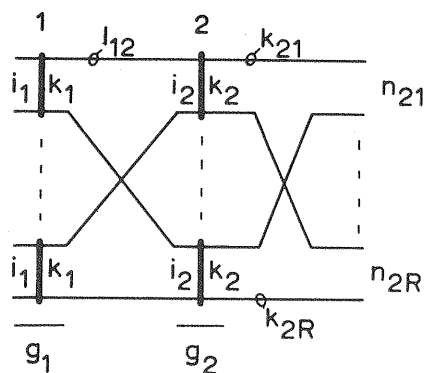
In diesem Abschnitt behandeln wir die Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E zweistufiger Linksysteme für Richtungswahl. Zunächst wird der allgemeinste Fall $l_{12} \geq 1$ und $k_{2r} \geq 1$ betrachtet; die Formeln werden hier für allgemeinere Strukturen als bei Jacobaeus hergeleitet. Anschließend werden die Sonderfälle $l_{12}=1$ und $k_{2r}=1$ diskutiert, die sich mit den bei Jacobaeus angegebenen Ergebnissen decken.

Das Prinzip der Berechnung von Richtungswahlsystemen mit einer Mischung der Ausgänge aus verschiedenen Linkgruppen hinter der letzten Stufe ist ähnlich wie bei Jacobaeus. Nur wird hier ein Näherungsverfahren von Livschitz und Rodsjanko /36/ zugrunde gelegt anstelle der Methode von O'Dell /2/.

Die Grundgedanken und Grundformeln für den Fall $l_{12} \geq 1$ und $k_{2r} \geq 1$ sind bereits in früheren Arbeiten /18/, /23/, /29/ von Fortet, Canceill und Chastang enthalten. Pröhl /49/, dem wir hier folgen, bringt eine anschaulichere Herleitung und geht ausführlicher auf Spezialfälle ein.

3.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Skizze des Systems und Bezeichnungen siehe Bild V.12.



Strukturparameter

- | | |
|---|---|
| $S = 2$ | $g_2 = k_1 / l_{12}$ |
| $i_1 \geq k_1$ | $i_2 = g_1 \cdot l_{12}$ |
| $l_{12} \geq 1$ | $g_1 \cdot k_1 = g_2 \cdot i_2$ (keine Mischung zwischen den Stufen 1 und 2). |
| $k_{2r} \geq 1; r=1, 2, \dots, R$ | |
| $n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}; r=1, 2, \dots, R$ | |

Bild V.12 Zweistufiges Linksystem für Richtungswahl

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Angebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV2 (der Sonderfall für angebotenen Zufallsverkehr 1. Art ist zwar im Ansatz ebenfalls enthalten, wird aber nicht explizit behandelt)
- Gleichbelastung der Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1 und Gleichbelastung der Leitungen eines Abnehmerbündels
- Angebot auf alle Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt
- Annahme $A = Y$; daher liefern die Formeln nur für kleine Werte der Blockierungswahrscheinlichkeit brauchbare Ergebnisse.

- Gegebene Größen sind:
- Strukturparameter
 - Angebot A je Koppelvielfach der ersten Stufe. Mit A und den gegebenen Strukturparametern sind aufgrund der Näherungsannahme $A = Y$ alle für die numerische Auswertung vorzuschreibenden Verkehrswerte bekannt.
- Gesuchte Größe ist:
- Blockierungswahrscheinlichkeit E für die betrachtete Richtung.

3.3 Grundgedanke des Verfahrens und Grundgleichungen

3.3.1 Grundgleichungen

Den Grundgedanken der Berechnungsmethode und die Grundgleichungen haben wir bereits in Abschnitt 2.3.1 dieses Kapitels entwickelt. Deshalb wollen wir hier nur die Grundgleichungen und die dazugehörigen Erklärungen wiederholen. Sie gelten wiederum für jeweils eine Zwischenleitungseinheit und lauten:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} [x_2] \cdot [g_2 - x_2] \quad (1a)$$

$$E = \sum_{x_1=0}^{g_2} [x_1] \cdot [g_2 - x_1] \quad (1b)$$

- $[x_2]$: Wahrscheinlichkeit, daß in genau x_2 beliebigen Koppelvielfachen der zweiten Stufe sämtliche k_{2r} Ausgänge in das betrachtete Abnehmerbündel der Richtung r belegt sind.
- $[g_2 - x_2]$: Wahrscheinlichkeit, daß mindestens $(g_2 - x_2) \cdot l_{12}$ bestimmte Linkleitungen anderweitig belegt sind (nämlich diejenigen, die zu den Koppelvielfachen der zweiten Stufe führen, die noch freie Abnehmerleitungen der gewünschten Richtung besitzen).
- $[x_1]$: Wahrscheinlichkeit, daß genau x_1 beliebige Koppelvielfache der zweiten Stufe vom betrachteten Koppelvielfach in der ersten Stufe nicht erreicht werden können, da die $x_1 \cdot l_{12}$ Zwischenleitungen zu diesen Koppelvielfachen belegt sind.
- $[g_2 - x_1]$: Wahrscheinlichkeit, daß in mindestens $(g_2 - x_1)$ bestimmten Koppelvielfachen der zweiten Stufe sämtliche k_{2r} Ausgänge in das betrachtete Abnehmerbündel der Richtung r anderweitig belegt sind (nämlich diejenigen, die von freien Zwischenleitungen noch zu erreichen wären).

3.3.2 Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Auf den Ausgängen eines Koppelvielfachs der Stufe 1 wird Erlang's-Bernoulli-Verteilung angenommen. Nach Gleichung (3), Abschnitt V.2.3.2, ist die Wahrscheinlichkeit für den Zustand "genau x Leitungen belegt":

$$[x]_1 = \frac{\binom{i_1}{x} \cdot (\alpha_1 \cdot h)^x}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot (\alpha_1 \cdot h)^v} ; \quad 0 \leq x \leq k_1$$

Mit $n=1$ und $\alpha_1 = \frac{P_{E1}}{1-P_{E1}}$ erhalten wir (vgl. nachstehende Bemerkung)

$$[X]_1 = \frac{\binom{i_1}{x} \cdot P_{E1}^x \cdot (1-P_{E1})^{i_1-x}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1-P_{E1})^{i_1-v}} ; \quad 0 \leq x \leq k_1 \quad (2)$$

Bemerkung zu Gleichung (2):

Die Größe α_1 ist die Anrufrichte einer freien Verkehrsquelle. Sie kann interpretiert werden als der Erwartungswert der Anzahl von Rufen je Zeiteinheit aus einer freien Quelle. Durch die Substitution $\alpha_1 = P_{E1}/(1-P_{E1})$ entsteht aus der Erlang- Bernoulli-Verteilung die von Pröhl verwendete Gleichung (2).

Die Größe $P_{E1} = \alpha_1/(1+\alpha_1)$ bedeutet jedoch nicht die tatsächliche mittlere Belastung je Eingang eines Koppelvielfachs der Stufe 1. Dies wird aus folgender Überlegung deutlich (P_{E1}^* sei die tatsächliche mittlere Belastung je Zubringerleitung). Es gilt:

$$\frac{i_1 \cdot P_{E1}^*}{1-B} = (i_1 - i_1 \cdot P_{E1}^*) \cdot \alpha_1 = A$$

$$P_{E1}^* \cdot (1 + \alpha_1 \cdot (1-B)) = \alpha_1 \cdot (1-B)$$

$$P_{E1}^* = \frac{\alpha_1 \cdot (1-B)}{1 + \alpha_1 \cdot (1-B)}$$

Der Vergleich von P_{E1} mit P_{E1}^* zeigt, daß beide Größen für $B=0$ identisch sind, was bei Pröhl durch die Näherungsannahme "Angebot = Belastung" vorausgesetzt wird. Daher brauchen wir im Rahmen des hier zu besprechenden Näherungsverfahrens nicht zwischen P_{E1} und P_{E1}^* zu unterscheiden.

Auf den Abnehmerleitungen einer bestimmten Richtung wird eine Erlang-Verteilung angenommen, also:

$$[X]_2 = \frac{\frac{A_{2r}^x}{x!}}{\sum_{v=0}^{n_{2r}} \frac{A_{2r}^v}{v!}} ; \quad 0 \leq x \leq n_{2r} \quad (3)$$

3.4 Berechnung von $[x_1]$, $[x_2]$, $[g_2-x_1]$, $[g_2-x_2]$

Aus den Gleichungen (2) und (3) werden mit Hilfe kombinatorischer Überlegungen die Wahrscheinlichkeiten $[x_1]$, $[x_2]$, $[g_2-x_1]$ und $[g_2-x_2]$ berechnet (Definitionen siehe Seite 107). Dabei wird grundsätzlich die Gleichwahrscheinlichkeit sämtlicher Belegungsmuster eines bestimmten Belegungszustandes vorausgesetzt.

3.4.1 Berechnung von $[x_1]$

Damit genau x_1 beliebige Linkbündel von einem Koppelvielfach in Stufe 1 zu x_1 Koppelvielfachen der nächsten Stufe, je von der Stärke l_{12} , voll belegt sind, können insgesamt $(x_1 \cdot l_{12} + v)$ Linkleitungen der betrachteten Zwischenleitungseinheit belegt sein. Daraus folgt,

daß die restlichen v Belegungen keines der übrigen $(g_2 - x_1)$ Linkbündel voll belegen. Demnach ist in jedem dieser Linkbündel noch mindestens eine Leitung frei.

Die Gesamtzahl der Belegungsmuster im Zwischenleitungsbündel beträgt:

$$\binom{g_2 \cdot l_{12}}{x_1 \cdot l_{12} + v} = \binom{k_1}{x_1 \cdot l_{12} + v} \quad (4)$$

Dabei gilt für v die Einschränkung:

$$0 \leq v \leq (g_2 - x_1) \cdot (l_{12} - 1) \quad (5)$$

Nach Gleichung (2) ist die Wahrscheinlichkeit, daß genau $(x_1 \cdot l_{12} + v)$ Zwischenleitungen belegt sind:

$$[x_1 \cdot l_{12} + v]_1$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Belegungsmusters im Zwischenleitungsbündel

$$\frac{[x_1 \cdot l_{12} + v]_1}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{x_1 \cdot l_{12} + v}} \quad (6)$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, v Belegungen auf $(g_2 - x_1)$ Linkbündeln unter Beachtung von Gleichung (5) zu verteilen, beträgt:

$$\varphi(v, g_2 - x_1) \quad (7)$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, x_1 Bündel auf g_2 Koppelvielfachen anzuordnen, beträgt:

$$\binom{g_2}{x_1} \quad (8)$$

Mit den Beziehungen (6), (7) und (8) erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, daß genau x_1 beliebige Linkbündel der Stärke l_{12} voll belegt und v Belegungen auf die restlichen $(g_2 - x_1)$ Linkbündel verteilt sind, folgenden Ausdruck:

$$[x_1 \cdot l_{12} + v]_1 \cdot \frac{\binom{g_2}{x_1} \cdot \varphi(v, g_2 - x_1)}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{x_1 \cdot l_{12} + v}} \quad (9)$$

Wenn über alle v aufsummiert wird, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $[x_1]$:

$$[x_1] = \sum_{v=0}^{(g_2 - x_1) \cdot (l_{12} - 1)} [x_1 \cdot l_{12} + v]_1 \cdot \frac{\binom{g_2}{x_1} \cdot \varphi(v, g_2 - x_1)}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{x_1 \cdot l_{12} + v}} \quad (10)$$

Bestimmung von $\varphi(v, g_2 - x_1)$

Im Linkbündel Nr. ξ seien v_ξ Belegungen. Sie können $\binom{l_{12}}{v_\xi}$ Muster bilden. Somit erhalten wir für $\varphi(v, g_2 - x_1)$:

$$\varphi(v, g_2 - x_1) = \sum_{v_1 + v_2 + \dots + v_\xi = v} \binom{l_{12}}{v_1} \cdot \binom{l_{12}}{v_2} \cdot \dots \cdot \binom{l_{12}}{v_\xi - x_1} \quad (11)$$

mit $0 \leq v_\xi \leq l_{12} - 1$; $\xi = 1, 2, \dots, g_2 - x_1$

und $v = \sum_{\xi=1}^{g_2 - x_1} v_\xi$

Da die numerische Auswertung von Gleichung (11) sehr umständlich ist, wird sie nachstehend in eine bequemer zu handhabende Form transformiert. Der Grundgedanke dazu findet sich bereits bei Fortet /18/ und wird dann bei Pröhl /49/ durchgeführt.

Dazu stellen wir $(1+z)^{l_{12}} - z^{l_{12}}$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes dar:

$$\begin{aligned} (1+z)^{l_{12}} - z^{l_{12}} &= \sum_{v_1=0}^{l_{12}-1} \binom{l_{12}}{v_1} z^{v_1} \\ \left((1+z)^{l_{12}} - z^{l_{12}} \right)^{g_2-x_1} &= \left\{ \sum_{v_1=0}^{l_{12}-1} \binom{l_{12}}{v_1} z^{v_1} \right\} \cdot \left\{ \sum_{v_2=0}^{l_{12}-1} \binom{l_{12}}{v_2} z^{v_2} \right\} \cdots \left\{ \sum_{v_{g_2-x_1}=0}^{l_{12}-1} \binom{l_{12}}{v_{g_2-x_1}} z^{v_{g_2-x_1}} \right\} \\ \left((1+z)^{l_{12}} - z^{l_{12}} \right)^{g_2-x_1} &= \cdots + \sum_{v_1+v_2+\dots+v_{g_2-x_1}=v} \binom{l_{12}}{v_1} \binom{l_{12}}{v_2} \cdots \binom{l_{12}}{v_{g_2-x_1}} z^v + \cdots \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit Gleichung (11) ergibt sich:

$\varphi(v, g_2-x_1)$ ist gleich dem Koeffizienten von z^v in der Entwicklung von $\left((1+z)^{l_{12}} - z^{l_{12}} \right)^{g_2-x_1}$.
Reihenentwicklung:

$$\begin{aligned} \left((1+z)^{l_{12}} - z^{l_{12}} \right)^{g_2-x_1} &= \sum_{v=0}^{g_2-x_1} \binom{g_2-x_1}{v} \cdot (-1)^v \cdot (1+z)^{l_{12} \cdot (g_2-x_1-v)} \cdot z^{l_{12} \cdot v} \\ \text{mit } \left((1+z)^{l_{12}} - z^{l_{12}} \right)^{l_{12} \cdot (g_2-x_1-v)} &= \sum_{\lambda=0}^{l_{12} \cdot (g_2-x_1-v)} \binom{l_{12} \cdot (g_2-x_1-v)}{\lambda} z^\lambda \end{aligned}$$

Somit:

$$\left((1+z)^{l_{12}} - z^{l_{12}} \right)^{g_2-x_1} = \sum_{v=0}^{g_2-x_1} \sum_{\lambda=0}^{l_{12} \cdot (g_2-x_1-v)} \binom{g_2-x_1}{v} \cdot (-1)^v \cdot \binom{l_{12} \cdot (g_2-x_1-v)}{\lambda} z^{v+\lambda}$$

Nun soll sein:

$$l_{12} \cdot v + \lambda = v \quad \text{d.f.} \quad \lambda = v - l_{12} \cdot v \geq 0 \quad \text{d.f.} \quad 0 \leq v \leq \left[\frac{v}{l_{12}} \right] \quad 1)$$

Also haben wir:

$$\varphi(v, g_2-x_1) = \sum_{v=0}^{\left[\frac{v}{l_{12}} \right]} (-1)^v \cdot \binom{g_2-x_1}{v} \cdot \binom{l_{12} \cdot (g_2-x_1-v)}{v-l_{12} \cdot v} \quad (12)$$

1) [] bedeutet hier "das Ganze", d.h. die nächst kleinere, ganze Zahl. Größere Werte von v geben keinen Beitrag zur Summe. Eine Verwechslung mit Wahrscheinlichkeiten, die ebenfalls in eckigen Klammern geschrieben werden, ist nicht möglich.

Aus Gleichung (10) folgt mit den Gleichungen (2) und (12):

$$[x_1] = \sum_{v=0}^{(g_2-x_1) \cdot (l_{12}-1)} \frac{\binom{i_1}{x_1 \cdot l_{12} + v} \cdot P_{E1}^{x_1 \cdot l_{12} + v} \cdot (1-P_{E1})^{i_1 - x_1 \cdot l_{12} - v}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1-P_{E1})^{i_1 - v}} \cdot \frac{\binom{g_2}{x_1} \cdot \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{v}{l_{12}} \rfloor} (-1)^v \cdot \binom{g_2-x_1}{v} \cdot \binom{l_{12} \cdot (g_2-x_1-v)}{v-l_{12} \cdot v}}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{x_1 \cdot l_{12} + v}} \quad (13)$$

Wahrscheinlichkeit, daß genau x_1 beliebige Koppelvielfache der zweiten Stufe vom betrachteten Koppelvielfach in der ersten Stufe nicht erreicht werden können, da die $x_1 \cdot l_{12}$ Zwischenleitungen zu diesen Koppelvielfachen belegt sind.

Anmerkung: Für $l_{12}=1$ geht Gleichung (13) in Gleichung (2) über.

3.4.2 Berechnung von $[x_2]$

Die Herleitung von $[x_2]$ ist analog der Herleitung von $[x_1]$. Wir erhalten:

$$[x_2] = \sum_{v=0}^{(g_2-x_2) \cdot (k_{2r}-1)} \frac{\binom{x_2 \cdot k_{2r} + v}{A_{2r}} \cdot \binom{g_2}{x_2} \cdot \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{v}{k_{2r}} \rfloor} (-1)^v \cdot \binom{g_2-x_2}{v} \cdot \binom{k_{2r} \cdot (g_2-x_2-v)}{v-k_{2r} \cdot v}}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} \frac{A_{2r}^v}{v!}} \cdot \frac{\binom{g_2}{x_2} \cdot \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{v}{k_{2r}} \rfloor} (-1)^v \cdot \binom{g_2-x_2}{v} \cdot \binom{k_{2r} \cdot (g_2-x_2-v)}{v-k_{2r} \cdot v}}{\binom{g_2 \cdot k_{2r}}{x_2 \cdot k_{2r} + v}} \quad (14)$$

Wahrscheinlichkeit, daß in genau x_2 beliebigen Koppelvielfachen der zweiten Stufe sämtliche k_{2r} Ausgänge in das betrachtete Abnehmerbündel der Richtung r belegt sind.

Anmerkung: Für $k_{2r}=1$ geht Gleichung (14) in Gleichung (3) über.

3.4.3 Berechnung von $[g_2-x_1]$

Wenn in mindestens (g_2-x_1) bestimmten Koppelvielfachen der zweiten Stufe sämtliche k_{2r} Ausgänge in das betrachtete Abnehmerbündel belegt sein sollen, so sind dafür mindestens $(g_2-x_1) \cdot k_{2r}$ bestimmte Belegungen erforderlich. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist nach Abschnitt V.2.3.3.3 Gleichung (6a, b):

$$[g_2-x_1] = \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{E_{x_1 \cdot k_{2r}}(A_{2r})} \quad (15)$$

3.4.4 Berechnung von $[g_2-x_2]$

Entsprechend Gleichung (6) gilt für das Auftreten eines bestimmten Belegungsmusters bei $((g_2-x_2) \cdot l_{12} + v)$ Belegungen im Zwischenleitungsbündel:

$$\frac{[(g_2 - x_2) \cdot l_{12} + v]_1}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{(g_2 - x_2) \cdot l_{12} + v}}$$

Die v Belegungen können auf $x_2 \cdot l_{12}$ Linkleitungen auf $\binom{x_2 \cdot l_{12}}{v}$ -fache Weise angeordnet werden.

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens $(g_2 - x_2) \cdot l_{12}$ bestimmte Zwischenleitungen belegt sind:

$$[g_2 - x_2] = \sum_{v=0}^{x_2 \cdot l_{12}} [(g_2 - x_2) \cdot l_{12} + v]_1 \cdot \frac{\binom{x_2 \cdot l_{12}}{v}}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{(g_2 - x_2) \cdot l_{12} + v}}$$

Oder mit Gleichung (2):

$$[g_2 - x_2] = \sum_{v=0}^{x_2 \cdot l_{12}} \frac{\binom{i_1}{(g_2 - x_2) \cdot l_{12} + v} \cdot P_{E1}^{(g_2 - x_2) \cdot l_{12} + v} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12} - v}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - v}} \cdot \frac{\binom{x_2 \cdot l_{12}}{v}}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{(g_2 - x_2) \cdot l_{12} + v}}$$

Umgeformt:

$$[g_2 - x_2] = \frac{\binom{i_1}{(g_2 - x_2) \cdot l_{12}} \cdot P_{E1}^{(g_2 - x_2) \cdot l_{12}}}{\binom{x_2 \cdot l_{12}}{x_2 \cdot l_{12}}} \cdot \frac{\sum_{v=0}^{x_2 \cdot l_{12}} \binom{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12}}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12} - v}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - v}} \quad (16)$$

Wahrscheinlichkeit, daß mindestens $(g_2 - x_2) \cdot l_{12}$ bestimmte Linkleitungen belegt sind (nämlich diejenigen, die zu den Koppelvielfachen der zweiten Stufe führen, die noch freie Abnehmerleitungen der gewünschten Richtung besitzen).

3.5 Sonderfälle aus Gleichung (16)

3.5.1 $i_1 < k_1 = g_2 \cdot l_{12}$

In dem Term
$$\frac{\sum_{v=0}^{x_2 \cdot l_{12}} \binom{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12}}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12} - v}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - v}}$$
 in Gleichung (16)

ist wegen $i_1 < k_1$ die Summation nur innerhalb folgender Grenzen sinnvoll (weitere Summanden sind Null):

$$0 \leq v \leq i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12}$$

$$0 \leq v \leq i_1$$

Daher werden die Summen im Zähler und im Nenner jeweils gleich 1.

Somit erhalten wir aus Gleichung (16):

$$[g_2 - x_2] = \frac{\binom{i_1}{(g_2 - x_2) \cdot l_{12}}}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{x_2 \cdot l_{12}}} \cdot P_{E1}^{(g_2 - x_2) \cdot l_{12}} \quad (17)$$

Anmerkung: Für $l_{12}=1$ ist Gleichung (17) identisch mit Gleichung (7a) in Abschnitt V.2.3.3.3.

3.5.2 $i_1 = k_1$

Aus Gleichung (16) folgt:

$$[g_2 - x_2] = P_{E1}^{(g_2 - x_2) \cdot l_{12}} \quad (18)$$

3.5.3 $i_1 > k_1$

Durch eine Umformung folgt aus Gleichung (16):

$$[g_2 - x_2] = \frac{\binom{i_1}{g_2 \cdot l_{12}} \cdot P_{E1}^{g_2 \cdot l_{12}} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - g_2 \cdot l_{12}} \cdot \sum_{v=0}^{x_2 \cdot l_{12}} \binom{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12}}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12} - v}}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot l_{12}} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - v} \cdot \binom{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12}}{x_2 \cdot l_{12}} \cdot P_{E1}^{x_2 \cdot l_{12}} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - g_2 \cdot l_{12}}}$$

Nun führen wir - nach Pröhl - zur Abkürzung folgende symbolische Schreibweise ein:

$$E_{i_1, k_1}^{(P_{E1})} = \frac{\binom{i_1}{k_1} \cdot P_{E1}^{k_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - k_1}}{\sum_{v=0}^{i_1} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - v}} \quad (19)$$

Damit erhalten wir:

$$[g_2 - x_2] = \frac{E_{i_1, g_2 \cdot l_{12}}^{(P_{E1})}}{E_{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12}, x_2 \cdot l_{12}}^{(P_{E1})}} \quad (20)$$

Bemerkung: Gleichung (20) hat eine ähnliche Struktur wie die bekannte Palm-Jacobaeus-Formel (siehe Gleichung (6a,b) in Abschnitt V.2.3.3.3).

3.6 Die Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E

Mit den in Abschnitt 3.4 abgeleiteten Beziehungen erhalten wir aus den Gleichungen (1a, b) die Blockierungswahrscheinlichkeit E. Nachstehend werden folgende Strukturen getrennt betrachtet, wobei wie in /49/ jeweils im Zwischenleitungsbündel eine Erlang-Bernoulli-Verteilung und auf dem Abnehmerbündel eine Erlang-Verteilung angenommen werden. Die nachstehende Tabelle gibt eine Übersicht.

Struktur	Behandelt in Abschnitt
$i_1 = k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$	3.6.1
$i_1 < k_1; l_{12} = 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$	3.6.2
$i_1 > k_1; l_{12} = 1; k_{2r} \geq 1; n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}$	3.6.3
$i_1 \leq k_1; l_{12} = 1; k_{2r} > 1; n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}$	3.6.4
$i_1 < k_1; l_{12} > 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$	3.6.5
$i_1 > k_1; l_{12} > 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$	3.6.6
$i_1 \geq k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r} \geq 1; n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}$	3.6.7

3.6.1 $i_1 = k_1; l_{12} \geq 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$

Durch Einsetzen der Gleichungen (14) und (18) in Gleichung (1a) ergibt sich:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} \frac{g_2^{x_2} \frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!}}{\sum_{v=0}^{g_2} \frac{A_{2r}^v}{v!}} \cdot P_{E1}^{(g_2-x_2) \cdot l_{12}}$$

Nach einer Umformung analog zu Gleichung (8) in Abschnitt V.2.5.1 erhält man:

$$E = \frac{E_{g_2}(A_{2r})}{E_{g_2} \left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}^{l_{12}}} \right)}$$

(21)

(vgl. Gleichung (8), Abschnitt V.2.5.1)

3.6.2 $i_1 < k_1; l_{12} = 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$

Nach Einsetzen der Gleichungen (14) und (17) in Gleichung (1a) erhält man:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} \frac{g_2^{x_2} \frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!}}{\sum_{v=0}^{g_2} \frac{A_{2r}^v}{v!}} \cdot \frac{\binom{i_1}{g_2-x_2}}{\binom{g_2}{x_2}} \cdot P_{E1}^{g_2-x_2}$$

Daraus ergibt sich analog zu Gleichung (17) in Abschnitt V.2.6.1:

$$E = \frac{E_{g_2}(A_{2r})}{E_{i_1}\left(\frac{A_{2r}}{P_{E1}}\right)} \quad (22)$$

(vgl. Gleichung (18), Abschnitt V.2.6.1)

3.6.3 $i_1 > k_1; l_{12} = 1; k_{2r} \geq 1; n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}$

Durch Einsetzen der Gleichungen (13) und (15) in Gleichung (1b) ergibt sich:

$$E = \sum_{x_1=0}^{g_2} \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1-P_{E1})^{i_1-x_1}}{\sum_{v=0}^{g_2} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1-P_{E1})^{i_1-v}} \cdot \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{E_{x_1 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}$$

$$E = \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{\sum_{v=0}^{g_2} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1-P_{E1})^{i_1-v}} \cdot \sum_{x_1=0}^{g_2} \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1-P_{E1})^{i_1-x_1}}{E_{x_1 \cdot k_{2r}}(A_{2r})} \quad (23)$$

3.6.4 $i_1 \leq k_1; l_{12} = 1; k_{2r} > 1; n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}$

Die Blockierungswahrscheinlichkeit für diesen Fall erhalten wir unmittelbar aus Gleichung (23), da bei $i_1 \leq k_1 = g_2$ die Summe im Nenner den Wert 1 hat. Also:

$$E = E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r}) \cdot \sum_{x_1=0}^{i_1} \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1-P_{E1})^{i_1-x_1}}{E_{x_1 \cdot k_{2r}}(A_{2r})} \quad (24)$$

(vgl. Gleichung (19), Abschnitt V.2.6.2)

3.6.5 $i_1 < k_1; l_{12} > 1; k_{2r} = 1; n_{2r} = g_2$

Die Gleichungen (14) und (17) in Gleichung (1a) eingesetzt ergibt:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} \frac{\frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!}}{\sum_{v=0}^{g_2} \frac{A_{2r}^v}{v!}} \cdot \frac{\binom{i_1}{g_2-x_2} \cdot l_{12}^{g_2-x_2}}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{x_2 \cdot l_{12}}} \cdot P_{E1}^{g_2-x_2} \cdot l_{12}^{x_2} \quad (25)$$

Diese Gleichung ist bis auf den Faktor l_{12} gleich wie der Ansatz zu Gleichung (18) in Abschnitt V.2.6.1.

3.6.6 $i_1 > k_1$; $l_{12} > 1$; $k_{2r} = 1$; $n_{2r} = g_2$

Durch Einsetzen der Gleichungen (14) und (20) in Gleichung (1a) erhält man:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} \frac{A_{2r}^{x_2}}{x_2!} \cdot \frac{E_{i_1, k_1}^{(P_{E1})}}{E_{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12}, x_2 \cdot l_{12}}^{(P_{E1})}} \quad (26)$$

3.6.7 Allgemeiner Fall $i_1 \geq k_1$; $l_{12} \geq 1$; $k_{2r} \geq 1$; $n_{2r} = g_2 \cdot k_{2r}$

Die Gleichungen (13) und (15) in Gleichung (1b) eingesetzt ergibt:

$$E = \sum_{x_1=0}^{g_2} [x_1] \cdot [g_2 - x_1]$$

$$E = \sum_{x_1=0}^{g_2} \left\{ \sum_{v=0}^{(g_2 - x_1) \cdot (l_{12} - 1)} \frac{\binom{i_1}{x_1 \cdot l_{12} + v} \cdot P_{E1}^{x_1 \cdot l_{12} + v} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1 \cdot l_{12} - v}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - v}} \cdot \frac{\binom{g_2}{x_1} \cdot \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{v}{l_{12}} \rfloor} (-1)^v \binom{g_2 - x_1}{v} \cdot \binom{l_{12} \cdot (g_2 - x_1 - v)}{v - l_{12} \cdot v}}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{x_1 \cdot l_{12} + v}} \right\} \cdot \frac{E_{g_2 \cdot k_{2r}}(A_{2r})}{E_{x_1 \cdot k_{2r}}(A_{2r})} \quad (27)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (14) und (16) in Gleichung (1a) erhält man:

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} [x_2] \cdot [g_2 - x_2]$$

$$E = \sum_{x_2=0}^{g_2} \left\{ \sum_{v=0}^{(g_2 - x_2) \cdot (k_{2r} - 1)} \frac{\frac{A_{2r}^{x_2 \cdot k_{2r} + v}}{(x_2 \cdot k_{2r} + v)!} \cdot \binom{g_2}{x_2} \cdot \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{v}{k_{2r}} \rfloor} (-1)^v \binom{g_2 - x_2}{v} \cdot \binom{k_{2r} \cdot (g_2 - x_2 - v)}{v - k_{2r} \cdot v}}{\sum_{v=0}^{g_2 \cdot k_{2r}} \frac{A_{2r}^v}{v!} \cdot \binom{g_2 \cdot k_{2r}}{x_2 \cdot k_{2r} + v}} \right\} \cdot \frac{\binom{i_1}{(g_2 - x_2) \cdot l_{12}}}{\binom{g_2 \cdot l_{12}}{x_2 \cdot l_{12}}}$$

$$\cdot P_{E1}^{(g_2 - x_2) \cdot l_{12}} \cdot \frac{\sum_{v=0}^{x_2 \cdot l_{12}} \binom{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12}}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - (g_2 - x_2) \cdot l_{12} - v}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - v}} \quad (28)$$

3.7 Systeme mit Mischung hinter der letzten Stufe

Es werden hier Linksysteme nach Bild V.9 (Abschnitt V.2.9) betrachtet, die aus mehreren Linkgruppen zusammengesetzt sind. Die Ausgänge nach einer bestimmten Richtung aus verschiedenen Linkgruppen erreichen über eine Mischung das Abnehmerbündel mit n_{2r} Leitungen.

Das Grundprinzip der Rechnung ist dasselbe wie bei Jacobaeus (vgl. Abschnitt V.2.9). Pröhl verwendet jedoch im Gegensatz zu Jacobaeus nicht die Berechnungsmethode von O'Dell /2/, sondern ein Verfahren der russischen Autoren Livschitz und Rodsjanko /36/. Die Methoden sind einander ziemlich ähnlich. Wir wollen zunächst eine kurze Gegenüberstellung bringen, um die große Ähnlichkeit und die Unterschiede zu zeigen.

Bezeichnungen:

- k: Erreichbarkeit
- n_{2r} : Anzahl der Abnehmerleitungen des Bündels in der betrachteten Richtung r (hinter der Mischung).
- A_{2r} : Tatsächliches Gesamtangebot = Gesamtbelastung an das - über die Mischung erreichte - Bündel mit n_{2r} Leitungen hinter der zweiten Stufe des Linksystems.
- A_{or} : Angebot an die Ausgänge der betrachteten Richtung Nr. r in einer Linkgruppe bei vorgeschriebener Zeitblockierung E.
- A_v : Zulässiges Angebot an ein vollkommenes Bündel mit k Leitungen und der Blockierungswahrscheinlichkeit E.
- n_{unv} : Anzahl der Leitungen eines unvollkommenen Bündels mit Erreichbarkeit k, Angebot A_{2r} und Blockierungswahrscheinlichkeit E.

Jacobaeus/O'Dell	Pröhl/Livschitz und Rodsjanko
$n_{2r} = \frac{A_{2r} - A_{or}}{C_1} + k$	$n_{2r} = \frac{A_{2r} - A_{or}}{C_2} + k \quad (29)$
$k = g_2 \cdot k_{2r}$	$k = g_2 \cdot k_{2r}$
$C_1 = \text{"größte zulässige" Belastung } Y/n \text{ bei vorgeschriebener Blockierungswahrscheinlichkeit E. Sie ergibt sich bei Jacobaeus unter der Annahme einer Binomial-Verteilung auf Zwischenleitungs- und Abnehmerbündel beispielsweise aus der Gleichung } E = (P_{A1} + P_{A2} - P_{A1} \cdot P_{A2})^k.$	$C_2 = \frac{A_{2r} - A_v}{n_{unv} - k} - \frac{A_v - A_{or}}{k} \quad (30)$
	$\hat{=} \text{Angebotszuwachs je Leitung ab Leitungsnummer } (k+1) \dots n_{2r}.$

Bemerkung zu den Gleichungen (29) und (30):

Gleichung (29) beschreibt für vorgegebene Blockierungswahrscheinlichkeit E den Übergang von der Ausgangszahl $k = g_2 \cdot k_{2r}$ einer einzelnen Linkgruppe (Angebot A_{or} ; $k = g_2 \cdot k_{2r}$ Ausgänge zur Mischung) zu einem Linksystem mit $n_{2r} > k$ Leitungen und dem Angebot $A_{2r} > A_{or}$, bei dem eine Mischung der Ausgänge verschiedener Linkgruppen erfolgt.

Die in /49/ ohne Herleitung angegebene Gleichung (30) für C_2 läßt sich wie folgt erläutern.

Aus einer vorhandenen Tafel für den Verlust einstufig abgesuchter, unvollkommenen Bündel mit der Erreichbarkeit $k = g_2 \cdot k_{2r}$ entnimmt man für E_{soll} und A_{2r} den Wert n_{unv} .

Unterstellt man für die "ersten k Leitungen" dieses Bündels zunächst analog zu O'Dell eine zulässige Belastung A_v/k wie beim vollkommenen Bündel mit (A_v, k) , so ergibt sich als mittlerer Angebotszuwachs für die restlichen $(n_{unv}-k)$ Leitungen der Betrag

$$C_2^* = \frac{A_{2r} - A_v}{n_{unv} - k}$$

In Wirklichkeit sind die "ersten k Leitungen" aber die $k=g_2 \cdot k_{2r}$ Ausgänge einer der betrachteten Linkgruppen, für welche - ohne Zusammenmischung - je das zulässige Angebot $A_{or} < A_v$ errechnet würde. Das mittlere Angebot pro Leitung in einer einzelnen Linkgruppe ist also um den Betrag $(A_v - A_{or})/k$ kleiner als beim vollkommenen Bündel. Deshalb

$$C_2 = C_2^* - \frac{A_v - A_{or}}{k}$$

$$C_2 = \frac{A_{2r} - A_v}{n_{unv} - k} - \frac{A_v - A_{or}}{k} \quad (30)$$

Zusammen mit den in Abschnitt 3.6 abgeleiteten Beziehungen für die Blockierungswahrscheinlichkeit E und einer Tafel für unvollkommene Bündel können die Gleichungen (29) und (30) zur Berechnung der erforderlichen Abnehmerleitungszahl n_{2r} einer bestimmten Richtung bei vorgeschriebener Blockierungswahrscheinlichkeit E verwendet werden.

Als Voraussetzung für die Gültigkeit der Gleichungen (29) und (30) wird angegeben, daß die Beziehung

$$G \cdot \frac{g_2 \cdot k_{2r}}{n_{2r}} \geq 2 \quad (31)$$

erfüllt sein muß. Das bedeutet, daß ein Mischungsverhältnis $m \geq 2$ gefordert wird.

3.8 Zusammenfassung

Aus dem allgemeinen Ansatz leitet Pröhl Lösungen für Sonderfälle ab (3.6.1, 3.6.2, 3.6.4, 3.6.5), die bereits von Jacobaeus angegeben werden. Die Fälle 3.6.3 ($l_1 > k_1$; $l_{12}=1$; $k_{2r} \geq 1$) und 3.6.6 ($l_1 > k_1$; $l_{12} > 1$; $k_{2r}=1$) und den allgemeinen Fall 3.6.7 hat Pröhl neu hergeleitet.

Die Näherungsannahmen bei Pröhl, ebenso wie bei Fortet/Cancell, sind dieselben wie bei Jacobaeus:

- funktionelle Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen im Zwischenleitungs-
bündel und im Abnehmerbündel,
- statistische Unabhängigkeit der Belegungszustände,
- Angebot A = Belastung Y.

Daher sind die Ergebnisse von derselben Genauigkeit wie jene in Abschnitt V.2.12 dieses Kapitels, und deshalb brauchen wir hier keine Berechnungsbeispiele zu geben.

Für die kritische Betrachtung und für Verbesserungsvorschläge gilt dasselbe wie in den Abschnitten V.2.13 - V.2.20.

V.4 Lotze, A.: Zur Bemessung zweistufiger Koppelanordnungen-Scheinverkehrs-Verfahren (1958, 1960).

4.1 Übersicht

a) Die bisher in diesem Kapitel erörterten Berechnungsverfahren verwenden alle neben der funktionellen und statistischen Unabhängigkeit die Näherungsannahme $A = Y$. Deshalb liefern sie durchweg nur hinreichend genaue Ergebnisse bis zu Verlusten von etwa 1 - 2 %.

b) Im Scheinverkehrsverfahren von A. Lotze geht die Rechnung - nicht wie bei den oben erwähnten Verfahren - von der für die Auswertung einfachsten Näherung $A=Y$ aus. Vielmehr wird die t a t s ä c h l i c h e B e l a s t u n g Y vorgeschrieben und iterativ ein "erzeugendes Angebot A_0 " so bestimmt, daß bei einem vorgegebenen Typ der Wahrscheinlichkeitsverteilung $[x]$ - z.B. Erlang-Verteilung - die vorgeschriebene Belastung $Y = \sum x \cdot [x]$ erzeugt wird. Aus diesem Grund liefert dieses Verfahren (wie alle späteren Verfahren, welche dieses Prinzip ebenfalls anwenden) in der Regel bis zu sehr hohen Werten der Verlustwahrscheinlichkeit recht wirklichkeitstreue Ergebnisse.

c) Das Scheinverkehrs-Verfahren definiert ferner eine B l i n d b e l a s t u n g, die in Rechnung stellt, daß freie Zwischenleitungen, welche wegen rückwärtiger Sperrung für einen Verbindungsaufbau nicht in Frage kommen, für Anrufe ebenfalls belegt erscheinen.

Mit anders definierten Scheinverkehrswerten haben auch schon C.S. Berkeley /3/ und K. Lundkvist /5/ gearbeitet. Allerdings gehen sie alle von der Annahme $A = Y$ aus.

Das Scheinverkehrs-Verfahren von A. Lotze wurde seinerzeit (2. ITC Den Haag, 1958) besonders für die Berechnung von zweistufigen Mischwähleranordnungen verwendet, weil seine numerische Auswertung auch ohne die damals noch nicht vorhandenen größeren DVA einfach möglich war.

4.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Es werden zweistufige Systeme berechnet. Skizzen der Systeme und die Bezeichnungen sind in den Bildern V.13 und V.14 dargestellt.

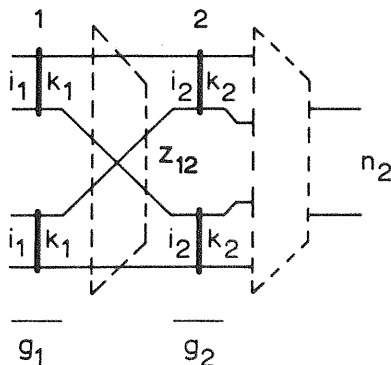


Bild V.13

Zweistufiges Linksystem mit oder ohne Mischungen hinter der 1. bzw. 2. Stufe

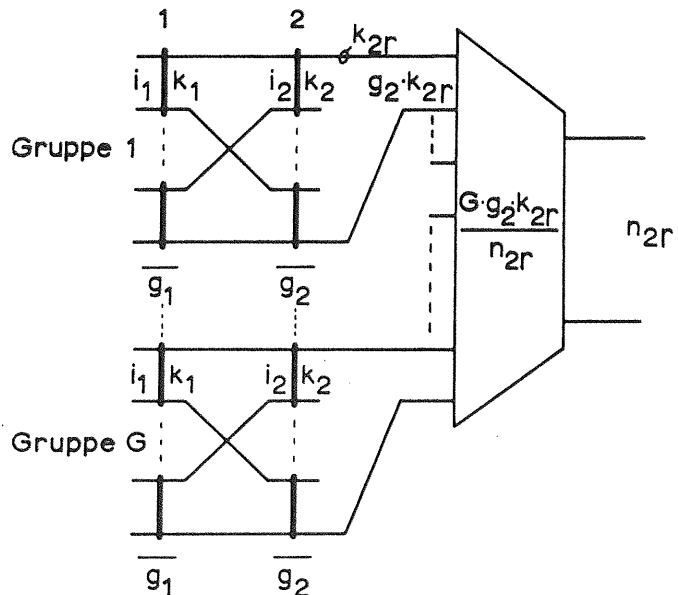


Bild V.14

Zweistufiges Linksystem mit Mischung der Ausgänge v e r s c h i e d e n e r L i n k g r u p p e n

Strukturparameter

$S = 2$	Mischung zwischen den Stufen 1 und 2 möglich (vgl. Bild V.13)
$i_1 \geq k_1$	Mischung der Ausgänge einer Linkgruppe möglich (vgl. Bild V.13)
$l_{12} \geq 1$	Mischung der Ausgänge verschiedener Linkgruppen auf ein Abnehmerbündel möglich (vgl. Bild V.14).

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Verkehrsangebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1 (eine Ausdehnung auf ZV2 wäre in völlig analoger Weise möglich, ist jedoch nicht durchgeführt worden).
- Angebot auf alle Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt.
- Zufallsmäßiges Absuchen der Ausgänge der Koppelvielfache in Stufe 1 und der Abnehmerleitungen (gleichmäßige Belastungsverteilung).

Gegebene Größen sind:

- Strukturparameter des Systems
- Gesamtbelastung Y und Teilbelastungen Y_{2r} ($r=1,2,\dots,R$) der Abnehmerbündel hinter der zweiten Stufe.

Gesuchte Größen sind:

- Blockierungswahrscheinlichkeit E
- Verlustwahrscheinlichkeit B .

4.3 Grundgedanke der Lösung

4.3.1

Der Verkehrsfluß über das Zwischenleitungsbündel eines Linksystems zu einem Abnehmerbündel hinter der zweiten Stufe wird durch zwei Ursachen gehemmt:

- a) Durch den echten Verkehrsfluß Y , welcher die Zwischen- und die Abnehmerleitungen belastet.
- b) Durch die innere Blockierung, d.h. durch den Mangel an solchen freien Zwischenleitungen, die einen einfallenden Anruf zu einer noch freien Abnehmerleitung durchschalten können.

Freie Zwischenleitungen, welche im gewünschten Abnehmerbündel keine freie Leitung mehr erreichen, für diese Richtung also "rückwärts gesperrt" sind, tragen zur inneren Blockierung bei. Sie wirken für den betreffenden Anruf als "belegt". Deshalb wird ein zusätzlicher "Blindverkehrswert" definiert und berechnet, dessen verkehrshemmende Wirkung den Einfluß dieser rückwärtigen Sperrung berücksichtigt. Aus echtem Verkehr und Blindverkehr wird ein resultierender Scheinverkehr berechnet.

4.3.2

Die gesamte Blockierungswahrscheinlichkeit E wird in zwei Komponenten aufgeteilt:

- a) Die Grundblockierung E_0 , d.h. alle im Ruhezustand des Systems erreichbaren n_{2r} Abnehmerleitungen des betrachteten Bündels sind belegt.
- b) Die Eingangsblockierung $[k_1]$, d.h. keine freie und rückwärtig nicht gesperrte Zwischenleitung ist erreichbar.

4.4 Entwicklung des Verfahrens

4.4.1 Grundblockierung E_0

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $[x]$ im Abnehmerbündel wird nur in Abhängigkeit von dessen Leitungszahl n_{2r} und Belastung Y_{2r} berechnet. Wie bereits in Abschnitt 4.1 ausgeführt wurde, wird als Näherung auf dem Abnehmerbündel dieselbe Gleichzeitigkeitsverteilung wie bei einem vollkommenen Bündel gleicher Belastung Y_{2r} angenommen - hier eine Erlang-Verteilung - und dazu ein erzeugendes Angebot A_0 iterativ so bestimmt, daß die vorgegebene Belastung $Y_{2r} = \sum x \cdot [x]$ erzeugt wird (siehe /48/).

Wenn über das Linksystem im Ruhezustand a l l e n_{2r} Abnehmerleitungen der betrachteten Richtung erreichbar sind - k e i n e M i s c h u n g mit Ausgängen anderer Linkgruppen (vgl. Bild V.14) -, so ergibt sich als Grundblockierungswahrscheinlichkeit E_0 des betrachteten Abnehmerbündels:

$$E_0 = E_{n_{2r}}(A_0) \quad \text{mit} \quad A_0 = \frac{Y_{2r}}{1 - E_{n_{2r}}(A_0)} \quad (1)$$

Existiert eine M i s c h u n g zwischen den Ausgängen verschiedener Linkgruppen (über eine Gruppe werden $g_2 \cdot k_{2r}$ von n_{2r} Abnehmerleitungen erreicht, siehe Bild V.13), so gilt:

$$E_0 = \frac{E_{n_{2r}}(A_0)}{E_{n_{2r} - g_2 \cdot k_{2r}}(A_0)} \quad \text{mit} \quad A_0 = \frac{Y_{2r}}{1 - E_{n_{2r}}(A_0)} \quad (2)$$

4.4.2 Belastung der Zwischenleitungen durch Scheinverkehr

Während der Zustände des Systems, in denen a l l e $g_2 \cdot k_{2r}$ von der betrachteten Linkgruppe aus erreichbaren Abnehmerleitungen belegt sind (Wahrscheinlichkeit E_0 gemäß den Gleichungen (1) oder (2)), ist die Anzahl freier oder rückwärtig gesperrter Zwischenleitungen ohne Belang. Außerhalb dieses Zustandes der Vollbelegung ist der e c h t e V e r k e h r s w e r t (mittlere Gleichzeitigkeit) auf dem betrachteten Bündel:

$$Y_{2r}^* = \frac{\sum_{x=0}^{n_{2r}-1} x \cdot [x]}{\sum_{x=0}^{n_{2r}-1} [x]} = \frac{Y_{2r} - n_{2r} \cdot E_0}{1 - E_0} \quad (3)$$

Der Gesamtverkehrswert Y^* im Zwischenleitungsbündel - außerhalb des Zustands $\{g_2 \cdot k_{2r}\}$ - wird dementsprechend:

$$Y^* = Y - Y_{2r} + Y_{2r}^* \quad (4)$$

Bei Mischwahl gilt:

$$Y = Y_{2r} ; \quad Y^* = Y_{2r}^* \quad (4a)$$

Die B l i n d b e l a s t u n g je Zwischenleitung ergibt sich außerhalb des Zustandes $\{g_2 \cdot k_{2r}\}$ zu:

$$\frac{Y_{Bl}^*}{z_{12}} = \left(1 - \frac{Y^*}{z_{12}}\right) \cdot [k_{2r}]^* \quad (5)$$

Für den S c h e i n v e r k e h r s w e r t (Scheinbelastung) auf dem gesamten Zwischenleitungsbündel erhält man:

$$Y_{Sch}^* = Y^* + z_{12} \cdot \left(1 - \frac{Y^*}{z_{12}}\right) \cdot [k_{2r}]^* \quad (6)$$

$$Y_{Sch}^* = Y^* + (z_{12} - Y^*) \cdot [k_{2r}]^*$$

Die in den Gleichungen (5) und (6) auftretende r ü c k w ä r t i g e S p e r r u n g $[k_{2r}]^*$ der k_{2r} Ausgänge eines Koppelvielfachs in Stufe 2 zum betrachteten Abnehmerbündel wird wie folgt berechnet:

$$[k_{2r}]^* = \frac{[k_{2r}] \cdot E_0}{1 - E_0} \quad (7)$$

Dabei gilt:

$$[k_{2r}] = \frac{E_{n_{2r}}(A_0)}{E_{n_{2r}-k_{2r}}(A_0)} \quad \text{mit} \quad A_0 = \frac{Y_{2r}}{1 - E_{n_{2r}}(A_0)} \quad (8)$$

Bei sehr hoher Belastung kann Gleichung (8) näherungsweise ersetzt werden durch

$$[k_{2r}] = \left(\frac{Y_{2r}}{n_{2r}}\right)^{k_{2r}} \quad (9)$$

Für sehr niedere Belastungen kann Gleichung (8) ersetzt werden durch

$$[k_{2r}] = E_{k_{2r}}(A_0) \quad \text{mit} \quad A_0 = \frac{Y_{2r} \cdot \frac{k_{2r}}{n_{2r}}}{1 - E_{k_{2r}}(A_0)} \quad (10)$$

4.4.3 Eingangsblockierung $[k_1]^*$

Nunmehr kann mit Hilfe der Scheinbelastung Y_{Sch}^* die Eingangsblockierung $[k_1]^*$ in der ersten Stufe berechnet werden.

a) Unter der Annahme einer Erlang-Verteilung auf den Zwischenleitungen erhält man:

Ohne Mischung zwischen Stufe 1 und Stufe 2

$$[k_1]^* = E_{k_1}(A_0) \quad \text{mit} \quad A_0 = \frac{\frac{Y_{Sch}^*}{g_1}}{1 - E_{k_1}(A_0)} \quad (11)$$

Mit Mischung zwischen Stufe 1 und Stufe 2

$$[k_1]^* = \frac{E_{z_{12}}(A_0)}{E_{z_{12}-k_1}(A_0)} \quad \text{mit} \quad A_0 = \frac{Y_{Sch}^*}{1 - E_{z_{12}}(A_0)} \quad (12)$$

b) Unter der Annahme einer Bernoulli-Verteilung auf den Zwischenleitungen erhält man:

$$[k_1]^* = \left(\frac{Y_{Sch}^*}{z_{12}} \right)^{k_1} \quad (13)$$

Da die Annahme einer Erlang-Verteilung gemäß a) die Varianz des Scheinverkehrs sicher überschätzt, wird Gleichung (13) in der Regel bei höheren Verlustwerten wirklichkeitstreue Ergebnisse liefern.

4.4.4 Verlustwahrscheinlichkeit B

Da die Wahrscheinlichkeit $[k_1]^*$ für "Zustände außerhalb $\{g_2 \cdot k_{2r}\}$ " berechnet wird, sind die Zustände Eingangsblockierung und Grundblockierung disjunkt. Folglich gilt für Zufallsverkehr erster Art:

$$B = E = E_0 + [k_1]^* \quad (14)$$

4.5 Zusammenfassung des Ablaufs der Verlustberechnung

Gegeben sind: Strukturparameter des Systems; Gesamtbelastung Y und Teilbelastungen Y_{2r} ($r=1,2,\dots,R$) der Abnehmerbündel hinter Stufe 2.

Gesucht ist: Verlustwahrscheinlichkeit B .

- Berechnung der Grundblockierung E_0 nach den Gleichungen (1) oder (2).
- Berechnung der rückwärtigen Sperrung $[k_{2r}]^*$ nach den Gleichungen (8), (9), (10) und (7).
- Berechnung der mittleren Gleichzeitigkeit Y_{2r}^* nach den Gleichungen (3) und (4,4a).
- Berechnung der Blindbelastung nach Gleichung (5).
- Berechnung der Scheinbelastung nach Gleichung (6).
- Berechnung der Eingangsblockierung $[k_1]^*$ nach den Gleichungen (11), (12) oder (13).
- Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit B nach Gleichung (14).

4.6 Berechnungsbeispiele - Vergleich mit Tests

Für das System Mp19a (Bild A.2, Anhang A) wird die Verlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Belastung je Abnehmerleitung berechnet.

Diagramm V.12 (Anhang B) zeigt die Ergebnisse.

Erklärungen: Kurve 1: Berechnung der rückwärtigen Sperrung nach Gleichung (8), Berechnung der Eingangsblockierung nach Gleichung (11) (Erlang-Verteilung).

Kurve 2: Berechnung der rückwärtigen Sperrung nach Gleichung (9); Berechnung der Eingangsblockierung wie bei Kurve 1.

- Kurve 3: Berechnung der rückwärtigen Sperrung nach Gleichung (8); Berechnung der Eingangsblockierung nach Gleichung (13) (Bernoulli-Verteilung).
- Kurve 4: Berechnung der rückwärtigen Sperrung nach Gleichung (9); Berechnung der Eingangsblockierung wie bei Kurve 3.
- Test: Zufallsverkehr erster Art (ZV1).

4.7 Kritische Betrachtung des Verfahrens

Das Scheinverkehrs-Verfahren enthält eine Reihe von Näherungsannahmen, die seinerzeit getroffen wurden, um eine manuelle numerische Auswertung mit tragbarem Aufwand zu ermöglichen.

Der Vergleich von Rechnung und Test zeigt (vgl. Diagramm V.12, Anhang B, Kurven 1, 2; bei hohen Verlustwerten auch Kurven 3, 4), daß der berechnete Verlust auf der sicheren Seite liegt. Im einzelnen ist zu erwähnen:

- a) Sämtliche Näherungsverfahren, die in diesem Kapitel behandelt werden, liefern infolge der Annahmen der funktionellen Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen und der statistischen Unabhängigkeit der Belegungsmuster in aufeinanderfolgenden Stufen Ergebnisse, die verglichen mit Testwerten zu hoch, d.h. auf der sicheren Seite liegen. Dabei ist es grundsätzlich so, daß sich diese Näherungsannahmen besonders bei wachsender Belastung bemerkbar machen.
- b) Der Blindverkehr, welcher die rückwärtige Sperrung freier, für den Verbindungsaufbau nicht in Frage kommender Zwischenleitungen beschreibt, wird behandelt wie ein zum tatsächlichen Verkehr im Zwischenleitungsbündel additiver Zufallsverkehr. Wenn diese Annahme gepaart wird mit der Wahl einer Erlang-Verteilung des Scheinverkehrs auf k_1 Zwischenleitungen, so wird sicher dessen Varianz überschätzt. Aus diesem Grund liefert die Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit $[k_1]^*$ mit Hilfe einer Bernoulli-Verteilung bei höheren Verlusten die besseren Näherungswerte.

V.5 Lee, C.Y. : Analysis of Switching Networks (1955).

Le Gall, P.: Etude du blocage dans des systèmes de commutation téléphonique automatique utilisant des commutateurs électroniques du type crossbar (1956).

Méthode de calcul de l'encombrement dans les systèmes téléphoniques automatiques à marquage (1957).

Les trafics téléphoniques et la sélection conjuguée en téléphonie automatique (1958).

5.1 Übersicht

Wie bei der Methode von Bininda und Daisenberger (Abschnitt IV.3) oder wie im Abschnitt über vierstufige Linkssysteme von Jacobaeus (Ziffer 2.11 dieses Kapitels) wird hier der Punktverlust untersucht. Ein bestimmter Eingang in Stufe 1 soll mit einem vorher markierten Ausgang der Stufe S (also einem bestimmten Koppelvielfach in der letzten Stufe) verbunden werden. Für die Rechnung ist es bei diesen Verfahren unerheblich, ob der markierte Ausgang frei oder belegt ist. Der Ruf soll als erfolgreich gelten, wenn das Zielkoppelvielfach in Stufe S erreicht wurde.

Betrachtet man nunmehr die i_S Eingänge eines Koppelvielfachs in Stufe S als Abnehmerleitungen in einer bestimmten Richtung eines nur (S-1)-stufigen Linksystems, so kann mit dem hier besprochenen Verfahren der Bündelverlust der (S-1)-stufigen Anordnung berechnet werden. Die gegebene Koppelanordnung stellt C.Y. Lee durch einen linearen Wahrscheinlichkeitsgraphen (vgl. Bild V.19) dar. Die geometrische Struktur des Graphen repräsentiert das Wegennetz, das zur Verbindung des markierten Eingangs mit dem gewünschten Ausgang geeignet ist. Der Graph wird als mathematisches Modell benützt, um die gesuchte Blockierungswahrscheinlichkeit E zu ermitteln. Dabei müssen Koppelvielfache mit $i \leq k$ (blockierungsfreie Koppelvielfache) in sämtlichen Stufen vorausgesetzt werden.

Jeder Linkleitung wird eine Belastung P_{A_j} ($j = 1, 2, \dots, S-1$) zugeordnet; außerdem wird angenommen, daß die Linkleitungen statistisch unabhängig voneinander belegt werden. Damit kann in allgemeiner Form eine Funktion φ berechnet werden, die zweier Werte fähig ist (Verbindungsfunktion des Graphen). Die Aussage $\varphi = 0$ besagt, daß keine Verbindungsmöglichkeit zwischen den beiden Teilnehmern besteht. Die Wahrscheinlichkeit $P(\varphi=0)$, mit der $\varphi = 0$ auftritt, ist die gesuchte Blockierungswahrscheinlichkeit E.

In der folgenden Darstellung folgen wir im wesentlichen der Arbeit von Lee. Seine Ausführungen zur allgemeinen Berechnung der Verbindungsfunktion bleiben beiseite, da die Graphen, welche zu interessierenden Koppelanordnungen gehören, meistens von so einfacher Struktur sind, daß die Blockierungswahrscheinlichkeit unmittelbar abgelesen werden kann.

5.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Strukturparameter

$$S \geq 2$$

$$k_j = g_{j+1}; \quad j = 1, 2, \dots, S-1$$

$$l_{j, j+1} = 1; \quad j = 1, 2, \dots, S-1$$

$$i_j \leq k_j; \quad j = 1, 2, \dots, S \quad (\text{nichtblockierende Koppelvielfache})$$

Keine Mischungen zwischen den Stufen

Keine Mischung am Ausgang

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Angebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV2
- Gleichbelastung aller Zwischenleitungen von Stufe j nach Stufe (j+1); $j = 1, 2, \dots, S-1$
- Angebot auf alle Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt.

Gegebene Größen sind:

- Strukturparameter des Systems
- Belastung P_{Aj} je Leitung eines Wegeabschnitts zwischen Stufe j und Stufe (j+1); $j = 1, 2, \dots, S-1$

Gesuchte Größe ist:

P u n k t blockierungswahrscheinlichkeit von Eingang
 - Ausgang oder
 B ü n d e l blockierungswahrscheinlichkeit, wenn die i_S Eingänge eines Koppelvielfachs in Stufe S als Abnehmerbündel einer bestimmten Richtung des (S-1)-stufigen Systems betrachtet werden.

5.3 Entwicklung des Verfahrens

5.3.1 Dreistufige Systeme

Wir betrachten ein dreistufiges Maschensystem nach Bild V.15. Der dazugehörige Graph (Wegenetz) ist in Bild V.16 dargestellt.

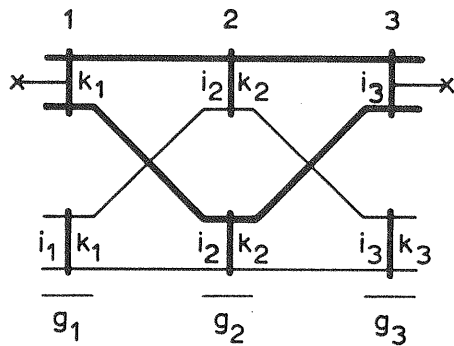


Bild V.15
 Dreistufiges Maschensystem

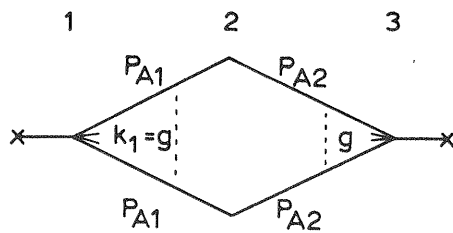


Bild V.16
 Graph zu Bild V.15

Das Wegenetz besteht aus $k_1 = g$ voneinander unabhängigen Wegen. Jeder Weg setzt sich aus zwei Wegeabschnitten zusammen.

Wahrscheinlichkeit, daß ein betrachteter Weg frei ist : $(1-P_{A1}) \cdot (1-P_{A2})$

Wahrscheinlichkeit, daß ein betrachteter Weg nicht frei ist: $1 - (1-P_{A1}) \cdot (1-P_{A2})$

Die Blockierungswahrscheinlichkeit E ist die Wahrscheinlichkeit, daß sämtliche g Wege nicht frei sind. Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit bezüglich der Belegung der Wege erhalten wir somit:

$$E = (1 - (1 - P_{A1}) \cdot (1 - P_{A2}))^g \quad (1)$$

Bemerkung: Dieser Ausdruck ist identisch mit Gleichung (11) von Jacobaeus (Abschnitt V.2.5.4; $i_1 = k_1 = g, k_{2r} = 1$).

5.3.2 Vierstufige Systeme

Gruppierung und Wegenetz sind in den Bildern V.17 und V.18 dargestellt.

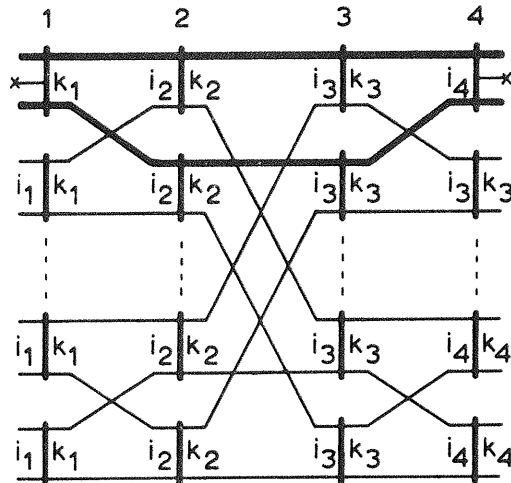


Bild V.17
Vierstufiges Linksystm

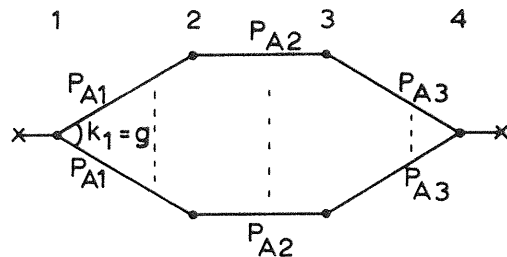


Bild V.18
Graph zu Bild V.17

Entsprechend der Herleitung zu Gleichung (1) erhalten wir:

$$E = (1 - (1 - P_{A1}) \cdot (1 - P_{A2}) \cdot (1 - P_{A3}))^g \quad (2)$$

Bemerkung: Dieser Ausdruck ist identisch mit Gleichung (63) von Jacobaeus (Abschnitt V.2.11.1).

5.3.3 Verallgemeinerung

Wir wollen nun ein S-stufiges System betrachten, dessen Wegenetz zwischen zwei Punkten die Struktur nach Bild V.19 hat.

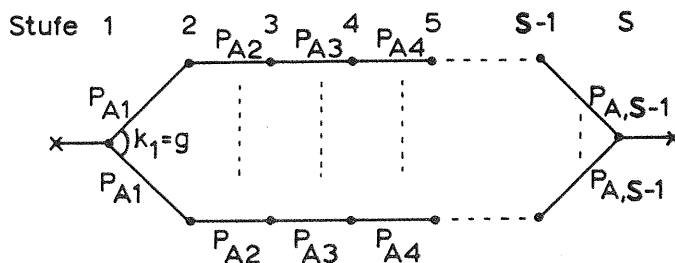


Bild V.19
Wegenetz für ein
S-stufiges Linksystm

Entsprechend den Gleichungen (1) und (2) folgt aus Bild V.19:

$$E = \left(1 - \prod_{j=1}^{S-1} (1 - P_{A_j}) \right)^g \quad (3)$$

5.4 Beispiele

Wie wir im allgemeinen Teil ausgeführt haben, können mit den hier besprochenen Verfahren der Bündel- und der Punktverlust näherungsweise berechnet werden. In diesem Abschnitt wollen wir dafür je ein Beispiel betrachten.

Bild V.20 zeigt das zweistufige Richtungswahlssystem L 2022 (nach Bild A.4, Anhang A) und das zugehörige Wegenetz für die Durchschaltung in das betrachtete Abnehmerbündel Nr.r.

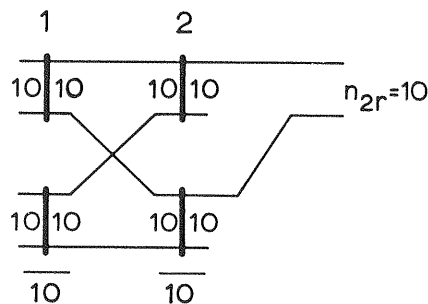
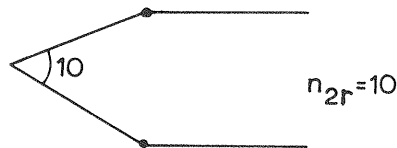


Bild V.20

Richtungswahlssystem L 2022
(Bild A.4, Anhang A) mit
zugehörigem Wegenetz



Durch Vergleich dieses Wegenetzes mit dem in Bild V.16 angegebenen Wegenetz, das zur Herleitung des Punktverlustes in einem dreistufigen Linksystem diente, stellen wir die Identität der beiden Wegenetze fest. Folglich kann Gleichung (1) zur Berechnung der Bündelblockierungswahrscheinlichkeit des zweistufigen Systems angewandt werden.

Ein Beispiel zur Berechnung des Punktverlustes in einem dreistufigen System zeigen die Bilder V.15 und V.16.

Ergebnisse

a) Bündelverlust für das System L 2022 (Bild V.20).

In Diagramm V.13 (Anhang B) ist die Bündelblockierungswahrscheinlichkeit E als Funktion der Belastung je Abnehmerleitung dargestellt. Die eingetragenen Testwerte stellen dagegen die Verlustwahrscheinlichkeit B für Zufallsverkehr zweiter Art ($Q = i_1 = 10$ Quellen je Kopplervielfach in Stufe 1) dar.

b) Punktverlust für das System L 3003 (Bild A.9, Anhang A).

In Diagramm V.14 (Anhang B) ist die Punktblockierungswahrscheinlichkeit E als Funktion der Belastung auf den g Zwischenleitungen eines Wegeabschnitts dargestellt. Der getestete Punktverlust (ZV1) wurde derart bestimmt, daß bei stationärem Verkehr an zufälligen Zeitpunkten die innere Blockierung durch Stichproben zwischen einem zufällig ausgewählten Paar von Eingang - Ausgang ermittelt wurde (ausführlicher Hinweis siehe Abschnitt IV.3.5).

5.5 Kritische Betrachtung des Verfahrens

Die grundlegenden Näherungsannahmen des Verfahrens von C.Y. Lee sind dieselben wie bei Jacobaeus (Vgl. Abschnitt V.2):

1. Funktionelle Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen in den verschiedenen Abschnitten des Systems.
2. Statistische Unabhängigkeit der Belegungsmuster in aufeinanderfolgenden Abschnitten des Systems.

Die bei Jacobaeus zusätzlich enthaltene Näherungsannahme Verkehrsangebot $A =$ Verkehrsbelastung Y ist bei Lee nicht enthalten, da er auf sämtlichen Abschnitten des Systems Bernoulli-Verteilungen annimmt, die lediglich Belastungswerte enthalten.

Wie in Abschnitt 5.3.1 ausgeführt wurde, ist der von Lee berechnete Punktverlust eines dreistufigen Linksystems identisch mit dem von Jacobaeus berechneten Bündelverlust eines zweistufigen Systems mit den Strukturparametern $i_1 = k_1 = g$, $k_{2r} = 1$ und der Verteilungskombination Bernoulli/Bernoulli. Weiterhin wurde die in Abschnitt 5.3.2 angegebene Beziehung für den Punktverlust in einem vierstufigen Linksystem ebenfalls schon von Jacobaeus (vgl. Abschnitt V.2.11.1, Gleichung (63)) abgeleitet.

Der Vergleich der Rechenergebnisse (Blockierungswahrscheinlichkeit) mit den Resultaten aus Verkehrstests (Verlustwahrscheinlichkeit bei ZV2 mit $Q = i_1 = 10$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1) für den Bündelverlust zeigt, daß bei kleinen Verlusten (in Diagramm V.13 bei $B < 2\%$) die getestete Verlustwahrscheinlichkeit über der berechneten Blockierungswahrscheinlichkeit liegt, während die Verhältnisse bei $B > 5\%$ umgekehrt sind. Eine Erklärung dafür wird in Abschnitt V.6.6b gegeben. Allgemein kann gesagt werden, daß die Annahme von Bernoulli-Verteilungen auf sämtlichen Abschnitten eines Systems keine befriedigenden Resultate liefert.

Die Ergebnisse für Punktverlust (Diagramm V.14) werden im Rahmen dieser Arbeit nicht diskutiert, da die Untersuchungen über die hierbei möglichen Simulationsmodelle noch nicht abgeschlossen sind.

V.6 Bininda, N.; G. Daisenberger und M. Didlaukis: Verlustberechnung für Zwischenleitungsanordnungen beliebiger Stufenzahl (1966).

6.1 Übersicht

Ausgehend vom Grundprinzip von Jacobaeus (vgl. Abschnitt V.2) wird hier - wie auch schon im vorhergehenden Abschnitt V.5 - zunächst der Fall untersucht, daß ein Ruf von einem bestimmten Eingang in Stufe 1 zu einem bestimmten Ausgang in Stufe S (also einem bestimmten Koppelvielfach) nicht durchgeschaltet werden kann ("Punktverlust"). Ein Ruf gilt als erfolgreich, wenn das Zielkoppelvielfach in Stufe S , an das der betrachtete Ausgang angeschlossen ist, erreicht wurde (Bild V.21 zeigt ein Beispiel für ein vierstufiges Linksystem).

Betrachtet man nunmehr die i_S Eingänge eines Koppelvielfachs in Stufe S als Abnehmerbündel einer bestimmten Richtung eines nur $(S-1)$ -stufigen Systems, so erhält man mit den hier besprochenen Verfahren den Bündelverlust dieser $(S-1)$ -stufigen Anordnung (Bild V.23 zeigt ein Beispiel für ein zweistufiges Linksystem).

Auf den einzelnen Zwischenleitungsbündeln werden beliebige Typen voneinander unabhängiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen für vollkommene Bündel angenommen. Außerdem geht die Rechnung von der tatsächlichen Belastung Y aus.

6.2 Beschreibung des Wegenetzes

Aus allen Zwischenleitungen zwischen erster und letzter Stufe des gesamten Linksystems sind im Belegungszustand "Null" für den Aufbau der gewünschten Verbindung von $e i n e m$ Eingangskoppelvielfach zu $e i n e m$ Zielkoppelvielfach nur eine bestimmte Anzahl von "Wegen" geeignet. Die Gesamtheit dieser geeigneten Wege nennen wir das **W e g e n e t z** für den jeweils betrachteten Fall.

In Bild V.21 ist das zwischen den Punkten T_1 und T_4 gelegene Wegenetz eines vierstufigen Linksystems hervorgehoben.

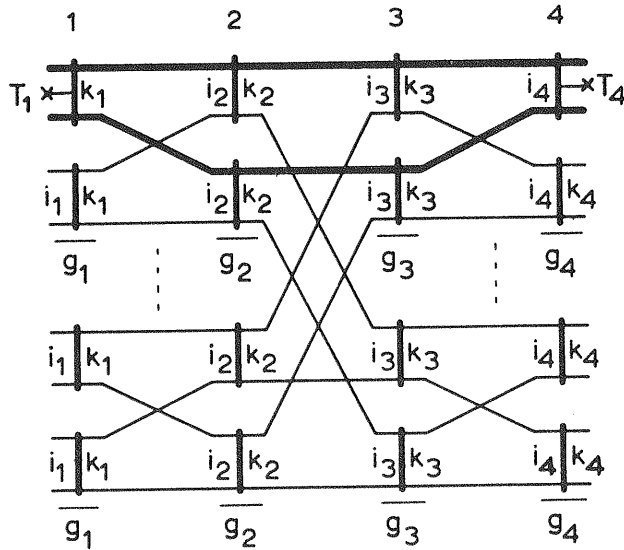


Bild V.21
Vierstufiges Linksystem;
Punkt-Punkt-Verbindung

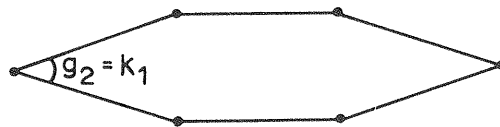


Bild V.22
Wegenetz zu Bild V.21

Bild V.23 zeigt das Wegenetz in einem zweistufigen Linksystem, wenn ein eintreffender Anruf nicht zu einem bestimmten Zielkoppelvielfach durchgeschaltet werden soll, sondern beliebige freie Abnehmerleitung im Bündel der betrachteten Richtung belegen kann.

Die Bilder V.22 und V.24 zeigen die entsprechenden Graphendarstellungen (vgl. Abschnitt V.5) zur Beschreibung der Wegenetze, welche der Berechnung zugrunde gelegt sind.

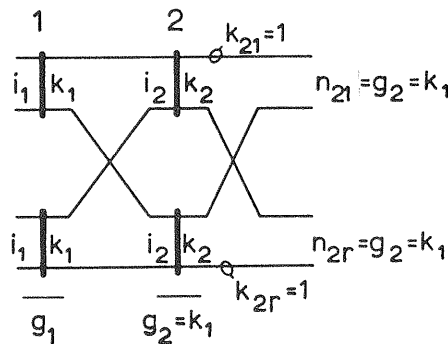


Bild V.23
Zweistufiges Linksystem

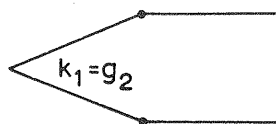
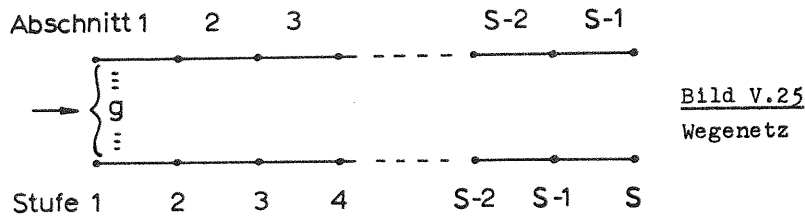


Bild V.24
Wegenetz zu Bild V.23

6.3 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Es wird entweder der Punktverlust oder die Bündelblockierung bei Richtungswahl für Systeme beliebiger Stufenzahl S berechnet. Das betrachtete Wegenetz hat folgende allgemeine Struktur (Bild V.25):



Die Autoren geben an, daß die Struktur des Wegenetzes auch komplizierter gewählt werden könnte. Beispielsweise brauchte man sich nicht auf Serien-Parallel-Graphen zu beschränken, sondern könnte vermaschte Wegenetze zulassen.

Strukturparameter

$$S \geq 2$$

$$i_j \geq k_j; j = 1, 2, \dots, S$$

Keine Mischungen zwischen den Stufen

$$l_{j,j+1} = 1; j = 1, 2, \dots, S-1$$

Das Wegenetz habe die in Bild V.25 gezeigte Struktur.

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Verkehrsangebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1 oder ZV2
- Zufällsmäßige Auswahl der Wege (Gleichbelastung aller Leitungen innerhalb eines Wegeabschnitts)
- Angebot auf alle Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt
- Beliebige, voneinander unabhängige Typen der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Belegungen der Bündel in den einzelnen Abschnitten (Erlang-Verteilung, Bernoulli-Verteilung)

- Gegebene Größen sind:
- Strukturparameter des Systems, d.h. die Struktur des Wegenetzes
 - Belastungen Y_j je Bündel eines Wegeabschnitts
 - Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Belegungen eines jeden Wegeabschnittes.

- Gesuchte Größe ist:
- Blockierungswahrscheinlichkeit E für Bündelverlust oder Punktverlust.

6.4 Entwicklung des Verfahrens

6.4.1 Grundgedanke

Bezeichnungen nach der Originalarbeit (vgl. Bild V.26):

- "Weg frei i m Abschnitt j" : das im Wegeabschnitt j liegende Wegstück ist frei
- "Weg frei b i s Abschnitt j" : die in den Abschnitten 1, 2, ..., j hintereinander liegenden Wegstücke sind frei.

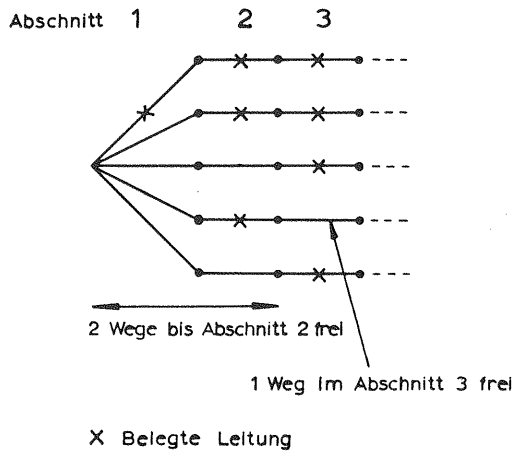


Bild V.26
Teil eines Wegenetzes

Voraussetzung: Die Wegstücke der einzelnen Abschnitte eines Weges von Stufe 1 nach Stufe S können unabhängig voneinander frei oder belegt sein (Annahme der statistischen Unabhängigkeit der Belegungszustände in aufeinanderfolgenden Stufen).

Aufgrund dieser Voraussetzung kann aus der bereits berechneten Verteilung der Anzahl der bis Abschnitt (j-1) freien Wege und der vorgeschriebenen Verteilung der Anzahl der im Abschnitt j freien Wege kombinatorisch die Verteilung der bis Abschnitt j freien Wege, $2 \leq j \leq S-1$, berechnet werden. Da für jeden Abschnitt j die Verteilung der darin freien Wege vorgeschrieben ist, läßt sich ausgehend von $j = 2$ für alle j die Verteilung der bis Abschnitt j freien Wege rekursiv bestimmen.

Die Blockierungswahrscheinlichkeit E erhalten wir folglich als die Wahrscheinlichkeit, daß keiner der g Wege bis Abschnitt (S-1) frei ist (vgl. Bild V.25).

6.4.2 Herleitung der Rekursionsformel

Bezeichnungen (vgl. Bild V.26)

$\sum_m^{(j-1)}$: Wahrscheinlichkeit, daß m der g Wege bis Abschnitt (j-1) frei sind

$\sum_n^{(j)}$: Wahrscheinlichkeit, daß n der g Wege im Abschnitt j frei sind

$g_{k,m,n}$: Bedingte Wahrscheinlichkeit, daß genau k der g Wege durchgehend bis Abschnitt j frei sind, wenn es sowohl durchgehend m freie Wege bis Abschnitt (j-1) als auch n beliebige freie Wege im Abschnitt j gibt.

Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit, daß sowohl n der g Wege im Abschnitt j als auch k Wege bis Abschnitt j frei sind unter der Bedingung, daß m Wege bis Abschnitt (j-1) frei sind:

$$\sum_n^{(j)} g_{k,m,n}$$

Daraus folgt die Wahrscheinlichkeit "k Wege bis Abschnitt j frei unter der Bedingung, daß m Wege bis Abschnitt (j-1) frei sind":

$$\sum_{n=0}^g \sum_n^{(j)} g_{k,m,n}$$

Schließlich erhält man die Wahrscheinlichkeit, daß k Wege bis Abschnitt j frei sind und m Wege bis Abschnitt (j-1) frei sind:

$$\sum_m^{(j-1)} \cdot \sum_{n=0}^g \sum_n^{(j)} g_{k,m,n}$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß k der g Wege bis Abschnitt j frei sind:

$$\zeta_k^{(j)} = \sum_{m=0}^g \zeta_m^{(j-1)} \cdot \sum_{n=0}^g \zeta_n^{(j)} \cdot g_{k,m,n} \quad (1a)$$

$$\zeta_k^{(j)} = \sum_{n=0}^g \zeta_n^{(j)} \cdot \sum_{m=0}^g \zeta_m^{(j-1)} \cdot g_{k,m,n} \quad (1b)$$

Wie bereits erwähnt wurde, ist die gesuchte Blockierungswahrscheinlichkeit E die Wahrscheinlichkeit, daß k e i n Weg bis Abschnitt (S-1) frei ist. Somit gilt:

$$E = \zeta_0^{(S-1)} \quad (2)$$

Die Verteilungen $\zeta_n^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, S-1$, sind - wie erwähnt - vorgeschriebene Verteilungstypen mit vorgegebenen Erwartungswerten Y_j .

Zur Auswertung der Gleichungen (1a,b) muß außerdem auch die bedingte Wahrscheinlichkeit $g_{k,m,n}$ bekannt sein, die im folgenden hergeleitet wird (vgl. Bild V.27).

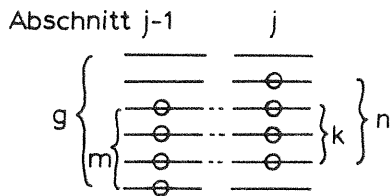


Bild V.27

Zur Berechnung von $g_{k,m,n}$
o bedeutet freie Leitung

Die m freien Leitungen in Abschnitt (j-1) denken wir uns fest. k der n freien Leitungen in Abschnitt j sollen die Fortsetzung der freien Wegstücke im (j-1)-ten Abschnitt bilden. Dafür gibt es $\binom{m}{k}$ Möglichkeiten. Die restlichen (n-k) freien Wegstücke in Abschnitt j können auf (g-m) Plätzen auf $\binom{g-m}{n-k}$ -fache Weise angeordnet werden. Insgesamt existieren $\binom{g}{n}$ Muster. Somit ergibt sich:

$$g_{k,m,n} = \frac{\binom{m}{k} \cdot \binom{g-m}{n-k}}{\binom{g}{n}} = \frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{g-n}{m-k}}{\binom{g}{m}} \quad (3)$$

Aus Gleichung (3) folgt:

$$g_{k,m,n} = 0 \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} m < k \\ n < k \\ g+k < m+n \end{array} \right.$$

Deshalb genügt es, in den Gleichungen (1a,b) über folgende Werte zu summieren:

$$\begin{aligned} k &\leq n \leq g \\ k &\leq m \leq g - (n-k) \end{aligned} \quad (4)$$

Nun werden neue Bezeichnungen eingeführt:

x Anzahl der im Abschnitt j b e l e g t e n Wege : $x = g - n$
 $[x]_j$ Wahrscheinlichkeit, daß x beliebige Wege im Abschnitt j belegt sind: $[x]_j = \zeta_{g-x}^{(j)}$

Damit erhalten wir aus Gleichung (3) :

$$g_{k,m,g-x} = f_{k,m,x} = \frac{\binom{m}{k} \cdot \binom{g-m}{g-m+k}}{\binom{g}{x}} = \frac{\binom{g-x}{k} \cdot \binom{x}{m-k}}{\binom{g}{m}} \quad (3a)$$

Aus Gleichung (4) folgt:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq g-k \\ k \leq m \leq x+k \end{aligned} \quad (4a)$$

Aus Gleichung (1b) folgt mit der neuen Bezeichnungsweise:

$$\sum_k^{(j)} = \sum_{x=0}^{g-k} [x]_j \cdot \sum_{m=k}^{x+k} \sum_m^{(j-1)} f_{k,m,x} \quad ; \quad j = 2, 3, \dots, S-1 \quad (5)$$

Aus Gleichung (5) werden beginnend mit $j = 2$ die Wahrscheinlichkeiten $\sum_k^{(j)}$ (Wahrscheinlichkeit, daß k der g Wege bis Abschnitt j frei sind) rekursiv berechnet.

6.4.3 Zusammenfassende Darstellung des Rechengangs

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $[x]_j$ ($j=1,2,\dots,S-1$) und deren Erwartungswerte Y_j für jeden Wegabschnitt werden vorgeschrieben (beispielsweise Erlang-Verteilung, Bernoulli-Verteilung usw.).
- Wenn Erlang-Verteilungen vorgeschrieben sind, müssen zunächst aus den vorgegebenen Belastungen Y_j die Angebotswerte A_{0j} iterativ bestimmt werden. Dabei muß gelten:

$$Y_j = A_{0j} \cdot (1 - [g]_j) \quad ; \quad j = 2, \dots, S-1$$

- Mit Gleichung (3 a) und den vorgeschriebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen $[x]_j$ werden aus Gleichung (5) die Wahrscheinlichkeiten $\sum_k^{(j)}$ ($j = 2, 3, \dots, S-1$) berechnet.
- Anschließend ergibt sich die gesuchte Blockierungswahrscheinlichkeit E aus Gleichung (2).

6.5 Berechnungsbeispiele

Damit mit dem Näherungsverfahren von Bininda/Daisenberger/Didlaukis dieselben Systeme berechnet werden können wie mit der Methode von C.Y. Lee (vgl. Abschnitt V.5.4), wollen wir hier dieselben Beispiele wie dort behandeln.

a) Bündelverlust für das System L 2022 (Bild A.4, Anhang A)

In Diagramm V.15 (Anhang B) ist die Blockierungswahrscheinlichkeit E als Funktion der Belastung pro Abnehmerleitung dargestellt.

Erklärungen: Kurve 1: Verteilungskombination Erlang/Erlang

Kurve 2: Verteilungskombination Bernoulli/Erlang

Kurve 3: Verteilungskombination Bernoulli/Bernoulli

(In diesem Fall liefert das Verfahren die identisch gleichen Werte wie das Verfahren von C.Y. Lee (vgl. Diagramm V.13))

Test : Obere Testwerte: Verlustwahrscheinlichkeit $B =$ Blockierungswahrscheinlichkeit bei ZV1

Untere Testwerte: Verlustwahrscheinlichkeit B bei ZV2 ($Q=1, 10$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1).

b) Punktverlust für das System L3003 (vgl. Bild A.9, Anhang A)

In Diagramm V.16 (Anhang B) ist die Punktblockierungswahrscheinlichkeit E als Funktion der Belastung auf den g Zwischenleitungen eines Wegabschnitts dargestellt.

Erklärungen: Kurve 1: Verteilungskombination Erlang/Erlang/Erlang

Kurve 2: Verteilungskombination Bernoulli/Bernoulli/Bernoulli (In diesem Fall liefert das Verfahren die identisch gleichen Werte wie das Verfahren von C.Y.Lee (vgl. Diagramm V.14).

Test : Der geteste Punktverlust (ZV1) wurde derart bestimmt, daß bei stationärem Verkehr an zufälligen Zeitpunkten die innere Blockierung durch Stichproben zwischen einem zufällig ausgewählten Paar von Eingang-Ausgang ermittelt wurde (ausführlicher Hinweis siehe Abschnitt IV.3.5).

6.6 Kritische Betrachtung des Verfahrens

Das Verfahren von Bininda, Daisenberger und Didlaukis enthält dieselben Näherungsannahmen wie das Verfahren von Jacobaeus (vgl. Abschnitt V.2) - funktionelle und statistische Unabhängigkeit - geht jedoch im Gegensatz zu diesem von der tatsächlichen Belastung Y des Systems aus und verwendet daher nicht die zusätzliche Näherung Angebot A gleich Belastung Y. Der Vergleich der Rechenergebnisse mit den Resultaten aus Verkehrstests für die Bündelblockierungswahrscheinlichkeit (Diagramm V.15) zeigt:

- a) Zufallsverkehr erster Art (ZV1): Im Bereich kleiner Verlustwerte ($B = E < 2\%$) ergibt sich eine brauchbare Übereinstimmung mit Verkehrstests (Kurve 1 - Verteilungskombination Erlang/Erlang - und obere Testwerte). Für $B > 2\%$ werden die Abweichungen zwischen Rechnung und Test größer und zwar liegen die Rechenwerte über den Testwerten, d.h. auf der sicheren Seite (vgl. auch Abschnitt V.2.13). In diesem Verlustbereich wird die Genauigkeit des Verfahrens im allgemeinen nicht ausreichend sein.
- b) Zufallsverkehr zweiter Art (ZV2): Die Kurven 2 (Bernoulli/Erlang) und 3 (Bernoulli/Bernoulli) stellen die Blockierungswahrscheinlichkeit E dar, die bei ZV2 stets größer als die Verlustwahrscheinlichkeit B ist. Die Testwerte dagegen (untere Werte) bezeichnen den Verlust ($Q = i_1 = 10$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1). Daher liegen sämtliche Testresultate unterhalb von Kurve 2. Der Vergleich mit Kurve 3 zeigt, daß bei kleinen Verlusten (in Diagramm V.15 bei $B < 2\%$) die getestete Verlustwahrscheinlichkeit über der berechneten Blockierungswahrscheinlichkeit liegt, während die Verhältnisse bei $B > 5\%$ umgekehrt sind. Die Ursache liegt darin, daß die tatsächliche Gesamtquellenzahl $Q = i_1 \cdot g_1 = 100 = 10 \cdot n_{2r} > n_{2r}$ ist. Dies wirkt sich bei $B < 2\%$ offenbar stärker aus als die verlusterhöhenden Annahmen der funktionellen und statistischen Unabhängigkeit und der Tatsache, daß $B < E$ bei ZV2. Die Verteilungskombination Bernoulli/Bernoulli sollte daher nicht angewandt werden.

Die Ergebnisse für Punktverlust (Diagramm V.16) werden im Rahmen dieser Arbeit nicht diskutiert, da die Untersuchungen über die hierbei möglichen Simulationsmodelle noch nicht abgeschlossen sind.

Eine Verbesserung des Verfahrens durch Berücksichtigung der funktionellen Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf den einzelnen Abschnitten des Wegenetzes wurde von Bininda und Daisenberger angegeben und ist in Kapitel IV, Abschnitt 3, besprochen worden.

6.7 Weitere Verfahren auf der Grundlage von Jacobaeus

Neben dem Näherungsverfahren von Bininda/Daisenberger/Didlaukis zur Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit für Linksysteme beliebiger Stufenzahl, gibt es noch eine große Anzahl von Arbeiten, die ebenfalls das Prinzip von Jacobaeus anwenden. In diesem Abschnitt sollen einige dieser Arbeiten kurz erwähnt werden.

Bezüglich der Genauigkeit, Anwendbarkeit und Verbesserungsfähigkeit dieser Verfahren gilt dasselbe, was in den Abschnitten V.13-20 ausgeführt wurde.

6.7.1 Bossche, M. van den und R.G. Knight: Traffic and Blocking Problems in a Three Link Switching System (1958).

Die Autoren behandeln den Punktverlust in dreistufigen Anordnungen, der mit dem Bündelverlust eines zweistufigen Linksystems für Richtungswahl mit $k_{2r} = 1$ identisch ist (vgl. beispielsweise Abschnitt V.6.2, Bild V.23). Sehr ähnlich wie bei Jacobæus /9/ spielen die Verfasser die möglichen Kombinationen von Bernoulli-, Erlang's-Bernoulli- und Erlang-Verteilungen durch, jedoch mit dem Unterschied, daß sie die erhaltenen Formeln für E nicht (aus Gründen der bequemerer numerischen Auswertung) durch weitere Näherungen vereinfachen. Ausserdem benutzen sie die Näherungsannahme Verkehrsangebot A gleich Verkehrsbelastung Y.

6.7.2 Bosse, J.G. van: Some Recursive Aids for Switching Network Blocking Computations (1964).

Van Bosse gibt ein rekursives Rechenverfahren zur Bestimmung des Punktverlustes bzw. der Bündelblockierung (vgl. Abschnitt V.6.1) für Linksysteme mit beliebiger Stufenzahl an. Dabei setzt er auf sämtlichen Abschnitten des betrachteten Wegenetzes (vgl. Abschnitt V.6.2, Bild V.25) voneinander unabhängige Erlang-Verteilungen an und macht weiterhin von der Näherungsannahme Angebot gleich Belastung Gebrauch.

In diesem Zusammenhang ist festzustellen, daß das Verfahren von van Bosse im Verfahren von Bininda/Daisenberger/Didlaukis enthalten ist. Die Unterschiede bestehen, abgesehen von einem etwas verschiedenen Rekursionsprozeß darin, daß bei den letztgenannten Autoren erstens auf den einzelnen Wegabschnitten beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilungen angesetzt werden können und zweitens die Näherungsannahme Angebot gleich Belastung nicht mehr enthalten ist.

6.7.3 Huber, M.: On the Congestion in TDM Systems (1964).

Zur Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit in einem dreistufigen Zeitvielfach-System betrachtet Huber ein Wegenetz wie es bei der Berechnung der Bündelblockierung in einem zweistufigen Richtungswahlssystem auftritt (vgl. Abschnitt V.6.2, Bild V.23) und nimmt auf jedem der beiden Abschnitte des Wegenetzes eine Erlang-Verteilung an. Für die Blockierungswahrscheinlichkeit E gilt nach Jacobæus (vgl. Abschnitt V.2.7.5, Gleichung (29)):

$$E = \frac{A \cdot E_{k_1}(A) - A_{2r} \cdot E_{k_1}(A_{2r})}{A - A_{2r}} \quad (6)$$

Für $A = A_{2r}$ gilt statt Gleichung (6) (vgl. Abschnitt V.2.7.5a, Gleichung (30)):

$$E = E_{k_1}(A) \cdot \left(k_1 + 1 - k_1 \cdot \frac{E_{k_1}(A)}{E_{k_1-1}(A)} \right)$$

$$E = E_{k_1}(A) \cdot \left(k_1 + 1 - A \cdot (1 - E_{k_1}(A)) \right)$$

$$E = E_{k_1}(A) \cdot (k_1 + 1 - Y_1) \quad (7)$$

Huber behandelt diesen Sonderfall, verwendet jedoch nicht die Näherungsannahme Angebot A gleich Belastung Y, sondern geht von der tatsächlichen Belastung Y aus. Anstelle des Angebotswertes A tritt bei ihm ein erzeugendes Angebot A_0 . Es gilt also:

$$E = E_{k_1}(A_0) \cdot (k_1 + 1 - Y_1)$$

$$Y_1 = A_0 \cdot (1 - E_{k_1}(A_0))$$

Das tatsächliche Angebot ergibt sich anschließend aus

$$A = \frac{Y}{1 - E}$$

VI. BERECHNUNG DER VERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT B MIT HILFE EINER SPERRWAHRSCHEINLICHKEIT

VI. 1 Allgemeines

In Kapitel IV wurden Berechnungsverfahren behandelt, die erstens die funktionelle Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen in aufeinanderfolgenden Stufen berücksichtigen und zweitens teilweise oder ganz die statistische Unabhängigkeit der Belegungsmuster in aufeinanderfolgenden Abschnitten eines Linksystems annehmen. Das Prinzip, welches den in Kapitel V erörterten Verfahren zugrunde liegt, nimmt dagegen grundsätzlich sowohl die funktionelle Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilungen als auch die statistische Unabhängigkeit der Belegungsmuster an. Die in den Kapiteln VI bis IX zu besprechenden Methoden schließen zwischen diesen beiden Extremen Kompromisse.

Bei allen in diesem Kapitel behandelten Verfahren wird dagegen auf den Abnehmerleitungen der schon aus Erlang's Interconnection-Formel bekannte rekursive Ansatz für das statistische Gleichgewicht bei unvollkommener Erreichbarkeit angewandt. Die dazu benötigte Durchlaßwahrscheinlichkeit bzw. Sperrwahrscheinlichkeit wird durch Näherungsberechnungen bestimmt, die bei den einzelnen Verfahren verschieden sind.

Nachdem die allgemeinen Grundlagen des Berechnungsprinzips entwickelt sind, werden verschiedene Arten der Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit behandelt.

Bridgford /54/ betrachtet Linksysteme für Richtungswahl. Er legt der Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit eine geometrische Reihe zugrunde. Die Sperrwahrscheinlichkeit ist eine Funktion der Systemstruktur und der Belastung.

Aus der Arbeit von Rohde und Störmer /13/ entnehmen wir lediglich die Bestimmung von $\sigma(x)$, gehen jedoch sonst nicht näher auf deren weitere Ausführungen ein. Die Sperrwahrscheinlichkeit hängt bei diesem Verfahren nur von der Struktur des Linksystems und von der Anzahl der im Abnehmerbündel belegten Leitungen ab; sie wird durch kombinatorische Ansätze bestimmt.

Kirsch /66/ hat die Sperrwahrscheinlichkeit nach Rohde und Störmer für einen Sonderfall verbessert.

VI.2 Grundgleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir die in den nachfolgenden Abschnitten benutzten Grundgleichungen zur Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit B aufstellen. Dabei soll zunächst die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_S)$ als bekannt vorausgesetzt werden (x_S ist der Belegungszustand des betrachteten Abnehmerbündels hinter der S-ten (letzten) Stufe.

Die Rekursionsformel für das statistische Gleichgewicht auf dem betrachteten Abnehmerbündel hinter der Stufe S lautet (der Übersichtlichkeit halber wird nur der Fall für Zufallsverkehr erster Art behandelt):

$$[x_S] \cdot x_S = A_S [x_S - 1] \cdot (1 - \sigma(x_S - 1)) \tag{1}$$

Für einen vorgegebenen Wert A_S des Verkehrsangebots kann die Verteilung $[x_S]$ berechnet werden. In bekannter Weise erhält man:

$$[x_S] = \frac{\frac{A_S^{x_S}}{x_S!} \cdot \prod_{z=0}^{x_S-1} (1 - \sigma(z))}{\sum_{v=1}^{n_S} \frac{A_S^v}{v!} \cdot \prod_{z=0}^{v-1} (1 - \sigma(z))} \tag{2}$$

Wird dagegen die Belastung Y_S des Abnehmerbündels vorgeschrieben, so beginnt die Rechnung mit einem Schätzwert für A_S , der iterativ solange verbessert wird, bis nachstehende Gleichung erfüllt ist:

$$Y_S = \sum_{x_S=1}^{n_S} x_S \cdot [x_S] \quad (3)$$

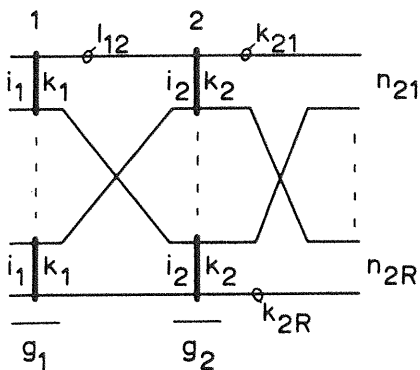
Nunmehr kann die gesuchte Verlustwahrscheinlichkeit B bzw. die Blockierungswahrscheinlichkeit E berechnet werden:

$$B = E = \sum_{x_S=0}^{n_S} [x_S] \cdot G(x_S) \quad (4)$$

VI.3 Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Bridgford (1964).

3.1 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Bridgford /54/ berechnet die Sperrwahrscheinlichkeit z w e i stufiger Linksyste me für Richtungswahl. Skizze des Systems und Bezeichnungen siehe Bild VI.1.



Strukturparameter

$S = 2$		$g_1 \cdot k_1 = g_2 \cdot i_2$, d.h. keine Mischung zwischen den Stufen 1 und 2
$i_1 \geq k_1$		
$k_1 = g_2$		Mischung der Ausgänge aus verschiedenen Linkgruppen auf e i n Abnehmerbündel
$l_{12} = 1$		ist möglich.

Bild VI.1 Zweistufiges Linksyste m für Richtungswahl

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Verkehrsangebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1
- Angebot auf alle Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt
- Gleichbelastung aller Zwischen- bzw. Abnehmerleitungen.

Gegebene Größen sind: - Strukturparameter des Systems
 - Belastungen Y_{2r} ($r=1,2,\dots,R$) auf den Abnehmerbündeln der einzelnen Richtungen.

Gesuchte Größen sind: - Blockierungswahrscheinlichkeit E
 - Verlustwahrscheinlichkeit B .

3.2 Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$

Bridgford geht davon aus, daß die Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$ durch eine geometrische Reihe approximiert werden darf, deren Quotient t - der Parameter eines "equivalent geometric group system" - so zu bestimmen ist, daß die damit berechneten Sperrwahrscheinlichkeiten $G(x_2)$ möglichst gut mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 G(n_{2r}) &= 1 \\
 G(n_{2r}-1) &= t \\
 G(n_{2r}-2) &= t^2 \\
 \dots & \dots \dots \dots \\
 G(x_2) &= t^{n_{2r}-x_2} \\
 \dots & \dots \dots \dots \\
 G(0) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Der Parameter t wird wie folgt bestimmt. Wenn wir die mittlere Erreichbarkeit (vgl. Kapitel VIII) vom Eingang eines Koppelvielfachs in Stufe 1 bezüglich des betrachteten Abnehmerbündels mit k_m bezeichnen, sind im Mittel $(n_{2r}-k_m)$ Abnehmerleitungen nicht auf frei oder besetzt prüfbar. Damit erhalten wir nach Bridgford näherungsweise für die Sperrwahrscheinlichkeit im Belegungszustand $\{x_2 = n_{2r}-1\}$:

$$G(n_{2r}-1) = t = \frac{n_{2r}-k_m}{n_{2r}}
 \tag{6}$$

Dabei ist

$$k_m = (k_1 - \gamma_1) \cdot k_{2r}
 \tag{7}$$

Der Ansatz (6) hat seine Ursache vermutlich darin, daß bei einstufigen Koppelanordnungen mit "idealer Erlangmischung"

$$G(n-1) = \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{n}$$

wird.

Bemerkung: Näheres über den Begriff der mittleren Erreichbarkeit siehe Kapitel VIII.

Nunmehr gilt nach Gleichung (5):

$$\begin{aligned}
 G(x_2) &= t^{n_{2r}-x_2} = \left(\frac{n_{2r}-k_m}{n_{2r}} \right)^{n_{2r}-x_2} ; 0 \leq x_2 \leq n_{2r} \\
 G(0) &= 0
 \end{aligned}$$

(8)

Nachdem $G(x_2)$ berechnet wurde, kann aus Gleichung (4) die gesuchte Verlustwahrscheinlichkeit ermittelt werden.

Die in Abschnitt 6.1 diskutierten Ergebnisse zeigen, daß diese Methode den tatsächlichen Verlust erheblich unterschätzt.

VI.4 Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Rohde und Störmer (1953).

4.1 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Vorbemerkung: Es wird in diesem Abschnitt nur die Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Rohde und Störmer /13/ behandelt, jedoch nicht deren ganze Arbeit diskutiert, weil die explizite Verlustberechnung ein heute kaum mehr angewandtes Verkehrsmodell bezüglich des Überlaufs von Verluststrufen auf ein fiktives nachfolgendes "Sekundärbündel" zugrundelegt.

Es wird die Sperrwahrscheinlichkeit zweistufiger Linkssysteme für Mischwahl berechnet. Skizze des Systems und Bezeichnungen siehe Bild VI.2.

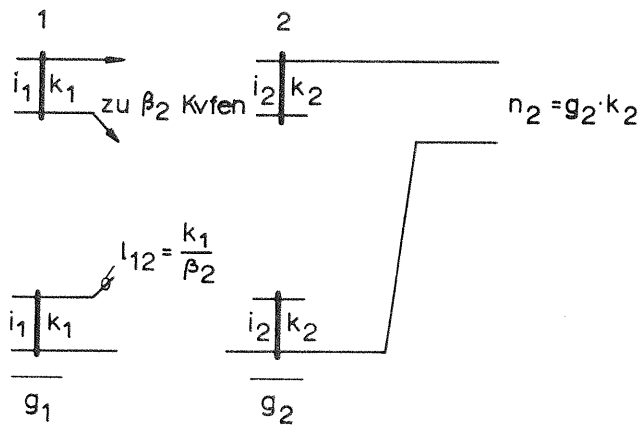


Bild VI.2 Zweistufiges Linksystem für Mischwahl

Strukturparameter

- $S = 2$
 $i_1 \geq k_1$
 $k_1 \geq g_2$
 $i_2 \geq g_1$
 $l_{12} \geq 1$
 $k_1 / l_{12} = \beta_2 \leq g_2$
- $g_1 \cdot k_1 = g_2 \cdot i_2$, d.h. keine Mischung zwischen den Stufen 1 und 2
 Keine Mischung am Ausgang.

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Verkehrsangebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1
- Angebot auf alle Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt.

- Gegebene Größen sind:
- Strukturparameter des Systems
 - Belastung Y auf dem Abnehmerbündel hinter Stufe 2.

- Gesuchte Größen sind:
- Blockierungswahrscheinlichkeit E
 - Verlustwahrscheinlichkeit B .

4.2 Allgemeine Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$

Wir betrachten eine Zwischenleitungseinheit des zweistufigen Linksystems (Bild VI.3):

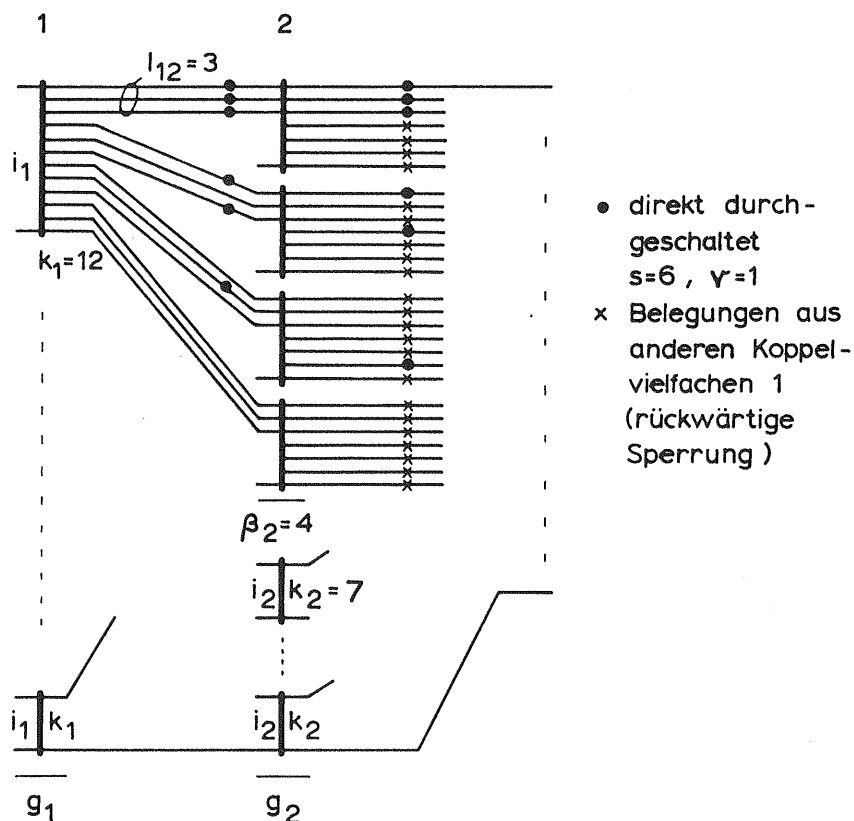


Bild VI.3
Zwischenleitungseinheit

Im Belegungszustand $\{x_2\}$ seien mit der Wahrscheinlichkeit $W(x_2, s)$ momentan s Belegungen (in Bild VI.3 $s=6$) aus dem betrachteten Koppelvielfach der ersten Stufe ins Abnehmerbündel durchgeschaltet.

Die s Belegungen sollen so verteilt sein, daß v der β_2 erreichbaren Koppelvielfache der zweiten Stufe für das betrachtete Koppelvielfach in der ersten Stufe "direkt" gesperrt sind (Bild VI.3: $v=1; \beta_2=4$) oder - anders ausgedrückt - daß v "Linkbündel" der Stärke l_{12} voll belegt sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür sei mit $W_{x_2}(s, v)$ bezeichnet.

Blockierung tritt dann auf, wenn mindestens die k_2 Ausgänge jener $(\beta_2 - v)$ Koppelvielfache in Stufe 2 belegt sind, die vom betrachteten Koppelvielfach in Stufe 1 über freie Zwischenleitungen erreicht werden können. Die Zwischenleitungen erscheinen dann als "rückwärts gesperrt". Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit dafür mit $W_{x_2}(s, v, \beta_2 - v)$.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit $p(x_2 | s)$, daß im Belegungszustand $\{x_2\}$ Blockierung auftritt, unter der Bedingung, daß s Belegungen direkt durchgeschaltet sind:

$$p(x_2 | s) = \sum_v W_{x_2}(s, v) \cdot W_{x_2}(s, v, \beta_2 - v) \quad (9)$$

Daraus ergibt sich für die gesuchte Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$:

$$G(x_2) = \sum_s W(x_2, s) \cdot p(x_2 | s)$$

oder mit Gleichung (9):

$$\sigma(x_2) = \sum_s \left\{ W(x_2, s) \cdot \sum_v W_{x_2}(s, v) \cdot W_{x_2}(s, v, \beta_2 - v) \right\} \quad (10)$$

Im folgenden werden nach Rohde und Störmer die zur Auswertung von Gleichung (10) benötigten Wahrscheinlichkeiten $W(x_2, s)$, $W_{x_2}(s, v)$ und $W_{x_2}(s, v, \beta_2 - v)$ kombinatorisch berechnet. Dies ist erlaubt unter der Näherungsannahme, daß sämtliche Belegungsmuster eines bestimmten Belegungszustands gleichwahrscheinlich sind.

4.2.1 Berechnung der Aufteilungswahrscheinlichkeit $W(x_2, s)$

Es ist $W(x_2, s)$ die Wahrscheinlichkeit, daß im Belegungszustand $\{x_2\}$ aus dem betrachteten Koppelvielfach in der ersten Stufe s Belegungen ins Abnehmerbündel durchgeschaltet sind.

Wir bezeichnen mit

$N(x_2)$ die Anzahl der verschiedenen möglichen Belegungsmuster von x_2 Belegungen auf dem gesamten Zwischenleitungsbündel, und mit

$Z(x_2, s)$ die Anzahl derjenigen dieser Muster, bei denen genau s Belegungen in der betrachteten Zwischenleitungseinheit liegen (vgl. Bild VI.3).

Unter der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit aller Belegungsmuster eines Zustands $\{x_2\}$ gilt dann:

$$W(x_2, s) = \frac{Z(x_2, s)}{N(x_2)} \quad (11)$$

Existieren auf den i_2 Eingängen des Koppelvielfachs Nr. μ der zweiten Stufe ξ_μ Belegungen, $0 \leq \xi_\mu \leq k_2$, so gibt es dafür $\binom{i_2}{\xi_\mu}$ mögliche Anordnungen. Somit gilt:

$$N(x_2) = \sum_{\xi_\mu} \binom{i_2}{\xi_1} \cdot \binom{i_2}{\xi_2} \cdot \dots \cdot \binom{i_2}{\xi_{g_2}} \quad (12)$$

mit
$$0 \leq \xi_\mu \leq k_2 ; \sum_{\mu=1}^{g_2} \xi_\mu = x_2$$

Die Anzahl der Belegungen in einem Linkbündel der Stärke $l_{12} = k_1/\beta_2$ zwischen zwei Koppelvielfachen in Stufe 1 und Stufe 2 (vgl. Bild VI.3) werde mit ζ_v , $1 \leq v \leq \beta_2$, bezeichnet. Es gilt:

$$0 \leq \zeta_v \leq l_{12} ; 1 \leq v \leq \beta_2 ; \sum_{v=1}^{\beta_2} \zeta_v = s \quad (13)$$

Anzahl der möglichen Anordnungen von ζ_v Belegungen auf l_{12} Leitungen:

$$\binom{l_{12}}{\zeta_v}$$

Insgesamt sind auf den i_2 Eingängen von Koppelvielfach Nr. μ in der zweiten Stufe ξ_μ Belegungen. Folglich ist die Anzahl der Muster von $(\xi_\mu - \zeta_v)$ Belegungen auf $(i_2 - l_{12})$ Leitungen

$$\binom{i_2 - l_{12}}{\xi_\mu - \zeta_v}$$

Damit ergibt sich für $Z(x_2, s)$:

$$Z(x_2, s) = \sum_{\sum_{\mu=1}^v \sum_{\nu} \beta_{\mu}} \left\{ \binom{l_{12}}{\sum_{\nu} \beta_{\nu}} \cdot \binom{l_{12}}{\sum_{\nu} \beta_{\nu}} \right\} \cdot \left\{ \binom{i_2 - l_{12}}{\sum_{\nu} \beta_{\nu} - \sum_{\nu} \beta_{\nu}} \cdot \binom{i_2 - l_{12}}{\sum_{\nu} \beta_{\nu} - \sum_{\nu} \beta_{\nu}} \right\} \cdot \left\{ \binom{i_2}{\sum_{\nu} \beta_{\nu+1}} \cdot \binom{i_2}{\sum_{\nu} \beta_{\nu}} \right\} \quad (14)$$

mit
$$\sum_{\nu=1}^{\beta_2} \sum_{\nu} = s ; \quad \sum_{\mu=1}^{\beta_2} \sum_{\mu} = x_2$$

4.2.2 Wahrscheinlichkeit $W_{x_2}(s, \nu)$ für direkte Sperrung

Es ist $W_{x_2}(s, \nu)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß im Belegungszustand $\{x_2\}$ die s aus dem betrachteten Koppelvielfach in der ersten Stufe durchgeschalteten Belegungen sich so gruppieren, daß ν Linkbündel der Stärke l_{12} voll belegt sind (vgl. Bild VI.3).

Es bedeuten:

$N_{x_2}(s, \nu)$: Anzahl der verschiedenen möglichen Anordnungen von s Belegungen auf den k_1 Ausgängen eines Koppelvielfachs der ersten Stufe.

$Z_{x_2}(s, \nu)$: Anzahl derjenigen dieser Anordnungen, bei denen genau ν der β_2 erreichbaren Koppelvielfache in der zweiten Stufe direkt gesperrt sind, d.h. ν Linkbündel der Stärke l_{12} sind voll belegt.

Analog zu Gleichung (11) gilt dann:

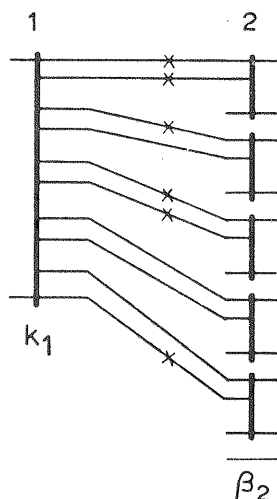
$$W_{x_2}(s, \nu) = \frac{Z_{x_2}(s, \nu)}{N_{x_2}(s, \nu)} \quad (15)$$

Für $N_{x_2}(s, \nu)$ erhalten wir:

$$N_{x_2}(s, \nu) = \binom{k_1}{s} \quad (16)$$

Wenn genau ν Linkbündel der Stärke l_{12} voll belegt sind, muß in den übrigen $(\beta_2 - \nu)$ vom betrachteten Koppelvielfach in Stufe 1 ausgehenden Linkbündeln jeweils mindestens eine Leitung frei sein (vgl. Bild VI.4: $\nu=2$; $\beta_2 - \nu=3$).

Anzahl der Anordnungen von ν auf β_2 : $\binom{\beta_2}{\nu}$



$$\begin{aligned} k_1 &= 10 & \nu &= 2 \\ \beta_2 &= 5 & \beta_2 - \nu &= 3 \\ l_{12} &= 2 & \lambda_1 &= 1 \\ s &= 6 & \lambda_2 &= 0 \\ & & \lambda_3 &= 1 \end{aligned}$$

Bild VI.4
Linkeinheit

Auf einem Linkbündel der Stärke l_{12} und der Ordnungsnummer K , das nicht voll belegt ist, sollen λ_K Belegungen existieren. Sie können $\binom{l_{12}}{\lambda_K}$ Muster bilden (vgl. Bild VI.4: $\lambda_1=1$; $\lambda_2=0$; $\lambda_3=1$).

Somit ist:

$$Z_{x_2}(s, v) = \binom{\beta_2}{v} \cdot \sum_{\lambda_K} \binom{l_{12}}{\lambda_1} \cdots \binom{l_{12}}{\lambda_{\beta_2-v}} \quad (17)$$

mit $0 \leq \lambda_K \leq l_{12} - 1$; $1 \leq K \leq \beta_2 - v$; $\sum_{K=1}^{\beta_2-v} \lambda_K = s - v \cdot l_{12}$

4.2.3 Wahrscheinlichkeit $W_{x_2}(s, v, \beta_2 - v)$ für rückwärtige Sperrung

Es ist $W_{x_2}(s, v, \beta_2 - v)$ die Wahrscheinlichkeit, daß im Belegungszustand $\{x_2\}$ die noch freien Zwischenleitungen in den $(\beta_2 - v)$ nicht voll belegten Linkbündeln keine freie Abnehmerleitung erreichen (rückwärtige Sperrung). Es müssen dazu jeweils sämtliche k_2 Ausgänge in mindestens jenen $(\beta_2 - v)$ Koppelvielfachen der zweiten Stufe belegt sein (vgl. Bild VI.3).

Es bedeuten:

$N_{x_2}(s, v, \beta_2 - v)$: Anzahl der verschiedenen möglichen Anordnungen von $(x_2 - s)$ Belegungen auf $(n_2 - s)$ Abnehmerleitungen. Durch einen Teil dieser Belegungsmuster werden die noch freien Zwischenleitungen in den bestimmten $(\beta_2 - v)$ nicht voll belegten Linkbündeln rückwärts gesperrt (vgl. Bild VI.3).

$Z_{x_2}(s, v, \beta_2 - v)$: Anzahl der Anordnungen, bei denen genau $(\beta_2 - v)$ von β_2 Linkbündeln der Stärke l_{12} rückwärts gesperrt sind.

Analog zu Gleichung (11) gilt:

$$W_{x_2}(s, v, \beta_2 - v) = \frac{Z_{x_2}(s, v, \beta_2 - v)}{N_{x_2}(s, v, \beta_2 - v)} \quad (18)$$

Für $N_{x_2}(s, v, \beta_2 - v)$ ergibt sich:

$$N_{x_2}(s, v, \beta_2 - v) = \binom{n_2 - s}{x_2 - s} \quad (19)$$

Von insgesamt x_2 Belegungen auf dem Abnehmerbündel denken wir uns $(\beta_2 - v) \cdot k_2$ derart festgelegt, daß hierdurch die noch freien Zwischenleitungen in $(\beta_2 - v)$ nicht voll belegten Linkbündeln r ü c k w ä r t s gesperrt sind (vgl. Bild VI.3).

Außerdem werden auf dem Zwischenleitungsbündel $v \cdot l_{12}$ Belegungen "festgehalten" gedacht, um die restlichen v Linkbündel d i r e k t zu blockieren.

Die für die rückwärtige und die direkte Sperrung noch nicht festgelegten $(x_2 - (\beta_2 - v) \cdot k_2 - v \cdot l_{12})$ Belegungen können auf den Abnehmerleitungen noch

$$Z_{x_2}(s, v, \beta_2 - v) = \binom{n_2 - (\beta_2 - v) \cdot k_2 - v \cdot l_{12}}{x_2 - (\beta_2 - v) \cdot k_2 - v \cdot l_{12}} \quad (20)$$

verschiedene (als gleichwahrscheinlich betrachtete) Muster bilden.

T a t s ä c h l i c h können sich jedoch in den \vee direkt gesperrten Koppelvielfachen der zweiten Stufe die Belegungen nur auf $(i_2 - 1_{12})$ Eingänge verteilen. Richtigerweise müßte daher die Anzahl der möglichen Belegungsmuster im Z w i s c h e n l e i t u n g s b ü n d e l und nicht im A b n e h m e r b ü n d e l betrachtet werden. Gleichung (19) müßte in entsprechender Weise geändert werden.

Die Richtigstellung der Gleichungen (19) und (20) nach /66/ wird in Abschnitt 4.4 gezeigt. Zuvor soll noch ein bereits von Rohde und Störmer angegebener einfacher Sonderfall besprochen werden.

4.3 Sonderfall: $k_1 = g_2$

Die Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$ wird wesentlich übersichtlicher und einfacher, wenn wir den besonders einfachen Fall betrachten, daß von jedem Koppelvielfach in der ersten Stufe nur e i n e Zwischenleitung zu jedem Koppelvielfach der zweiten Stufe führt. Dann ist (vgl. Bild VI.2):

$$\begin{aligned} k_1 = \beta_2 = g_2 ; L_{12} = 1 \\ i_2 = g_1 ; \nu = s \end{aligned} \quad (21)$$

Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen (11) bis (20). Im einzelnen erhält man:

a) Gleichung (12) bleibt unverändert:

$$\begin{aligned} N(x_2) = \sum_{\xi_\mu} \binom{i_2}{\xi_1} \cdot \binom{i_2}{\xi_2} \cdots \binom{i_2}{\xi_{g_2}} \\ 0 \leq \xi_\mu \leq k_2 ; \sum_{\mu=1}^{g_2} \xi_\mu = x_2 \end{aligned} \quad (12)$$

b) Zu Gleichung (14):

Die Bedeutung von $Z(x_2, s)$ wurde in Abschnitt 4.2.1 definiert. Durch s Belegungen aus dem betrachteten Koppelvielfach in der ersten Stufe sind wegen der Annahme $k_1 = g_2$ genau die Zugänge zu s verschiedenen Koppelvielfachen in Stufe 2 gesperrt. Dafür existieren $\binom{g_2}{s}$ verschiedene Möglichkeiten. Von den $(i_2 - 1)$ anderen Eingängen dieser Koppelvielfache in Stufe 2 können noch höchstens $(k_2 - 1)$ belegt sein. Auf den $(g_2 - s)$ anderen Koppelvielfachen in der zweiten Stufe dürfen auf $(i_2 - 1)$ Eingängen maximal k_2 Belegungen vorhanden sein. Somit erhält man anstelle von Gleichung (14):

$$\begin{aligned} Z(x_2, s) = \binom{g_2}{s} \cdot \sum_{\xi_\mu} \left\{ \binom{i_2-1}{\xi_1} \cdots \binom{i_2-1}{\xi_s} \right\} \cdot \left\{ \binom{i_2-1}{\xi_{s+1}} \cdots \binom{i_2-1}{\xi_{g_2}} \right\} \\ \text{mit } \sum_{\mu=1}^{g_2} \xi_\mu = x_2 - s ; \quad 0 \leq \xi_\mu \leq k_2 - 1 \quad \text{für } 1 \leq \mu \leq s \\ \quad \quad \quad 0 \leq \xi_\mu \leq k_2 \quad \text{für } s+1 \leq \mu \leq g_2 \end{aligned} \quad (14a)$$

Mit den Gleichungen (12) und (14a) kann aus Gleichung (11) (vgl. Abschnitt 4.2.1) die Aufteilungswahrscheinlichkeit $W(x_2, s)$ bestimmt werden.

Da im augenblicklich betrachteten Sonderfall nach Gleichung (21) $v=s$ gilt (vgl. Bild VI.3), ist die soeben berechnete Aufteilungswahrscheinlichkeit $W(x_2, s)$ identisch mit der Wahrscheinlichkeit $W_{x_2}(s, v)$ für die direkte Sperrung von v Koppelvielfachen in Stufe 2 (vgl. Abschnitt 4.2.2). Folglich werden die Gleichungen (15) - (17) jetzt nicht mehr benötigt.

c) Zu den Gleichungen (19) und (20)

Sie lauten jetzt:

$$N_{x_2}(s, k_1 - s) = \binom{n_2 - s}{x_2 - s} = \binom{n_2 - s}{n_2 - x_2} \quad (19a)$$

$$Z_{x_2}(s, k_1 - s) = \binom{n_2 - (k_1 - s) \cdot k_2 - s}{x_2 - (k_1 - s) \cdot k_2 - s} = \binom{s \cdot (k_2 - 1)}{n_2 - x_2} \quad (20a)$$

Die Bemerkungen über die mögliche Verbesserung der Ansätze in Gleichung (20), Abschnitt 4.2.3, gelten auch für die Gleichungen (19a) und (20a). Hierzu siehe Abschnitt 4.4.

Mit Hilfe der Gleichungen (19a), (20a) wird gemäß Gleichung (18) die Wahrscheinlichkeit $W_{x_2}(s, k_1 - s)$ für rückwärtige Sperrung berechnet.

Nunmehr gilt für die gesuchte Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$:

$$G(x_2) = \sum_{s=0}^t W(x_2, s) \cdot W_{x_2}(s, k_1 - s) \quad (22)$$

wobei $t = \min(k_1, x_2)$

4.4 Berichtigung der Berechnung der rückwärtigen Sperrung

Gemäß Abschnitt 4.2.3 (Gleichung (18)) bzw. Abschnitt 4.3 ist die Wahrscheinlichkeit für rückwärtige Sperrung wie folgt definiert:

$$W_{x_2}(s, k_1 - s) = \frac{Z_{x_2}(s, k_1 - s)}{N_{x_2}(s, k_1 - s)} \quad (23)$$

Wie in Abschnitt 4.2.3 (Bemerkung zu Gleichung (20)) ausgeführt wurde, enthält die Berechnung von Zähler und Nenner in Gleichung (23) Unstimmigkeiten, die im folgenden richtiggestellt werden sollen. Dabei wird der Übersichtlichkeit halber derselbe einfache Sonderfall ($k_1 = g_2$) wie in Abschnitt 4.3 betrachtet /66/.

Es bedeuten:

$N_{x_2}(s, k_1 - s)$: Anzahl der verschiedenen möglichen Muster von $(x_2 - s)$ Belegungen auf der Gesamtheit aller Zwischenleitungen, wobei zu berücksichtigen ist, daß s Belegungen aus dem betrachteten Koppelvielfach der ersten Stufe durchgeschaltet sind.

Der kombinatorische Ausdruck für $N_{x_2}(s, k_1 - s)$ kann unmittelbar aus Gleichung (14a), Abschnitt 4.3, übernommen werden:

$$N_{x_2}(s, k_1-s) = \sum_{\sum_{\mu} \xi_{\mu}} \left\{ \binom{i_2-1}{\xi_1} \dots \binom{i_2-1}{\xi_s} \right\} \cdot \left\{ \binom{i_2-1}{\xi_{s+1}} \dots \binom{i_2-1}{\xi_{g_2}} \right\} \quad (24)$$

mit

$$\sum_{\mu=1}^{g_2} \xi_{\mu} = x_2 - s ; \quad 0 \leq \xi_{\mu} \leq k_2 - 1 \quad \text{für } 1 \leq \mu \leq s$$

$$0 \leq \xi_{\mu} \leq k_2 \quad \text{für } s+1 \leq \mu \leq g_2$$

$Z_{x_2}(s, k_1-s)$: Anzahl der Muster, bei denen genau die (k_1-s) noch freien Zwischenleitungen in der betrachteten Linkeinheit rückwärts gesperrt sind.

Eine rückwärts gesperrte Zwischenleitung endet in einem Koppelvielfach der zweiten Stufe, welches k_2 Belegungen enthält. Diese können auf (i_2-1) Eingängen $\binom{i_2-1}{k_2}$ Muster bilden. Da insgesamt (k_1-s) Zwischenleitungen rückwärts gesperrt sein sollen, müssen auch (k_1-s) Koppelvielfache der zweiten Stufe durch je k_2 Belegungen blockiert sein, die insgesamt $\binom{i_2-1}{k_2}^{k_1-s}$ Muster bilden können.

Die Anzahl der Belegungsmuster, welche auf den (i_2-1) Eingängen jener s Koppelvielfache in Stufe 2 existieren können, welche von den belegten s Zwischenleitungen der betrachteten Zwischenleitungseinheit erreicht werden, beträgt:

$$\sum_{\sum_{\nu} \xi_{\nu}} \binom{i_2-1}{\xi_1} \cdot \binom{i_2-1}{\xi_2} \dots \binom{i_2-1}{\xi_s}$$

mit

$$0 \leq \xi_{\nu} \leq k_2 - 1 ; \quad \sum_{\nu=1}^s \xi_{\nu} = x_2 - s - (k_1-s) \cdot k_2$$

Somit ist:

$$Z_{x_2}(s, k_1-s) = \binom{i_2-1}{k_2}^{k_1-s} \cdot \sum_{\sum_{\nu} \xi_{\nu}} \binom{i_2-1}{\xi_1} \dots \binom{i_2-1}{\xi_s} \quad (25)$$

VI.5 Andere Möglichkeiten der Berechnung einer Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$

Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die in Kapitel V, Abschnitt 2.18, angegebenen Näherungsverfahren (Verbesserung des Verfahrens von Jacobaeus) zur Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit in zweistufigen Systemen dasselbe Grundprinzip verwenden, welches in diesem Kapitel erörtert wurde.

Die Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$ ist dort jedoch einfacher gelöst. Sie erfolgt mit Hilfe eines kombinatorischen Ansatzes und der im Zwischenleitungsbündel der betrachteten Linkeinheit vorgeschriebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung.

VI.6 Berechnungsbeispiele zu Abschnitt VI.3 und VI.4

In diesem Abschnitt werden die Verlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Belastung je Abnehmerleitung für die Systeme L2022 (Bild A.4, Anhang A), L2024 (Bild A.1, Anhang A) und MpI9a

(Bild A.2, Anhang A) berechnet und die Rechenwerte mit Testergebnissen verglichen. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht.

System Anhang A	Diagramm Anhang B	Kurve Nr.	Erklärung	Test
L2022	VI.1	-	Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Bridgford, Abschnitt VI.3	ZV1
L2024	VI.2	1	Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Rohde/Störmer mit Berichtigung der rückwärtigen Sperrung nach Kirsch, Abschnitt VI.4	ZV1
		2	Exakte Berechnung nach Bascharin	
MpI9a	VI.3	-	Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Rohde/Störmer mit Berichtigung der rückwärtigen Sperrung nach Kirsch, Abschnitt VI.4	ZV1

VI.7 Kritische Betrachtung zu VI.3 und VI.4

Das Berechnungsprinzip, auf dem Abnehmerbündel hinter der letzten Stufe die Rekursionsformel für das statistische Gleichgewicht anzusetzen und die Eigenschaften des Linksystems durch eine Sperrwahrscheinlichkeit zu erfassen, ist allgemein gültig. Die hinreichend genaue Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit stößt jedoch auf große Schwierigkeiten.

7.1 Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Bridgford

a) Der Vergleich von Rechnung und Test für das System L2022 (vgl. Diagramm VI.1, Anhang B) zeigt, daß die Rechenwerte durchweg unterhalb der Testwerte liegen (Abweichungen um einen Faktor 2 und mehr). Dieses Verfahren zur Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit scheint daher wenig geeignet zu sein.

Im einzelnen ist zu bemerken:

- b) Die Approximation der Sperrwahrscheinlichkeiten $G(x_2)$ durch eine geometrische Reihe ist eine willkürliche Näherung, die bequem zu handhaben ist. Es erscheint fraglich, ob eine Näherung dieses Typs hinreichend genau werden kann.
- c) Die Berechnung des "geometrischen Gruppenparameters" t (Quotient der geometrischen Reihe, Gleichung (6)) stellt ebenfalls eine Näherung dar.

7.2 Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach Rohde und Störmer mit Richtigstellung der rückwärtigen Sperrung durch Kirsch

a) Der Vergleich von Rechnung und Test zeigt (Bild VI.2, Kurve 1 und Bild VI.3, jeweils Anhang B), daß die Rechenwerte stets unterhalb der Testergebnisse liegen und zwar sind die Abweichungen im Bereich kleiner Verlustwerte größer.

Im einzelnen ist zu bemerken:

- b) Die Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_2)$ wird ausschließlich mit Hilfe von kombinatorischen Ansätzen berechnet. Dabei wird unterstellt, daß sämtliche Belegungsmuster eines bestimmten Belegungszustands gleichwahrscheinlich auftreten.
- c) Wenn wir den Aufwand für die numerische Auswertung (Programmierungsarbeit und Bedarf an Rechenzeit) mit der Genauigkeit der zu erzielenden Ergebnisse vergleichen, kann die Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit nach dieser Methode nicht empfohlen werden.

VII. BERECHNUNG BEI TEILWEISER BERÜCKSICHTIGUNG DER FUNKTIONELLEN ABHÄNGIGKEIT DER WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN

VII.1 Allgemeines

Das hier zu erörternde Prinzip zur Berechnung der Verlust- und Blockierungswahrscheinlichkeit von Linksystemen stellt die funktionelle Abhängigkeit zwischen den Verteilungen der einzelnen Abschnitte des Systems *t e i l w e i s e* in Rechnung (vgl. Kapitel IV). Im einzelnen sind die hier behandelten Verfahren jedoch recht verschieden.

Bretschneider /42/ setzt im Gegensatz zu Kapitel VI die Beziehung für das "statistische Gleichgewicht" nicht auf dem Abnehmerbündel an, sondern auf dem Zwischenleitungsbündel einer zweistufigen Linkeinheit. Die in seinem Ansatz auftretende *S p e r r w a h r s c h e i n - l i c h k e i t* hängt vom Verkehr und von der auf dem betrachteten Abnehmerbündel vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung ab. Dadurch beeinflusst die Verteilung im Abnehmerbündel jene im Zwischenleitungsbündel; die Abhängigkeit in umgekehrter Richtung wird dadurch berücksichtigt, daß mit Hilfe eines Iterationsverfahrens die gleiche Summe der Verkehrswerte in den Zwischenleitungsbündeln einerseits und den Abnehmerbündeln andererseits erzwungen wird.

Im Gegensatz zu Bretschneider berechnet Martinez /45/ Systeme mit beliebig vielen Stufen, berücksichtigt dabei jedoch über die Sperrwahrscheinlichkeit nur die funktionelle Abhängigkeit zwischen den Verteilungen benachbarter Stufen in Richtung von der letzten zur ersten Stufe.

VII.2 Bretschneider, G.: Die Leistungsfähigkeit von zweistufigen Zwischenleitungsanordnungen (1961).

2.1 Übersicht

Bretschneider berechnet in seiner Arbeit die Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit von zweistufigen Linksystemen für Mischwahl¹⁾ bei unendlicher und endlicher Quellenzahl (Zufallsverkehr erster Art und Zufallsverkehr zweiter Art). Er gibt zwei Varianten für die Lösung an:

- a) Das "Belastungsverteilungs-Verfahren mit Erreichbarkeitsausgleich", das von einem vorgegebenen Angebot und einer geschätzten Erreichbarkeit für die zum Vergleich verwendete äquivalente einstufige Anordnung ausgeht.
- b) Das "Erreichbarkeits-Verfahren mit Belastungsausgleich", das von der vorgegebenen Belastung des Systems ausgeht.

2.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Es werden zweistufige Linksysteme für Mischwahl berechnet. Skizze des Systems und Bezeichnungen (Bild VII.1):

1) Er gibt weiterhin an, daß sich das Verfahren auch zur Berechnung von zweistufigen Systemen für Richtungswahl eignet, falls die Richtungsaufteilung nach der zweiten Stufe vollkommen symmetrisch ist (mehrere gleich große Abnehmerbündel mit jeweils gleichem Verkehrsangebot).

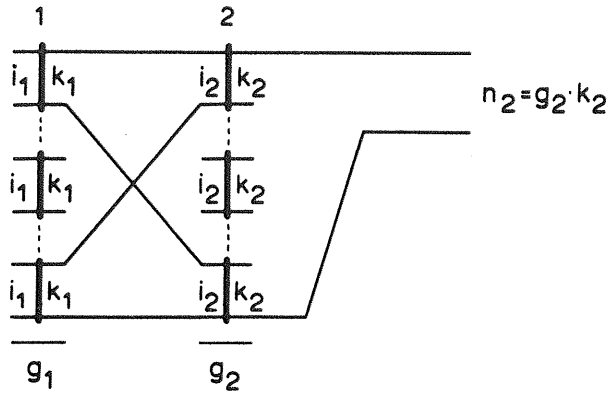


Bild VII.1

Zweistufiges Linksystem für Mischwahl

Strukturparameter

- $S = 2$
- $i_1 \geq k_1$
- $k_1 \leq g_2$
- $l_{12} = 1$
- $g_1 \cdot k_1 = g_2 \cdot i_2$ (keine Mischung zwischen Stufe 1 und 2)

Keine Mischung der Ausgänge einer Linkgruppe

Mischung der Ausgänge verschiedener Linkgruppen auf ein Abnehmerbündel ist möglich (vgl. Bild V.9).

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Verkehrsangebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1 oder ZV2
- Angebot an die Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt
- Gleichverteilung der Belastung auf alle Leitungen des Zwischenleitungsbündels bzw. des Abnehmerbündels; diese Forderung kann durch geeignete Absuchverfahren der Ausgänge der Koppelvielfache in der ersten Stufe in Verbindung mit einer geeigneten Vorschrift für die Führung der Zwischenleitungen von den Koppelvielfachen der Stufe 1 zu den Eingängen der Stufe 2 erreicht werden.

Gegebene Größen sind:

Erreichbarkeitsausgleich

Belastungsausgleich

- Strukturparameter
- Angebot A je Koppelvielfach der Stufe 1 im Fall unendlicher Quellenzahl (ZV1), Anrufdichte α_1 je freie Quelle bei endlicher Quellenzahl (ZV2)
- Schätzwert \tilde{k} für die Erreichbarkeit (etwa mittlere Erreichbarkeit)
- Belastung Y auf den n_2 Ausgängen
- Wahl einer Ausgleichserreichbarkeit.

Gesuchte Größen sind:

- Blockierungswahrscheinlichkeit E
- Verlustwahrscheinlichkeit B .

2.3 Entwicklung des Verfahrens

2.3.1 Belastungsverteilung-Verfahren mit Erreichbarkeitsausgleich

Annahme: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Abnehmerbündel sei dieselbe wie hinter einer einstufigen Koppelanordnung mit einer idealen Erlang-Mischung (EIF-Verteilung). Die Erreichbarkeit k dieser einstufigen Anordnung wird für die Rechnung iterativ so festgelegt, daß sich bei gleichem Angebot und gleicher Anzahl von Abnehmerleitungen dieselbe Verlust-

wahrscheinlichkeit ergibt wie für das betrachtete zweistufige System. Der so erhaltene k-Wert wird als die effektive Erreichbarkeit k_{eff} des Zwischenleitungssystems bezeichnet. Diese Erreichbarkeit k_{eff} kann erst aus der gesuchten Verlustwahrscheinlichkeit bestimmt werden. Deshalb ist ein Iterationsverfahren erforderlich. Es beginnt mit einer geschätzten Erreichbarkeit k als Anfangswert.

Wir betrachten eine Zwischenleitungseinheit des Systems (Bild VII.2):

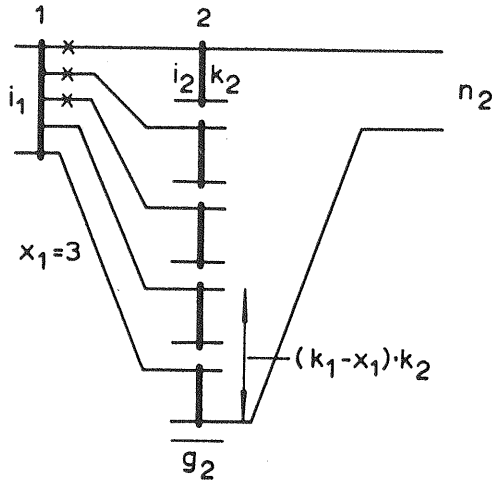


Bild VII.2
Zwischenleitungseinheit

Für das Zwischenleitungsbündel der betrachteten Linkeinheit lautet die Gleichung für das "statistische Gleichgewicht":

$$[x_1] \cdot x_1 = A \cdot [x_1 - 1] \cdot (1 - \sigma(x_1 - 1)) \quad (1a)$$

$$[x_1] \cdot x_1 = \alpha_1 \cdot (i_1 - (x_1 - 1)) \cdot [x_1 - 1] \cdot (1 - \sigma(x_1 - 1)) \quad (1b)$$

mit $\sum_{x_1=0}^T = 1$ $T = k_1$ für $i_1 \geq k_1$
 $T = i_1$ für $i_1 < k_1$

Sind x_1 Zwischenleitungen belegt, dann geht ein Ruf dann und nur dann verloren, wenn mindestens jene über die $(k_1 - x_1)$ freien Zwischenleitungen erreichbaren $(k_1 - x_1) \cdot k_2$ Abnehmerleitungen anderweitig belegt sind (siehe Bild VII.2). Die Wahrscheinlichkeit dafür, d.h. die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_1)$, ist eine Funktion der auf dem Abnehmerbündel angenommenen Verteilung $[x_2]$ vom Typ EIF, des Schätzwertes \tilde{k} für die Erreichbarkeit und der Anzahl x_1 von momentan belegten Zwischenleitungen.

$$\sigma(x_1) = f(x_1, \tilde{k}, [x_2]) \quad (2)$$

Die EIF-Verteilung auf dem Abnehmerbündel lautet:

$$[x_2] = \frac{\frac{A_2}{x_2!} \cdot \prod_{z=0}^{x_2-1} (1 - \sigma(z))}{1 + \sum_{v=1}^{n_2} \frac{A_2^v}{v!} \cdot \prod_{z=0}^{v-1} (1 - \sigma(z))} \quad ; \quad A_2 = g_1 \cdot A_1 \quad (3a)$$

mit
$$G(z) = \frac{\binom{z}{\bar{k}}}{\binom{n_2}{\bar{k}}} \quad (3b)$$

Damit ergibt sich für die Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_1)$ (vgl. Gleichung (2)):

$$G(x_1) = \sum_{x_2=(k_1-x_1) \cdot k_2}^{n_2} [x_2] \cdot G(x_2, (k_1-x_1) \cdot k_2) \quad (4a)$$

mit
$$G(x_2, (k_1-x_1) \cdot k_2) = \frac{\binom{x_2}{(k_1-x_1) \cdot k_2}}{\binom{n_2}{(k_1-x_1) \cdot k_2}} \quad (4b)$$

Da die Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_1)$ nun bekannt ist, können wir aus Gleichung (1a,b) die Wahrscheinlichkeitsverteilung $[x_1]$ berechnen. Damit erhalten wir für die Blockierungswahrscheinlichkeit E:

$$E = \sum_{x_1=0}^T [x_1] \cdot G(x_1) \quad (5)$$

Für die Verlustwahrscheinlichkeit B ergibt sich:

$$B = E \quad \text{für ZV1}$$

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^T (i_1 - x_1) \cdot [x_1] \cdot G(x_1)}{\sum_{x_1=0}^T (i_1 - x_1) \cdot [x_1]} \quad \text{für ZV2} \quad (6)$$

$$T = k_1 \quad \text{für } i_1 \geq k_1$$

$$T = i_1 \quad \text{für } i_1 < k_1$$

Laut Annahme soll die Verlustwahrscheinlichkeit B des Linksystems gleich der Verlustwahrscheinlichkeit B_E einer ideal gemischten einstufigen Koppelanordnung gleichen Wertetripels $(n_2, Y, k=k_{eff})$ sein. Da die Rechnung von dem Schätzwert \bar{k} für die effektive Erreichbarkeit k_{eff} ausgeht, muß \bar{k} durch Iteration so lange verbessert werden, bis eine vorgeschriebene Genauigkeit

$$|B - B_E| < \varepsilon \quad (7)$$

erfüllt ist. Die Verlustwahrscheinlichkeit B_E ergibt aus den Gleichungen (3a,b) zu:

$$B_E = \sum_{x_2=\tilde{k}}^{n_2} [x_2] \cdot \sigma(x_2) \quad \text{mit} \quad \sigma(x_2) = \frac{\binom{x_2}{\tilde{k}}}{\binom{n_2}{\tilde{k}}} \quad (8)$$

2.3.2 Erreichbarkeits-Verfahren mit Belastungsausgleich

a) Gegeben ist die Belastung Y des Abnehmerbündels mit n_2 Leitungen. Als Verteilungstyp wird auf dem Abnehmerbündel jener einer "idealen Erlangmischung" angenommen (EIF-Verteilung), und für die Erreichbarkeit dieser Mischung wird einer der nachstehenden drei Näherungswerte verwendet

$$k^{(1)} = k_1 \cdot k_2 \quad (9a)$$

$$k^{(2)} = (k_1 - Y_1) \cdot k_2 \quad (9b)$$

$$k^{(3)} = (k_1 - Y_1) \cdot k_2 + Y_1 \quad (9c)$$

Es wird bei Bretschneider keine Angabe darüber gemacht, welche der drei Näherungen die genauesten Ergebnisse liefert (vgl. Abschnitt 2.5 Beispiele).

Somit ist nach den Gleichungen (3a,b):

$$[x_2] = \frac{\frac{A_2^{x_2}}{x_2!} \cdot \prod_{z=0}^{x_2-1} (1 - \sigma(z))}{1 + \sum_{v=1}^{n_2} \frac{A_2^v}{v!} \cdot \prod_{z=0}^{v-1} (1 - \sigma(z))} \quad (10a)$$

mit
$$\sigma(z) = \frac{\binom{z}{k}}{\binom{n_2}{k}} \quad k \text{ nach den Gleichungen (9a, b, c).} \quad (10b)$$

Der Angebotswert A_2 in Gleichung (10a) ist iterativ so zu bestimmen, daß folgende Beziehung erfüllt wird:

$$\left| Y - \sum_{x_2=1}^{n_2} x_2 \cdot [x_2] \right| < \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon \text{ vorgeschrieben} \quad (11)$$

Der Wert A_2 stellt nicht das tatsächliche Angebot an das Linksystem dar, sondern ist lediglich als Rechenwert zur Erzeugung von $[x_2]$ unter Beachtung von Gleichung (11) zu verstehen (vgl./10,11/, /32/).

b) Im nächsten Schritt muß die Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_1)$ berechnet werden. Wenn x_1 Zwischenleitungen belegt sind, können $(k_1 - x_1) \cdot k_2$ Abnehmerleitungen auf frei oder besetzt geprüft werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein in diesem Belegungszustand $\{x_1\}$ eintreffender Anruf verloren geht - Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_1)$ - sei gleich der Wahrscheinlichkeit, daß in einer idealen Erlangmischung mit derselben Leitungszahl n_2 und der konstant gedachten Erreichbarkeit $k_E = (k_1 - x_1) \cdot k_2$ ein einfallender Ruf nicht vermittelt werden kann. Es gilt:

$$\sigma(x_1) = f(A_2, n_2, k_E) \quad (12)$$

Gemäß den Gleichungen (4a,b) ergibt sich:

$$\sigma(x_1) = \sum_{x_2=k_E}^{n_2} [x_2] \cdot \frac{\binom{x_2}{k_E}}{\binom{n_2}{k_E}} \quad (13)$$

mit $k_E = (k_1 - x_1) \cdot k_2$ und $[x_2]$ nach den Gleichungen (10a,b).

Nachdem $\sigma(x_1)$ bekannt ist, kann mit Hilfe des Angebots A an die betrachtete Zwischenleistungseinheit bzw. mit Hilfe der Anrufrichte α_1 je freie Verkehrsquelle die Verteilung $[x_1]$ nach den Gleichungen (1a,b) berechnet werden. Dabei ist A bzw. α_1 iterativ so zu bestimmen, daß folgende Beziehung erfüllt ist:

$$\left| Y_1 - \sum_{x_1=0}^T x_1 \cdot [x_1] \right| < \varepsilon \quad \begin{array}{l} \varepsilon \text{ vorgegeben} \\ Y_1 \text{ vorgegeben} \end{array} \quad (14)$$

Damit erhalten wir für die Blockierungswahrscheinlichkeit E:

$$E = \sum_{x_1=0}^T [x_1] \cdot \sigma(x_1) \quad (15)$$

Für die Verlustwahrscheinlichkeit B ergibt sich:

$$B = \varepsilon \quad \text{für ZV1}$$

$$B = \frac{\sum_{x_1=0}^T (i_1 - x_1) \cdot [x_1] \cdot \sigma(x_1)}{\sum_{x_1=0}^T (i_1 - x_1) \cdot [x_1]} \quad \text{für ZV2} \quad (16)$$

$$T = k_1 \quad \text{für } i_1 \geq k_1$$

$$T = i_1 \quad \text{für } i_1 < k_1$$

Bemerkung: Für Zufallsverkehr zweiter Art (ZV2) berücksichtigt Bretschneider - wie bereits in Gleichung (6) - die belegungsabhängige Anrufrichte in der ersten Stufe. Im Abnehmerbündel dagegen wird die EIF-Verteilung als Näherung beibehalten.

2.4 Verbesserung des Belastungsverteilungs-Verfahrens mit Erreichbarkeitsausgleich bei Zufallsverkehr zweiter Art

Wie bereits in Abschnitt 2.3.2 zu Gleichung (16) ausgeführt wurde, setzt Bretschneider auch bei angebotenenem Zufallsverkehr zweiter Art (ZV2) eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vom EIF-Typ (vgl. Gleichung (3a)) auf den n_2 Abnehmerleitungen an, d.h. eine Verteilung, der eine konstante Anrufrichte zugrunde liegt. Bei Zufallsverkehr zweiter Art ist jedoch die Anrufrichte vom momentanen Belegungszustand des Linksystems abhängig. Daher kann man bei Anwendung dieses Verteilungstyps nur dann ausreichend wirklichkeitstreue Ergebnisse erwarten, wenn die Gesamtzahl an Verkehrsquellen groß ist im Vergleich zur Anzahl der Abnehmerleitungen hinter Stufe 2.

Eine Verbesserung des Verfahrens ist dadurch möglich, daß anstelle der Verteilung vom EIF-Typ die entsprechende Verteilung für ZV2 angesetzt wird /64/. Statt Gleichung (3a), Abschnitt 2.3.1, gilt:

$$[x_2] = \frac{\binom{Q}{x_2} \cdot \alpha_{02}^{x_2} \cdot \prod_{z=0}^{x_2-1} (1-\sigma(z))}{1 + \sum_{v=1}^{n_2} \binom{Q}{v} \cdot \alpha_{02}^v \cdot \prod_{z=0}^{v-1} (1-\sigma(z))} ; Q = i_1 \cdot g_1 \quad (17a)$$

$$\sigma(z) = \frac{\binom{z}{\tilde{k}}}{\binom{n_2}{\tilde{k}}} \quad (17b)$$

Da in diesem Fall die Gesamtbelastung Y vorgegeben wird, ist α_{02} so zu bestimmen, daß die Beziehung

$$\left| Y - \sum_{x_2=1}^{n_2} x_2 \cdot [x_2] \right| < \varepsilon \quad (18)$$

erfüllt ist.

Die übrigen Gleichungen in Abschnitt 2.3.1 bleiben unverändert.

2.5 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir die berechneten Verluste von zwei Linksystemen, je nach dem "Belastungsverteilungs-Verfahren mit Erreichbarkeitsausgleich" und nach dem "Erreichbarkeits-Verfahren mit Belastungsausgleich", mit den Ergebnissen von Verkehrstests vergleichen. Die nachstehende Tabelle gibt eine Übersicht.

System Anhang A	Diagramm Anhang B	Kurve Nr.	Erklärung	Test
L2024	VII.1	1	Erreichbarkeitsausgleich	ZV1
		2a	Belastungsausgleich $k^{(1)} = k_1 \cdot k_2$	
		2b	Belastungsausgleich $k^{(2)} = (k_1 - Y_1) \cdot k_2$	
		2c	Belastungsausgleich $k^{(3)} = (k_1 - Y_1) \cdot k_2 + Y_1$	
		3	Exakte Berechnung nach III.2	
MpI9a	VII.2	1	Erreichbarkeitsausgleich	ZV1
		2a	Belastungsausgleich $k^{(1)} = k_1 \cdot k_2$	
		2b	Belastungsausgleich $k^{(2)} = (k_1 - Y_1) \cdot k_2$	
		2c	Belastungsausgleich $k^{(3)} = (k_1 - Y_1) \cdot k_2 + Y_1$	
MpI9a	VII.3	—	Erreichbarkeitsausgleich $Q = i_1 = 5$ Quellen je Koppelvielfach in Stufe 1; nach Abschnitt 2.4	ZV2

2.6 Kritische Betrachtung des Verfahrens

Der Vergleich von Rechenwerten mit Testergebnissen zeigt, daß im gesamten Verlustbereich die Rechenergebnisse brauchbare Näherungen darstellen. Bei größeren Verlusten liefert das Belastungsverteilungs-Verfahren mit Erreichbarkeitsausgleich bessere Resultate als das Erreichbarkeits-Verfahren mit Belastungsausgleich (vgl. Diagramm VII.2, Anhang B, Kurven 1, 2a-c). Im einzelnen ist zu bemerken:

2.6.1 Belastungsverteilungs-Verfahren mit Erreichbarkeitsausgleich

- a) Die Abhängigkeit der Verteilung im Zwischenleitungsbündel von der Verteilung im Abnehmerbündel wird über die Sperrwahrscheinlichkeit $G(x_1)$ berücksichtigt. Diese Sperrwahrscheinlichkeit wird genau wie bei einer idealen Erlangmischung ermittelt (vgl. die Gleichungen (4a,b)). Dies ist selbstverständlich eine Näherungsannahme. Da auf das Endresultat auch die anderen Annahmen des Verfahrens (EIF-Verteilung, Iteration des k-Werts) einen Einfluß haben, kann über die Auswirkung der einzelnen Näherungen nichts gesagt werden.
- b) Die Beeinflussung der Verteilung im Abnehmerbündel durch die Verteilung im Zwischenleitungsbündel der betrachteten Linkeinheit erfolgt über die iterativ bestimmte effektive Erreichbarkeit. Die Erreichbarkeit der einstufigen Vergleichsanordnung wird (ausgehend von einem Rohwert \tilde{k}) iterativ so lange geändert, bis die Verluste des tatsächlichen zweistufigen Systems und der einstufigen Anordnung gleich sind.

Diese Art, die funktionelle Abhängigkeit zu erfassen, kann natürlich nicht so genau sein (nur die effektive Erreichbarkeit bewirkt die Kopplung), wie wenn die Verteilung

im Zwischenleitungsbündel direkt in die Verteilung auf dem Abnehmerbündel einginge (vgl. Kapitel IV).

- c) Der Vergleich von Linksystemen mit einstufigen Ersatzkoppelanordnungen ist immer schwierig, da die Verteilungsfunktion $[x_2]$ und damit der Verlust B auch für die einstufige Vergleichsanordnung eine Näherung darstellt (z.B. durch Annahme einer "idealen Mischung" usw.).
- d) Wie auch bei anderen Näherungsverfahren wird der Rechnung nur e i n e Linkeinheit zugrunde gelegt. Es wird deshalb die Abhängigkeit zwischen den Verteilungen auf den Zwischenleitungsbündeln der einzelnen Linkeinheiten nicht berücksichtigt.

2.6.2 Erreichbarkeitsverfahren mit Belastungsausgleich

a) Bemerkung a) in Abschnitt 2.6.1 gilt auch hier.

b) Für die einstufige Vergleichsanordnung muß zur iterativen Bestimmung des Angebotwertes A_2 (vgl. Gleichung (10a)) eine der drei "Ausgleichserreichbarkeiten" aus

$$k^{(1)} = k_1 \cdot k_2, \text{ oder}$$

$$k^{(2)} = (k_1 - Y_1) \cdot k_2, \text{ oder}$$

$$k^{(3)} = (k_1 - Y_1) \cdot k_2 + Y_1 \text{ gewählt werden.}$$

Zahlenwerte dieser drei Näherungen können je nach der Belastung Y_1 sehr unterschiedlich ausfallen.

- c) Wie beim Erreichbarkeitsausgleich wird auf dem Abnehmerbündel eine EIF-Verteilung angenommen.
- d) Die Beeinflussung der Verteilung im Abnehmerbündel durch den Verkehr im Zwischenleitungsbündel erfolgt hier nicht über die effektive Erreichbarkeit, sondern über die Momentanerreichbarkeit: Die in der EIF-Verteilung verwendete konstante Erreichbarkeit wird gleich gesetzt der momentanen Erreichbarkeit $(k_1 - x_1) \cdot k_2$ im Belegungszustand $\{x_1\}$ des Linksystems.
- e) Punkt d) in Abschnitt 2.6.1 gilt hier auch.

Bei endlicher Quellenzahl (Zufallsverkehr 2. Art) verwendet Bretschneider bei beiden Verfahren genau wie bei unendlicher Quellenzahl (Zufallsverkehr 1. Art) auf dem Abnehmerbündel eine EIF-Verteilung unter der Voraussetzung, daß die Gesamtzahl der Verkehrsquellen in Stufe 1 groß ist im Vergleich zur Anzahl n_2 der Abnehmerleitungen hinter der zweiten Stufe. Die Einschränkung ist nicht zwingend. Zur Verbesserung des Verfahrens für Zufallsverkehr zweiter Art kann vielmehr die der EIF-Verteilung entsprechende Herleitung für endliche Quellenzahl eingeführt werden (vgl. Abschnitt 2.4). Die damit erzielten Ergebnisse sind im gesamten Verlustbereich (vgl. Diagramm VII.3, Anhang B) mit den Testwerten in guter Übereinstimmung.

VII.3 Martinez, R.: Probabilité de perte en sélection conjuguee sur un nombre quelconque d'etages (1961).

3.1 Übersicht

Martinez behandelt den Punktverlust in Linksystemen mit beliebiger Stufenzahl. Im Gegensatz zu C.Y. Lee /16/, Le Gall /19/, /24/, /31/, van Bosse /52/, Bininda/Daisenberger/Didlaukis/58/, Bininda/Daisenberger /59/ und L.Lee/Brzozowski /61/ verwendet er nicht die Graphendarstellung zur Beschreibung des Wegenetzes (vgl. Kapitel IV und V).

Auf den Ausgängen der Koppelvielfache in den Stufen Nr. 1 bis (S-2) werden Rekursionsformeln für das statistische Gleichgewicht angesetzt. Die Rechnung beginnt mit der vorletzten Stufe Nr. (S-1) und geht schrittweise zurück bis zur ersten Stufe, wobei jeweils die Verteilung in der zuvor berechneten Stufe mit jener der betrachteten Stufe über die Sperrwahrscheinlichkeit funktionell verknüpft wird.

Dabei verwendet Martinez die zusätzliche Näherungsannahme "Angebot A gleich Belastung Y". (Eine Verbesserung des Verfahrens ist in diesem Punkt leicht möglich, siehe Abschnitt 3.5.1).

Für die gesuchte Blockierungswahrscheinlichkeit der betrachteten Ausgangsgruppe ergibt sich eine Rekursionsformel, welche mit einer DVA einfach auswertbar ist.

3.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Mit dem Berechnungsverfahren von Martinez kann der Punktverlust von Systemen beliebiger Stufenzahl S ermittelt werden (die Anwendung des Verfahrens zur Berechnung des Bündelverlustes wird in Abschnitt 3.5.5 erläutert). Eine Skizze der Anordnung zeigt Bild VII.3.

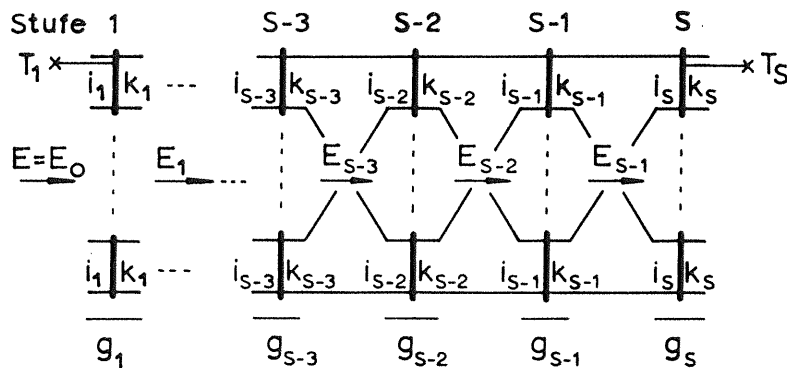


Bild VII.3 S-stufiges Linksystem

Strukturparameter

$S \geq 3$ (bei Berechnung des Bündelverlusts auch $S = 2$)

$i_j \geq k_j$; $j = 1, 2, \dots, S$

$l_{j,j+1} = 1$; $j = 1, 2, \dots, S-1$

$i_{j+1} \cdot g_{j+1} = k_j \cdot g_j$; $j = 1, 2, \dots, S-1$ (keine Mischungen zwischen den Stufen).

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Angebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV2 (eine Erweiterung für angebotenen Zufallsverkehr erster Art wird in Abschnitt 3.5.3 hergeleitet)
- Angebot auf alle Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt

- Gleichmäßige Verteilung der Verkehrsbelastung über alle Leitungen eines Zwischenleitungsbündels (nicht notwendig gleiche Belastung pro Leitung in verschiedenen Zwischenleitungsbündeln)
- Näherungsannahme: Angebot A = Belastung Y (in Abschnitt 3.5 wird gezeigt, daß auf diese Näherung verzichtet werden kann).

- Gegebene Größen sind :
- Strukturparameter des Linksystems
 - Anrufrichte α_1 je freie Quelle und Belastung P_{E1} je Zubringerleitung (beim verbesserten Verfahren ist nur P_{E1} gegeben).
- Gesuchte Größen sind:
- Blockierungswahrscheinlichkeit von Abnehmerbündeln mit $n \geq 1$ Leitungen
 - Desgleichen Verlustwahrscheinlichkeit (hier ergänzt, bei Martinez nicht behandelt).

3.3 Entwicklung des Verfahrens

3.3.1 Grundgedanke

Wir betrachten einen freien Ausgang eines Koppelvielfachs in Stufe j und fragen nach der Wahrscheinlichkeit E_j , daß eine bestimmte Abnehmerleitung T_S hinter der letzten Stufe nicht erreicht werden kann, weil ein freier Weg über Zwischenleitungen nach dort nicht verfügbar ist. Diese Wahrscheinlichkeit wird nacheinander für $j = S-1, S-2, \dots, 2, 1$ bestimmt. Es bedeuten (vgl. Bild VII.3):

- E_{S-1} : Wahrscheinlichkeit, daß Ausgang T_S von einem beliebig herausgegriffenen freien Ausgang eines Koppelvielfachs der Stufe (S-1) nicht erreicht wird.
- E_j : Wahrscheinlichkeit, daß Ausgang T_S von einem freien Ausgang eines Koppelvielfachs der Stufe j nicht erreicht wird.

Die gesuchte Blockierungswahrscheinlichkeit von einem Eingang der ersten Stufe zu einem Ausgang T_S der Stufe S ist gleich der Wahrscheinlichkeit E_0 . Der Zustand "frei" oder "belegt" des betrachteten Ausgangs geht nicht in die Rechnung ein. Es bedeutet E_0 deshalb die Wahrscheinlichkeit der "inneren Blockierung" zwischen Eingängen der Stufe 1 und Koppelvielfachen der Stufe S.

E_{S-1} und E_{S-2} können unmittelbar berechnet werden. Die anderen Werte E_{S-3}, \dots, E_0 werden mit einer Rekursionsformel bestimmt.

3.3.2 Herleitung der Rekursionsformel

a) Berechnung von E_{S-1}

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine freie Zwischenleitung von Stufe (S-1) nach Stufe S in jenes Koppelvielfach der Stufe S führt, an das der betrachtete Ausgang T_S angeschlossen ist, beträgt $1/g_S$. Somit gilt:

$$E_{S-1} = 1 - \frac{1}{g_S} = \frac{g_S - 1}{g_S} \quad (1)$$

b) Berechnung von E_{S-2}

E_{S-2} ist die Wahrscheinlichkeit, daß von einem beliebigen freien Ausgang eines Koppelvielfachs der Stufe (S-2) das gewünschte Zielkoppelvielfach in Stufe S nicht erreicht werden kann (desgleichen von einem freien Eingang eines Koppelvielfachs in Stufe (S-1)). Ein freier Eingang in Stufe (S-1) hat im Mittel $(k_{S-1} - Y_{S-1})$ freie Ausgänge zur Verfügung. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit, das Zielkoppelvielfach von einem Eingang der

Stufe (S-1) aus zu erreichen

$$D_{S-2} = \frac{1}{g_S} \cdot (k_{S-1} - Y_{S-1}) \quad (2)$$

Folglich erhalten wir für E_{S-2} :

$$\begin{aligned} E_{S-2} &= 1 - D_{S-2} \\ E_{S-2} &= 1 - \frac{1}{g_S} \cdot (k_{S-1} - Y_{S-1}) \\ E_{S-2} &= 1 - (1 - E_{S-1}) \cdot (k_{S-1} - Y_{S-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

c) Berechnung von E_{S-3}

E_{S-3} ist die Wahrscheinlichkeit, daß von einem beliebigen freien Ausgang eines Koppelvielfachs der Stufe (S-3) das gewünschte Zielkoppelvielfach in Stufe S nicht erreicht werden kann (desgleichen von einem freien Eingang eines Koppelvielfachs in Stufe (S-2)). Von den Ausgängen der Stufe (S-3) - und ebenso (S-4) usw. - sind jeweils mehrere freie Wege zum Zielkoppelvielfach der Stufe S denkbar. Aus diesem Grund berücksichtigt das Verfahren jetzt die Verteilungen auf den Ausgängen der Koppelvielfache in den Stufen (S-2), (S-3), ..., 1. Ansatz:

Momentan seien x der insgesamt k_{S-2} Ausgänge des betrachteten Koppelvielfachs der Stufe (S-2) belegt und damit $(k_{S-2} - x)$ Ausgänge frei. Die Wahrscheinlichkeit, das Zielkoppelvielfach von einem dieser freien Ausgänge nicht zu erreichen, ist E_{S-2} (vgl. den vorhergehenden Abschnitt b)). Somit gilt für die Sperrwahrscheinlichkeit $G(x)_{S-2}$, d.h. für die Wahrscheinlichkeit, daß über keinen der $(k_{S-2} - x)$ freien Ausgänge das Zielkoppelvielfach erreicht wird:

$$G(x)_{S-2} = E_{S-2}^{k_{S-2} - x} \quad (4)$$

Die Wahrscheinlichkeit für den Zustand "x Ausgänge eines Koppelvielfachs in Stufe (S-2) sind belegt" werde mit $[x]_{S-2}$ bezeichnet. Somit erhalten wir als Wahrscheinlichkeit für die Blockierung der Wege zum Zielkoppelvielfach in Stufe S von einem freien Ausgang der Stufe (S-3):

$$E_{S-3} = \sum_{x=0}^{k_{S-2}} [x]_{S-2} \cdot G(x)_{S-2} \quad (5)$$

Bemerkung: Für den Sonderfall $k_{S-1} = g_S$ folgt aus Gleichung (3):

$$\begin{aligned} E_{S-2} &= 1 - \frac{1}{g_S} \cdot (k_{S-1} - Y_{S-1}) = 1 - (1 - \frac{Y_{S-1}}{g_S}) \\ E_{S-2} &= P_{A,S-1} \end{aligned}$$

Nunmehr ergibt sich aus Gleichung (5) mit Hilfe von Gleichung (4):

$$E_{S-3} = \sum_{x=0}^{k_{S-2}} [x]_{S-2} \cdot P_{A,S-1}^{k_{S-2} - x}$$

Daraus folgt zwingend, daß auf dem Zwischenleitungsbündel von Stufe (S-1) nach Stufe S eine Bernoulli-Verteilung angenommen wird (Da Martinez eine andere und umständlichere Herleitung wählt, kommt dieser Sachverhalt bei ihm nicht klar zum Ausdruck).

Die Zustandswahrscheinlichkeiten $[x]_{S-2}$ werden aus der bekannten Rekursionsformel des "statistischen Gleichgewichts" berechnet. Dazu wird noch folgende Bezeichnung eingeführt:

α_{S-2} : Anrufrichte eines freien Eingangs eines Koppelvielfachs in Stufe (S-2).

Die Anrufrichte α_{S-2} wird aus der vorgegebenen Anrufrichte α_1 je freie Quelle in Stufe 1 und aus der (wegen $A = Y$) ebenfalls vorgebbaren Belastung P_{E1} je Zubringerleitung wie folgt näherungsweise berechnet:

Der Erwartungswert der pauschalen Anrufrichte aus

$g_1 \cdot i_1 \cdot (1 - P_{E1})$ im Mittel freien Zubringerleitungen ist : $g_1 \cdot i_1 \cdot (1 - P_{E1}) \cdot \alpha_1$

Die mittlere Anzahl freier Zwischenleitungen von einem

Koppelvielfach in Stufe (S-3) nach Stufe (S-2) beträgt : $g_{S-3} \cdot k_{S-3} \cdot (1 - P_{A,S-3})$

Die mittlere Anrufrichte α_{S-2} des an Stufe (S-2) angebotenen Verkehrs wird im Vergleich zu α_1 um einen Faktor C höher sein, welcher die Verkehrskonzentration zwischen Eingängen der Stufe 1 und Ausgängen der Stufe (S-3) in Rechnung stellt. Deshalb

$$C = \frac{g_1 \cdot i_1 \cdot (1 - P_{E1})}{g_{S-3} \cdot k_{S-3} \cdot (1 - P_{A,S-3})}$$

Für die gesamte Anrufrichte aus $(i_{S-2} - x)$ momentan freien Eingängen in das betrachtete Koppelvielfach der Stufe (S-2) gilt daher:

$$(i_{S-2} - x) \cdot \alpha_{S-2} = (i_{S-2} - x) \cdot \frac{g_1 \cdot i_1 \cdot (1 - P_{E1})}{g_{S-3} \cdot k_{S-3} \cdot (1 - P_{A,S-3})} \cdot \alpha_1$$

$$\text{oder} \quad \alpha_{S-2} = \frac{g_1 \cdot i_1 \cdot (1 - P_{E1})}{g_{S-3} \cdot k_{S-3} \cdot (1 - P_{A,S-3})} \cdot \alpha_1 \quad (6)$$

Die Rekursionsformel des "statistischen Gleichgewichts" auf den k_{S-2} Ausgängen eines Koppelvielfachs der Stufe (S-2) lautet nunmehr:

$$[x]_{S-2} = \alpha_{S-2} \cdot h \cdot (i_{S-2} - (x-1)) \cdot [x-1]_{S-2} \cdot (1 - \sigma(x-1)_{S-2})$$

Daraus folgt mit

$$\sum_{x=0}^{k_{S-2}} [x]_{S-2} = 1$$

$$[x]_{S-2} = \frac{\binom{i_{S-2}}{x} \cdot (\alpha_{S-2} \cdot h)^x \cdot \prod_{z=0}^{x-1} (1 - \sigma(z)_{S-2})}{1 + \sum_{v=1}^{k_{S-2}} \binom{i_{S-2}}{v} \cdot (\alpha_{S-2} \cdot h)^v \cdot \prod_{z=0}^{v-1} (1 - \sigma(z)_{S-2})} \quad (7)$$

d) Verallgemeinerung

Die in c) hergeleiteten Beziehungen können sinngemäß verallgemeinert werden für die weiteren Stufen.

Entsprechend Gleichung (4) gilt:

$$\sigma(x)_j = E_j^{k_j - x} \quad ; \quad j = S-2, S-3, \dots, 1 \quad (8)$$

Entsprechend Gleichung (5) gilt:

$$E_{j-1} = \sum_{x=0}^{k_j} [x]_j \cdot \sigma(x)_j \quad ; \quad j = S-2, S-3, \dots, 1 \quad (9)$$

Weiterhin erhält man entsprechend Gleichung (7):

$$[x]_j = \frac{\binom{k_j}{x} \cdot (\alpha_j \cdot h)^x \cdot \prod_{z=0}^{x-1} (1 - \sigma(z)_j)}{1 + \sum_{v=1}^{k_j} \binom{k_j}{v} \cdot (\alpha_j \cdot h)^v \cdot \prod_{z=0}^{v-1} (1 - \sigma(z)_j)} \quad ; \quad j = S-2, S-3, \dots, 1 \quad (10)$$

Ferner gilt nach Gleichung (6)

$$\alpha_j = \frac{g_j \cdot i_1 \cdot (1 - P_{E1})}{g_{j-1} \cdot k_{j-1} \cdot (1 - P_{A,j-1})} \alpha_1 \quad ; \quad j = S-2, S-3, \dots, 2 \quad (11)$$

mit

$$P_{A,j-1} = \frac{g_j \cdot i_1 \cdot P_{E1}}{g_{j-1} \cdot k_{j-1}} = \frac{Y_{\text{gesamt}}}{g_{j-1} \cdot k_{j-1}} \quad ; \quad j = S-2, S-3, \dots, 2 \quad (12)$$

Anmerkung:

Bei Martinez lautet Gleichung (11) (bzw. Gleichung (6)) wie folgt:

$$\alpha_j = \frac{g_j \cdot i_1}{g_{j-1} \cdot k_{j-1} \cdot (1 - P_{A,j-1})} \alpha_1 \quad ; \quad j = S-2, S-3, \dots, 2$$

Offenbar ist dem Verfasser hier ein Fehler unterlaufen.

3.3.3 Zusammenfassende Darstellung des Rechenganges

Zur Berechnung der gesuchten Blockierungswahrscheinlichkeit E sind nacheinander folgende Rechenschritte durchzuführen:

- Berechnung von E_{S-1} nach Gleichung (1)
- Berechnung von E_{S-2} nach Gleichung (3)
- Berechnung von $\sigma(x)_j$ ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) nach Gleichung (8)

- Berechnung von $[x]_j$ ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) nach den Gleichungen (10), (11) und (12)
- Berechnung von E_{j-1} ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) nach Gleichung (9).
 E_0 ist die gesuchte Blockierungswahrscheinlichkeit für Anrufe am Eingang der Stufe 1 bezüglich eines bestimmten Zielkoppelvielfachs der (letzten) Stufe S.

Die Formeln sind gut geeignet zur Auswertung auf einer DVA.

3.4 Kritische Betrachtung des Verfahrens

- a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen $[x]_j$ ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) werden mit Hilfe einer Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)_j$ ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) berechnet. Diese ist ihrerseits eine Funktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung $[x]_{j+1}$ der nachfolgenden Stufe Nr. (j+1) (vgl. die Gleichungen (3) - (10)). Die Abhängigkeit der Verteilungen in umgekehrter Richtung wird nicht erfaßt.
- b) Als weitere Näherungsannahme ist die statistische Unabhängigkeit der Belegungszustände in aufeinanderfolgenden Abschnitten des Systems angenommen.
- c) Für die numerische Auswertung müssen die Anrufrichte α_1 je freie Verkehrsquelle und die Belastung P_{E1} je Zubringerleitung vorgegeben werden. Dies impliziert, daß Martinez die zusätzliche Näherungsannahme Angebot = Belastung verwendet, die nur im Bereich sehr kleiner Verlustwerte erlaubt ist.

Deswegen und da außerdem bei Martinez in der allgemeinen Gleichung (11) ein Fehler enthalten ist, werden Berechnungsbeispiele nur zu dem im folgenden hergeleiteten, verbesserten Verfahren angegeben.

3.5 Verbesserung des Verfahrens

3.5.1 Verbesserung des Verfahrens von Martinez durch $A \neq Y$

Wenn wir nur von der Belastung P_{E1} je Zubringerleitung ausgehen und nicht zusätzlich die Anrufrichte α_1 je freie Quelle vorschreiben, können die zugehörige Anrufrichte α_1 und analog die Anrufrichten α_j ($j = S-2, S-3, \dots, 2$) iterativ bestimmt werden. Dadurch wird die Genauigkeit für größere Werte der Blockierungswahrscheinlichkeit E erhöht (vgl. Kapitel V, Abschnitte 2.14 - 2.15). Wir erhalten dann folgenden Rechnungsgang:

- Berechnung von E_{S-1} nach Gleichung (1) (unverändert)
- Berechnung von E_{S-2} nach Gleichung (3) (unverändert)
- Berechnung von $\sigma(x)_j$ ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) nach Gleichung (8) (unverändert)
- Berechnung der Verteilungen $[x]_j$ ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) nach Gleichung (10). Dabei wird für $(\alpha_j \cdot h)$ zunächst ein Rohwert $Y_j / (1_j - Y_j)$ mit $Y_j = g_1 \cdot i_1 \cdot P_{E1} / g_j$ angenommen. Aus der damit ermittelten Verteilung berechnen wir die Belastung

$$\tilde{Y}_j = \sum_{x=1}^{k_j} x \cdot [x]_j$$

Die Größe α_j wird durch Iteration so lange verbessert, bis

$$|\tilde{Y}_j - Y_j| < \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon \text{ vorgeschriebene Genauigkeit.}$$

- Berechnung von E_{j-1} ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) nach Gleichung (9)
- Für die gesuchte Blockierungswahrscheinlichkeit E gilt: $E = E_0$.

3.5.2 Verlustwahrscheinlichkeit B

Bis jetzt wurde nur die Blockierungswahrscheinlichkeit E berechnet. Für die Verlustwahrscheinlichkeit erhält man:

$$B = \frac{C_V}{C_A} = \frac{\sum_{x=0}^{k_1} (i_1 - x) \cdot [x]_1 \cdot \sigma(x)_1}{\sum_{x=0}^{k_1} (i_1 - x) \cdot [x]_1} \quad (13)$$

3.5.3 Erweiterung des Verfahrens für Zufallsverkehr erster Art

Das von Martinez für Zufallsverkehr zweiter Art entwickelte Berechnungsverfahren kann auf den Fall erweitert werden, daß den Koppelvielfachen in Stufe 1 ein Angebot von Typ ZV1 (Zufallsverkehr erster Art) zugeführt wird.

Wie in Abschnitt 3.5.1 gehen wir bei der Berechnung von der tatsächlichen Belastung Y des Linksystems aus. Im folgenden werden nur diejenigen Gleichungen aufgeführt, die sich im Vergleich zu den Ausführungen in Abschnitt 3.3.2 bei Zufallsverkehr erster Art ändern.

Anstelle von Gleichung (10) gilt jetzt

$$[x]_j = \frac{\frac{A_j^x}{x!} \cdot \prod_{z=0}^{x-1} (1 - \sigma(z)_j)}{1 + \sum_{v=1}^{k_j} \frac{A_j^v}{v!} \cdot \prod_{z=0}^{v-1} (1 - \sigma(z)_j)} \quad ; \quad j = S-2, S-3, \dots, 1 \quad (10a)$$

wobei A_j iterativ so zu bestimmen ist, daß die Gleichung

$$\sum_{x=1}^{k_j} x \cdot [x]_j = Y_j = \frac{Y_{\text{gesamt}}}{g_j} \quad ; \quad j = S-2, S-3, \dots, 1$$

erfüllt ist.

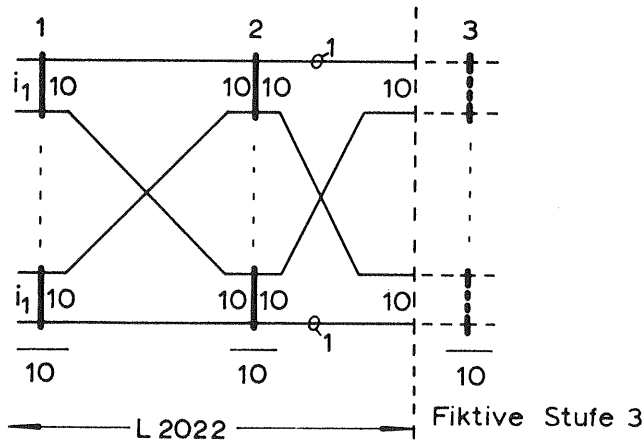
Der Gang der Berechnung von $E = B = E_0$ verläuft also wie folgt:

- Berechnung von E_{S-1} nach Gleichung (1)
- Berechnung von E_{S-2} nach Gleichung (3)
- Berechnung von $\sigma(x)_j$ ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) nach Gleichung (8)
- Berechnung der Verteilungen $[x]_j$ ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) nach Gleichung (10a)
- Berechnung von E_{j-1} ($j = S-2, S-3, \dots, 1$) nach Gleichung (9)

Das Angebot A je Koppelvielfach in Stufe 1 ergibt sich zu $A = A_1$.

3.5.4 Erweiterung des Verfahrens von Martinez zur Berechnung des Bündelverlusts

Wie bei den Verfahren von Bininda und Daisenberger /59/ (Abschnitt IV.3), C.Y. Lee /16/ (Abschnitt V.5), Bininda, Daisenberger und Didlaukis /58/ (Abschnitt V.6) kann der Bündelverlust eines (S-1)-stufigen Systems als Punktverlust einer S-stufigen Anordnung berechnet werden. Als Beispiel wird das in Abschnitt 3.6 berechnete System skizziert (System L 2022, Bild A.4, Anhang A).



Zur Berechnung des Bündelverlusts wird eine fiktive dritte Stufe ergänzt, welche in Bild VII.4 gestrichelt eingetragen ist. Die Eingänge eines Koppelvielfachs dieser dritten Stufe werden als Abnehmerleitungen einer bestimmten Richtung des tatsächlichen zweistufigen Systems betrachtet. Insgesamt existieren $g_3 = 10$ Richtungen mit je 10 Leitungen.

Bild VII.4 Berechnung des Bündelverlusts

3.6 Beispiele zu Abschnitt 3.5

In diesem Abschnitt soll je ein Beispiel für den Punkt- und für den Bündelverlust betrachtet werden. In den Diagrammen VII.4 - VII.6 ist die Verlustwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Belastung je Abnehmerleitung eingetragen.

System Anhang A	Diagramm Anhang B	Test	Bemerkung
L 3003 Bild A.9	VII.4	Punktverlust ZV1	Berechnet nach Abschnitt 3.5.3
L 2022 Bild A.4	VII.5	Bündelverlust ZV1	Berechnet nach Abschnitt 3.5.1 und nach Abschnitt 3.5.5
L 2022 Bild A.4	VII.6	Bündelverlust ZV2, $Q=i_1=10$ Quellen je Kvf. in Stufe 1	Berechnet nach Abschnitt 3.5.1 und nach Abschnitt 3.5.5

Diskussion der Ergebnisse

a) Bündelverlust

Sowohl für ZV1 als auch für ZV2 liegen die Testergebnisse bis zu Verlusten von ungefähr 15% über den Rechenwerten, d.h. das Berechnungsverfahren unterschätzt den tatsächlichen Verlust. Dabei werden die Abweichungen von Test und Rechnung mit wachsender Belastung geringer (vgl. Diagramme VII.5 und VII.6). Dies kann wie folgt erklärt werden:

Wie in Abschnitt 3.3.2 zu den Gleichungen (3)-(5) - Bemerkung nach Gleichung (5) - ausgeführt wurde, ist auf dem Zwischenleitungsbündel von der vorletzten zur letzten Stufe eine Bernoulli-Verteilung angenommen worden. Das hat zur Folge, daß bei einer Berechnung des Bündelverlusts (vgl. Bild VII.4) auf den Abnehmerleitungen eine Bernoulli-Verteilung unterstellt wird, die über die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_1)$ zu einer Unterschätzung des Verlusts beiträgt.

b) Punktverlust

Die in Diagramm VII.4 eingetragenen Testwerte wurden durch eine Verkehrssimulation derart bestimmt, daß bei stationärem Verkehr an zufälligen Zeitpunkten die innere Blockierung durch Stichproben zwischen einem zufällig ausgewählten Paar von Eingang-Ausgang ermittelt wurde (ausführlicher Hinweis siehe Abschnitt IV.3.5, Seite 56). Die Ergebnisse werden jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht diskutiert, da die Untersuchungen über die hierbei möglichen Simulationsmodelle noch nicht abgeschlossen sind.

VIII. EFFEKTIVE ERREICHBARKEIT

VIII.1 Allgemeines

Eine weitere Möglichkeit, die Leistungsfähigkeit von Linksystemen zu beschreiben, ist die sog. e f f e k t i v e E r r e i c h b a r k e i t einer Anordnung. Der Grundgedanke dieses Verfahrens besteht darin, das Linksystem mit einer e i n s t u f i g e n Koppelanordnung gleichen Kennwertetripels (A, n, B) zu vergleichen. Die (technisch gegebene, konstante) Erreichbarkeit dieser leistungsgleichen einstufigen Koppelanordnung ist dann die e f f e k t i v e E r r e i c h b a r k e i t k_{eff} des Linksystems bezüglich des betrachteten Abnehmerbündels.

Dabei müssen im Falle unvollkommener Erreichbarkeit ($k_{eff} < n$) zusätzliche Vereinbarungen getroffen werden entweder darüber, welches R e c h e n v e r f a h r e n zur Ermittlung von $B = f(A, n, k)$ bei der einstufigen Vergleichsanordnung zugrundegelegt wird oder welcher M i s c h u n g s t y p einer einstufigen Koppelanordnung für gleiches Wertetripel (A, n, k) g e t e s t e t wurde.

Soweit ist die Erreichbarkeit k_{eff} eine zweckmäßige Größe, um auch bei Linksystemen deren Verkehrsverhalten anschaulich durch vier Parameter (A, n, k_{eff}, B) zu beschreiben, wobei jeweils ein Parameter durch die drei übrigen festgelegt ist.

Weit größere Bedeutung erlangt aber die effektive Erreichbarkeit, wenn es gelingt, sie unmittelbar aus den Strukturparametern eines Linksystems, der Bündelgröße n und der Belastung Y in einfacher Weise und ohne komplizierte Verteilungsfunktionen zu berechnen oder gut zu approximieren.

In diesem Fall kann die Verlustberechnung eines vielstufigen Linksystems reduziert werden auf die weit einfachere Berechnung einer äquivalenten einstufigen Koppelanordnung mit den Parametern $(A, n, k=k_{eff})$. Diese Art der Verlustberechnung ist Gegenstand der in den Kapiteln VIII und IX beschriebenen Verfahren.

Der Begriff der effektiven Erreichbarkeit wurde zum ersten Mal von Charkevitsch in /34/ sowie von Bininda und Wendt in /33/ eingeführt.

VIII.2 Charkevitsch, A.D.: An approximate method for calculating the number of junctions in a crossbar system exchange (1959).

2.1 Übersicht

In jedem Belegungszustand des Linksystems existiert eine bestimmte momentane Erreichbarkeit von freien Eingängen eines Koppelvielfachs der ersten Stufe aus bezüglich des Abnehmerbündels der betrachteten Richtung. Diese momentane Erreichbarkeit k_{mom} ändert sich zwischen zwei Grenzwerten k_{min} und k_{max} . Daraus folgert Charkevitsch, daß die Verlustberechnung des Linksystems ersetzt werden kann durch jene einer einstufigen Koppelanordnung mit einer konstanten Erreichbarkeit k_{eff} , die ebenfalls zwischen k_{min} und k_{max} liegt.

2.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Skizze des Systems und Bezeichnungen siehe Bild VIII.1.

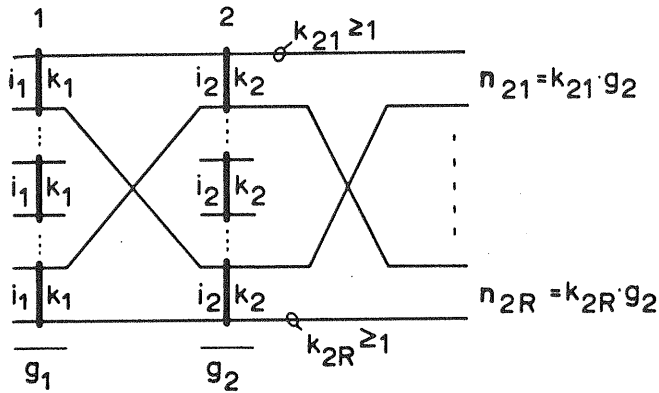


Bild VIII.1
Zweistufiges Linksystm für
Richtungswahl

Strukturparameter

- | | |
|--------------------------------------|---|
| $S = 2$ | keine Mischung zwischen den Stufen 1 und 2 |
| $i_1 \geq k_1$ | keine Mischung der Ausgänge einer Linkgruppe |
| $k_1 = g_2$ | Mischung der Ausgänge aus verschiedenen Linkgruppen |
| $l_{12} = 1$ | auf ein Abnehmerbündel ist möglich. |
| $k_{2r} \geq 1; \quad r=1,2,\dots,R$ | |

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Verkehrsangebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1 oder ZV2
- Angebot auf alle Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt
- Gleichmäßige Belastungsverteilung auf alle Zwischenleitungen, desgleichen auf alle Leitungen des Abnehmerbündels.

Gegebene Größen sind:

- Strukturparameter des Systems
- Belastung Y_1 auf den k_1 Ausgängen eines Koppelvielfachs in Stufe 1.
Falls hinter Stufe 2 die Ausgänge verschiedener Linkgruppen auf ein Abnehmerbündel zusammengemischt sind, muß auch die Belastung Y_{2r} auf dem Bündel der betrachteten Richtung r bekannt sein.

Gesuchte Größe ist:

- Effektive Erreichbarkeit k_{eff} (bzw. Verlustwahrscheinlichkeit B).

2.3 Entwicklung des Verfahrens

2.3.1 Herleitung der effektiven Erreichbarkeit

Wir betrachten eine Zwischenleitungseinheit des Systems in Bild VIII.1 (siehe Bild VIII.2). Wenn x_1 Zwischenleitungen belegt sind, existiert von den freien Eingängen eines Koppelvielfachs der Stufe 1 bezüglich des Abnehmerbündels der betrachteten Richtung Nr. r die Momenterreichbarkeit $k(x_1)$.

$$k(x_1) = (k_1 - x_1) \cdot k_{2r} \tag{1}$$

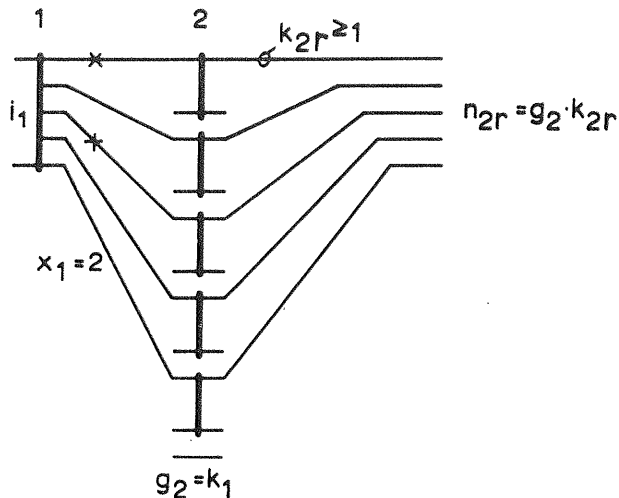


Bild VIII.2

Zwischenleitungseinheit

Bemerkungen zu Gleichung (1):

- a) Wenn nicht jedes Koppelvielfach der Stufe 2 dieselbe Anzahl k_{2r} von Ausgängen in die betrachtete Richtung hat, kann an Stelle von k_{2r} ein Mittelwert eingesetzt werden.
- b) Für den Grenzfall, daß hinter der zweiten Stufe nur ein Abnehmerbündel besteht (Mischwahl) und daß $k_{2r}=1$ ist, entsteht eine einstufige Koppelanordnung mit der konstanten Erreichbarkeit $k=k_1 \cdot k_{2r}=k_1$. Die Gleichung (1) wird diesem Grenzfall nicht gerecht, weil jener Anteil der erreichbaren Abnehmerleitungen vernachlässigt wird, welche bereits über das betrachtete Koppelvielfach der Stufe 1 durchgeschaltet sind. Das in Abschnitt VIII.3 behandelte ähnliche Verfahren von Bininda und Wendt vermeidet diese Ungenauigkeit (siehe dort Gleichung (1) bzw. Gleichung (7)).

Aus Gleichung (1) folgt für die Grenzwerte der Momentanerreichbarkeit:

Maximale Erreichbarkeit:

$$k_{\max} = k_1 \cdot k_{2r} \quad (2)$$

Minimale Erreichbarkeit:

$$k_{\min} = 0 \quad \text{für } i_1 > k_1 \quad (3a)$$

$$k_{\min} = (k_1 - (i_1 - 1)) \cdot k_{2r} \quad \text{für } i_1 \leq k_1 \quad (3b)$$

Anmerkung: In Gleichung (3b) ist $x_1=i_1$ ausgeschlossen, weil in diesem Zustand keine Rufe eintreffen können.

Also gilt:

$$k_{\min} \leq k(x_1) \leq k_{\max} \quad (4)$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der x_1 Belegungen im Zwischenleitungsbündel von Stufe 1 nach Stufe 2 und damit die Momentanerreichbarkeit $k(x_1)$ auftreten, heiße $w(x_1)$. Dies ist auch der Erwartungswert für die Dauer des Zustands $\{x_1\}$ je Zeiteinheit. Nun setzen wir voraus, daß sich das Linksystem während des Zustands $\{x_1\}$ wie eine einstufige Koppelanordnung mit der Leitungszahl n_{2r} , der Erreichbarkeit $k(x_1)$, der Belastung Y_{2r} und der daraus resultierenden Verlustwahrscheinlichkeit $B(n_{2r}, Y_{2r}, k(x_1))$ verhält. Damit läßt sich zu Gleichung (4) eine entsprechende Gleichung für die momentane Verlustwahrscheinlichkeit $B(x_1)$ des Linksystems angeben:

$$B_{min} \leq B(x_1) \leq B_{max} \quad (5)$$

mit

$$B(x_1) = B(n_{2r}, Y_{2r}, k(x_1))$$

$$B_{min} = B(n_{2r}, Y_{2r}, k_{max}) = B(k_{max})$$

$$B_{max} = B(n_{2r}, Y_{2r}, k_{min}) = B(k_{min})$$

Außerdem kann der Verlust B als Erwartungswert des Momentanverlustes $B(x_1)$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung $w(x_1)$ ausgedrückt werden. Daraus folgt:

$$B = B(n_{2r}, Y_{2r}, k_{eff}) = E\{B(x_1)\} = \sum_{x_1=0}^T B(n_{2r}, Y_{2r}, k(x_1)) \cdot w(x_1) \quad (6)$$

$$T = k_1 \quad \text{für } i_1 > k_1$$

$$T = i_1 - 1 \quad \text{für } i_1 \leq k_1$$

2.3.2 Vereinfachungen für die Berechnung von k_{eff}

2.3.2.1

Die mittlere Erreichbarkeit des zweistufigen Linksystems ist

$$k_m = \sum_{x_1=0}^T k(x_1) \cdot w(x_1) \quad (7)$$

$$k_m = \sum_{x_1=0}^T (k_1 - x_1) \cdot k_{2r} \cdot w(x_1)$$

$$k_m = (k_1 - Y_1) \cdot k_{2r} \quad (8)$$

Für $T=k_1$ gilt in Gleichung (8) das Gleichheitszeichen. Für $T=i_1-1$ ist $\sum_{x_1} w(x_1) \neq 1$, da die Wahrscheinlichkeit $w(i_1)$ für den Belegungszustand $\{i_1\}$ einen nicht verschwindenden Wert hat. Deshalb gilt hier das Gleichheitszeichen nicht exakt. Dies wollen wir im folgenden vernachlässigen.

Falls die Funktion $B=B(n, Y, k)$ linear wäre oder durch einen linearen Ansatz $B=c_1 \cdot k + c_2$ approximiert werden könnte, erhielten wir aus Gleichung (6):

$$c_1 \cdot k_{eff} + c_2 = \sum_{x_1=0}^T (c_1 \cdot k(x_1) + c_2) \cdot w(x_1)$$

$$c_1 \cdot k_{eff} + c_2 = c_1 \cdot k_m + c_2$$

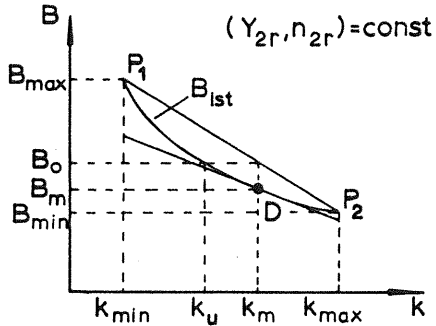
und folglich

$$k_{eff} = k_m$$

(9)

2.3.2.2

Nun wollen wir die in Wirklichkeit nicht genau mit k_m übereinstimmende effektive Erreichbarkeit nach oben und unten abschätzen, wobei vorausgesetzt ist, daß die Funktion $B=B(n, Y, k) = B(k)$ im interessierenden Bereich $k_{min} \leq k \leq k_{max}$ monoton fällt (siehe Bild VIII.3). Alle Punkte der Geraden P_1P_2 liegen höher als die wahren Verlustwerte und sämtliche Punkte der Tangente in D liefern Verluste,



die kleiner als oder gleich wie die tatsächlichen Werte sind. Zur mittleren Erreichbarkeit k_m erhält man mit Hilfe der Geraden P_1P_2 den oberen Grenzwert B_0 des Verlusts. Jener Verlust B_m , der sich bei einer Erreichbarkeit k_m ergäbe, ist der Ordinatenwert des Tangentenberührungspunkts D. Der tatsächliche Verlust $B(k_{eff})$ des Linksystems, dem die effektive Erreichbarkeit zugeordnet ist, liegt offenbar zwischen den Werten B_m und B_0 . Deshalb ist die effektive Erreichbarkeit k_{eff} stets kleiner als die mittlere Erreichbarkeit k_m .

Bild VIII.3 Verlustwahrscheinlichkeit B als Funktion der Erreichbarkeit k (n_{2r} und Y_{2r} konstant)

Also gilt:

$$k_{min} < k_{eff} < k_m \tag{10}$$

oder mit Gleichung (3a)

$$0 < k_{eff} < (k_1 - Y_1) \cdot k_{2r} ; i_1 > k_1$$

mit Gleichung (3b)

$$(k_1 - (i_1 - 1) \cdot k_{2r}) < k_{eff} < (k_1 - Y_1) \cdot k_{2r} ; i_1 \leq k_1$$

Für den Fall, daß die Funktion $B=B(k)$ für $(Y_{2r}, n_{2r})=const$ bekannt ist, können wir für die effektive Erreichbarkeit eine genauere untere Schranke als k_{min} angeben. Aus Bild VIII.3 folgt:

$$k_u < k_{eff} < k_m \tag{11}$$

Die Erreichbarkeit k_u ist gemäß Bild VIII.3 durch

$$B_0 = B(k_u) \tag{12}$$

bestimmt.

B_0 ergibt sich mit Hilfe der Geradengleichung von P_1P_2 zu

$$B_0 = \frac{B_{max} \cdot (k_{max} - k_m) + B_{min} \cdot (k_m - k_{min})}{k_{max} - k_{min}} \tag{13}$$

Die Berechnung von $k_u=f(B_0, Y_{2r}, n_{2r})$ wird jedoch für praktische Bedürfnisse als zu umständlich bezeichnet. Statt dessen verwendet Charkevitch für praktische Berechnungen folgende Näherung:

$$k_{eff} = k_{min} + \theta \cdot (k_m - k_{min})$$

$$0 < \theta \leq 1$$

(14)

Der Faktor θ muß anhand von Verkehrstests empirisch bestimmt werden und wird auch von der Struktur des betreffenden Linksystems abhängen.

Wenn auf diese Weise die effektive Erreichbarkeit hinreichend genau approximiert wird, so kann die Verlustwahrscheinlichkeit mit bekannten Näherungsverfahren für einstufige Anordnungen berechnet werden. Die effektive Erreichbarkeit bezieht sich dann auf jenen Mischungstyp, für den das betreffende Rechenverfahren wirklichkeitstreue Verlustwerte liefert.

VIII.3 Bininda, N. und Wendt, A.: Die effektive Erreichbarkeit für Abnehmerbündel hinter Zwischenleitungsanordnungen (1959).

3.1 Übersicht

Ähnlich wie Charkevitsch definieren auch Bininda und Wendt für ein zweistufiges Linksystem eine effektive Erreichbarkeit, welche gleich der konstanten Erreichbarkeit einer einstufigen Koppelanordnung mit gleich großem Abnehmerbündel, gleicher Belastung und gleicher Verlustwahrscheinlichkeit ist.

Zunächst leiten die Verfasser eine allgemeine Formel für die effektive Erreichbarkeit als Funktion der momentanen Erreichbarkeit her. Anschließend berechnen sie die effektive Erreichbarkeit näherungsweise. Schließlich wird eine mittlere Erreichbarkeit hergeleitet, die als gute Näherung für die effektive Erreichbarkeit verwendet werden kann.

3.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Es werden die effektive und mittlere Erreichbarkeit von zweistufigen Linksystemen für Richtungs- und Mischwahl berechnet. Skizzen der Systeme und Bezeichnungen siehe Bilder VIII.4 und VIII.5.

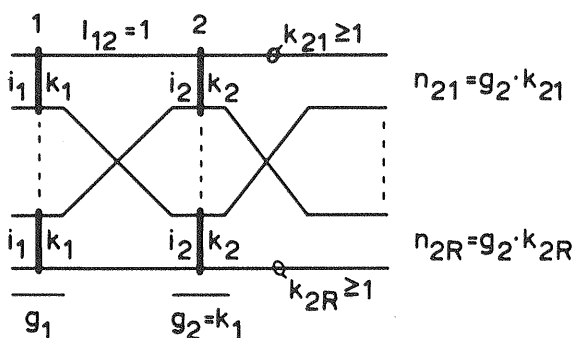


Bild VIII.4
Linksystem für Richtungswahl

Strukturparameter

- $S = 2$
- $i_1 \leq k_1$ (Erweiterung für $i_1 > k_1$ siehe Abschnitt 3.3.4 c)
- $k_1 = g_2$
- $l_{12} = 1$
- $k_{2r} \geq 1; r=1,2,\dots,R$

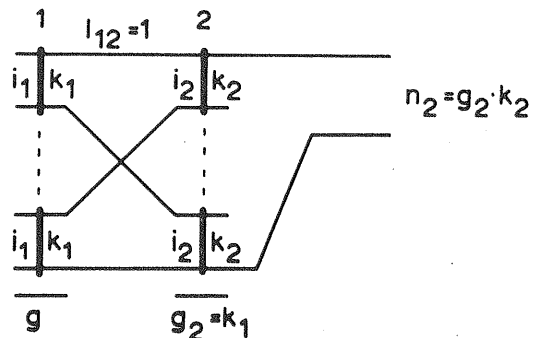


Bild VIII.5
Linksystem für Mischwahl

- keine Mischung zwischen Stufe 1 und 2
- keine Mischung der Ausgänge einer Linkgruppe
- Mischung der Ausgänge aus verschiedenen Linkgruppen auf ein Abnehmerbündel ist möglich.

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Verkehrsangebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV2
(Die Erweiterung für den Fall von ZV1 wurde durchgeführt; vgl. Abschnitt 3.3.4.c).
- Angebot auf die Koppelvielfache in Stufe 1 gleichverteilt
- Gleichmäßige Belastungsverteilung auf alle Zwischenleitungen, desgleichen auf alle Leitungen des Abnehmerbündels.

- Gegebene Größen sind:
- Strukturparameter des Systems
 - Belastung P_{E1} je Zubringerleitung.
Falls hinter Stufe 2 die Ausgänge verschiedener Linkgruppen auf ein Abnehmerbündel zusammengemischt sind, muß auch die Belastung Y_{2r} auf dem Bündel der betrachteten Richtung r bekannt sein.
 - Anteil η_r der Belastung P_{E1} , der in die betrachtete Richtung r durchgeschaltet wird.

- Gesuchte Größen sind:
- Effektive Erreichbarkeit k_{eff}
 - Mittlere Erreichbarkeit k_m als Näherungswert für k_{eff} und Verlust $B = B(A, n_2, k_{eff})$.

3.3 Entwicklung des Verfahrens

3.3.1 Allgemeine Berechnung der effektiven Erreichbarkeit aus der Momentanerreichbarkeit

Bild VIII.6 zeigt eine Zwischenleitungseinheit des Systems in Bild VIII.4, die der Berechnung zugrundegelegt wird.

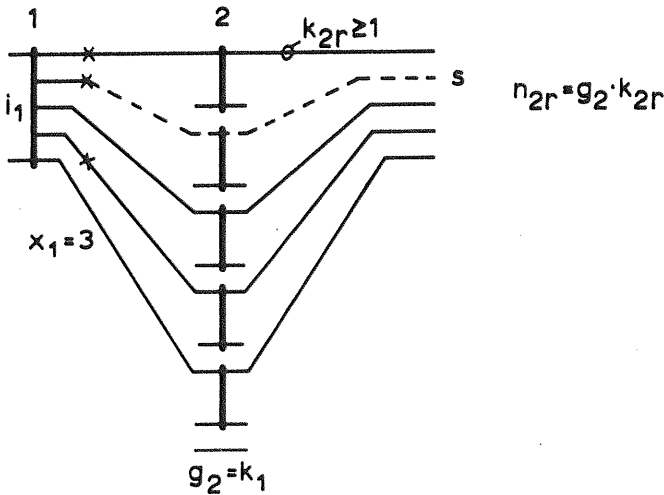


Bild VIII.6
Zwischenleitungseinheit

Im Belegungszustand $\{x_1\}$ des Zwischenleitungsbündels seien momentan s der x_1 (vgl. Bild VIII.6: $x_1=3, s=1$) Belegungen in das Bündel der betrachteten Richtung durchgeschaltet. Von freien Eingängen des betrachteten Koppelvielfachs der Stufe 1 können dann

$$k(x_1, s) = (k_1 - x_1) \cdot k_{2r} + s \quad (1)$$

Leitungen des betrachteten Abnehmerbündels erreicht werden.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Belegungszustand $\{x_1\}$ existiert, sei mit $[x_1]$ bezeichnet. Für die Wahrscheinlichkeit, daß s von x_1 Belegungen in das betrachtete Abnehmerbündel durch-

geschaltet sind, gilt:

$$[s] = \binom{x_1}{s} \cdot (\eta_r \cdot P_{E1})^s \cdot (1 - \eta_r \cdot P_{E1})^{x_1 - s} \quad (2)$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß sowohl x_1 Zwischenleitungen belegt als auch davon s in das betrachtete Abnehmerbündel durchgeschaltet sind, $[x_1] \cdot [s]$.

Die Wahrscheinlichkeit $[k_{mom}]$, daß die Momentanerreichbarkeit $k(x_1, s)$ einen bestimmten Wert k_{mom} annimmt, erhalten wir durch Aufsummieren der Wahrscheinlichkeiten aller jener Zustände, für die gilt:

$$k_{mom} = (k_1 - x_1) \cdot k_{2r} + s = const \quad (3)$$

bzw. $s = k_{mom} - (k_1 - x_1) \cdot k_{2r}$

Somit gilt:

$$[k_{mom}] = \sum_{x_1=0}^{i_1-1} [x_1] \cdot [s] \quad (4)$$

Bemerkung: Wegen der angenommenen Strukturparameter $i_1 \leq k_1$ geht die Summation nur bis $x_1 = i_1 - 1$, weil Rufe nur dann einfallen können, wenn noch mindestens eine Zubringerleitung frei ist.

Dabei wird $[s]$ nach Gleichung (2) berechnet mit $s = k_{mom} - (k_1 - x_1) \cdot k_{2r}$. Zur Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung $[x_1]$ siehe Abschnitt 3.3.4.

Wie Charkevitsch nehmen auch Bininda und Wendt an, daß sich das Linkssystem während jener Zeitabschnitte, in denen eine Momentanerreichbarkeit k_{mom} existiert, wie eine einstufige Anordnung mit der konstanten Erreichbarkeit $k = k_{mom}$ und deren Verlustwahrscheinlichkeit $B = B(n_{2r}, Y_{2r}, k)$ verhält. Dann gilt für die Verlustwahrscheinlichkeit des betrachteten Abnehmerbündels im Linkssystem:

$$B = \sum_{k_{mom}=k_{min}}^{k_{max}} [k_{mom}] \cdot B(n_{2r}, Y_{2r}, k_{mom}) \quad (5)$$

Aufgrund der Definition der effektiven Erreichbarkeit gilt weiterhin:

$$B = B(n_{2r}, Y_{2r}, k_{eff}) \quad (6)$$

Falls die Verlustwahrscheinlichkeit B vorgeschrieben (oder aus Verkehrstests bekannt) ist, kann man mit Hilfe von Gleichung (6) die zu (B, n_{2r}, Y_{2r}) gehörende Erreichbarkeit k_{eff} ermitteln (Umkehrfunktion).

3.3.2 Vereinfachte Berechnung der effektiven Erreichbarkeit

Die Wahrscheinlichkeit $[k_{mom}]$ nach Gleichung (4) berücksichtigt, daß durch die statistischen Schwankungen der Richtungsaufteilung unter den momentan bestehenden x_1 Belegungen ein bestimmter Wert k_{mom} sich aus Anteilen verschiedener Wertepaare $\{x_1, s\}$ zusammensetzt.

Nach Bininda und Wendt können wir diese Schwankungen der Richtungsaufteilung vernachlässigen. Dann genügt es, an Stelle der momentanen Erreichbarkeit $k(x_1, s)$ nach Gleichung (1) nur mit einer Erreichbarkeit $k(x_1)$ zu rechnen. Die Zufallsvariable s in Gleichung (1) wird ersetzt durch ihren Erwartungswert im Zustand $\{x_1\}$, d.h. durch die mittlere Anzahl $\eta_{2r} \cdot x_1$ der im Zustand $\{x_1\}$ zum betrachteten Abnehmerbündel direkt durchgeschalteten Belegungen. Somit gilt:

$$k(x_1) = (k_1 - x_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot x_1 \quad (7)$$

Zur momentanen Erreichbarkeit $k(x_1)$, die mit der Wahrscheinlichkeit $[x_1]$ auftritt, gehört die momentane Verlustwahrscheinlichkeit $B(x_1) = B(n_{2r}, Y_{2r}, k(x_1))$. Damit erhalten wir für die Verlustwahrscheinlichkeit B des betrachteten Abnehmerbündels in unserem Linksystem:

$$B = \sum_{x_1=0}^{i_1-1} [x_1] \cdot B(n_{2r}, Y_{2r}, k(x_1)) \quad (8)$$

und gemäß Gleichung (6) unter Verwendung der effektiven Erreichbarkeit k_{eff} :

$$B = B(n_{2r}, Y_{2r}, k_{\text{eff}}) \quad (6)$$

Im Vergleich zum Verfahren nach Abschnitt 3.3.1 ist hier der Rechenaufwand zur Bestimmung der Verlustwahrscheinlichkeit B reduziert.

Auch dieses Verfahren erlaubt die Bestimmung der effektiven Erreichbarkeit des Linksystems in Bezug auf das betrachtete Abnehmerbündel nur im Anschluß an die Verlustberechnung nach Gleichung (7) und mit Hilfe von Gleichung (5). Ziel der Arbeit von Bininda und Wendt ist es jedoch, die effektive Erreichbarkeit unmittelbar aus den Struktur- und Verkehrsparametern - zumindest in guter Näherung - zu berechnen, um dann mit dem so gefundenen Wert k_{eff} das Linksystem auf eine einstufige Koppelanordnung gleicher Daten $(n_{2r}, Y_{2r}, k_{\text{eff}})$ abzubilden.

3.3.3 Berechnung der mittleren Erreichbarkeit als Näherungswert für die effektive Erreichbarkeit

Aus der momentanen Erreichbarkeit $k(x_1)$ gemäß Gleichung (7), Abschnitt 3.3.2, und der Wahrscheinlichkeit $[x_1]$, mit der sie auftritt, können wir eine mittlere Erreichbarkeit k_m als Erwartungswert von $k(x_1)$ definieren:

$$k_m = \sum_{x_1=0}^{i_1-1} k(x_1) \cdot [x_1] \quad (9)$$

$$k_m = \sum_{x_1=0}^{i_1-1} ((k_1 - x_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot x_1) \cdot [x_1]$$

Wenn zwischen der Verlustwahrscheinlichkeit B und der Erreichbarkeit einer zum Vergleich herangezogenen einstufigen Koppelanordnung exakt ein linearer Zusammenhang bestünde, wären mittlere Erreichbarkeit k_m und effektive Erreichbarkeit k_{eff} identisch (vgl. auch Abschnitt 2.3.2.1). Obwohl diese Annahme in Wirklichkeit nicht erfüllt ist, kann die einfach zu berechnende mittlere Erreichbarkeit nach Gleichung (9) als brauchbarer Näherungswert für die effektive Erreichbarkeit verwendet werden.

Mit diesem Näherungswert für k_{eff} kann nun die Verlustwahrscheinlichkeit B einer äquivalenten einstufigen Koppelanordnung nach einem der bekannten Näherungsverfahren bestimmt werden.

3.3.4 Beispiel für die Berechnung der mittleren Erreichbarkeit k_m

a) Beispiel von Bininda und Wendt

Die Autoren nehmen auf den $i_1 \leq k_1$ Zubringerleitungen eines Koppelvielfachs der Stufe 1 eine Bernoulli-Verteilung an und setzen außerdem voraus (vgl. untenstehende Bemerkung), daß die Einfallwahrscheinlichkeit für eine Belegung solange konstant und unabhängig vom Belegungszustand ist, als nicht sämtliche Eingänge belegt sind. Für die Wahrscheinlichkeit, daß genau x_1 beliebige Eingänge bzw. Ausgänge des betrachteten Koppelvielfachs in Stufe 1 belegt sind, gilt demnach:

$$[x_1]^* = \binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1} \quad ; \quad 0 \leq x_1 \leq i_1 \quad (10)$$

Da Rufe nur einfallen können, wenn noch mindestens eine Zubringerleitung frei ist, gehen wir zu einem neuen Wahrscheinlichkeitsraum mit der Ereignismenge $\{0, 1, \dots, i_1 - 1\}$ über, in dem nur die Wahrscheinlichkeiten $[x_1]$ für Belegungszustände mit $0 \leq x_1 \leq i_1 - 1$ definiert sind. Es gilt:

$$[x_1] = \frac{\binom{i_1}{x_1} \cdot P_{E1}^{x_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - x_1}}{\sum_{v=0}^{i_1-1} \binom{i_1}{v} P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - v}} \quad ; \quad 0 \leq x_1 \leq i_1 - 1 \quad (11)$$

Bemerkung: Die Annahme einer Bernoulli-Verteilung auf den Eingängen impliziert, daß eine endliche Anzahl von Verkehrsquellen wirksam ist, die eine der Anzahl freier Eingänge proportionale Anrufintensität erzeugt. Dies steht im Widerspruch zu der Voraussetzung einer konstanten Einfallwahrscheinlichkeit für $x_1 \leq i_1 - 1$.

Interpretation von Gleichung (11):

Die Summe im Nenner kann umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^{i_1-1} \binom{i_1}{v} P_{E1}^v \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - v} &= 1 - \binom{i_1}{i_1} P_{E1}^{i_1} \cdot (1 - P_{E1})^{i_1 - i_1} \\ &= 1 - P_{E1}^{i_1} = 1 - [i_1]^* \end{aligned}$$

Der Term $(1 - [i_1]^*)$ kann als jener Zeitanteil in der Zeiteinheit gedeutet werden, in dem der Zustand $\{i_1\}$ nicht existiert, so daß Rufe einfallen und Verluste entstehen können. Es ist daher $[x_1]$ nach Gleichung (11) die Wahrscheinlichkeit für den Belegungszustand $\{x_1\}$ bezogen auf diejenige Zeit, in der noch mindestens ein Eingang im betrachteten Koppelvielfach der ersten Stufe frei ist.

Dagegen bedeutet $[x_1]^*$ die Zeit je Zeiteinheit, in der x_1 Zubringerleitungen belegt sind.

Aus Gleichung (9) folgt mit Gleichung (11):

$$k_m = \sum_{x_1=0}^{i_1-1} ((k_1 - x_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot x_1) \cdot [x_1]$$

Nach einer Umformung erhalten wir:

$$k_m = k_1 \cdot k_{2r} \cdot \sum_{x_1=0}^{i_1-1} [x_1] - k_{2r} \cdot \sum_{x_1=0}^{i_1-1} x_1 \cdot [x_1] + \eta_r \cdot \sum_{x_1=0}^{i_1-1} x_1 \cdot [x_1]$$

$$= \left(k_1 - \frac{Y_1 - i_1 \cdot [i_1]^*}{1 - [i_1]^*} \right) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot \frac{Y_1 - i_1 \cdot [i_1]^*}{1 - [i_1]^*} \quad (12a)$$

$$= \left(k_1 - Y_1 \cdot \frac{1 - P_{E1}^{i_1-1}}{1 - P_{E1}^{i_1}} \right) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot Y_1 \cdot \frac{1 - P_{E1}^{i_1-1}}{1 - P_{E1}^{i_1}} \quad (12b)$$

b) 1. Modifikation des Beispiels a)

Zum Vergleich wollen wir dieselbe Rechnung durchführen, wobei wir anstelle von Gleichung (11) die Beziehung (9) verwenden. Aus Gleichung (9) folgt mit Gleichung (10):

$$k'_m = \sum_{x_1=0}^{i_1-1} ((k_1 - x_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot x_1) \cdot [x_1]^* \quad (13a)$$

$$= ((k_1 - Y_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot Y_1) - ((k_1 - i_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot i_1) \cdot [i_1]^*$$

$$= (k_1 \cdot (1 - P_{E1}^{i_1}) - Y_1 \cdot (1 - P_{E1}^{i_1-1})) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot Y_1 \cdot (1 - P_{E1}^{i_1-1}) \quad (13b)$$

c) 2. Modifikation von Beispiel a)

Wenn wir in Gleichung (9) die obere Summationsgrenze bis $x_1=i_1$ gehen lassen und $[x_1]$ durch die Verteilung $[x_1]^*$ ersetzen, die nicht notwendig die in Gleichung (10) angegebene Bernoulli-Verteilung sein muß, erhalten wir:

$$k_m = \sum_{x_1=0}^{i_1} ((k_1 - x_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot x_1) \cdot [x_1]^*$$

$$= (k_1 - Y_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot Y_1 \quad (14)$$

Gleichung (14) wird durch Bild VIII.7 veranschaulicht. Sie gilt exakt für den Fall $i_1 > k_1$, den jedoch Bininda und Wendt nicht untersuchen.

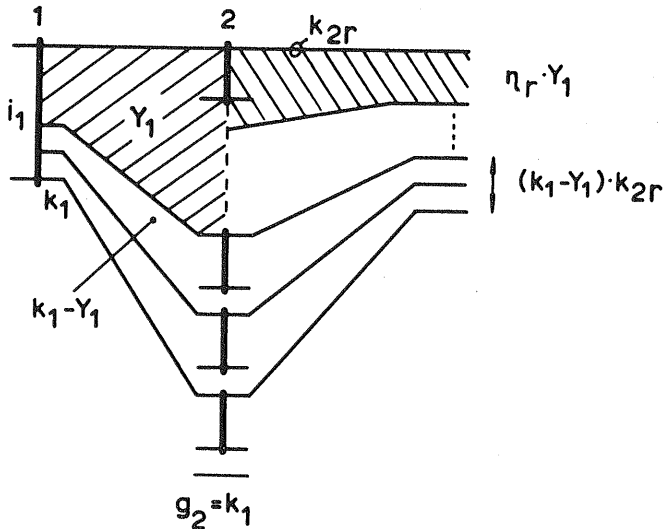


Bild VIII.7
Veranschaulichung von Gleichung (13)

d) Bemerkungen zu den Beispielen

Als zusätzliche Größen berechnen wir die mittlere Gleichzeitigkeit Y_1' auf den i_1 Eingängen bezogen auf jene Zeit, in der noch mindestens ein Eingang frei ist:

$$Y_1' = \frac{\sum_{x_1=1}^{i_1-1} x_1 \cdot [x_1]^*}{\sum_{x_1=0}^{i_1-1} [x_1]^*} = \frac{\sum_{x_1=1}^{i_1} x_1 \cdot [x_1]^* - i_1 \cdot [i_1]^*}{1 - [i_1]^*}$$

mit Gleichung (10):
$$Y_1' = \frac{Y_1 - i_1 \cdot [i_1]^*}{1 - [i_1]^*} = \frac{i_1 \cdot P_{E1} - i_1 \cdot P_{E1}^{i_1}}{1 - P_{E1}^{i_1}}$$

$$Y_1' = Y_1 \cdot \frac{1 - P_{E1}^{i_1-1}}{1 - P_{E1}^{i_1}} \quad (15a)$$

$$Y_1 = Y_1' \cdot \frac{1 - P_{E1}^{i_1}}{1 - P_{E1}^{i_1-1}} \quad (15b)$$

Mit Gleichung (15a) ergibt sich aus Gleichung (12b):

$$k_m = (k_1 - Y_1') \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot Y_1' \quad (16)$$

Der Vergleich mit Gleichung (14) zeigt, daß k_m und k_m'' formal gleich sind und sich nur in den Belastungen unterscheiden. Für $P_{E1} \ll 1$ sind Y_1' und Y_1 nach Gleichung (15a) nahezu gleich.

k_m und k_m' unterscheiden sich um den Faktor $(1 - P_{E1}^{i_1-1}) = (1 - [i_1]^*)$, da k_m' auf die Zeiteinheit bezogen ist und k_m für die Zeit gilt, in der noch mindestens eine Zubringerleitung frei ist (vgl. die Gleichungen (12b) und (13b)).

VIII.4 Kritische Betrachtung der Verfahren in VIII.2 und VIII.3

Die Grundidee, das Linksystem auf eine äquivalente einstufige Anordnung abzubilden, ist beiden Verfahren gemeinsam. Grundsätzlich ist zu bemerken, daß die effektive Erreichbarkeit in beiden Arbeiten nicht exakt berechnet werden kann, denn erstens werden dazu Näherungsannahmen über die Wahrscheinlichkeit, mit der die momentane Erreichbarkeit auftritt, und über die Verteilung $[\bar{x}_1]$ auf dem Zwischenleitungsbündel benötigt; zweitens muß die Verlustfunktion $B = B(n_{2r}, Y_{2r}, k)$ der einstufigen Anordnung bekannt sein. Außerdem wird bei der Berechnung der effektiven Erreichbarkeit aus der Verlustwahrscheinlichkeit B angenommen, daß während der Zeit, in der eine bestimmte Momentanerreichbarkeit k_{mom} existiert, das Linksystem sich wie eine einstufige Anordnung mit den Daten $(n_{2r}, Y_{2r}, k_{\text{mom}})$ verhält.

Da die Berechnung von $k_{\text{eff}} = f(B, n_{2r}, Y_{2r})$ umständlich und doch nicht exakt ist, wird meistens als Ersatz mit der mittleren Erreichbarkeit k_m gearbeitet, die einfach zu ermitteln ist.

Im einzelnen ist zu den beiden Verfahren anzuführen:

4.1 Verfahren von Charkevitsch, Abschnitt VIII.2

- a) Die Momentanerreichbarkeit sollte durch die momentane Zahl s der aus der betrachteten Linkeinheit in das betrachtete Abnehmerbündel durchgeschalteten Belegungen ergänzt werden, da sonst die Anwendung des Verfahrens auf Systeme mit Mischwahl nicht ganz gerechtfertigt erscheint. Bei Systemen mit Richtungswahl wirkt sich die Vernachlässigung von s umso weniger aus, je mehr Richtungen vorhanden sind.
- b) Als Vorschlag zur praktischen Berechnung der effektiven Erreichbarkeit gibt Charkevitsch die Gleichung $k_{\text{eff}} = k_{\text{min}} + \theta(k_m - k_{\text{min}})$ an, wobei der Faktor θ empirisch zu bestimmen ist.

4.2 Verfahren von Bininda und Wendt, Abschnitt VIII.3

- a) Die Verwendung der Bernoulli-Verteilung auf den i_1 Eingängen eines Koppelvielfachs der ersten Stufe impliziert, daß endlich viele (nämlich $g_1 \cdot i_1$) Verkehrsquellen (Zufallsverkehr zweiter Art) betrachtet werden. Außerdem ist aus Gleichung (11) die Annahme $i_1 \leq k_1$ zu entnehmen. In diesem Fall liefert daher die mittlere Erreichbarkeit k_m nach Gleichung (12a,b) den besten Näherungswert für k_{eff} .
- b) Für $i_1 > k_1$ (von Bininda und Wendt nicht angegeben) spielt der Verteilungstyp auf dem Zwischenleitungsbündel für die Berechnung der mittleren Erreichbarkeit keine Rolle. Nach Gleichung (14) gilt immer $k_m'' = (k_1 - Y_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot Y_1$.

Die in Kapitel IX zu besprechende Methode der "Kombinierten Eingangs- und Abnehmerblockierung" (CIRB) verwendet den Gedanken der effektiven und mittleren Erreichbarkeit und bringt eine Erweiterung auf Systeme mit mehr als zwei Stufen. Deshalb wird hier auf Berechnungsbeispiele verzichtet.

IX. KOMBINIERTE EINGANGS - UND ABNEHMERBLOCKIERUNG

Lotze, A.: Das Näherungsverfahren der "Kombinierten Eingangs- und Abnehmerblockierung" zur Berechnung zwei- und mehrstufiger Linksysteme (1963).

IX.1 Übersicht

Das letzte bis jetzt bekannt gewordene Prinzip zur Berechnung von Linksystemen, welches in gewissem Sinne als eine Weiterentwicklung der in Kapitel VIII erläuterten Methode betrachtet werden kann (effektive und mittlere Erreichbarkeit), soll im folgenden diskutiert werden. In den weiteren Ausführungen wollen wir die Methode kurz mit CIRB bezeichnen (nach der Abkürzung in englischen Veröffentlichungen: Combined Inlet-Route Blocking).

Das Verfahren kann auf Systeme für Richtungs- und Mischwahl mit beliebiger Stufenzahl angewandt werden. Außerdem können zwischen den einzelnen Wahlstufen und hinter der letzten Stufe Mischungen vorhanden sein.

Da der Berechnung die tatsächliche Belastung des Systems zugrunde gelegt wird, sind die Ergebnisse bis zu hohen Verlustwerten für die Praxis hinreichend genau.

IX.2 Gruppierung, Verkehrs- und Betriebsparameter

Es werden die Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit von Systemen mit beliebiger Stufenzahl für Richtungs- oder Mischwahl berechnet (Skizze des Systems und Bezeichnungen siehe Bild IX.1).

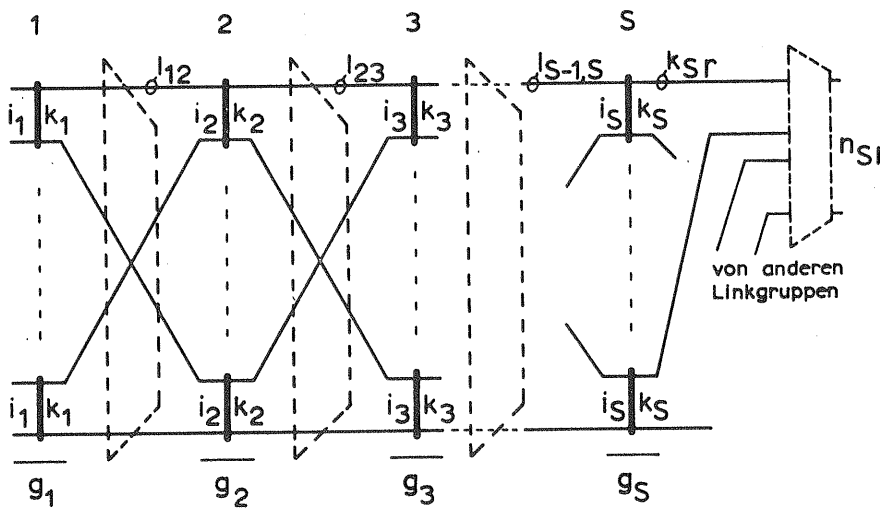


Bild IX.1
Linksyst \ddot{e} m mit
S Stufen

Strukturparameter

$S \geq 2$

$i_j \geq k_j; \quad j = 1, 2, \dots, S$

$l_{j-1, j} \geq 1; \quad j = 2, 3, \dots, S$

$k_{Sr} \geq 1; \quad r = 1, 2, \dots, R$

Mischungen zwischen den Stufen $j, j+1$ ($j = 1, 2, \dots, S-1$) sind zulässig (in Bild IX.1 gestrichelt eingetragen). Bei Expansion in der ersten Stufe ($i_1 < k_1$), angebotenenm Zufallsverkehr zweiter Art und Mischung der $g_1 \cdot k_1$ Ausgänge in Stufe 1 auf $g_2 \cdot i_2$ Eingänge in Stufe 2 liefert das Verfahren eine Abschätzung des Verlusts nach unten. Dieser Sonderfall wird in den folgenden Ausführungen nicht diskutiert.

Eine Mischung der Ausgänge verschiedener Linksyst \ddot{e} mgruppen auf dasselbe Abnehmerbündel kann ebenfalls berücksichtigt werden (vgl. Bild IX.1).

Verkehrs- und Betriebsparameter

- Verkehrsangebot je Koppelvielfach in Stufe 1 vom Typ ZV1 oder ZV2
- Verkehrsbelastung je Stufe 2,3,...,S ist gleichmäßig auf alle Koppelvielfache einer Stufe verteilt (durch entsprechendes Absuchen der Koppelvielfache und durch geeignetes Führen der Zwischenleitungen zu erreichen).
- Die Angebote je Koppelvielfach in Stufe 1 können gleich oder ungleich sein.

- Gegebene Größen sind:
- Strukturparameter des Systems
 - Gesamtbelastung des Systems und Anteil η_r der Belastung des Abnehmerbündels in Richtung r ($r = 1,2,\dots,R$) an der Gesamtbelastung
 - Bei Mischung der Ausgänge aus verschiedenen Linkgruppen auf ein Abnehmerbündel sind zusätzlich die Belastungen Y_{Sr} ($r = 1,2,\dots,R$) für die einzelnen Abnehmerbündel anzugeben.

- Gesuchte Größen sind:
- Zeitblockierung E je Abnehmerbündel
 - Verlustwahrscheinlichkeit B je Abnehmerbündel.

IX.3 Grundgedanke des Verfahrens

Die gesamte Zeitblockierungswahrscheinlichkeit E bezüglich eines betrachteten Abnehmerbündels wird in zwei Anteile zerlegt: "Eingangsblockierung" und "Abnehmerblockierung".

3.1 Eingangsblockierung

Zeitblockierung am Eingang tritt auf, wenn in einem Koppelvielfach der ersten Stufe entweder alle k_1 Ausgänge des Koppelvielfachs (im Fall $i_1 > k_1$) belegt sind, oder wenn sämtliche i_1 Eingänge des Koppelvielfachs (im Fall $i_1 \leq k_1$) besetzt sind. Wir bezeichnen diese Belegungszustände mit $\{k_1\}$ bzw. $\{i_1\}$ und die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten mit $[k_1]$ bzw. $[i_1]$.

3.2 Abnehmerblockierung

Außerhalb des Zustands "Eingangsblockierung" kann Blockierung auch dann auftreten, wenn vom betrachteten Eingangskoppelvielfach aus über die momentan erreichbaren freien Zwischenleitungen des Systems keine freien Leitungen im gewünschten Abnehmerbündel zugänglich sind. Die Wahrscheinlichkeit für diese "Abnehmerblockierung" bezeichnen wir mit $[p]$.

Wenn man als Näherung annimmt, daß die Zustände, welche zu den Wahrscheinlichkeiten $[k_1]$ bzw. $[i_1]$ einerseits und zu der Wahrscheinlichkeit $[p]$ andererseits gehören, statistisch unabhängig sind, erhalten wir für die Blockierungswahrscheinlichkeit E in Bezug auf das gewünschte Abnehmerbündel:

$$E = [k_1] + (1 - [k_1]) \cdot [p] \quad ; \quad i_1 > k_1 \quad (1a)$$

$$E = [i_1] + (1 - [i_1]) \cdot [p] \quad ; \quad i_1 \leq k_1 \quad (1b)$$

Die Unabhängigkeitsannahme ist in der Regel aus folgenden Gründen weitgehend erfüllt:

- a) Die Verkehre Y_1 der g_1 Koppelvielfache in Stufe 1 sind praktisch voneinander unabhängig;

- b) Die Verkehre gemäß a) enthalten Verkehrsanteile aller R Abnehmerrichtungen;
- c) Die Belastung Y_{Sr} und die zugehörige Abnehmerblockierung $[p]_r$ eines bestimmten betrachteten Abnehmerbündels Nr. r wird durch g_1 weitgehend unabhängige Anteile je vom Betrag $Y_1 \cdot \gamma_{Sr}$ der g_1 Eingangsverkehre erzeugt.

IX.4 Berechnung der Eingangsblockierung

Zur näherungsweise Berechnung der Eingangsblockierung $[k_1]$ bzw. $[i_1]$ werden bekannte Verteilungsfunktionen für vollkommen erreichbare Bündel benutzt, wobei die Belastung Y_1 eines Koppelvielfachs der ersten Stufe vorgegeben ist.

Bemerkung: In den folgenden Ausführungen diskutieren wir nur den Fall für die Berechnung der Eingangsblockierung in der ersten Stufe. Wie in /67/ gezeigt wird, kann für die anschließenden Stufen, falls sie aus Koppelvielfachen mit Konzentration aufgebaut sind, ebenfalls deren Eingangsblockierung berechnet und berücksichtigt werden. In der Regel sind diese Blockierungswahrscheinlichkeiten gegenüber $[k_1]$ bzw. $[i_1]$ vernachlässigbar.

4.1 Zufallsverkehr erster Art

4.1.1 $i_1 > k_1$

- a) Keine Mischung zwischen den Stufen 1 und 2; Erlang-Verteilung auf den k_1 Ausgängen eines Koppelvielfachs in Stufe 1:

$$[k_1] = E_{k_1}(A_0) \quad (2)$$

mit $Y_1 = A_0 \cdot (1 - E_{k_1}(A_0))$

- b) Mischung zwischen Stufe 1 und 2; MPJ-Verteilung auf den $g_2 \cdot i_2$ Eingängen in die Stufe 2:

$$[k_1] = \frac{E_{g_2 \cdot i_2}(A_0)}{E_{g_2 \cdot i_2 - k_1}(A_0)} \quad (3)$$

mit $g_1 \cdot Y_1 = A_0 \cdot (1 - E_{g_2 \cdot i_2}(A_0))$

4.1.2 $i_1 \leq k_1$ (Abgeschnittenes Poisson-Angebot)

Eine Mischung zwischen Stufe 1 und 2 ist hier nicht erforderlich; Erlang-Verteilung auf den i_1 Eingängen eines Koppelvielfachs in der ersten Stufe:

$$[i_1] = E_{i_1}(A_0) \quad (4)$$

mit $Y_1 = A_0 \cdot (1 - E_{i_1}(A_0))$

4.2 Zufallsverkehr zweiter Art

4.2.1 $i_1 > k_1$

- a) Keine Mischung zwischen den Stufen 1 und 2; Erlang's-Bernoulli-Verteilung auf den k_1 Ausgängen eines Koppelvielfachs in Stufe 1:

$$[k_1] = \frac{\binom{i_1}{k_1} \cdot \alpha_0^{k_1}}{\sum_{v=0}^{k_1} \binom{i_1}{v} \cdot \alpha_0^v} \quad (5)$$

α_0 wird dabei iterativ so bestimmt, daß $Y_1 = \sum_{x_1=1}^{k_1} x_1 \cdot [x_1]$

b) Mischung zwischen den Stufen 1 und 2; BQ-Verteilung /62/ auf den $g_2 \cdot i_2$ Eingängen in die Stufe 2:

$$[k_1] = \frac{E_n(\alpha_0, Q)}{E_{n-k_1}(\alpha_0, Q-k_1)} \quad (6)$$

mit
$$E_n(\alpha_0, Q) = \frac{\binom{Q}{n} \cdot \alpha_0^n}{\sum_{v=0}^n \binom{Q}{v} \cdot \alpha_0^v}$$

mit
$$Q = g_1 \cdot i_1, \quad n = g_2 \cdot i_2$$

α_0 wird dabei iterativ so bestimmt, daß $g_1 \cdot Y_1 = \sum_{x_1=1}^{g_2 \cdot i_2} x_1 \cdot [x_1]$

4.2.2 $i_1 \leq k_1$

Keine Mischung zwischen Stufen 1 und 2:

$$[i_1] = \left(\frac{Y_1}{i_1} \right)^{i_1} \quad (7)$$

IX.5 Berechnung der Abnehmerblockierung

5.1 Mittlere Prüfbarkeit p

Abnehmerblockierung tritt auf, wenn über die momentan freien Zwischenleitungen des Systems keine freien Leitungen im gewünschten Abnehmerbündel erreicht werden können. Statt die Anzahl momentan freier Zwischenleitungen zu verwenden, arbeitet die Methode CIRB mit der mittleren Anzahl freier Ausgänge je Koppelvielfach.

Zunächst wollen wir für ein zweistufiges System mit $l_{12} = 1$ die mittlere Prüfbarkeit angeben (siehe Bild IX.2).

Wenn im Mittel Y_1 von k_1 Ausgängen des betrachteten Koppelvielfachs in Stufe 1 belegt sind, können über die $(k_1 - Y_1)$ im Mittel freien Zwischenleitungen noch $(k_1 - Y_1) \cdot k_{2r}$ Abnehmerleitungen des gewünschten Bündels abgesucht werden. Dazu ist noch die mittlere Anzahl $\eta_r \cdot Y_1$ der direkt durchgeschalteten und deshalb vom Eingangskoppelvielfach aus prüfbar Belegungen zu addieren. Somit erhalten wir für die mittlere Anzahl an Abnehmerleitungen in der betrachteten Richtung, die von den Eingängen des betrachteten Koppelvielfachs in der ersten Stufe auf frei oder besetzt geprüft werden können (vgl. Kapitel VIII, Abschnitt 3.3.4.c)

$$p = (k_1 - Y_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot Y_1 \quad (8)$$

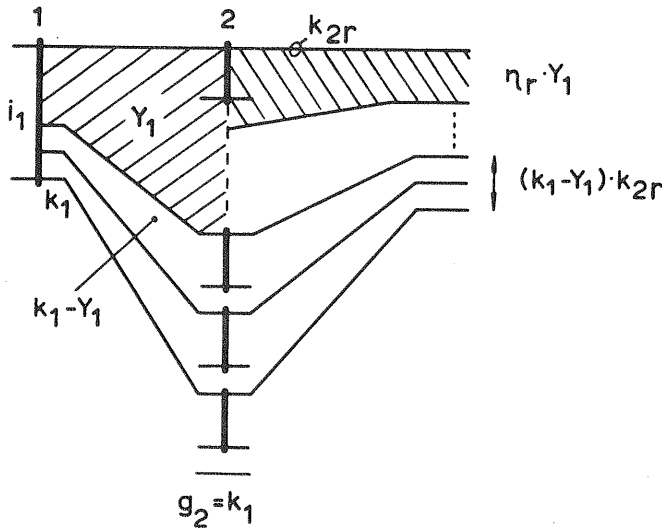


Bild IX.2

Zwischenleitungseinheit
eines zweistufigen Link-
systems

Wenn die $g_1 \cdot k_1$ Ausgänge aller Koppelvielfache in Stufe 1 auf die $g_2 \cdot i_2$ Eingänge der zweiten Stufe gemischt sind (Mischungsverhältnis $m_1 = g_1 \cdot k_1 / g_2 \cdot i_2$), so sind durch den eigenen Verkehr Y_1 eines Koppelvielfachs und den Besetztteinfluß anderer Koppelvielfache der Mischung im Mittel $m_1 \cdot Y_1$ Ausgänge eines Koppelvielfachs der ersten Stufe belegt. Deshalb gilt:

$$p = (k_1 - m_1 \cdot Y_1) \cdot k_{2r} + \eta_r \cdot m_1 \cdot Y_1 \quad (9)$$

Allgemein gilt für ein S-stufiges Linksystem mit $l_{j,j+1} = 1$ und mit Mischungen zwischen den Stufen (Mischungsverhältnis $m_j \geq 1$), $j = 1, 2, \dots, S-1$:

$$p = \left\{ \prod_{v=1}^{S-1} (k_v - m_v \cdot Y_v) \right\} \cdot k_{Sr} + \eta_r \cdot m_1 \cdot Y_1 \quad (10)$$

Bei der numerischen Auswertung von Gleichung (10) kann der Fall auftreten, daß die rechnerisch bestimmte mittlere Anzahl der von einer Stufe Nr. j aus erreichbaren Koppelvielfache ($j \leq S$) bereits größer ist als die tatsächliche Anzahl g_{j+1} der in der nachfolgenden Stufe Nr. (j+1) vorhandenen Koppelvielfache. Deshalb ist für Gleichung (10) folgende Randbedingung zu beachten:

$$\prod_{v=1}^j (k_v - m_v \cdot Y_v) \leq g_{j+1} \quad ; \quad l_{j,j+1} = 1 \quad (11)$$

$$j = 2, 3, \dots, S-1$$

Für Systeme mit $l_{j,j+1} = 1$ kann eine Prüfbarkeit p_{min} angegeben werden, welche obere Grenzwerte für die Abnehmerblockierung p liefert.

$$p_{min} = \left\{ \prod_{v=1}^{S-1} (k_v - m_v \cdot Y_v) \cdot \frac{1}{l_{v,v+1}} \right\} \cdot k_{Sr} + \eta_r \cdot m_1 \cdot Y_1 \quad (12)$$

Die Randbedingung (11) ist analog anzuwenden.

5.2 Abnehmerblockierungswahrscheinlichkeit [p]

Die Wahrscheinlichkeit, sämtliche p prüfbareren Abnehmerleitungen der gewünschten Richtung sind belegt, werde mit [p] bezeichnet. Diese Wahrscheinlichkeit berechnen wir wie bei unvollkommenen, e i n s t u f i g e n Systemen mit konstanter Erreichbarkeit $k = p$, der Leitungszahl $n = n_{Sr}$ und der Belastung $Y = Y_{Sr}$. Bei nicht ganzzahligen Werten von p muß interpoliert werden.

Für die Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit [p] jenes einstufigen, unvollkommen erreichbaren Bündels, auf welches das Linksystem abgebildet wird, können dieselben Näherungsformeln für ZV1 bzw. ZV2 benutzt werden wie sie für einstufige Mischungen üblich sind.

5.2.1 Zufallsverkehr erster Art

In diesem Fall wenden wir die MPJ-Formel /48/ an, also

$$[p] = \frac{E_{n_{Sr}}(A_0)}{E_{n_{Sr}-p}(A_0)} \quad (13)$$

Der Parameter A_0 ist iterativ so zu bestimmen, daß

$$Y_{Sr} = A_0 \cdot (1 - E_{n_{Sr}}(A_0))$$

5.2.2 Zufallsverkehr zweiter Art

Für den Fall der endlichen Quellenzahl hat sich das Analogon zur MPJ-Formel, die BQ-Formel /62/, als zweckmäßig erwiesen.

$$[p] = \frac{E_n(\alpha_0, Q)}{E_{n-p}(\alpha_0, Q-p)} \quad (14)$$

mit
$$E_n(\alpha_0, Q) = \frac{\binom{n}{p} \cdot \alpha_0^n}{\sum_{v=0}^n \binom{n}{v} \cdot \alpha_0^v}$$

mit
$$Q = \sum_{i=1}^n q_i \cdot t_i ; n = n_{Sr}$$

α_0 wird iterativ so bestimmt, daß die vorgegebene Belastung Y_{Sr} erzeugt wird.

IX.6 Verlustwahrscheinlichkeit B

Die Verlustwahrscheinlichkeit B können wir näherungsweise aus den Blockierungswahrscheinlichkeiten am Eingang und für die Abnehmerleitungen berechnen.

6.1 Zufallsverkehr erster Art

6.1.1 $i_1 > k_1$

In diesem Fall ist die Verlustwahrscheinlichkeit B gleich der Zeitblockierungswahrscheinlichkeit E. Nach Gleichung (1a) gilt:

$$B = E = [k_1] + (1 - [k_1]) \cdot [\rho] \quad (1a)$$

6.1.2 $i_1 \leq k_1$

Bei Expansion in der ersten Stufe existiert der Belegungszustand $\{k_1\}$ nicht. Im Zustand $\{i_1\}$ sind alle Zubringerleitungen des betrachteten Koppelvielfachs in Stufe 1 belegt. Daher können während dieses Zustands keine Verlustrufe in dieses Koppelvielfach einfallen. Verluste können nur im Zustand "Abnehmerblockierung" auftreten; daher gilt:

$$B = [\rho] \quad (15)$$

6.2 Zufallsverkehr zweiter Art

Bei endlicher Quellenzahl sind Blockierungswahrscheinlichkeit E und Verlustwahrscheinlichkeit B voneinander verschieden. Es gilt stets $B < E$.

6.2.1 $i_1 > k_1$

Mittlere Zahl von Anrufen pro Zeiteinheit aus i_1 Quellen in die betrachtete Richtung Nr.r:

$$c_A = (i_1 - Y_1) \cdot \alpha_1 \cdot \eta_r \quad (16)$$

Die Gesamtzahl c_V an Verlustrufen teilen wir in zwei Gruppen auf: Ein Teil (c_{V1}) trifft während des Zustands "Eingangsblockierung" ein, während der andere Teil (c_{V2}) während des Zustands "Abnehmerblockierung und keine Eingangsblockierung" auftritt. Deshalb gilt:

Verlustrufe pro Zeiteinheit infolge von Eingangsblockierung $c_{V1} = (i_1 - k_1) \cdot [k_1] \cdot \alpha_1 \cdot \eta_r \quad (17a)$

Verlustrufe pro Zeiteinheit infolge von Abnehmerblockierung $c_{V2} = (i_1 - Y_1^*) \cdot [\rho] \cdot (1 - [k_1]) \cdot \alpha_1 \cdot \eta_r \quad (17b)$

mit $Y_1^* = \frac{Y_1 - k_1 [k_1]}{1 - [k_1]} \quad (18)$

(vgl. Kapitel V, Abschnitt 4.4.2 und Kapitel VIII, Abschnitt 3.3.4.d).

Der Wert Y_1^* bedeutet die mittlere Gleichzeitigkeit während jener Zustände, in denen keine Eingangsblockierung herrscht. In der Regel ist aber $(Y_1 - Y_1^*)$ vernachlässigbar klein.

Somit erhalten wir:

$$B = \frac{c_{V1} + c_{V2}}{c_A} = \frac{\{(i_1 - k_1) \cdot [k_1] + (i_1 - \gamma_1^*) \cdot [\rho] \cdot (1 - [k_1])\} \cdot \alpha_1 \cdot \eta_r}{(i_1 - \gamma_1) \cdot \alpha_1 \cdot \eta_r}$$

$$B = \frac{i_1 - k_1}{i_1 - \gamma_1} \cdot [k_1] + [\rho] \cdot \left(1 - \frac{i_1 - k_1}{i_1 - \gamma_1} \cdot [k_1]\right) \quad (19)$$

Wenn zwischen den Stufen 1 und 2 eine Mischung vorhanden ist gilt:

$$B = \frac{i_1 \cdot m_1 - k_1}{i_1 \cdot m_1 - \gamma_1} \cdot [k_1] + [\rho] \cdot \left(1 - \frac{i_1 \cdot m_1 - k_1}{i_1 \cdot m_1 - \gamma_1} \cdot [k_1]\right) \quad (20)$$

6.2.2 $i_1 \leq k_1$; keine Mischung zwischen Stufe 1 und 2

Die mittlere Anzahl von Rufen pro Zeiteinheit aus i_1 Quellen in die betrachtete Richtung ist wiederum

$$c_A = (i_1 - \gamma_1) \cdot \alpha_1 \cdot \eta_r \quad (21)$$

Rufe können nur außerhalb des Zustands $\{i_1\}$ einfallen. Dann erhalten wir:

$$c_V = (i_1 - \gamma_1) \cdot [\rho] \cdot \alpha_1 \cdot \eta_r \quad (22)$$

und

$$B = \frac{c_V}{c_A} = \frac{(i_1 - \gamma_1) \cdot [\rho] \cdot \alpha_1 \cdot \eta_r}{(i_1 - \gamma_1) \cdot \alpha_1 \cdot \eta_r}$$

$$B = [\rho] \quad (23)$$

IX.7 Berechnungsbeispiele und Vergleich mit Verkehrstests

Zur Prüfung der Genauigkeit des Berechnungsverfahrens wollen wir die Verlustwahrscheinlichkeit einiger Systeme ermitteln und die Ergebnisse mit Simulationsergebnissen vergleichen. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht (in den Diagrammen ist jeweils die Verlustwahrscheinlichkeit als Funktion der Belastung je Abnehmerleitung dargestellt).

System Anhang A	Diagramm Anhang B	Kurve Nr.	Test	Bemerkung
L 2024 Bild A.1	IX.1	1 2	ZV1	- Exakte Berechnung nach Bascharin (III,2)
MpI9a Bild A.2	IX.2	-	ZV1	-
L 2034 Bild A.3	IX.3	-	ZV1	-
	IX.4	-	ZV2	$Q = i_1 = 8$ Quellen je Kvf. in Stufe 1
	IX.5	-	ZV2	$Q = i_1 = 4$ Quellen je Kvf. in Stufe 1
L 2022 Bild A.4	IX.6	-	ZV1	-
	IX.7	-	ZV2	$Q = i_1 = 15$ Quellen je Kvf. in Stufe 1
	IX.8	-	ZV2	$Q = i_1 = 10$ Quellen je Kvf. in Stufe 1
	IX.9	-	ZV2	$Q = i_1 = 8$ Quellen je Kvf. in Stufe 1
L 2033 Bild A.5	IX.10	-	ZV1	-
	IX.11	-	ZV2	$Q = i_1 = 10$ Quellen je Kvf. in Stufe 1
L 2001 Bild A.6	IX.12	1	ZV1	Richtung 1; $k_{21} = 1$
		2	ZV1	Richtung 2; $k_{22} = 3$
L 2032 Bild A.7	IX.13	-	ZV1	-
	IX.14	-	ZV2	$Q = i_1 = 10$ Quellen je Kvf. in Stufe 1
L 3006 Bild A.8	IX.15	-	ZV1	-
L 4001 Bild A.10	IX.16	-	ZV1	-
L 4015 Bild A.11	IX.17	-	ZV1	-

IX.8 Kritische Betrachtung des Verfahrens

Ganz allgemein können wir zunächst feststellen, daß die Methode der kombinierten Eingangs- und Abnehmerblockierung hinsichtlich des breiten Spektrums von Anwendungsmöglichkeiten von keinem anderen Verfahren erreicht wird. Wie sich gezeigt hat, sind die meisten Rechenmethoden, abgesehen von wenigen Ausnahmen, auf spezielle, oftmals nur zwei-stufige Systeme, zugeschnitten.

Das Verfahren läßt sich in allen Fällen sehr einfach und bequem handhaben. Für die numerische Auswertung benötigen wir, außer bei Zufallsverkehr zweiter Art, lediglich Tafeln für einstufige Anordnungen. Im einzelnen ist zu bemerken:

1. Da die Berechnung von der tatsächlichen Belastung des Systems ausgeht, wird die starke Überschätzung der Verlustwahrscheinlichkeit bei wachsenden Belastungen, welche in vielen Fällen durch die Annahme Angebot A = Belastung Y bedingt ist, vermieden. Die Ergebnisse zeigen bis zu hohen Verlustwerten eine für die Praxis ausreichende Übereinstimmung mit den Testresultaten.

Die Genauigkeit der Ergebnisse ist nicht über den gesamten Verlustbereich gleich, denn die Methode CIRB ist wie alle anderen Berechnungsverfahren - mit Ausnahme der mathematisch exakten Methode - eine Näherungslösung. Die einzelnen vereinfachenden Voraussetzungen sind in den verschiedenen Bereichen unterschiedlich zutreffend und können manchmal bei besonders kleinen oder extrem großen Verlusten Abweichungen von

den Testwerten hervorrufen.

2. Bei sehr kleinen Verlusten (<1%) ist aus den Diagrammen IX.1 bis IX.17 eine Tendenz zur Unterschätzung der Verlustwahrscheinlichkeit zu erkennen, d.h. die berechneten Werte liegen etwas zu tief. Diese Erscheinung läßt sich aus der Berechnung der Prüfbarkeit p aus der Anzahl der i m M i t t e l freien Ausgänge je Koppelvielfach erklären:

Bei ganz schwachen Belastungen und damit kleinen Verlusten wirken sich die Schwankungen des Verkehrs relativ gesehen viel stärker auf die effektive Erreichbarkeit und damit auf den Verlust aus als bei mittleren und größeren Belastungen. Durch die Verwendung der m i t t l e r e n Zahl an Belegungen wird jedoch der nichtlineare Einfluß dieser Schwankungen auf die Verlustwahrscheinlichkeit unterbewertet. Die Folge davon ist eine Tendenz nach etwas zu kleinen Verlustwerten.

3. Im Gegensatz dazu tendiert der Verlust bei höheren Belastungen nach etwas zu großen Werten, d.h. die Ergebnisse liegen im Vergleich zu den Testresultaten auf der sicheren Seite. Diese Tatsache hat vermutlich in der Annahme der statistischen Unabhängigkeit der Belegungszustände "Eingangsblockierung" und "Abnehmerblockierung" ihre hauptsächliche Ursache. In Wirklichkeit sind diese beiden Zustände mit wachsender Belastung immer stärker korreliert. Die Annahme ihrer statistischen Unabhängigkeit führt deshalb hier zu einer rechnerischen Überbewertung des Verlusts.

Bei sehr ungleich großen Abnehmerbündeln (L 2001, Diagramm IX.12) wirkt sich offenbar auch die relativ größere Varianz der kleineren Verkehrsanteile so aus, daß deren effektive Erreichbarkeit verhältnismäßig stärker von der mittleren Erreichbarkeit nach unten abweicht als jene der verkehrsstärkeren Richtungen.

4. Die Genauigkeit der beiden Komponenten "Eingangsblockierung" und "Abnehmerblockierung" allein ist bis jetzt noch nicht abschließend untersucht worden.
5. Wenn wir die Genauigkeit der Ergebnisse mit Werten anderer Näherungsverfahren vergleichen, finden wir nur zwei Verfahren, welche allerdings mit erheblich größerem Aufwand zum Teil bessere Resultate erzielen (Verfahren in Kapitel IV). Dabei ist deren Anwendungsbereich auf viel speziellere Strukturen (oft nur zweistufig, nie mit Mischung) beschränkt als dies bei der Methode CIRB der Fall ist.

X. ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Untersuchung ergab, daß sich sämtliche bekannt gewordenen Berechnungsverfahren für Linkssysteme durch sieben Grundprinzipien beschreiben lassen. Aufgrund der kritischen Prüfung der einzelnen Verfahren und des Vergleichs von Rechenwerten mit Simulationsergebnissen können wir die nachstehenden Schlußfolgerungen ziehen:

1. Abgesehen von kleinen zweistufigen Anordnungen für Mischwahl, müssen in der Praxis interessierende Systeme mit Hilfe von Näherungsmethoden berechnet und für die Praxis noch tragbare Ungenauigkeiten in Kauf genommen werden.

2. Die nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht für die Anwendbarkeit der einzelnen Methoden (es werden nur die wichtigsten aufgeführt). Dabei bedeuten:

x trifft zu

- trifft nicht zu

(-) trifft nach Erweiterung oder Verbesserung zu.

Kapitel Abschnitt	III		IV		V					VI		VII		VIII		IX 2
	2	3	2	3	2	3	4	5	6	3	4	2	3	2	3	
<u>Strukturparameter</u>																
S=2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
S>2	-	-	-	x	x	-	x	x	x	-	-	-	x	-	-	x
$i_1 > k_1$	x	x	x	x	x	x	x	-	x	x	x	x	x	x	(-)	x
$i_1 = k_1$	-	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
$i_1 < k_1$	-	-	x	x	x	x	-	x	x	x	x	x	-	x	x	x
$l_{j,j+1} = 1; j=1, \dots, S-1$	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
$l_{j,j+1} > 1; j=1, \dots, S-1$	-	-	-	-	x	x	x	-	-	-	x	-	-	-	-	x
Mischungen zwischen den Stufen	-	-	-	-	(x)	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	x
Mischung der Ausgänge verschiedener Linkgruppen auf ein Abnehmerbündel	-	-	-	-	x	x	x	-	-	-	-	x	-	x	x	x
<u>Verkehrs- und Betriebsparameter</u>																
Zufallsverkehr erster Art	x	x	(-)	x	x	-	x	-	x	x	x	x	(-)	x	(-)	x
Zufallsverkehr zweiter Art	(-)	x	x	-	x	x	-	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Gleiche Angebotsverteilung auf die Kvfe. in Stufe 1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Ungleiche Angebotsverteilung auf die Kvfe. in Stufe 1	x	-	x	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	x
<u>Näherungen bzgl. Angebot A und Belastung Y</u>																
Angebot A = Belastung Y	-	-	-	-	x	x	-	-	-	-	-	-	x	-	-	-
Verbesserung durch $A \neq Y$	-	-	-	-	(-)	(-)	-	-	-	-	-	-	(-)	-	-	-

Kapitel Abschnitt	III		IV		V			VI		VII		VIII		IX		
	2	3	2	3	2	3	4	5	6	3	4	2	3	2	3	4
<u>Relative Abweichung Rechnung - Test in Prozent</u>																
<u>Verfahren ohne Verbesserung</u>																
B < 1%	0	5	8/9	11	16/45	-	22	18/44	16/45	-80	-	-10	-	-	-	-6/50
1% < B < 5%	0	10	5	9	13/64	-	86	13/35	5/30	-77	-	-13	-	-	-	-28/0
5% < B < 15%	0	3/5	6/12	7/9	32/118	-	58	25/35	9/25	-74	-	-8	-	-	-	-15/1
B > 15%	0	<4	7/12	12	>50	-	71	36	10/20	-7	-	3	-	-	-	6/12
<u>Verfahren mit Verbesserung (vgl. (-))</u>																
B < 1%	-	-	-9/5	-	9/45	-	-	-	-	-	-64	-10	-38	-	-	-
1% < B < 5%	-	-	<1	-	5/30	-	-	-	-	-	-47	9	-23	-	-	-
5% < B < 15%	-	-	<1	-	5/30	-	-	-	-	-	-23	10	-8/15	-	-	-
B > 15%	-	-	7	-	10/20	-	-	-	-	-	-14	11	4	-	-	-

3. Um einen Vergleich zwischen der Leistungsfähigkeit einzelner Verfahren zu erhalten, sind in den Diagrammen X.1 - X.10 (Anhang B) einander entsprechende Ergebnisse zusammengestellt. Die nachstehende Tabelle gibt eine Übersicht.

System Anhang A	Diagramm Anhang B	Kurve Nr.	Erklärung	Behandelt in Abschnitt
L 2024 Bild A.1 ZV1	X.1	1	Bascharin: Exakte Berechnung;	III.2
		2	Verbesserte Sperrwahrscheinlichkeit nach Rohde und Störmer	VI.6, VI.7
		3	Bretschneider: Erreichbarkeitsausgleich	VII.2.5
		4	Jacobaeus verbessert: Zwischenleitungs- bündel Zustandsgleichung, Sperrwahrscheinlichkeit nach MPJ	V.2.17 V.2.20
		5	Lotze: CIRB	IX.7, IX.8
MpI9a Bild A.2 ZV1	X.2	1	Lotze: Scheinverkehr; Eingangsblockierung Erlang-Verteilung, rückwärtige Sperrung MPJ	V.4.6, V.4.7
		2	Lotze: Scheinverkehr; Eingangsblockierung Erlang-Verteilung, rückwärtige Sperrung Bernoulli-Verteilung	V.4.6, V.4.7
		3	Verbesserte Sperrwahrscheinlichkeit nach Rohde und Störmer	VI.6, VI.7
		4	Bretschneider: Erreichbarkeitsausgleich	VII.2.5
		5	Jacobaeus verbessert: Zwischenleitungs- bündel Zustandsgleichung, Sperrwahrscheinlichkeit nach MPJ	V.2.17 V.2.20
		6	Lotze: CIRB	IX.7, IX.8

System Anhang A	Diagramm Anhang B	Kurve Nr.	Erklärung	Behandelt in Abschnitt
L 2034 Bild A.3 $i_1 > k_1$ ZV1	X.3	1	Elldin: Exakte Berechnung. Das für ZV1 erweiterte Berechnungsverfahren von Elldin (funktionelle + statistische Abhängigkeit, Abschnitt IV.2) liefert geringfügig höhere Verlustwerte; die Kurve ist der Übersichtlichkeit halber nicht eingetragen.	III.3.5, III.3.6
		2	Bininda/Daisenberger: Funktionelle Abhängigkeit, statistische Unabhängigkeit	IV.3.5 IV.3.6
		3	Jacobaeus verbessert: $A \neq Y$, Erlang/Erlang	V.2.15, V.2.20
		4	Jacobaeus verbessert: Zwischenleitungs-bündel Zustandsgleichung, Sperrwahrscheinlichkeit MPJ	V.2.17 V.2.20
		5	Lotze: CIRB	IX.7, IX.8
L 2034 Bild A.3 $i_1 = 8 k_1$ ZV2	X.4	1	Elldin: Exakte Berechnung	III.3.5, III.3.6
		2	Elldin: Funktionelle + statistische Abhängigkeit	IV.2.6
		3	Lotze: CIRB	IX.7, IX.8
L 2022 Bild A.4 $i_1 > k_1$ ZV1	X.5	1	Erweiterung des Verfahrens von Elldin (Funktionelle + statistische Abhängigkeit) für ZV1	IV.2.6 IV.2.7
		2	Bininda/Daisenberger: Funktionelle Abhängigkeit, statistische Unabhängigkeit	IV.3.5 IV.3.6
		3	Jacobaeus: $A=Y$, Erlang/Erlang	V.2.12, V.2.13
		4	Jacobaeus verbessert: $A \neq Y$, Erlang/Erlang	V.2.15, V.2.20
		5	Lotze: CIRB	IX.7, IX.8
L 2022 Bild A.4 $i_1 = 10 = k_1$ ZV2	X.6	1	Elldin: Funktionelle + statistische Abhängigkeit	IV.2.6, IV.2.7
		2	Jacobaeus: $A=Y$, Bernoulli/Erlang	V.2.12, V.2.13
		3	Jacobaeus verbessert: $A \neq Y$, Bernoulli/Erlang	V.2.15 V.2.20
		4	Jacobaeus verbessert: $A \neq Y$, Bernoulli/Erlang's-Bernoulli	V.2.16 V.2.20
		5	Lotze: CIRB	IX.7, IX.8
L 2033 Bild A.5 $i_1 > k_1$ ZV1	X.7	1	Jacobaeus: $A=Y$, Erlang/Erlang	V.2.12, V.2.13
		2	Jacobaeus verbessert: $A \neq Y$, Erlang/Erlang	V.2.15, V.2.20
		3	Jacobaeus verbessert: Zwischenleitungs-bündel Zustandsgleichung, Sperrwahrscheinlichkeit MPJ	V.2.17, V.2.20
		4	Lotze: CIRB	IX.7, IX.8
L 2001 Bild A.6 Rech.1 ZV1	X.8	1	Jacobaeus: $A=Y$, Erlang/Erlang	V.2.12, V.2.13
		2	Jacobaeus verbessert: $A \neq Y$, Erlang/Erlang	V.2.15, V.2.20
		3	Lotze: CIRB	IX.7, IX.8
L 2001 Bild A.6 Rech.2 ZV1	X.9	1	Jacobaeus: $A=Y$, Erlang/Erlang	V.2.12, V.2.13
		2	Jacobaeus verbessert: $A \neq Y$, Erlang/Erlang	V.2.15, V.2.20
		3	Lotze: CIRB	IX.7, IX.8

System Anhang A	Diagramm Anhang B	Kurve Nr.	Erklärung	Behandelt in Abschnitt
L 2032 Bild A.7 $i_1=10=k_1$ ZV2	X.10	1	Jacobaeus: $A=Y$, Bernoulli/Erlang	V.2.12, V.2.13
		2	Jacobaeus verbessert: $A \neq Y$, Bernoulli/Erlang	V.2.19.1
		3	Jacobaeus verbessert: Zwischenleitungs- bündel Zustandsgleichung, Sperrwahrscheinlichkeit MPJ	V.2.20 V.2.19.2 V.2.20
		4	Lotze: CIRB	IX.7, IX.8

Ein Vergleich von Ergebnissen für 3- und 4-stufige Linksyste me ist nicht möglich, da der Bündelverlust solcher Anordnungen im allgemeinen nur mit der Methode CIRB von A. Lotze /51/ berechnet werden kann (Verfahren zur Berechnung des Punktverlustes erlauben die Ermittlung des Bündelverlustes nur dann, wenn das Wegenetz die Struktur eines Serien-Parallel-Graphen besitzt (vgl. beispielsweise die Abschnitte IV.3, V.5, V.6).

4. Welche Methode am zweckmäßigsten angewandt werden soll, richtet sich nach dem vorliegenden System, nach der gewünschten Genauigkeit und nach den vorhandenen Hilfsmitteln.

Neben den beiden iterativen Rechenmethoden von Elldin /17/, /43/ und Bininda/Daisenberger /59/, welche auf spezielle Systeme zugeschnitten sind und einen erheblichen Rechenaufwand erfordern, liefert kein anderes Verfahren genauere Ergebnisse als die Methode der kombinierten Eingangs- und Abnehmerblockierung von A. Lotze /51/. Dabei muß betont werden, daß dieses Verfahren hinsichtlich des breiten Spektrums von Anwendungsmöglichkeiten und der Durchsichtigkeit und Einfachkeit bei der numerischen Auswertung von keinem anderen Berechnungsvorschlag übertroffen wird. Es kann daher zur Behandlung sämtlicher praktisch interessierenden Fragestellungen vorgeschlagen werden.

Anhang A: SYSTEMSKIZZEN

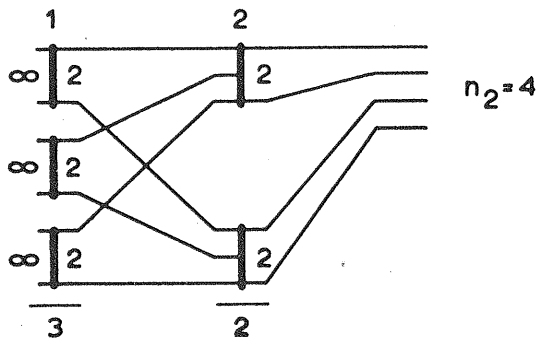
Definitionen:

Die Zwischenleitungen von Stufe j nach Stufe $(j+1)$ ($j = 1, 2, \dots, S-1$) sind g e o r d n e t aufgelegt, wenn jeweils die Suchschritte Nr. $1, 2, \dots, k_1$ der Koppelvielfache in Stufe j in die gleichnamigen Koppelvielfache Nr. $1, 2, \dots, k_1$ in Stufe $(j+1)$ führen.

Die Zwischenleitungen von Stufe j nach Stufe $(j+1)$ ($j = 1, 2, \dots, S-1$) sind z y k l i s c h v e r t a u s c h t aufgelegt, wenn die Suchschritte Nr. $1, 2, \dots, k_1$ von Koppelvielfach Nr. 1 in Stufe j zu den Koppelvielfachen Nr. $1, 2, \dots, k_1$ in Stufe $(j+1)$ führen, die Suchschritte Nr. $1, 2, \dots, k_1$ von Koppelvielfach Nr. 2 in Stufe j zu den Koppelvielfachen Nr. $2, 3, \dots, k_1, 1$ in Stufe $(j+1)$ führen usw..

A.1 Zweistufige Systeme

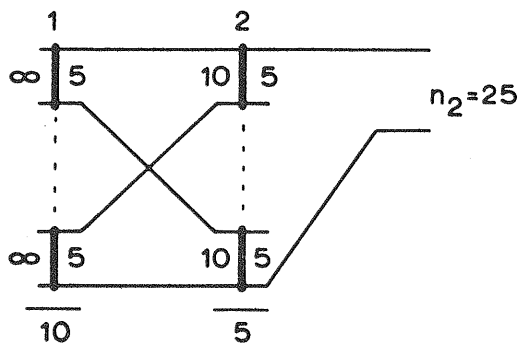
1.1 L 2024; Mischwahl



Zwischenleitungen: geordnet aufgelegt
Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1:
zufällig
Als Beispiel verwendet in den Abschnitten:
III.2.5, VI.6, VII.2.5, IX.7, X.3.

Bild A.1 System L 2024

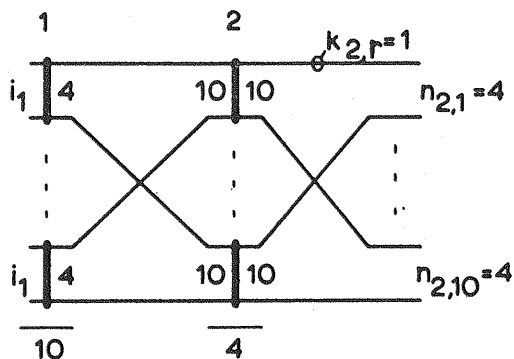
1.2 MpI9a; Mischwahl



Zwischenleitungen: zyklisch vertauscht aufgelegt
Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1:
geordnet
Als Beispiel verwendet in den Abschnitten:
V.4.6, VI.6, VII.2.5, IX.7, X.3.

Bild A.2 System MpI9a

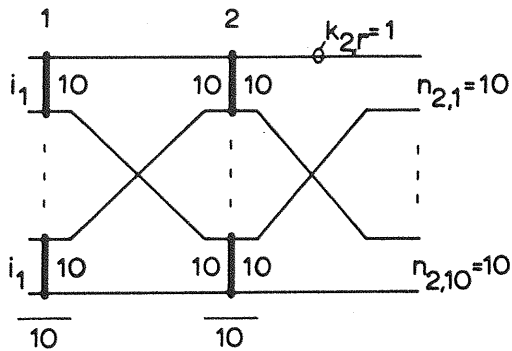
1.3 L 2034; Richtungswahl; symmetrische Richtungsaufteilung



Zwischenleitungen: zyklisch vertauscht aufgelegt
Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1:
geordnet
Als Beispiel verwendet in den Abschnitten:
III.3.5, IV.2.6, IX.7, X.3.

Bild A.3 System L 2034

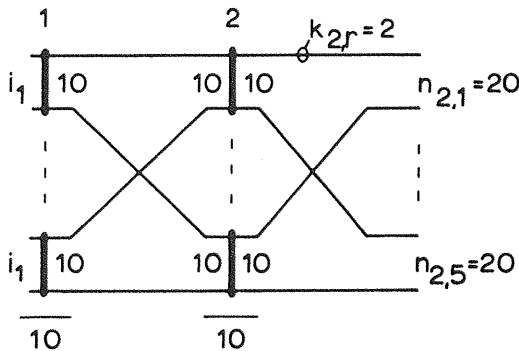
1.4 L 2022; Richtungswahl; symmetrische Richtungsaufteilung



Zwischenleitungen: zyklisch vertauscht aufgelegt
 Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1: geordnet
 Als Beispiel verwendet in den Abschnitten: IV.2.6, IV.3.5, V.2.12, V.2.20, V.5.4, V.6.5, VI.6, VII.3.6, IX.7, X.3.

Bild A,4 System L 2022

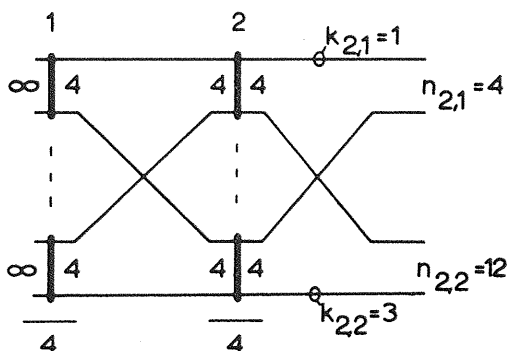
1.5 L 2033; Richtungswahl; symmetrische Richtungsaufteilung



Zwischenleitungen: zyklisch vertauscht aufgelegt
 Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1: geordnet
 Als Beispiel verwendet in den Abschnitten: V.2.12, V.2.20, IX.7, X.3.

Bild A,5 System L 2033

1.6 L 2001; Richtungswahl; keine symmetrische Richtungsaufteilung



Zwischenleitungen: zyklisch vertauscht aufgelegt
 Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1: geordnet
 Als Beispiel verwendet in den Abschnitten: V.2.12, V.2.20, IX.7, X.3.

Bild A,6 System L 2001

1.7 L 2032; Richtungswahl; symmetrische Richtungsaufteilung; Mischung der Ausgänge verschiedener Linkgruppen

Das System besteht aus vier Linkgruppen (ein Block ist identisch mit L 2022) mit je 10 Ausgängen für eine Richtung. Die 4·10 Ausgänge einer jeden Richtung aus v e r s c h i e d e n e n Systemgruppen sind auf e i n Abnehmerbündel gemischt (Neue vereinfachte

Normmischung).

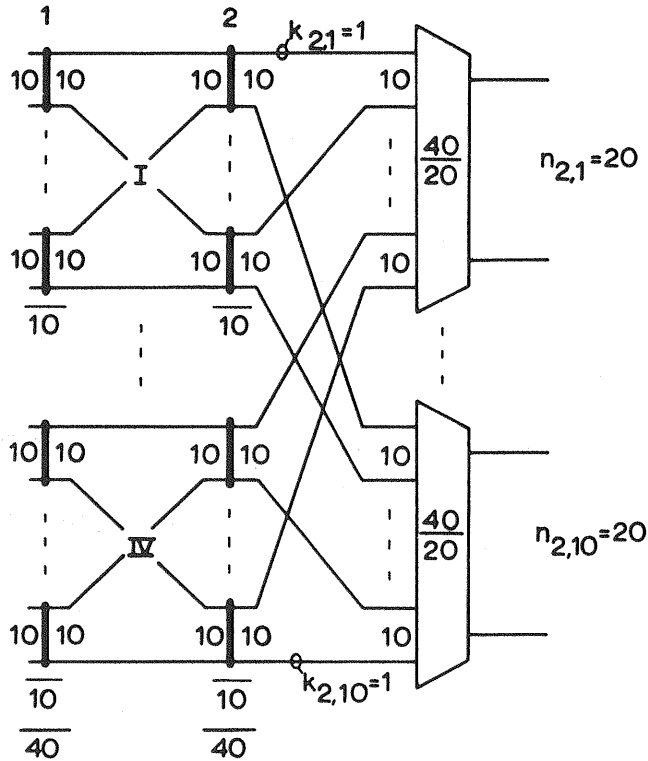


Bild A.7 System L 2032

Zwischenleitungen: geordnet aufgelegt

Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1: geordnet

Als Beispiel verwendet in den Abschnitten: V.2.12, V.2.20, IX.7, X.3.

A.2 Dreistufige Systeme

2.1 L 3006; Richtungswahl; symmetrische Richtungsauftellung

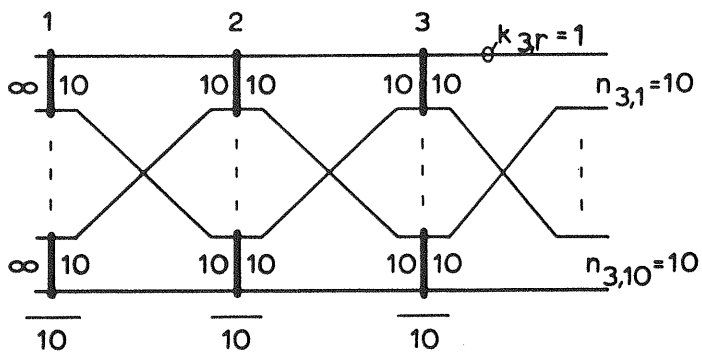


Bild A.8 System L 3006

Zwischenleitungen: zwischen sämtlichen Stufen geordnet aufgelegt

Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1: zufällig

Als Beispiel verwendet in den Abschnitten: V.2.12, IX.7.

2.2 L 3003

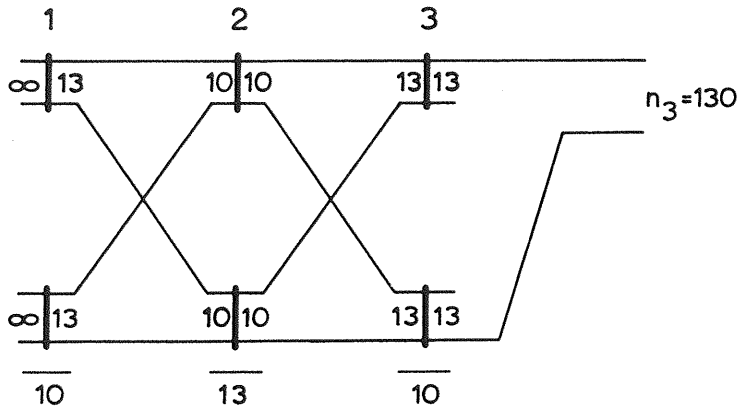


Bild A.9 System L 3003

Zwischenleitungen: zwischen sämtlichen Stufen zyklisch vertauscht aufgelegt
 Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1: geordnet
 Als Beispiel verwendet in den Abschnitten: IV.3.5, V.5.4, V.6.5, VII.3.6.

A.3 Vierstufige Systeme

3.1 L 4001; Richtungswahl; symmetrische Richtungsaufteilung

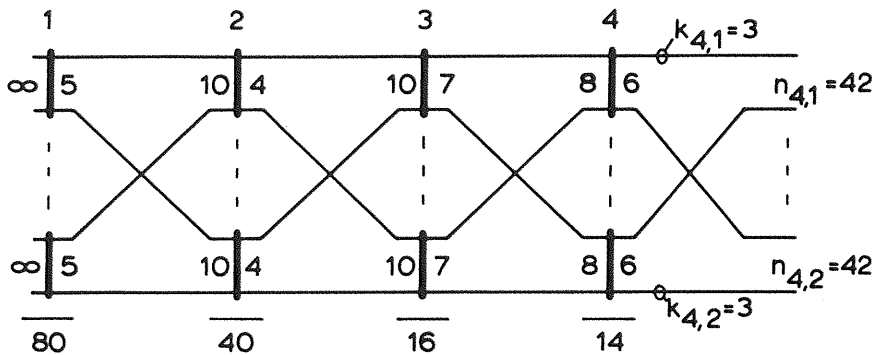


Bild A.10 System L 4001

Zwischenleitungen: Von Stufe 1 nach Stufe 2 geordnet aufgelegt
 von Stufe 2 nach Stufe 3 zyklisch vertauscht aufgelegt
 von Stufe 3 nach Stufe 4 zyklisch vertauscht aufgelegt
 Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1: zufällig
 Als Beispiel verwendet in Abschnitt IX.7.

3.2 L 4015; Richtungswahl; symmetrische Richtungsaufteilung

Zwischenleitungen: zwischen sämtlichen Stufen geordnet aufgelegt
 Absuchen der Koppelvielfache in Stufe 1: zufällig
 Als Beispiel verwendet in Abschnitt IX.7.

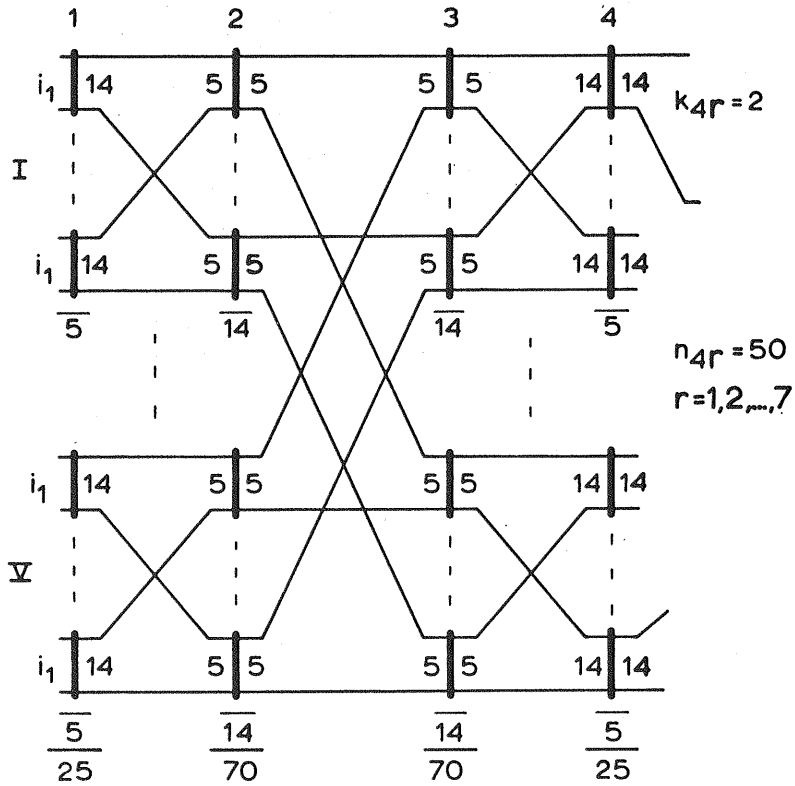


Bild A.11 System L 4015

Anhang B DIAGRAMME

Vorbemerkung: Die Vertrauensintervalle, der in die Diagramme eingetragenen Testpunkte \bar{I} , wurden für eine statistische Sicherheit von 0.95 nach der Student-Methode (t-Test) berechnet.

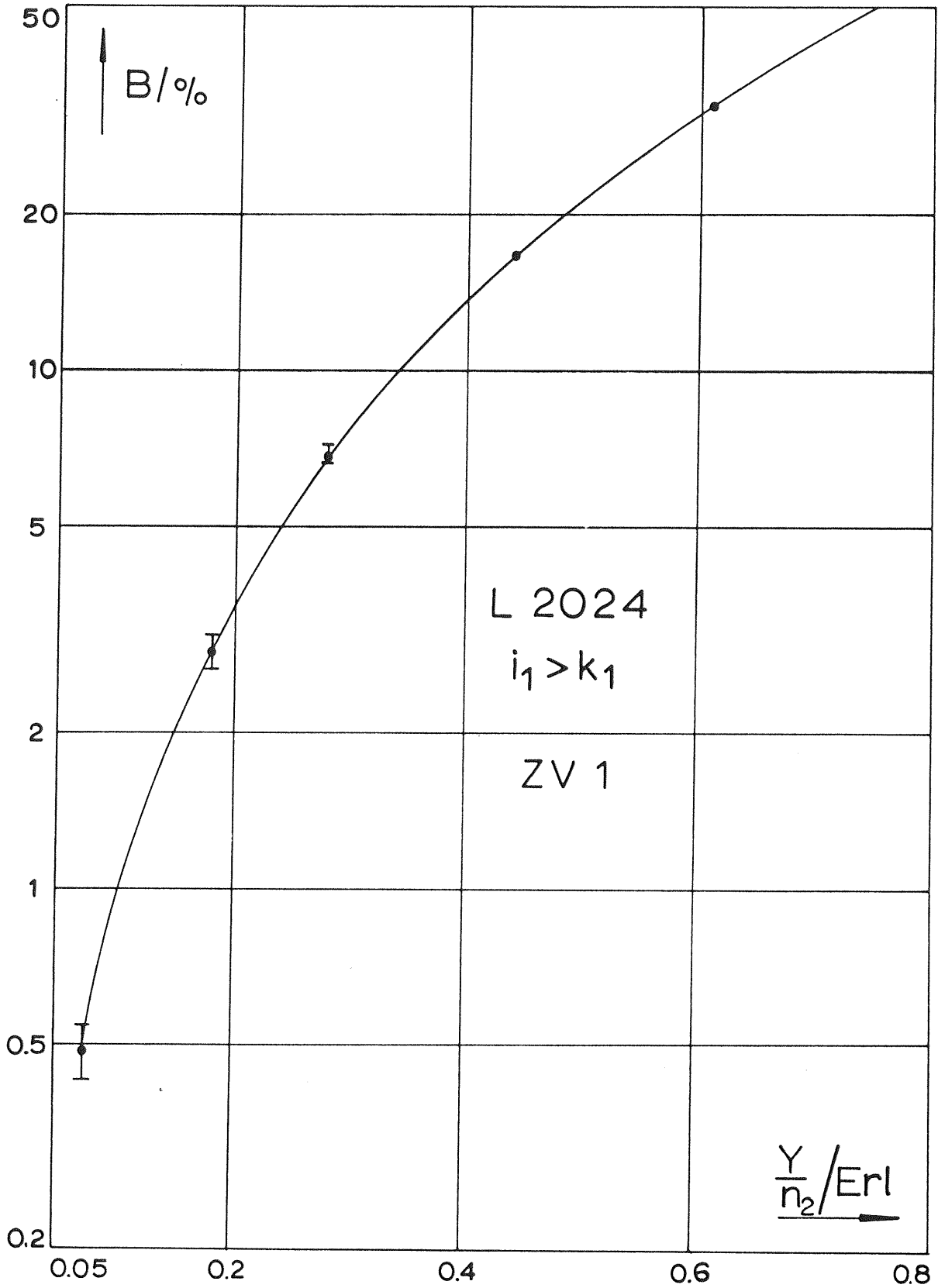


Diagramm III.1 Erklärung siehe Abschnitt III.2.5, Seite 23/25

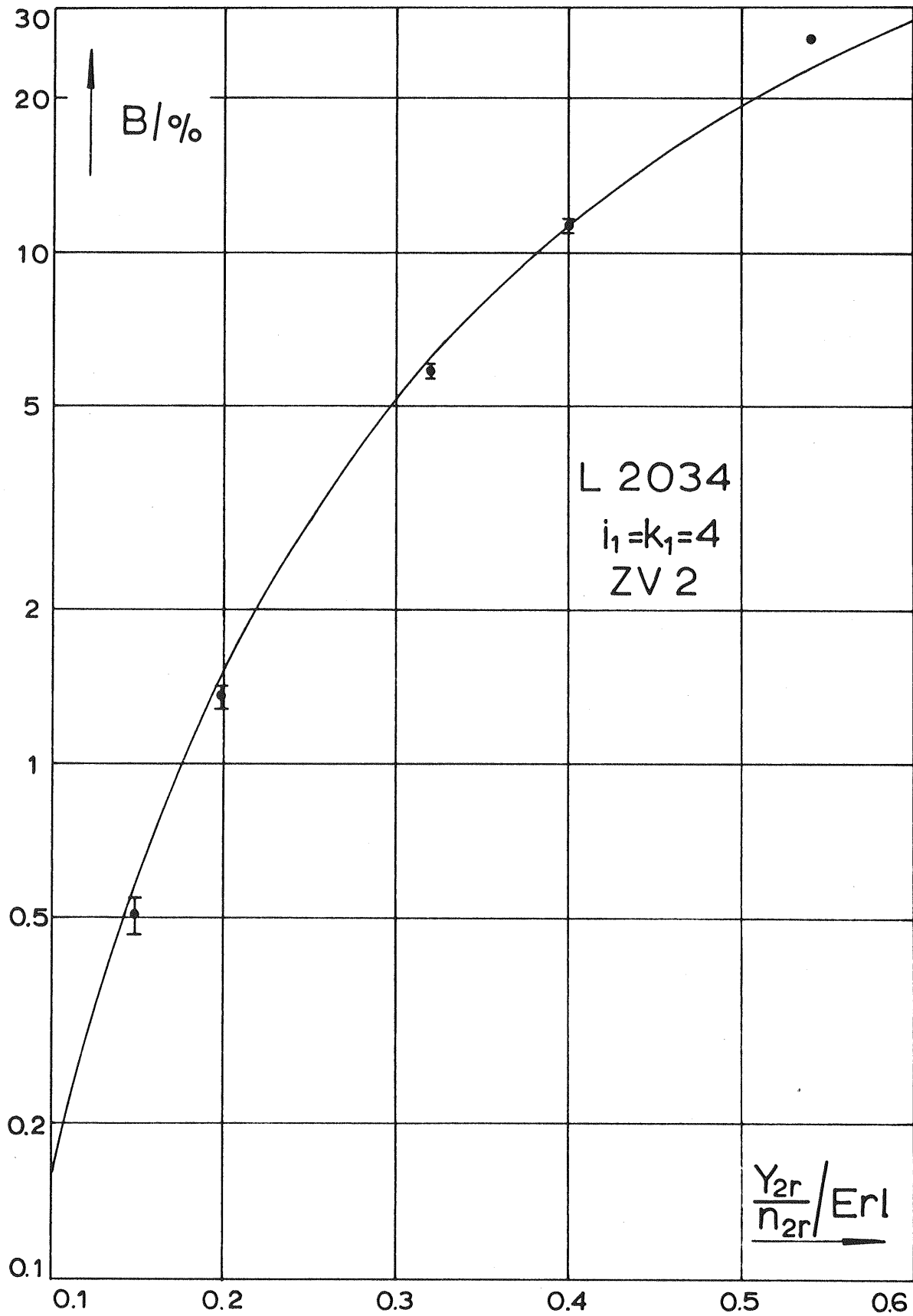


Diagramm III.2 Erklärung siehe Abschnitt III.3.5, Seite 34

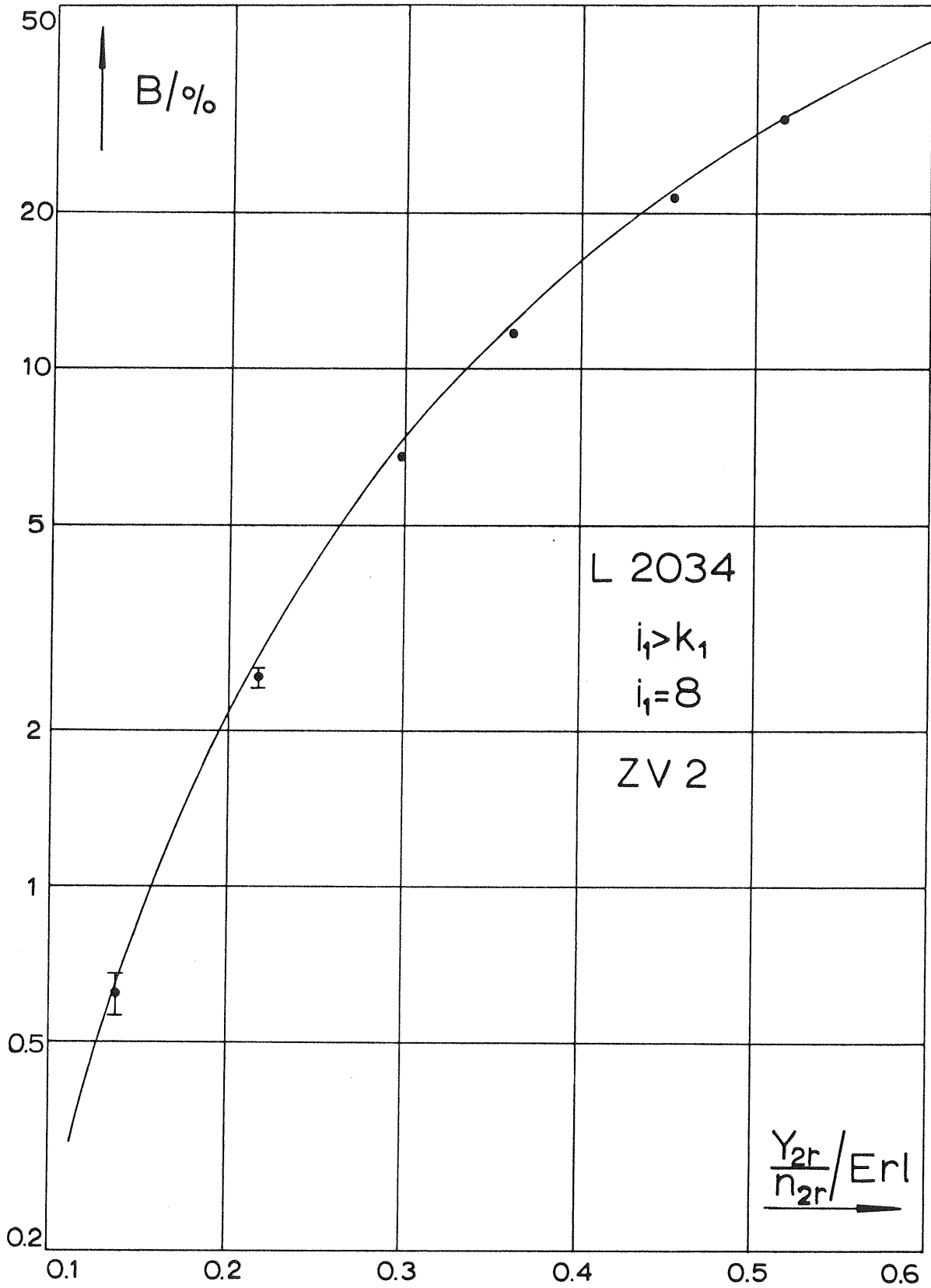


Diagramm III.3 Erklärung siehe Abschnitt III.3.5, Seite 34

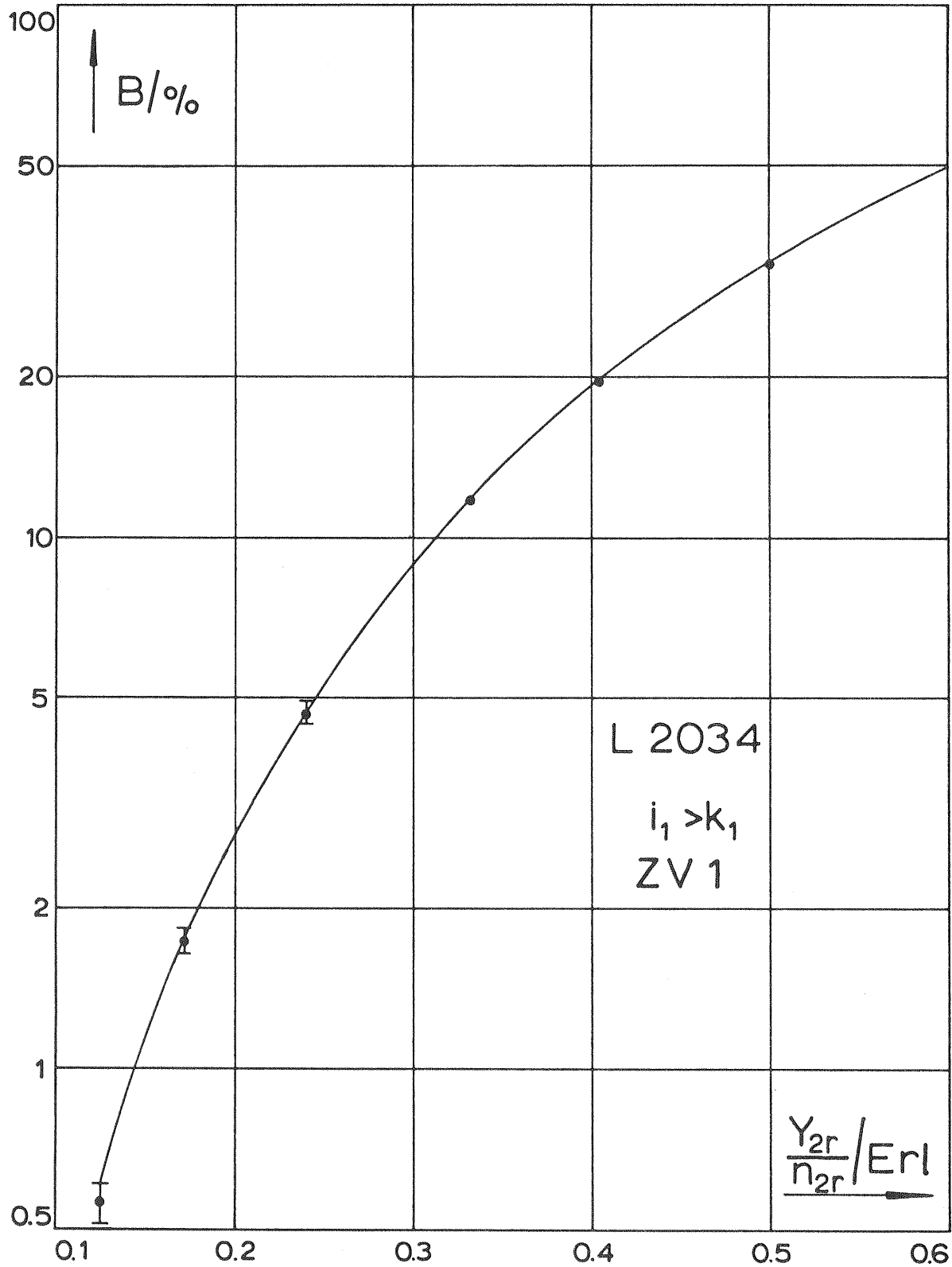


Diagramm III.4 Erklärung siehe Abschnitt III.3.5, Seite 34

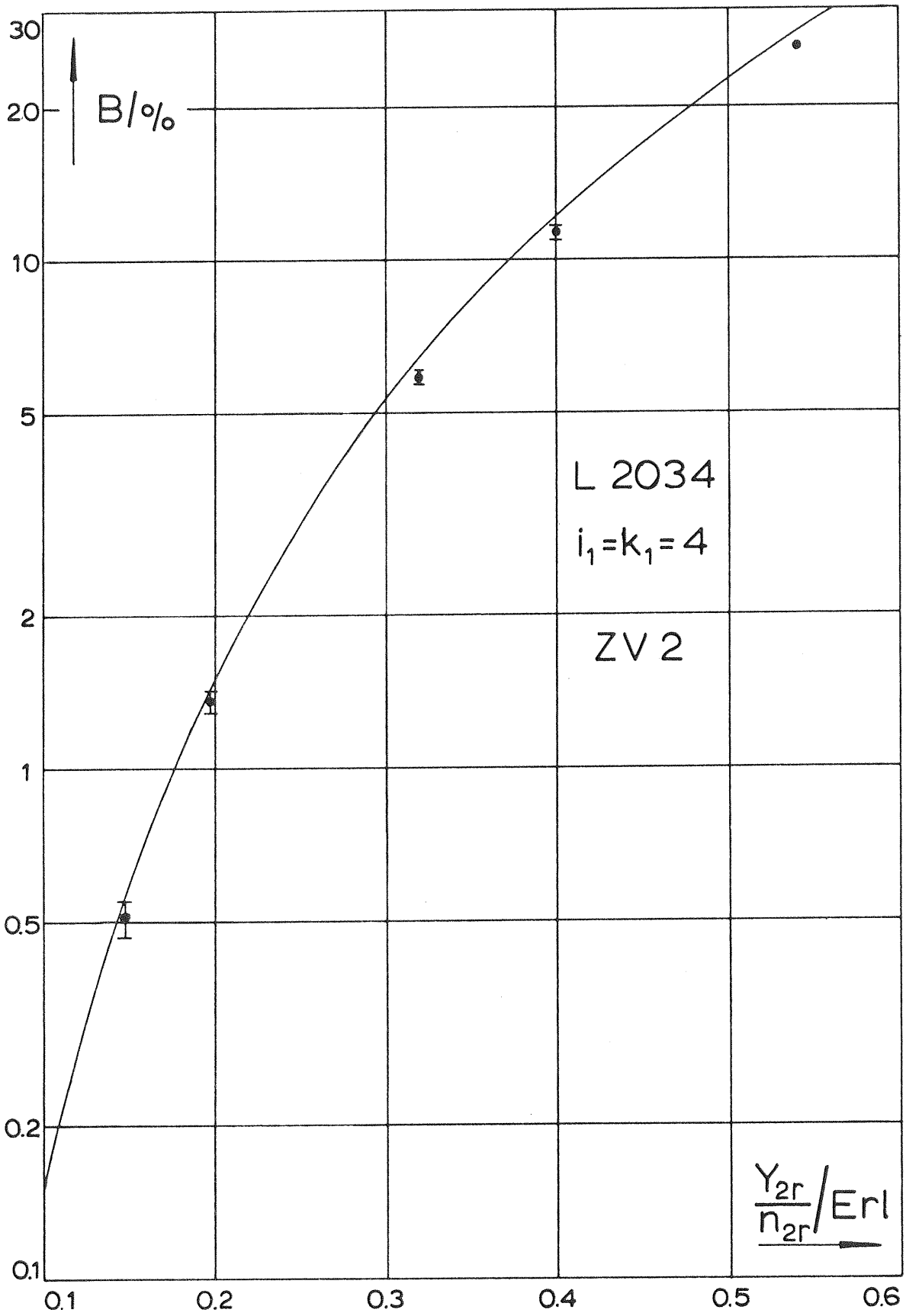


Diagramm IV.1 Erklärung siehe Abschnitt IV.2.6, Seite 49

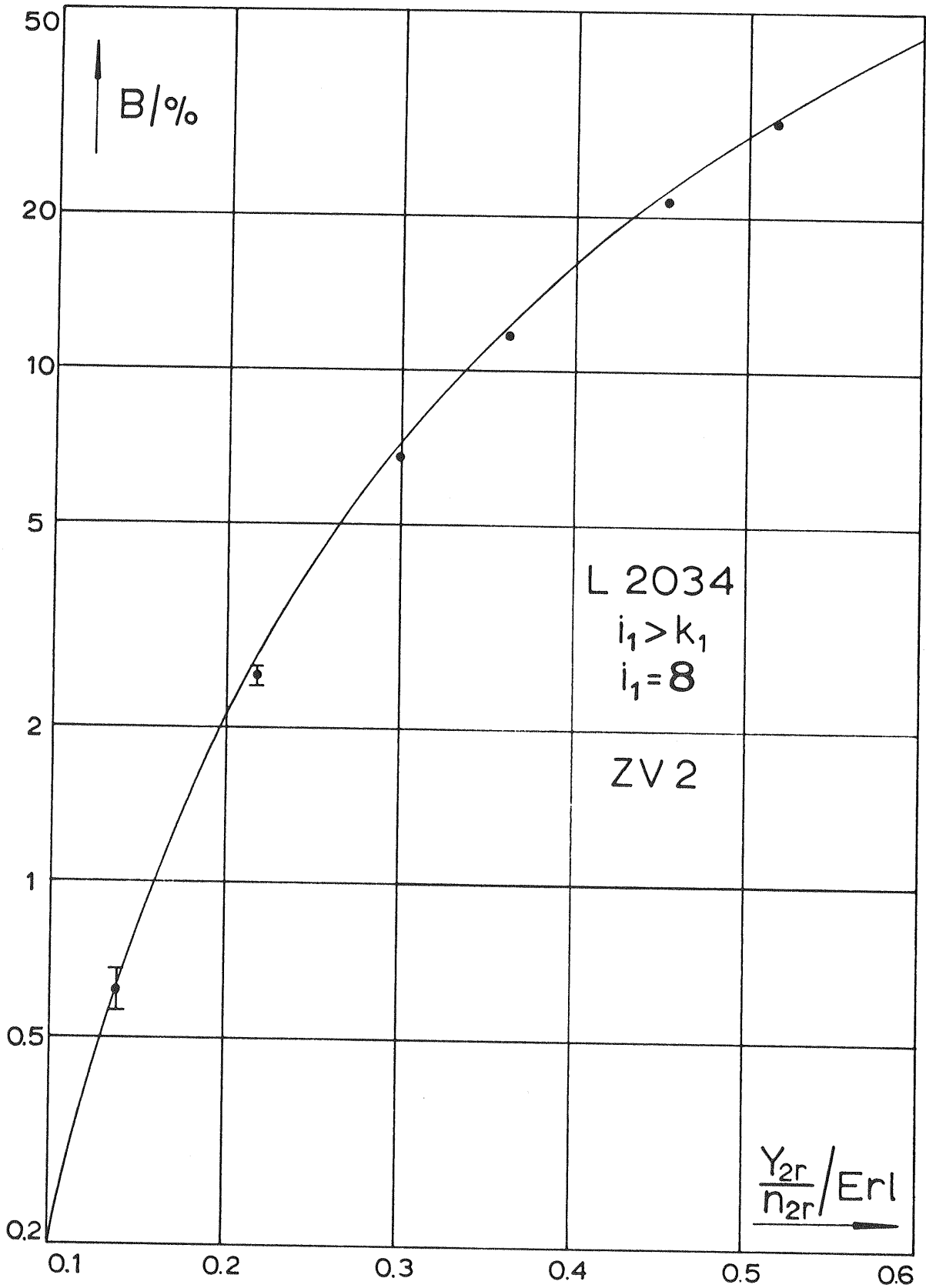


Diagramm IV.2 Erklärung siehe Abschnitt IV.2.6, Seite 49

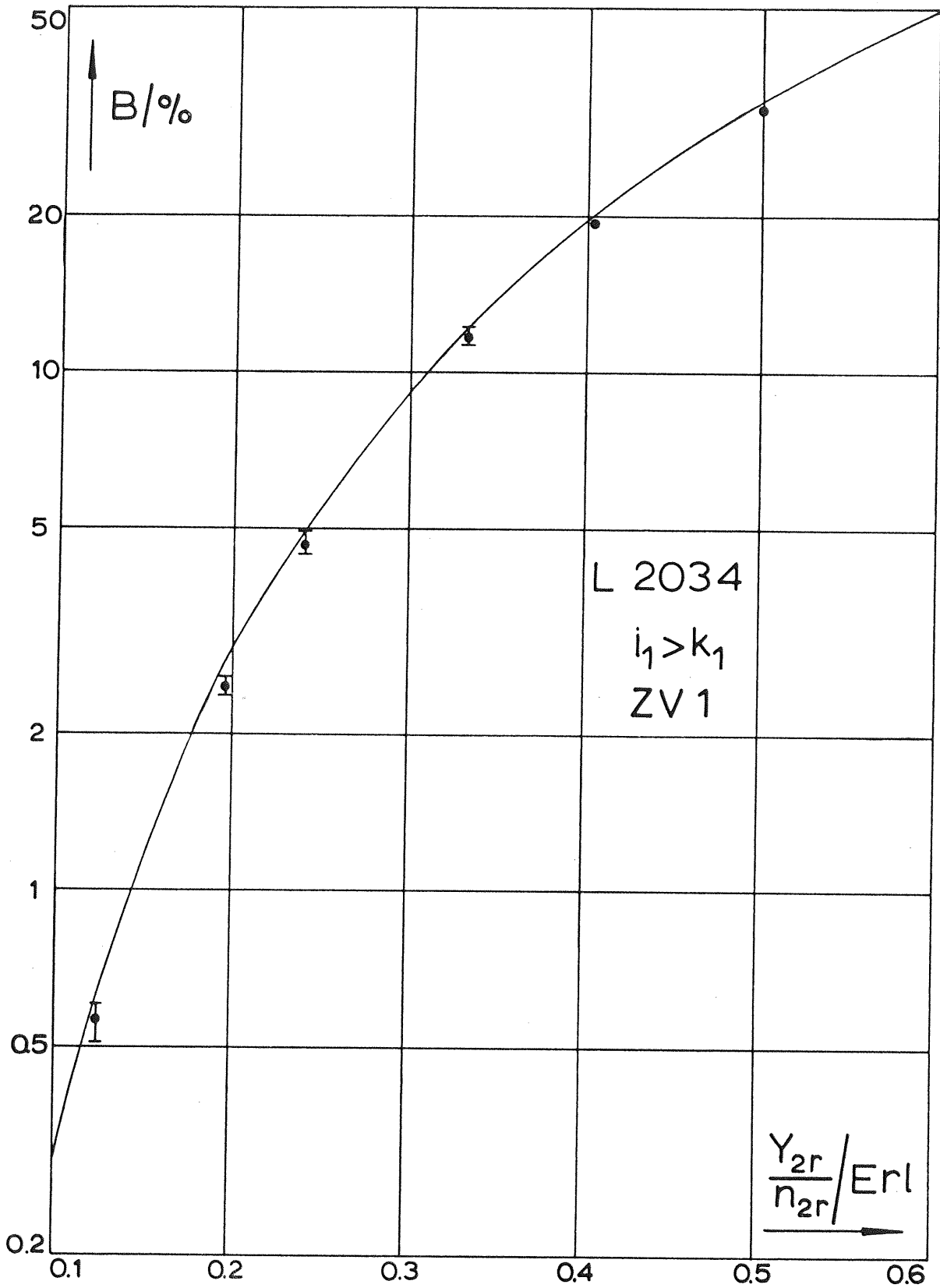


Diagramm IV.3 Erklärung siehe Abschnitt IV.2.6, Seite 49

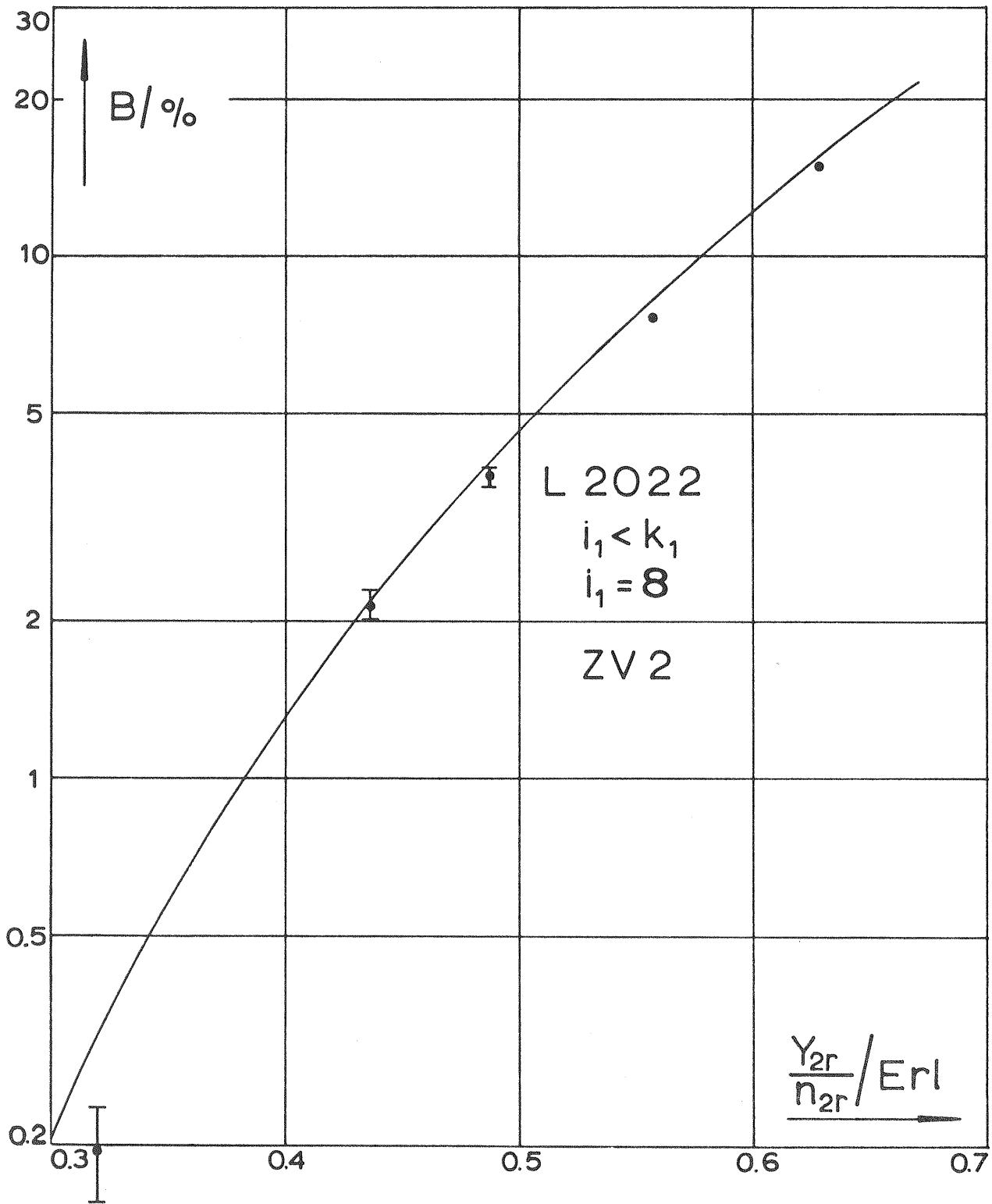


Diagramm IV.4 Erklärung siehe Abschnitt IV.2.6, Seite 49

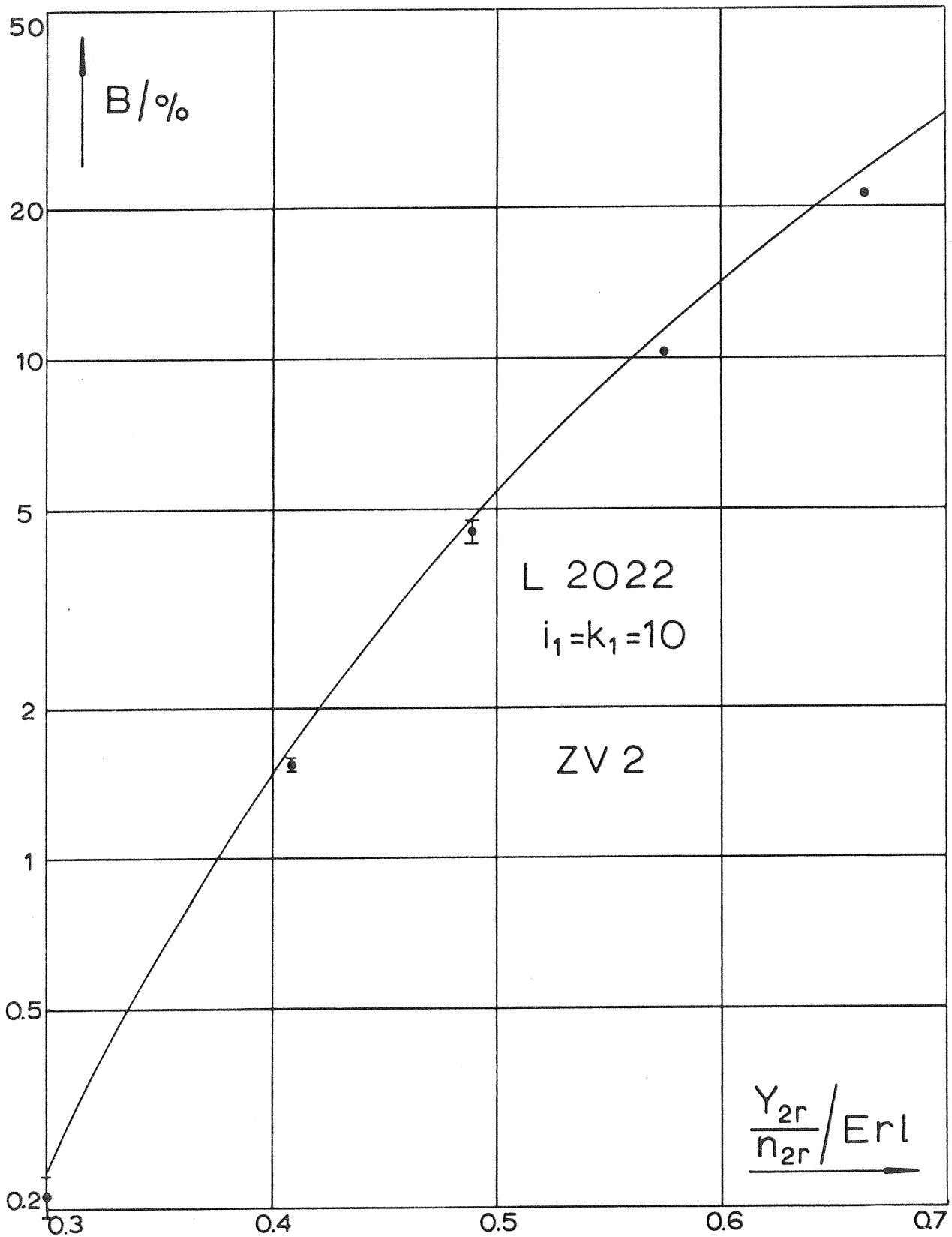


Diagramm IV.5 Erklärung siehe Abschnitt IV.2.6, Seite 49

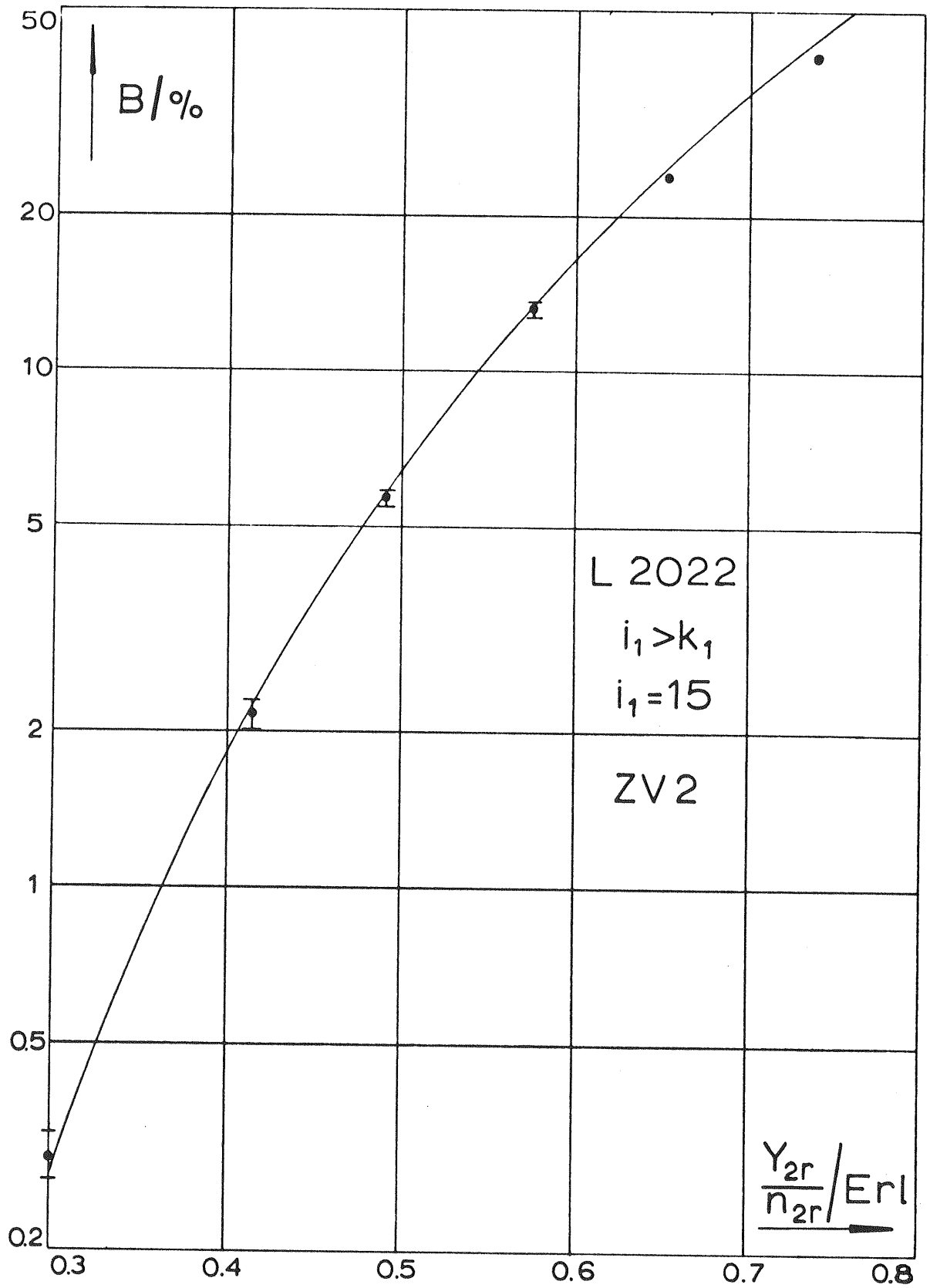


Diagramm IV.6 Erklärung siehe Abschnitt IV.2.6, Seite 49

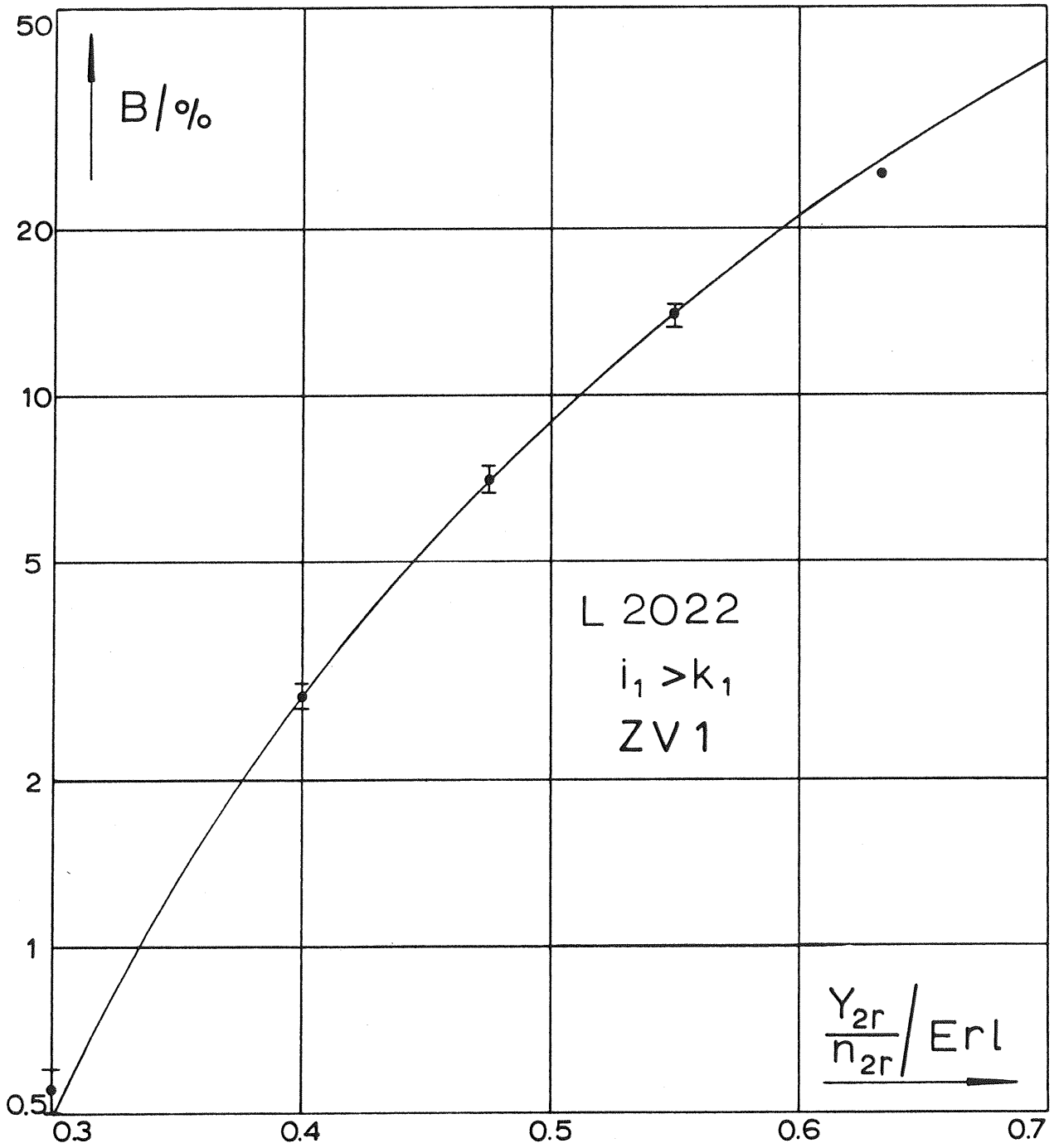


Diagramm IV.7 Erklärung siehe Abschnitt IV.2.6, Seite 49

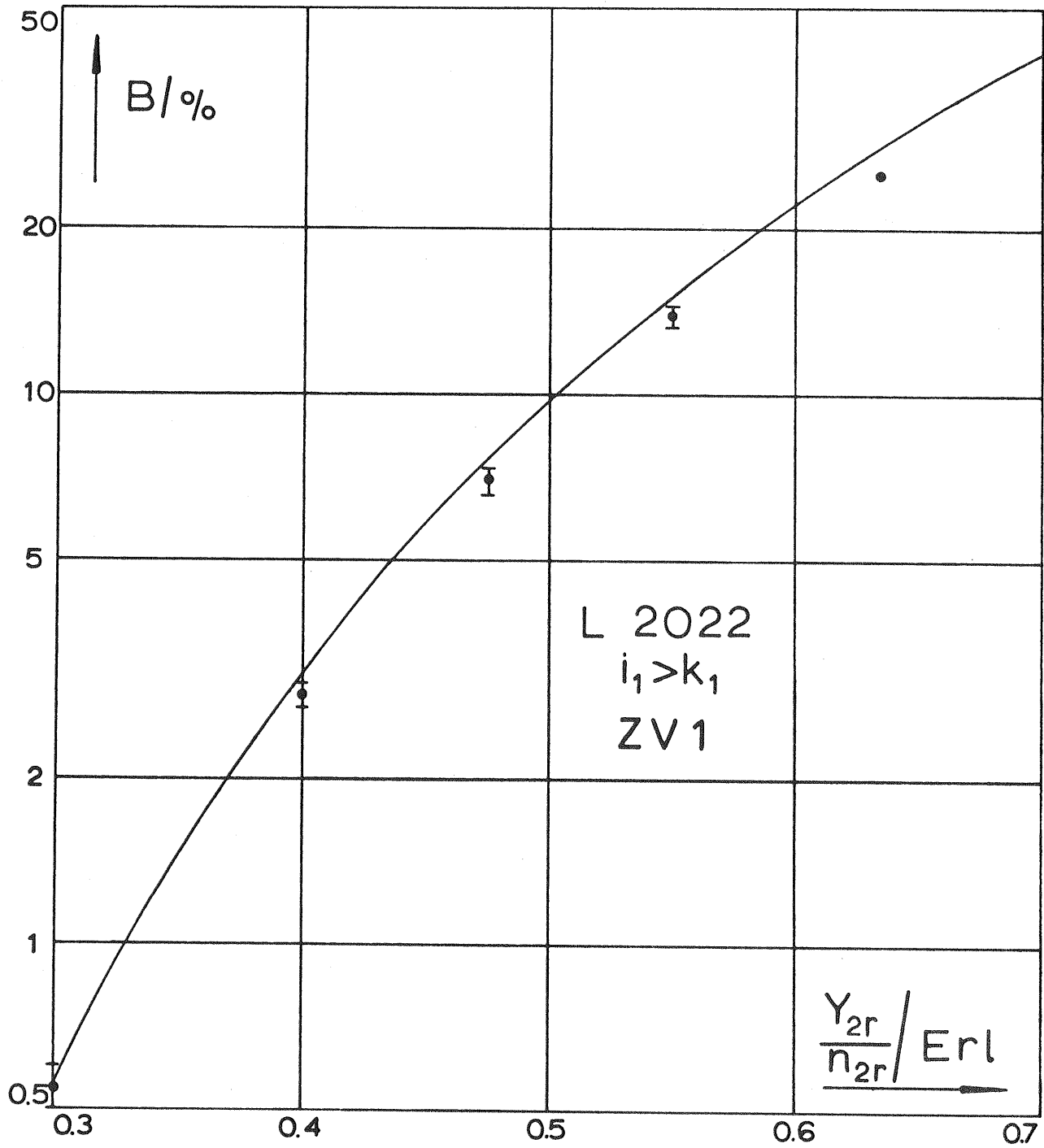


Diagramm IV.8 Erklärung siehe Abschnitt IV.3.5, Seite 56

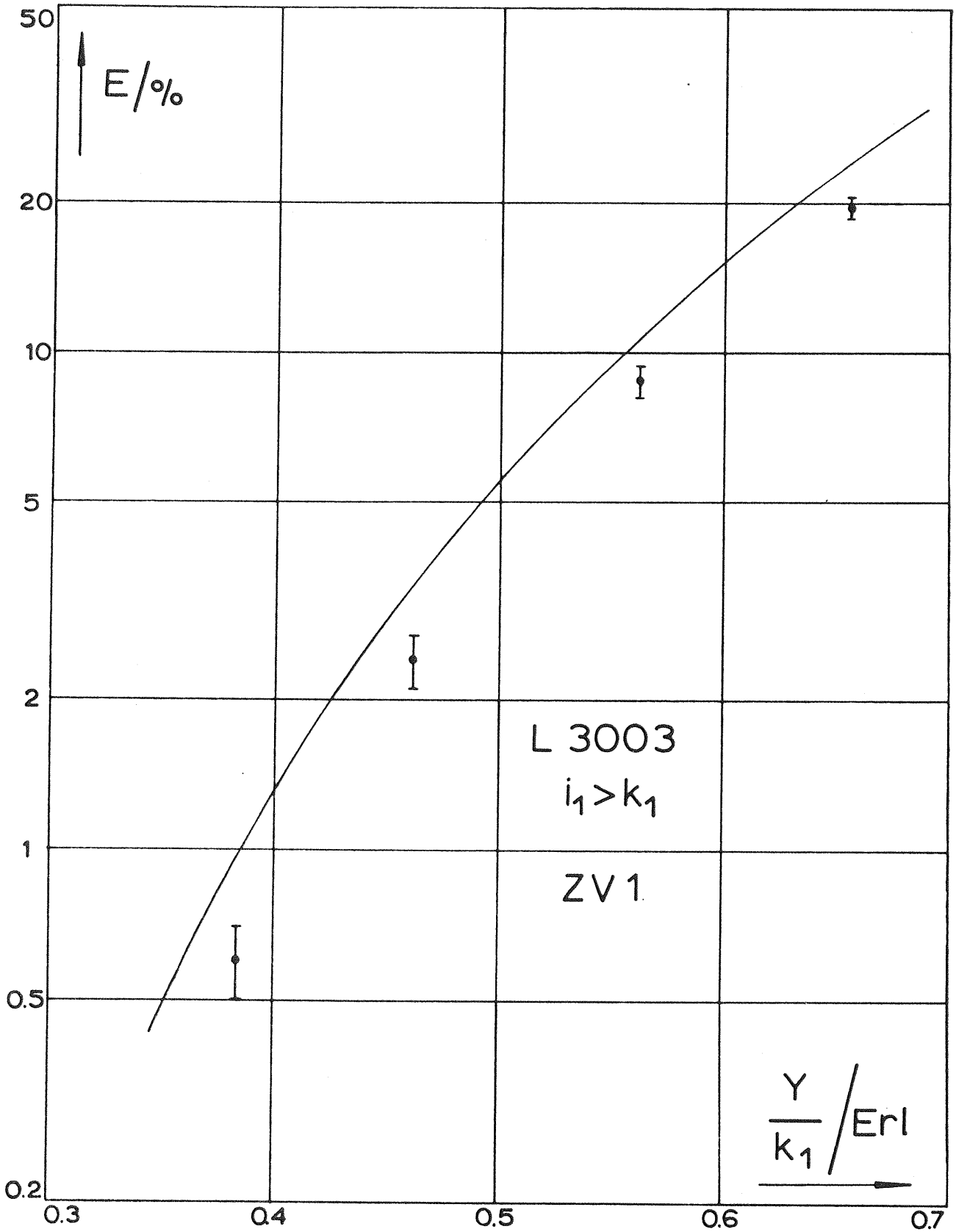


Diagramm IV.9 Erklärung siehe Abschnitt IV.3.5, Seite 56

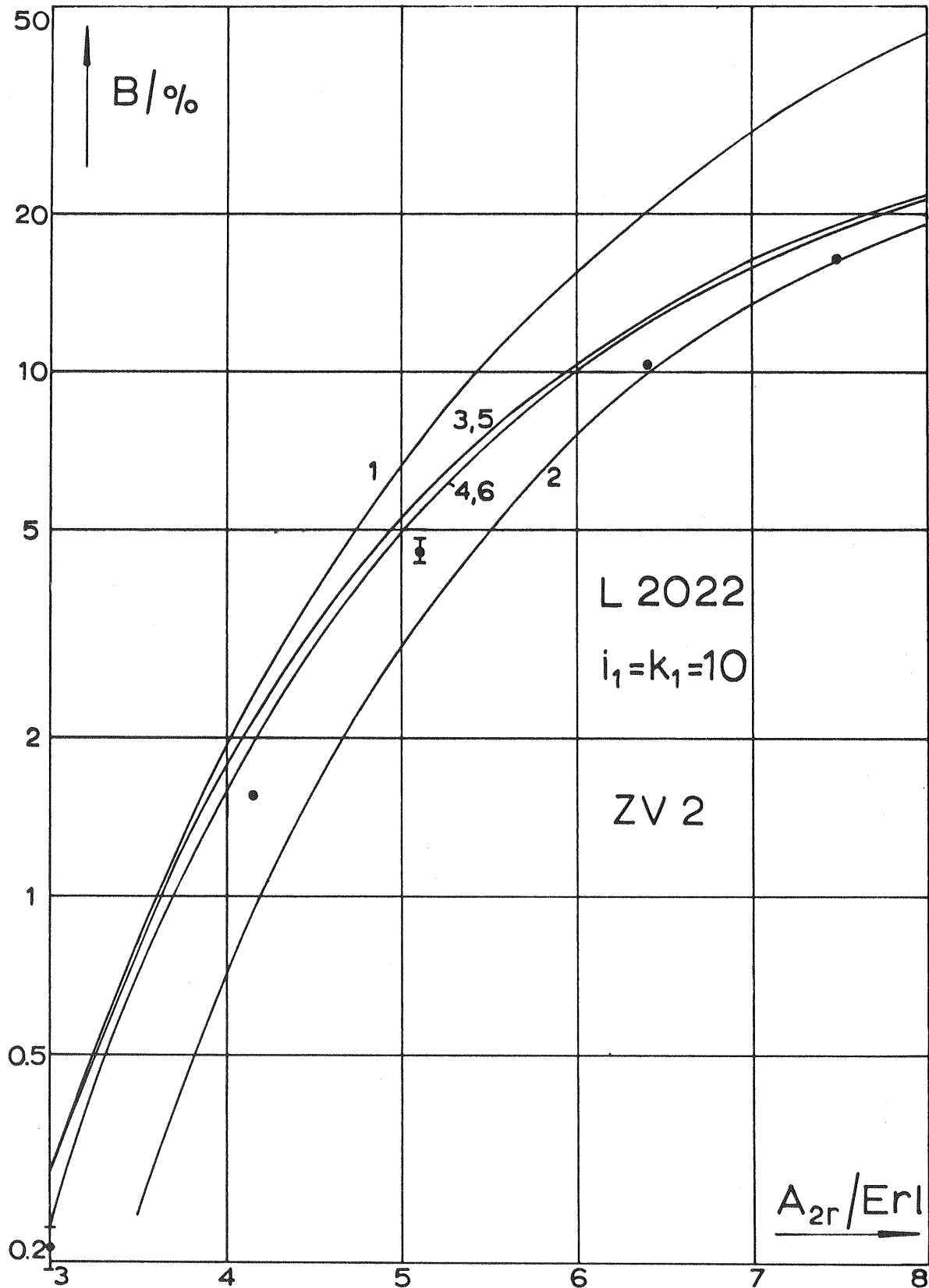


Diagramm V.1

Erklärungen Kurven 1,2 siehe Abschnitt V.2.12,
Seite 89
Erklärungen Kurven 3-6 siehe Abschnitt V.2.20,
Seite 103

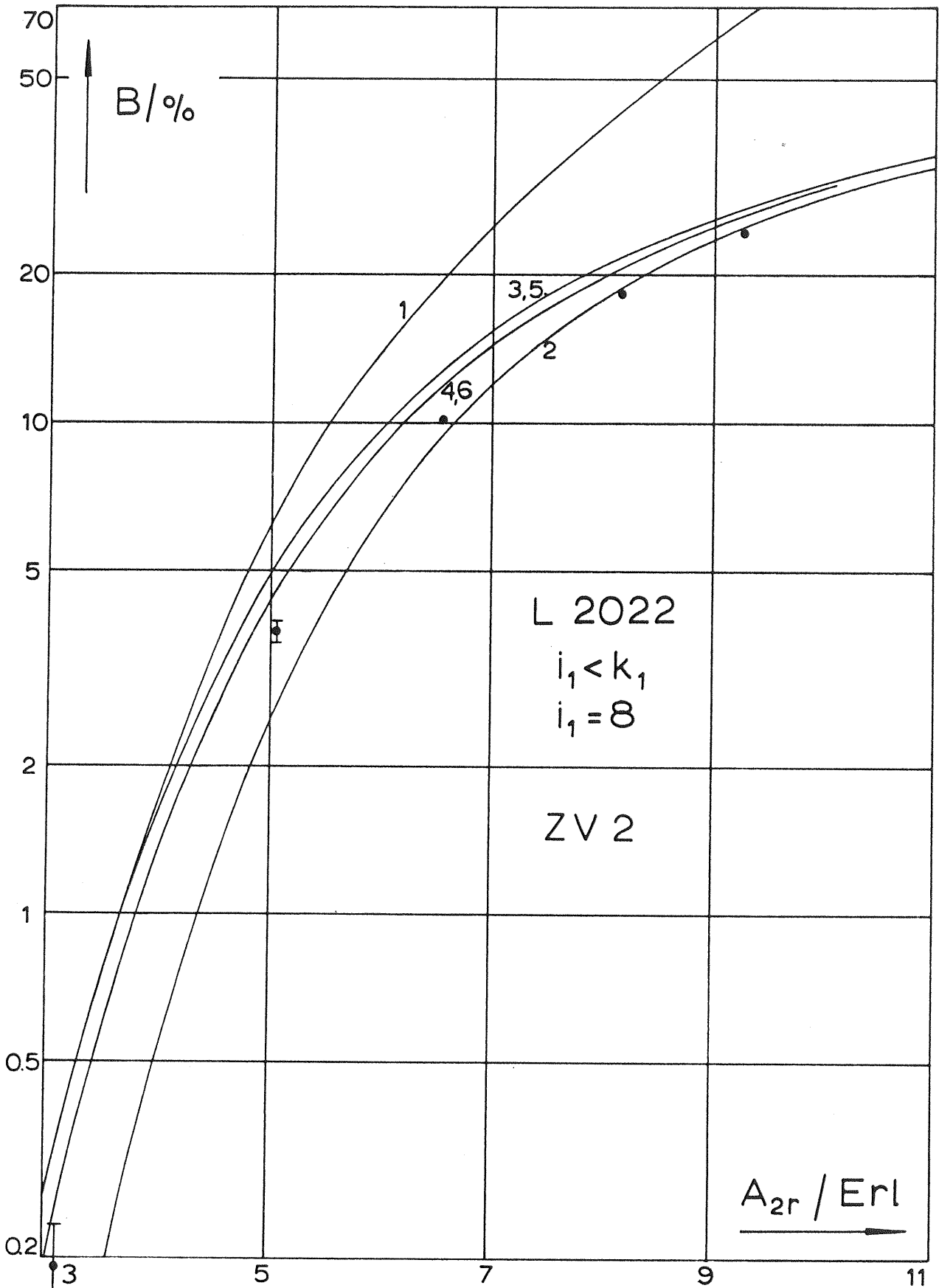


Diagramm V.2

Erklärungen Kurven 1,2 siehe Abschnitt V.2.12, Seite 89
Erklärungen Kurven 3-6 siehe Abschnitt V.2.20, Seite 104

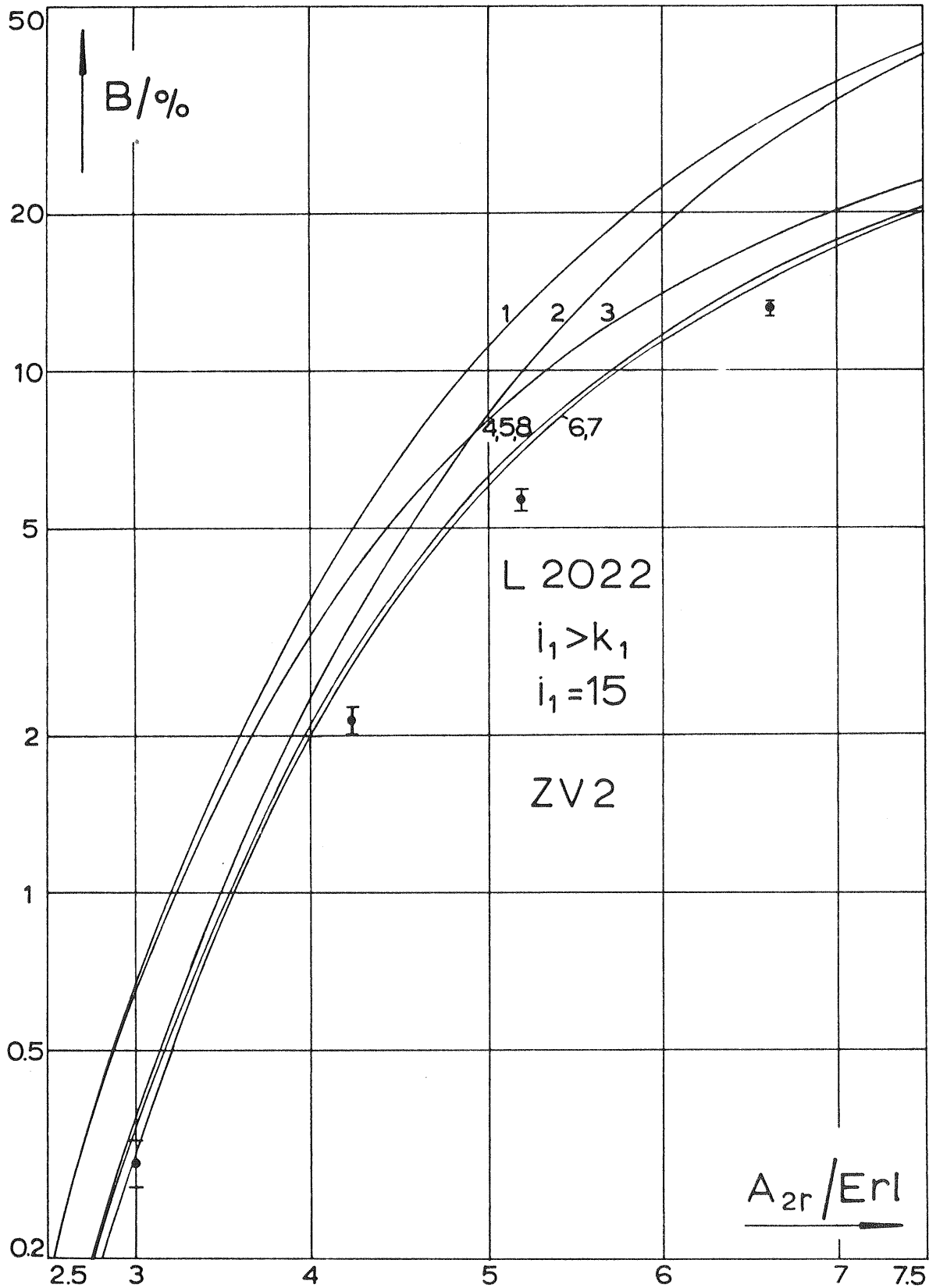


Diagramm V.3

Erklärungen Kurven 1,2 siehe Abschnitt V.2.12, Seite 89

Erklärungen Kurven 3-8 siehe Abschnitt V.2.20, Seite 104

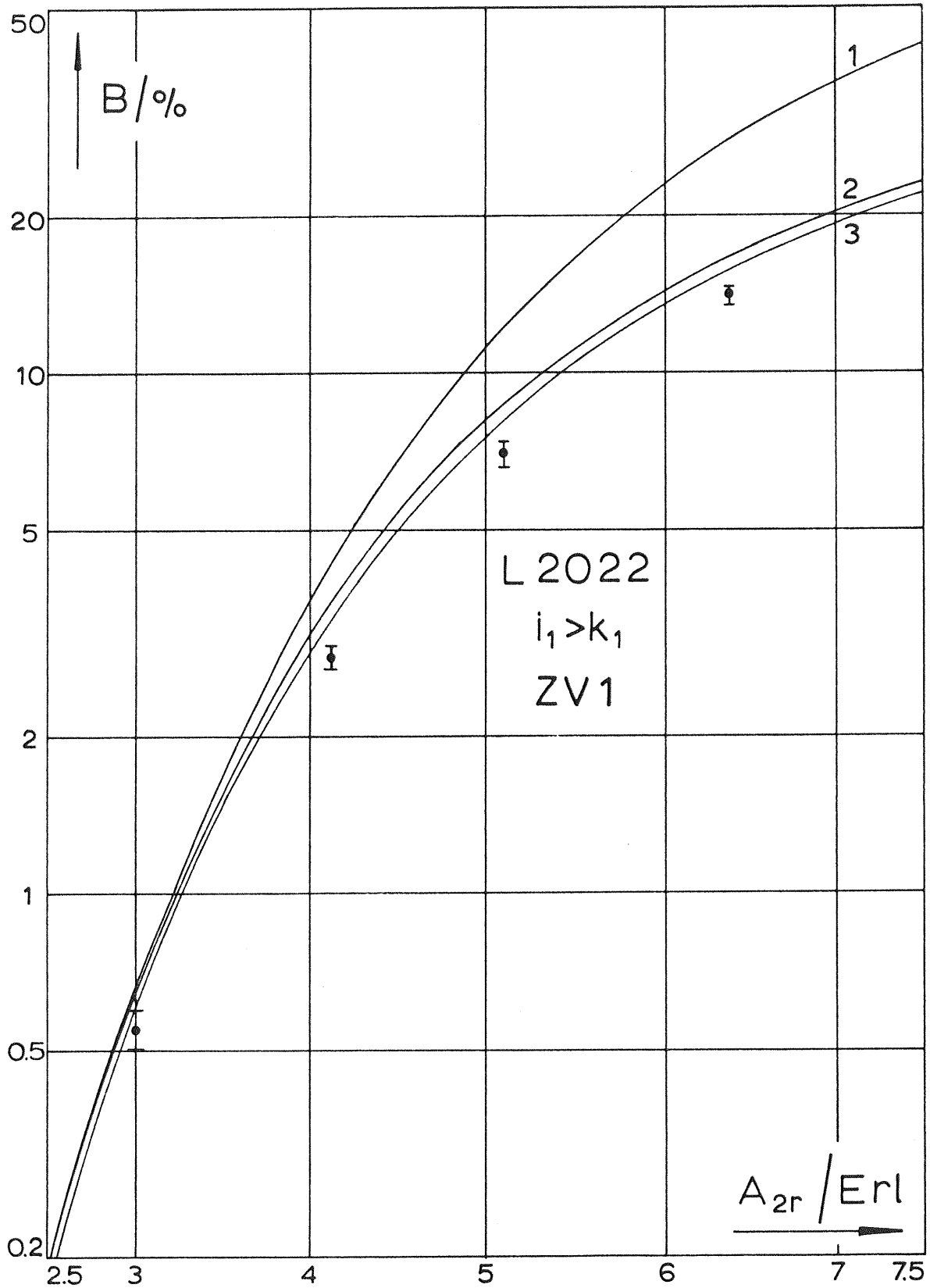


Diagramm V.4

Erklärungen Kurve 1 siehe Abschnitt V.2.12,
Seite 89
Erklärungen Kurven 2,3 siehe Abschnitt V.2.20,
Seite 104

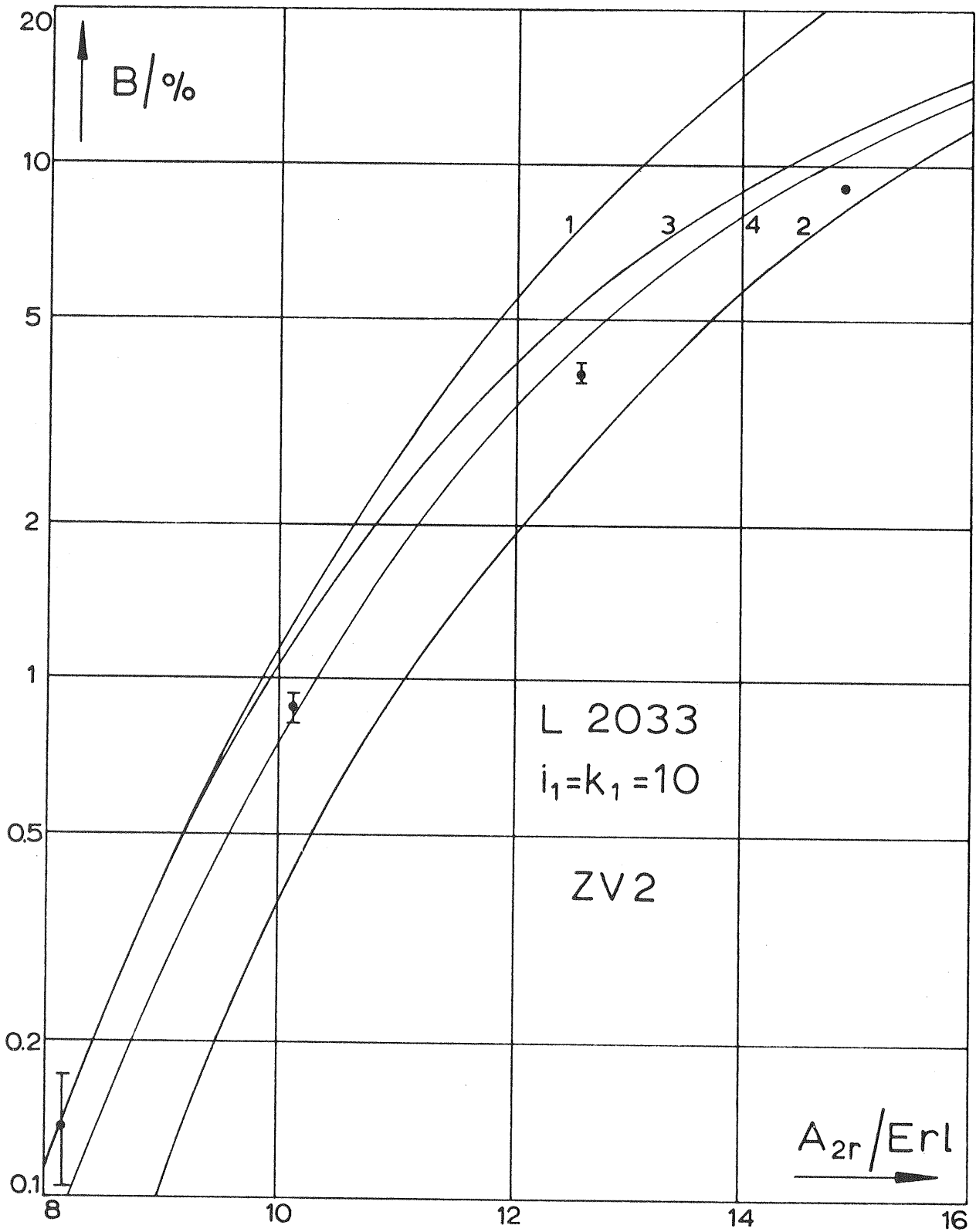


Diagramm V.5

Erklärungen Kurven 1,2 siehe Abschnitt V.2.12,
Seite 89
Erklärungen Kurven 3,4 siehe Abschnitt V.2.20,
Seite 104

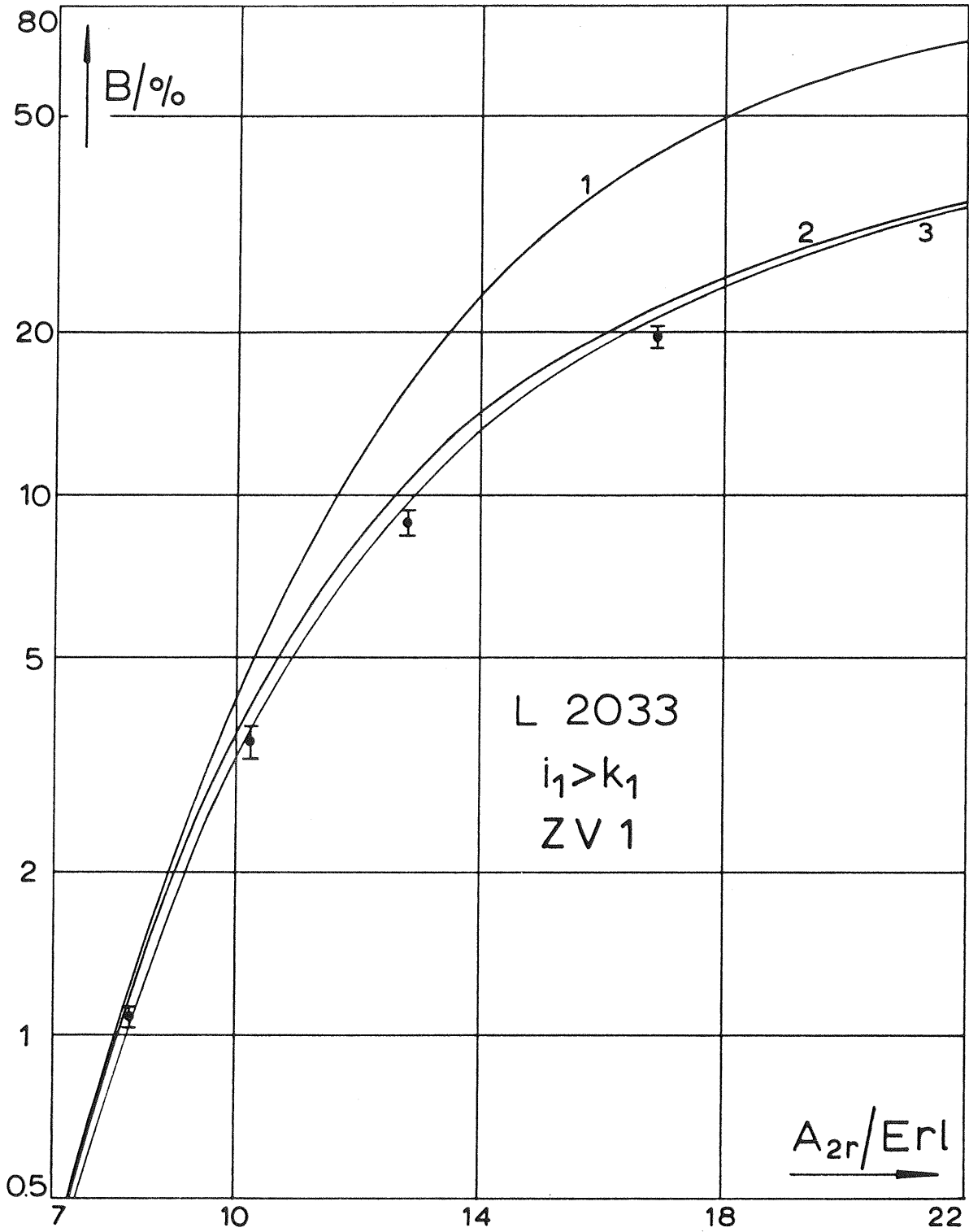


Diagramm V.6

Erklärungen Kurve 1 siehe Abschnitt V.2.12,
Seite 89
Erklärungen Kurven 2,3 siehe Abschnitt V.2.20,
Seite 105

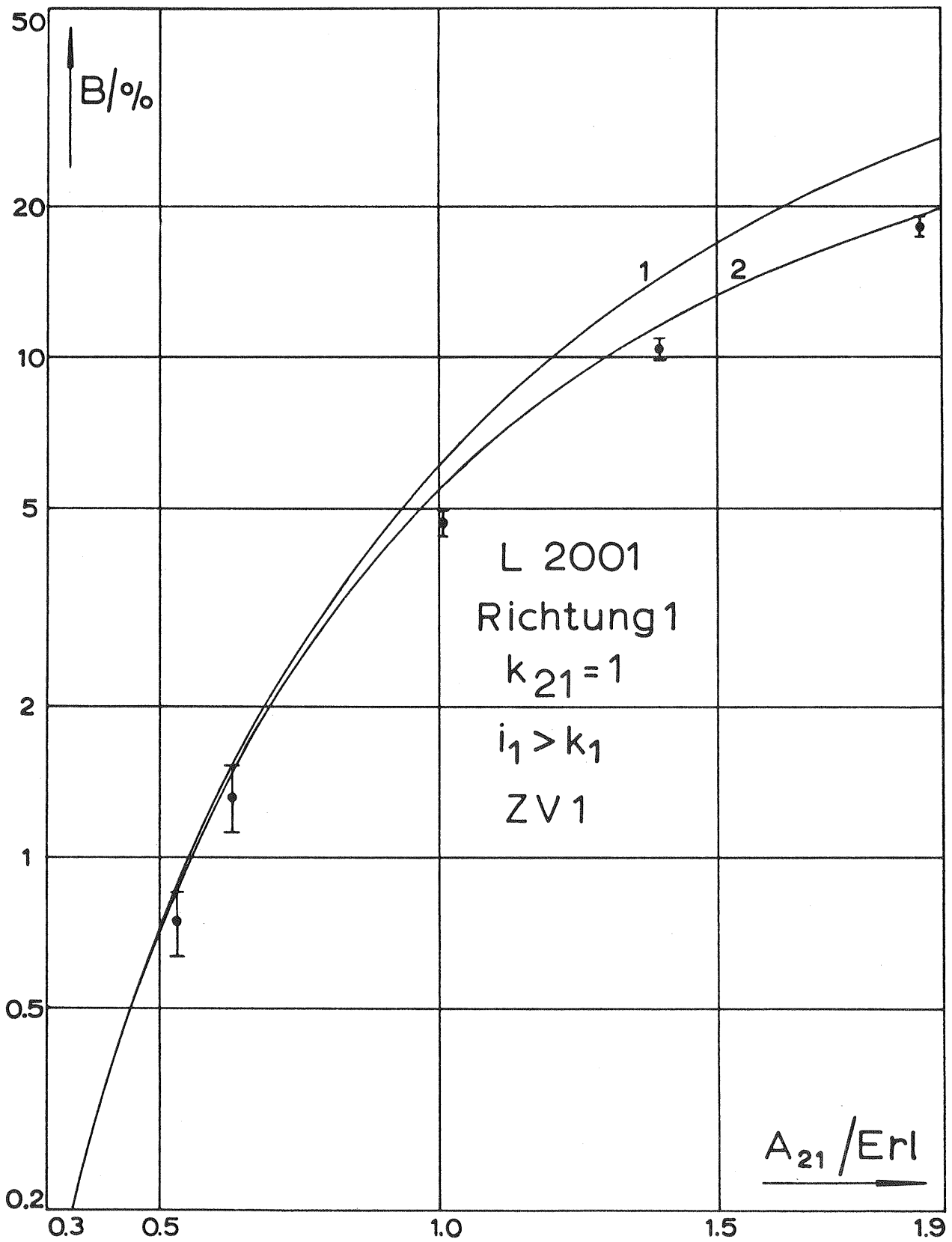


Diagramm V.7

Erklärungen Kurve 1 siehe Abschnitt V.2.12,
Seite 89
Erklärungen Kurve 2 siehe Abschnitt V.2.20,
Seite 105

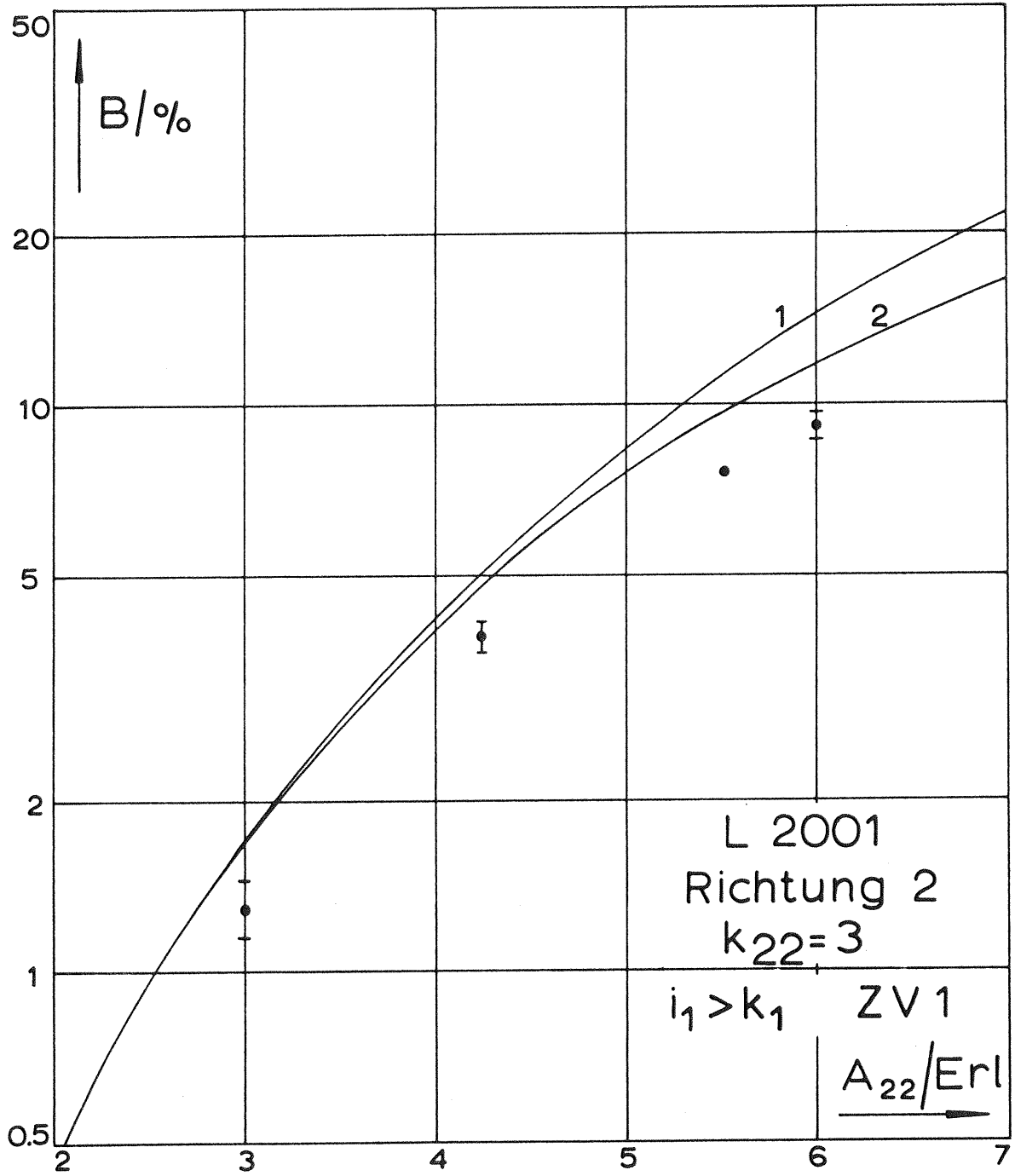


Diagramm V.8

Erklärungen Kurve 1 siehe Abschnitt V.2.12,
Seite 89
Erklärungen Kurve 2 siehe Abschnitt V.2.20,
Seite 105

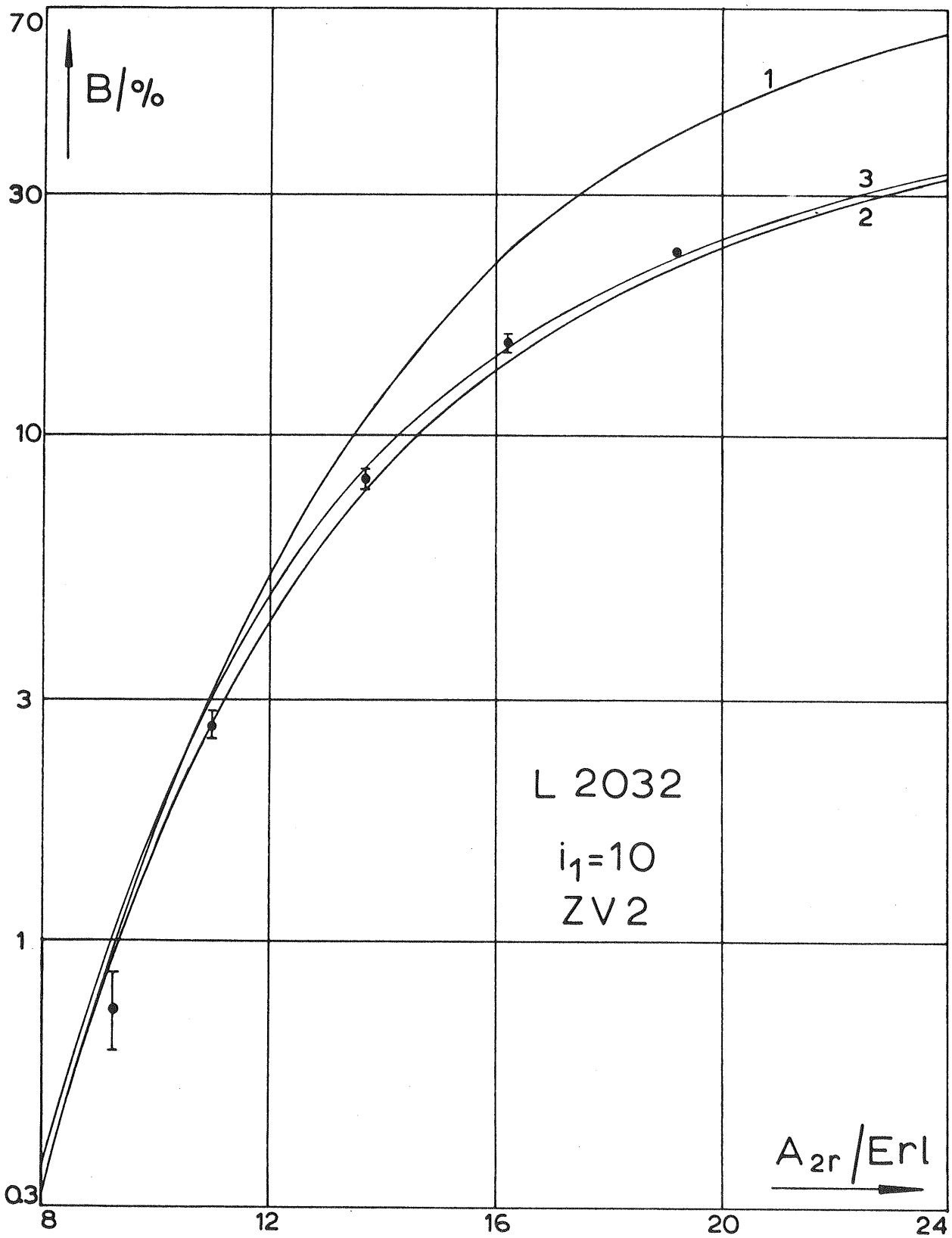


Diagramm V.9

Erklärungen Kurve 1 siehe Abschnitt V.2.12,
Seite 89

Erklärungen Kurven 2,3 siehe Abschnitt V.2.20,
Seite 105

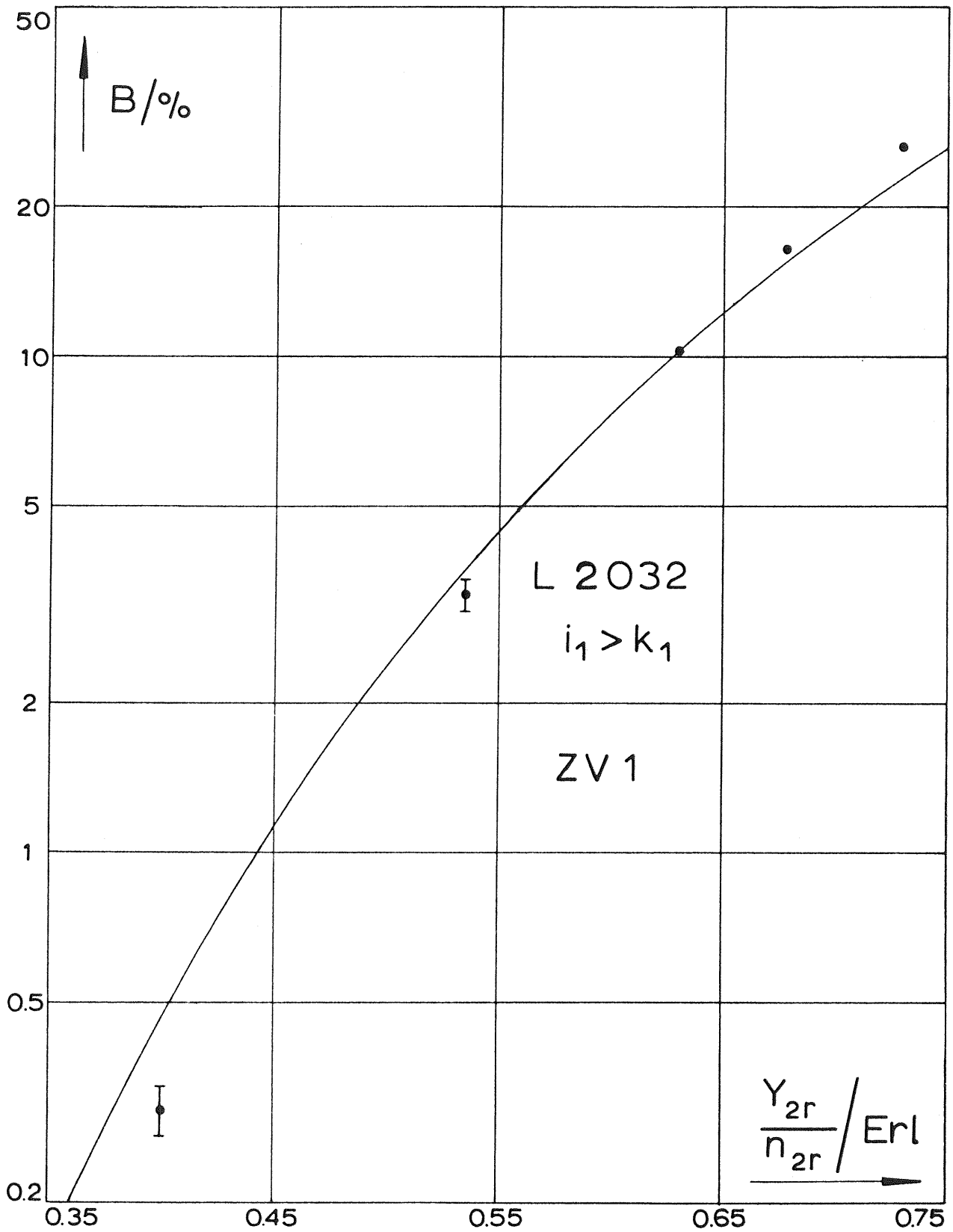


Diagramm V.10 Erklärungen siehe Abschnitt V.2.20, Seite 105

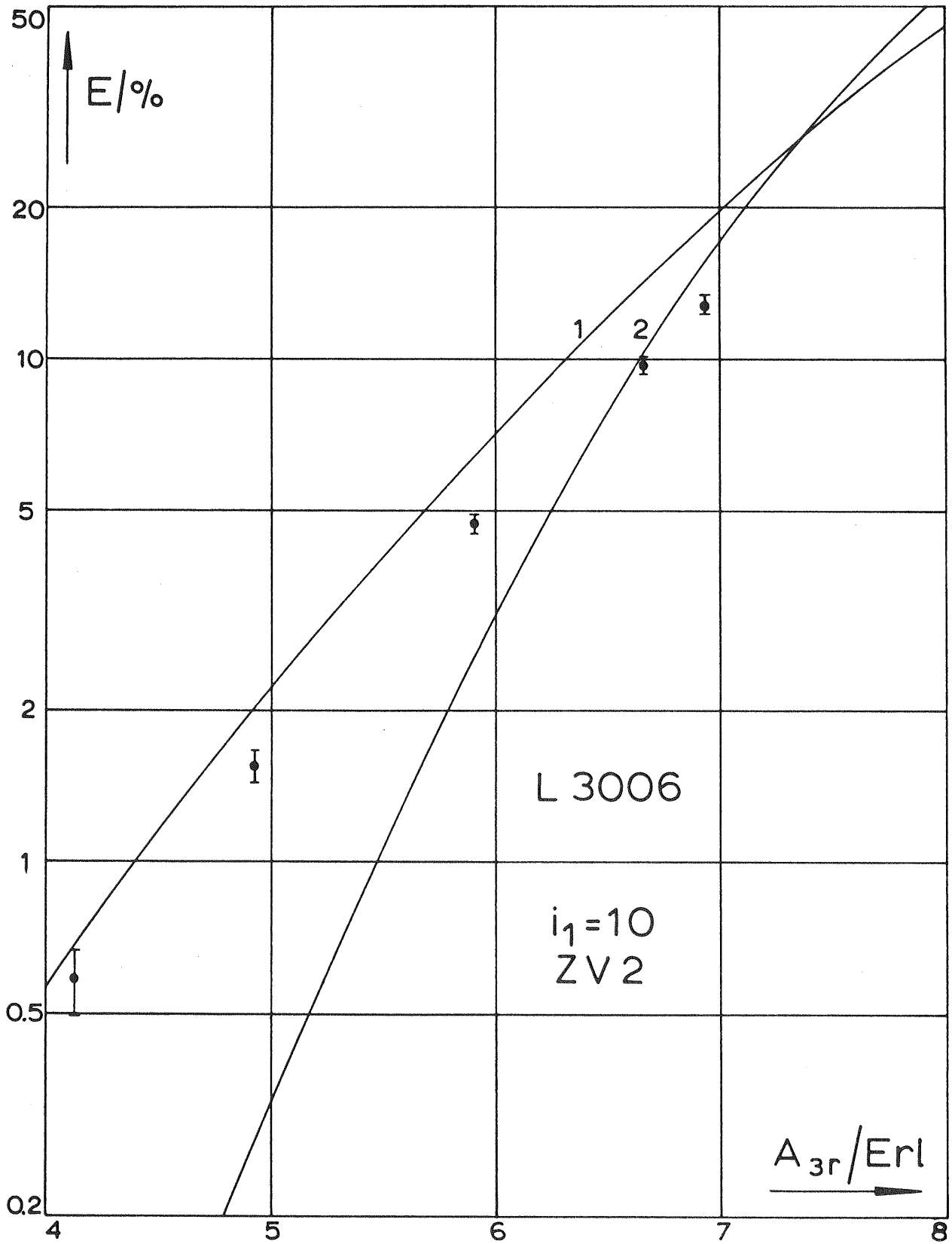


Diagramm V.11 Erklärungen siehe Abschnitt V.2.12, Seite 89

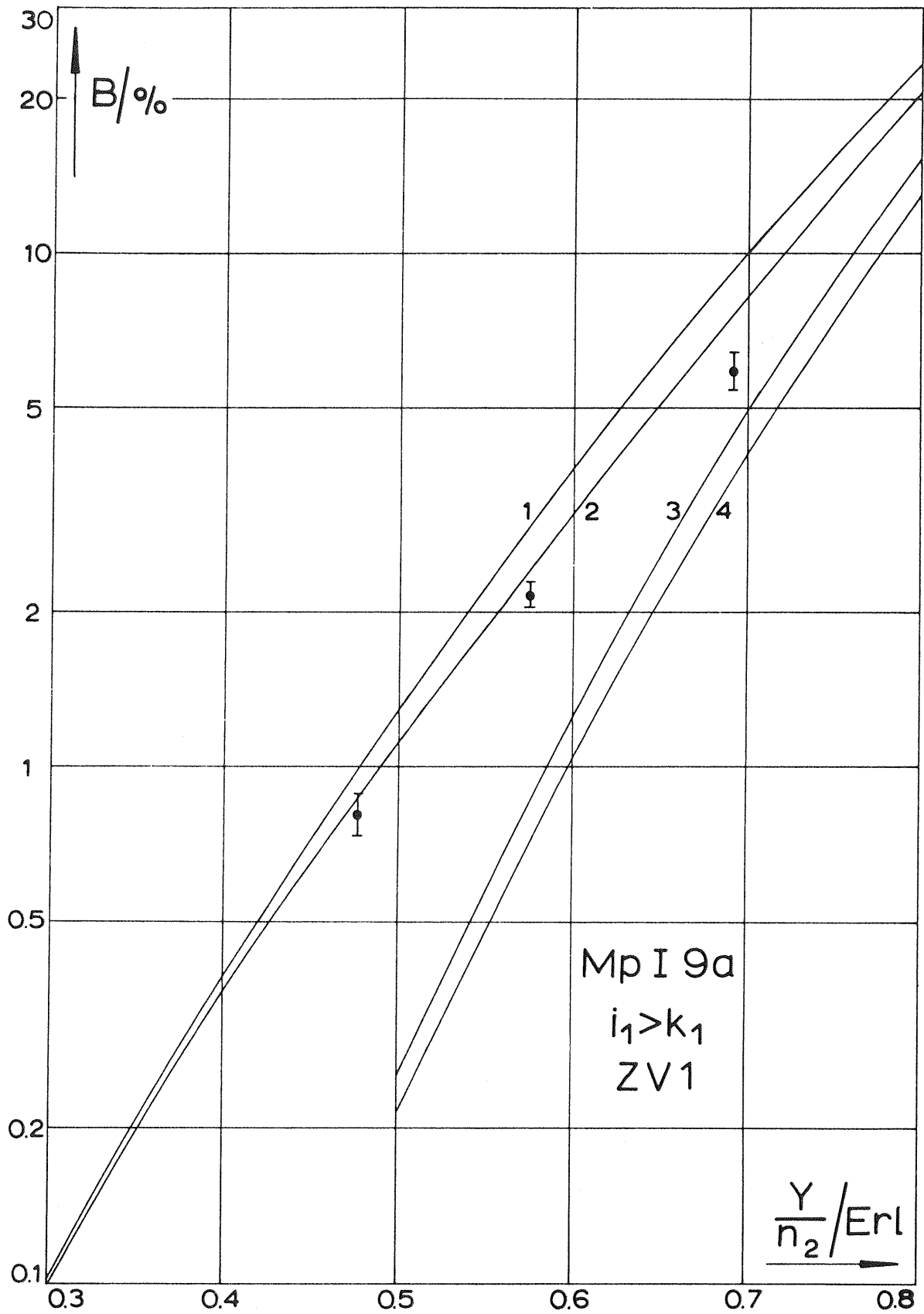


Diagramm V.12 Erklärungen siehe Abschnitt V.4.6, Seite 123

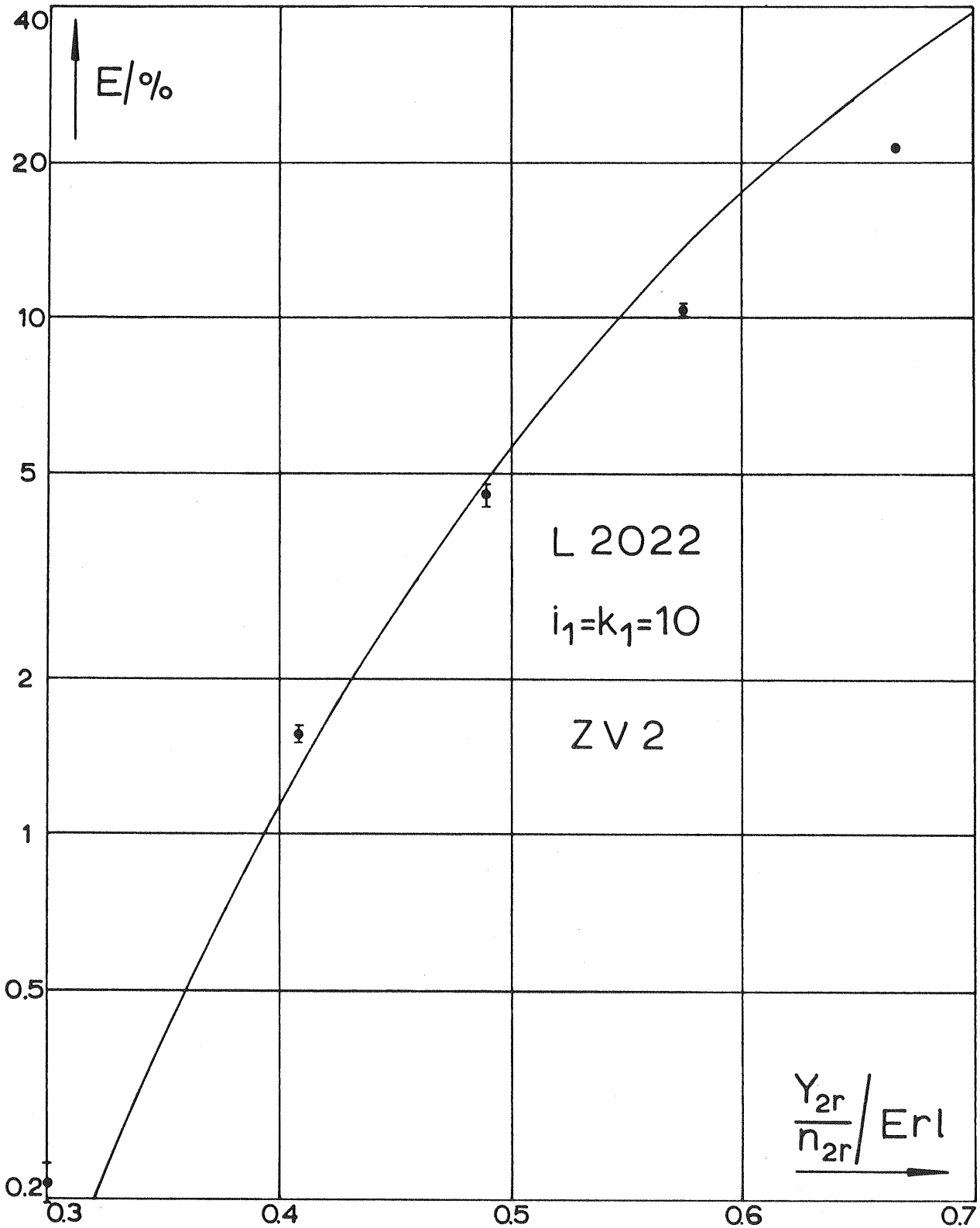


Diagramm V.13 Erklärung siehe Abschnitt V.5.4, Seite 128

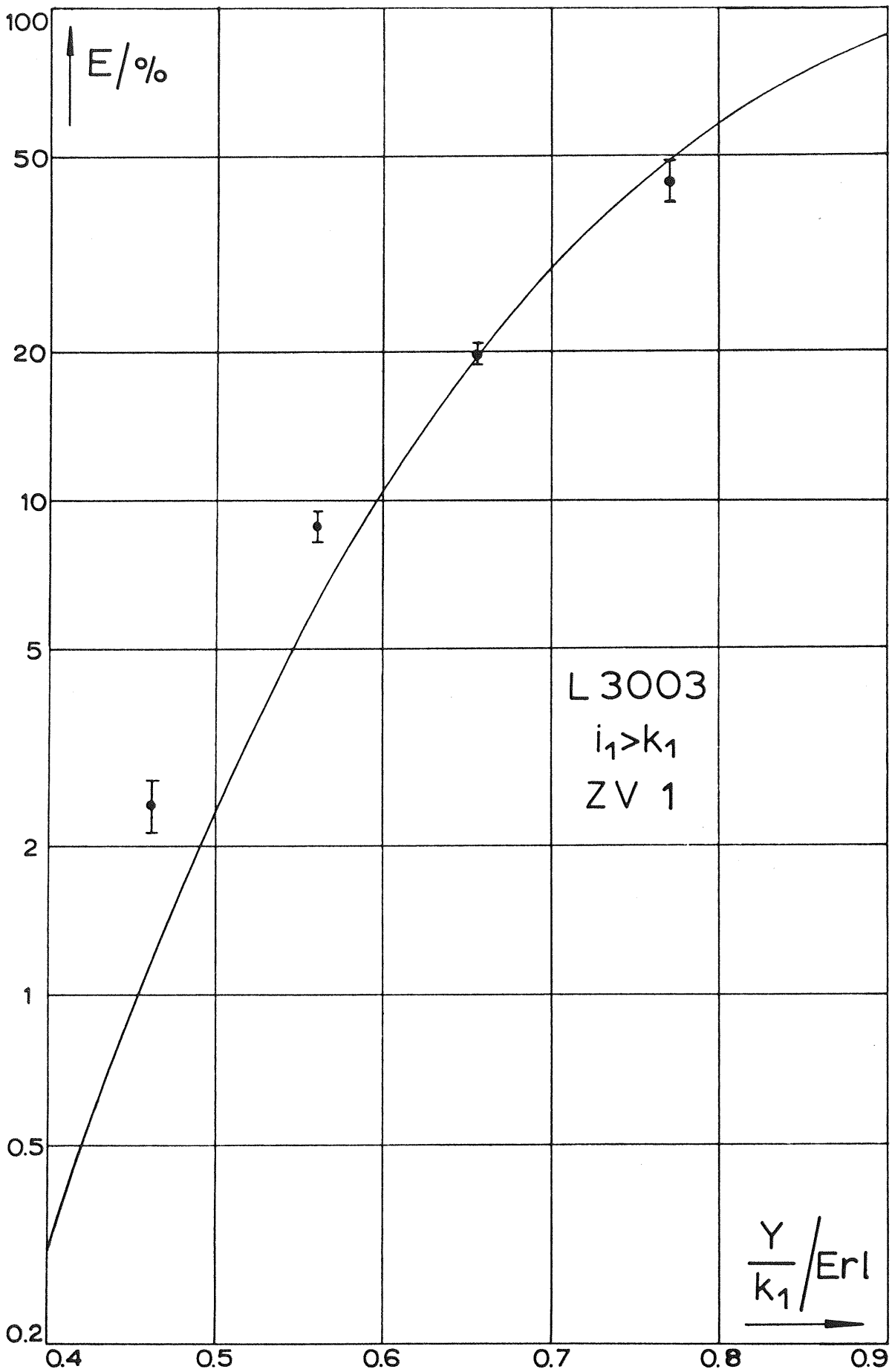


Diagramm V.14 Erklärung siehe Abschnitt V.5.4, Seite 128

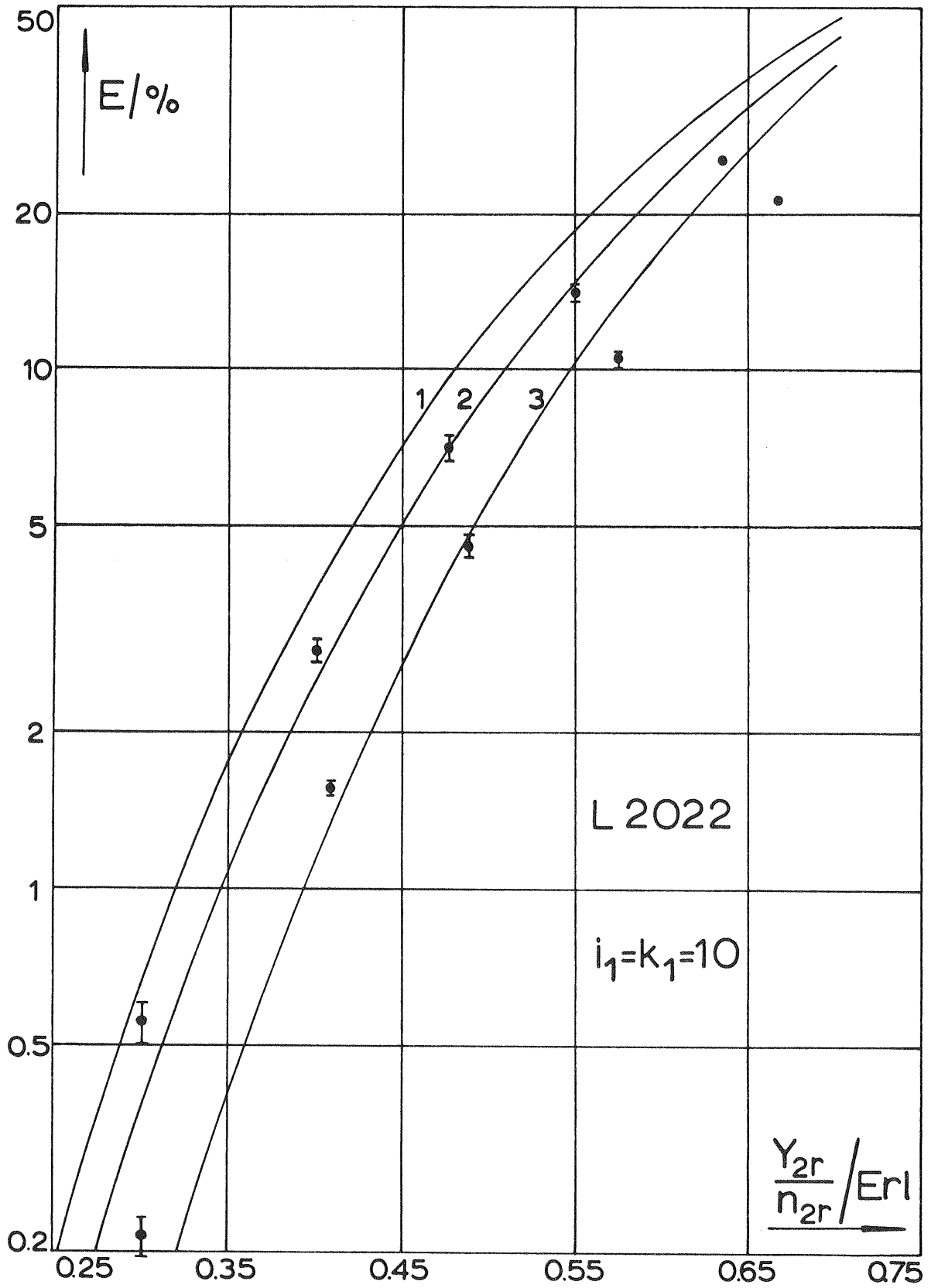


Diagramm V.15 Erklärung siehe Abschnitt V.6.5, Seite 134

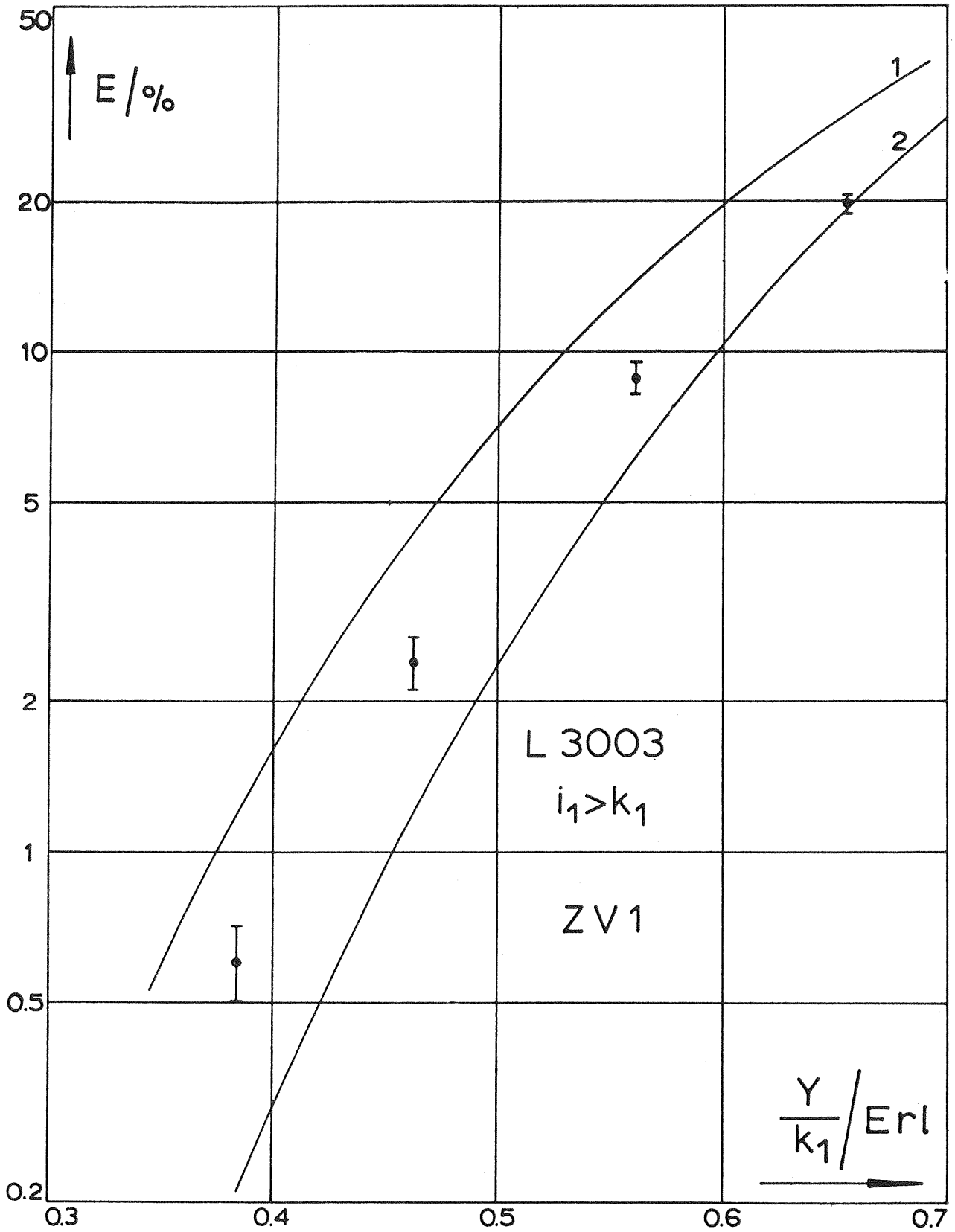


Diagramm V.16 Erklärung siehe Abschnitt V.6.5, Seite 135

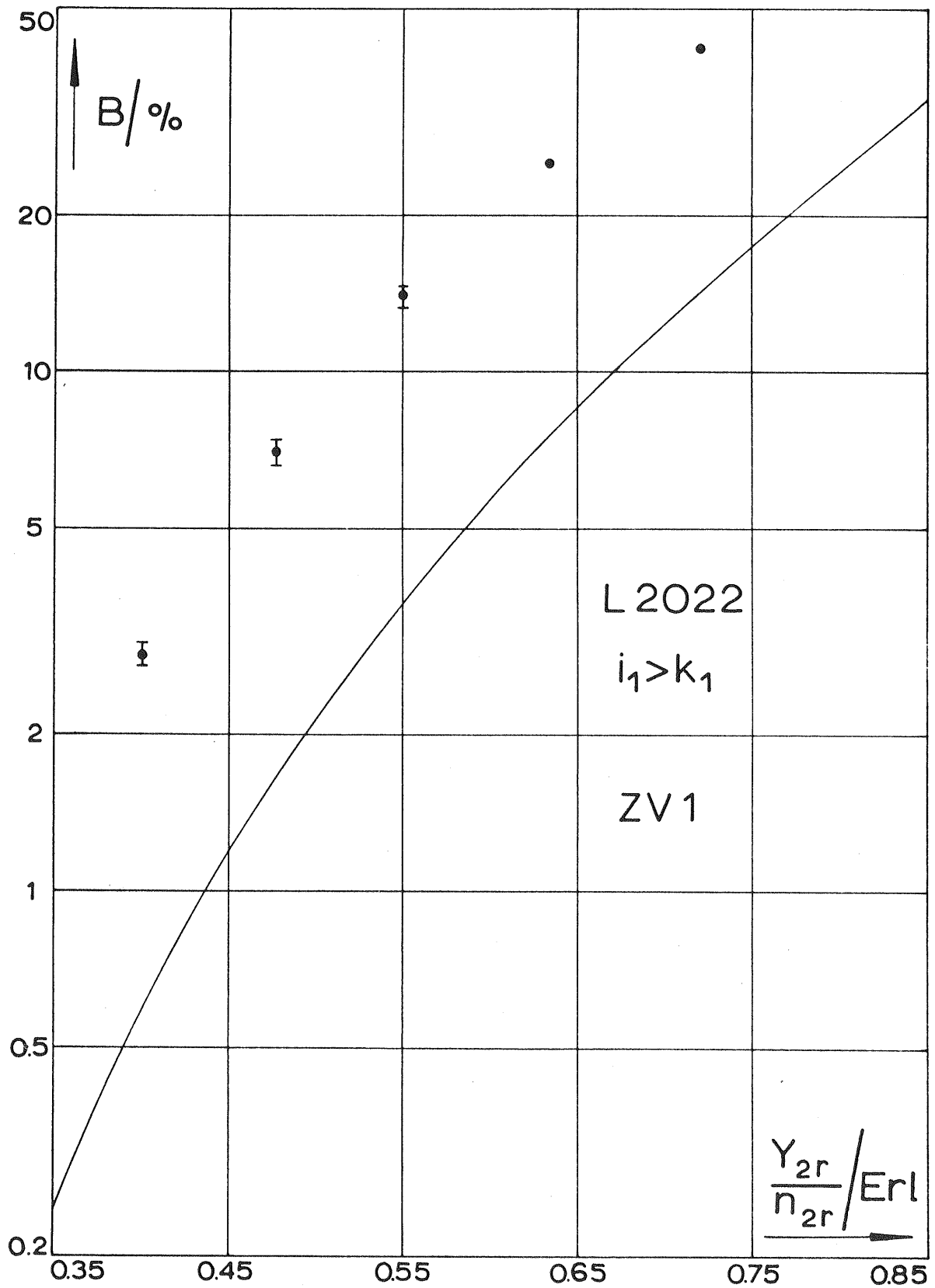


Diagramm VI.1 Erklärung siehe Abschnitt VI.6, Seite 149

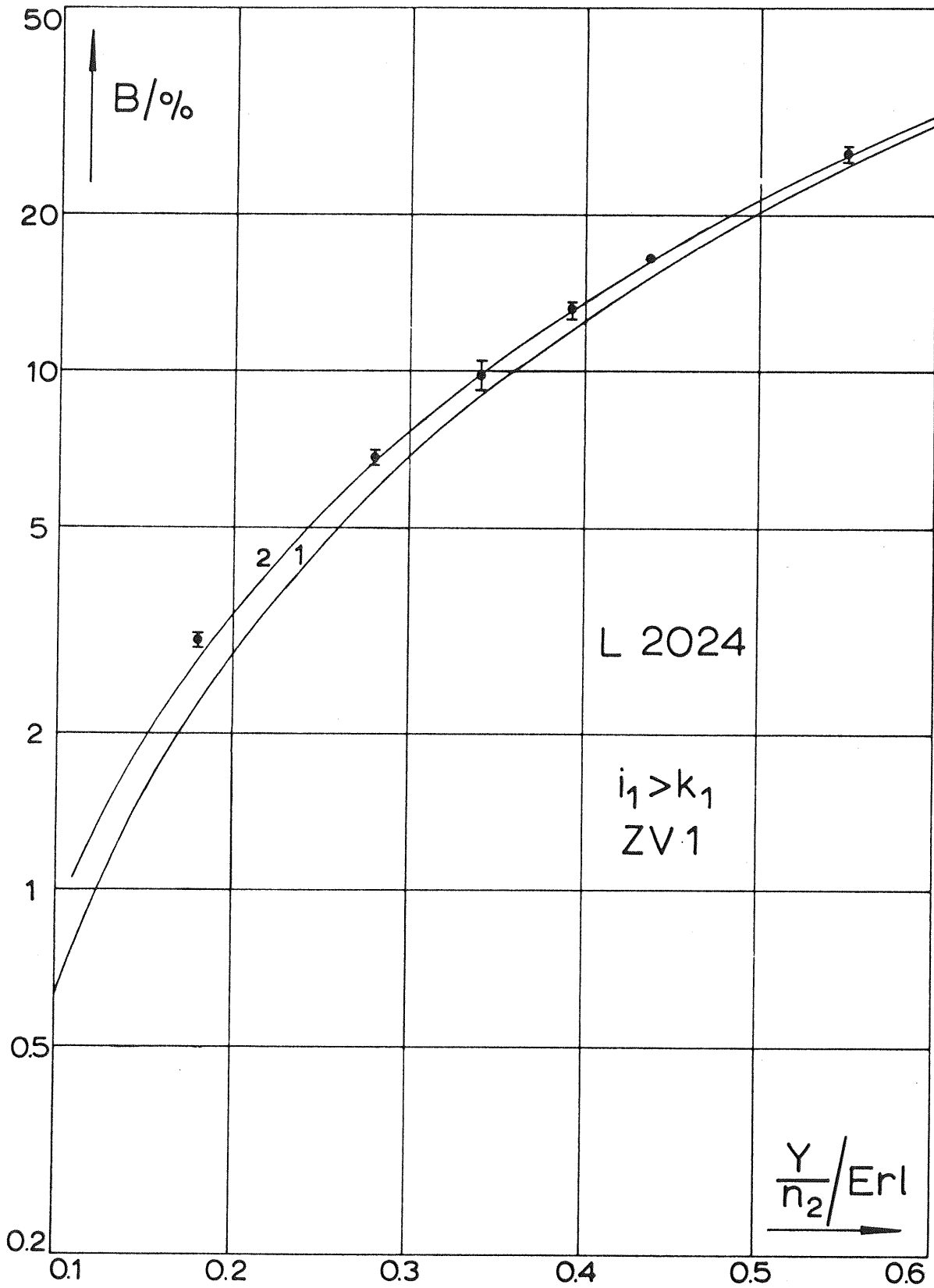


Diagramm VI.2 Erklärungen Kurven 1,2 siehe Abschnitt VI.6, Seite 149

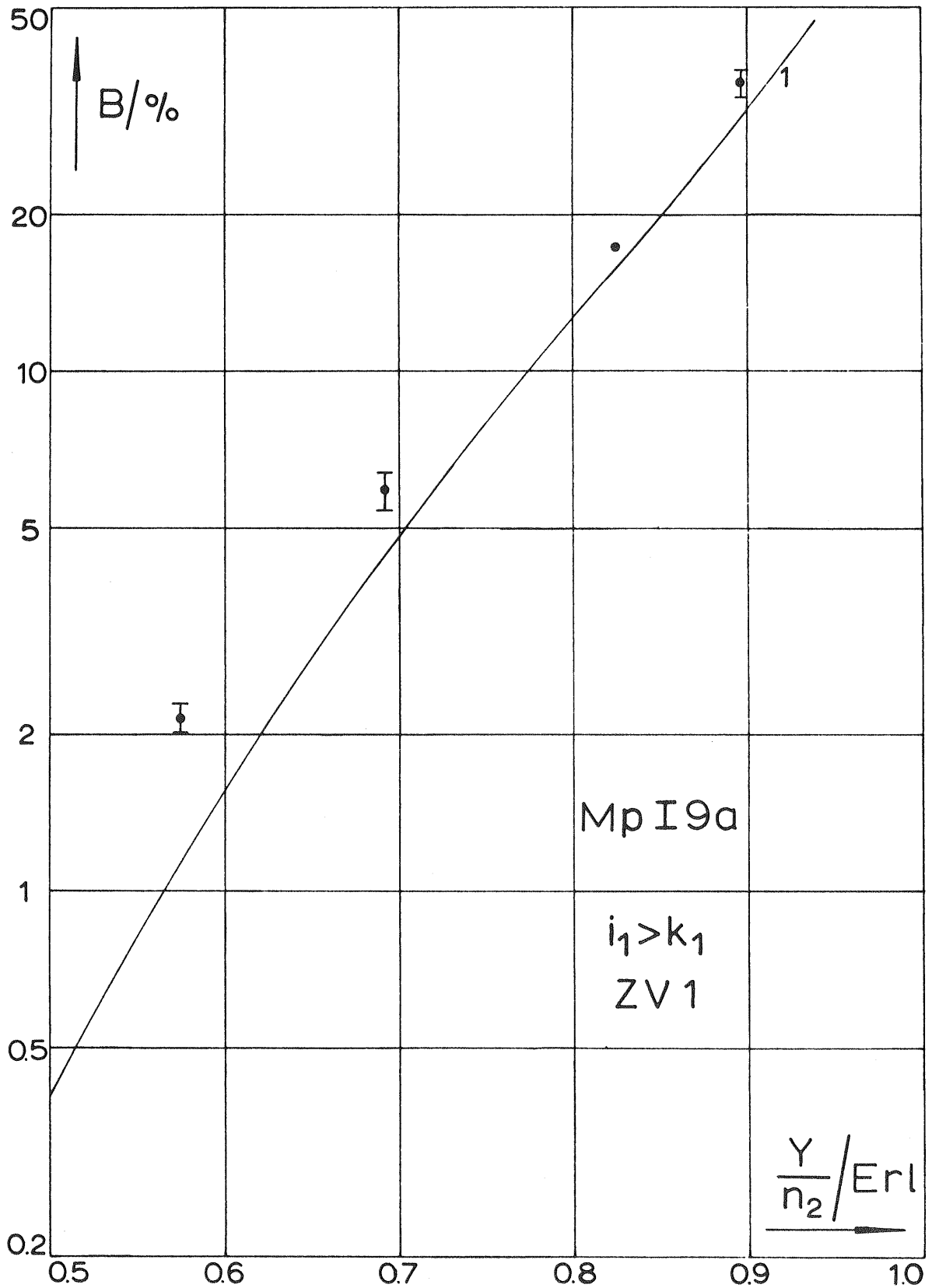


Diagramm VI.3 Erklärungen siehe Abschnitt VI.6, Seite 149

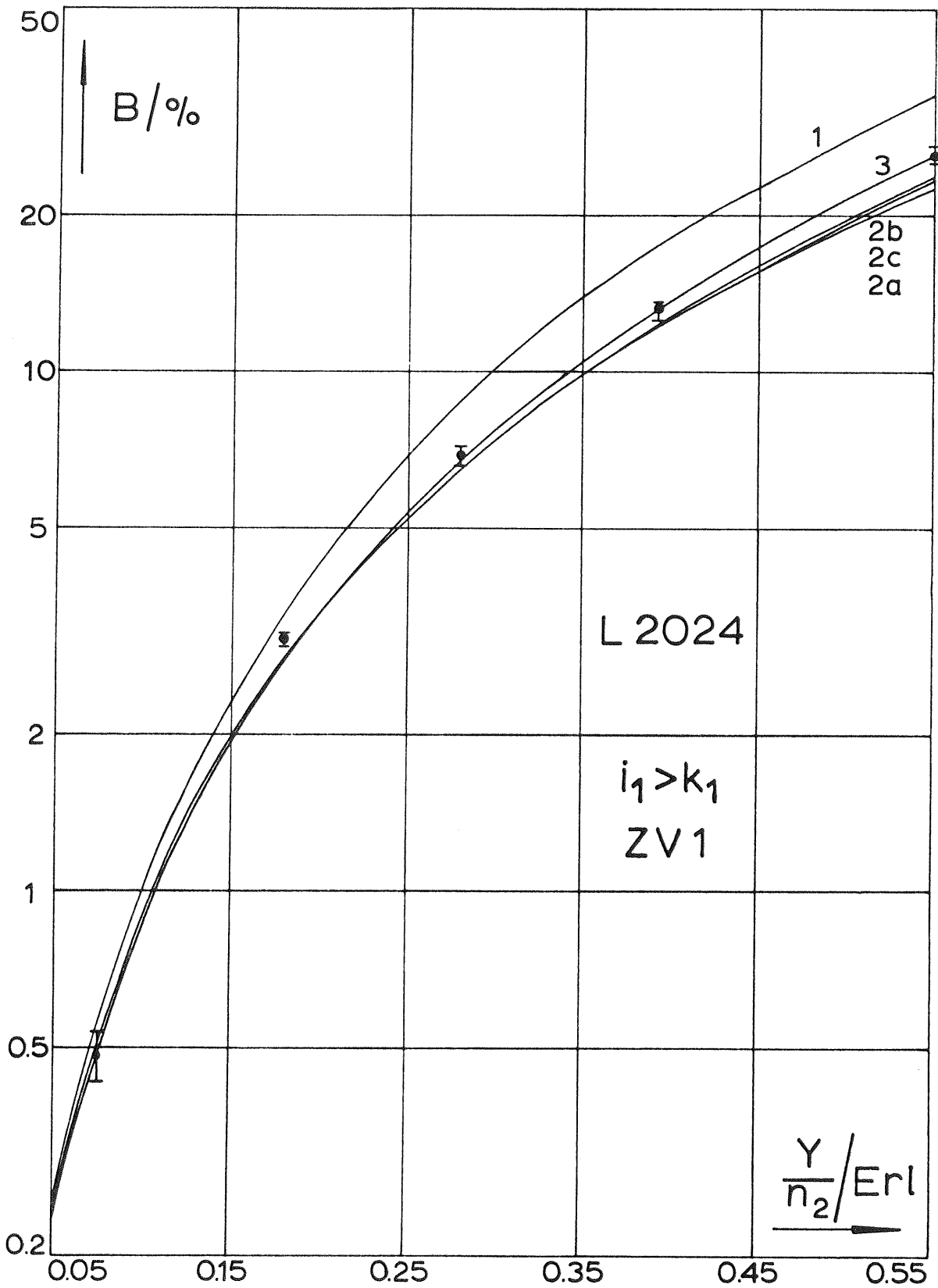


Diagramm VII.1

Erklärungen Kurven 1-3 siehe Abschnitt VII.2.5, Seite 157

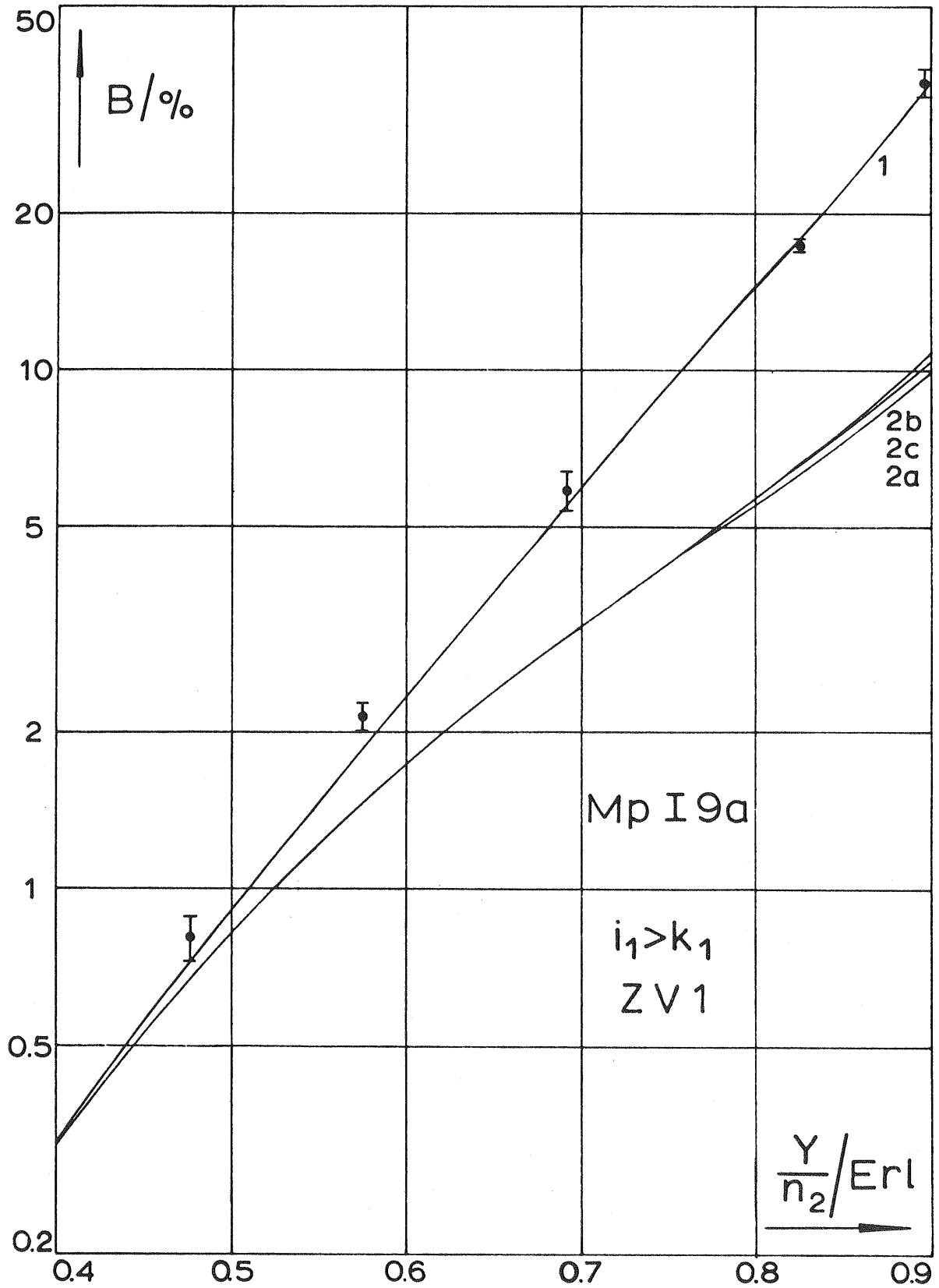


Diagramm VII.2 Erklärungen Kurven 1,2 siehe Abschnitt VII.2.5, Seite 157

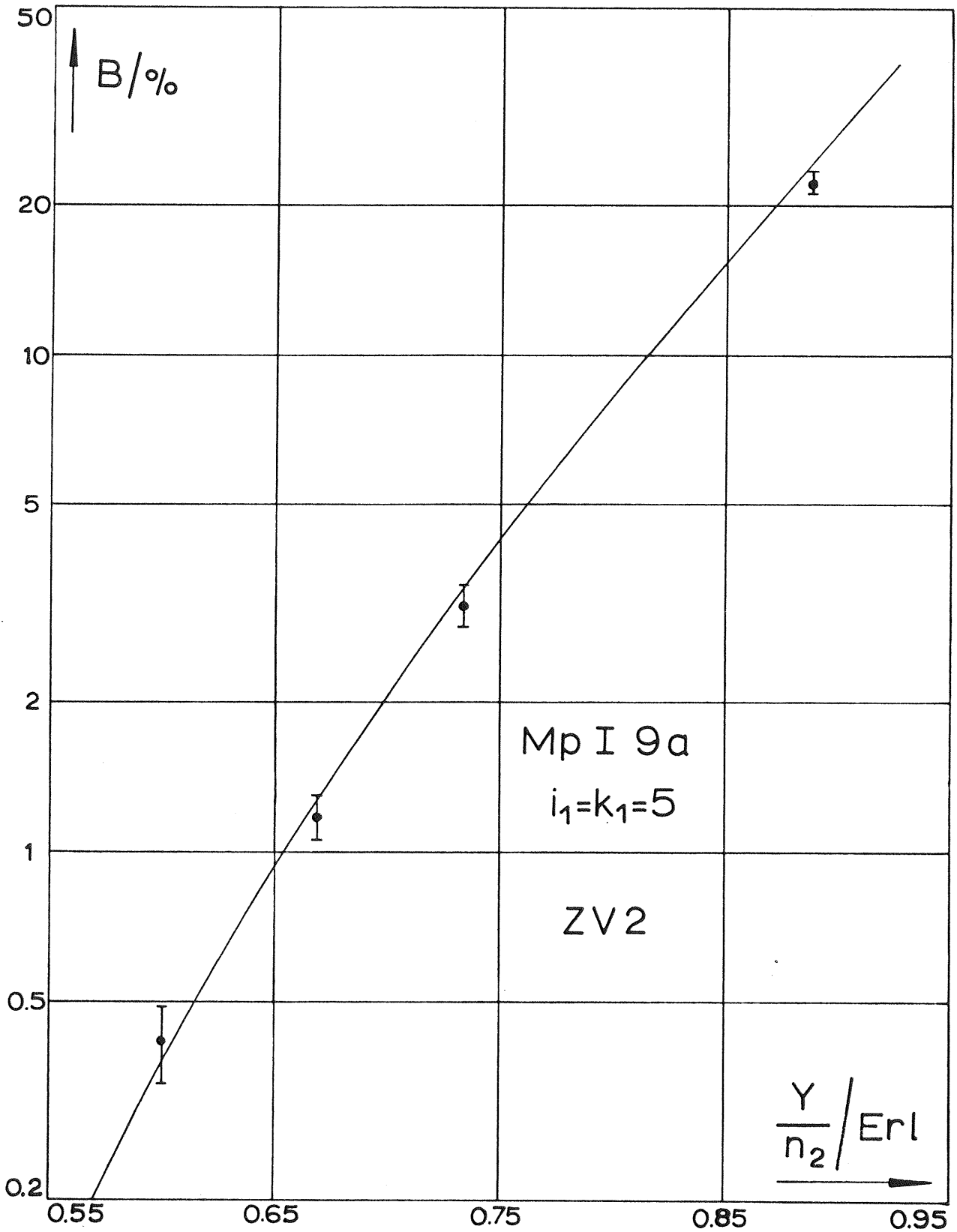


Diagramm VII.3 Erklärung siehe Abschnitt VII.2.5, Seite 157

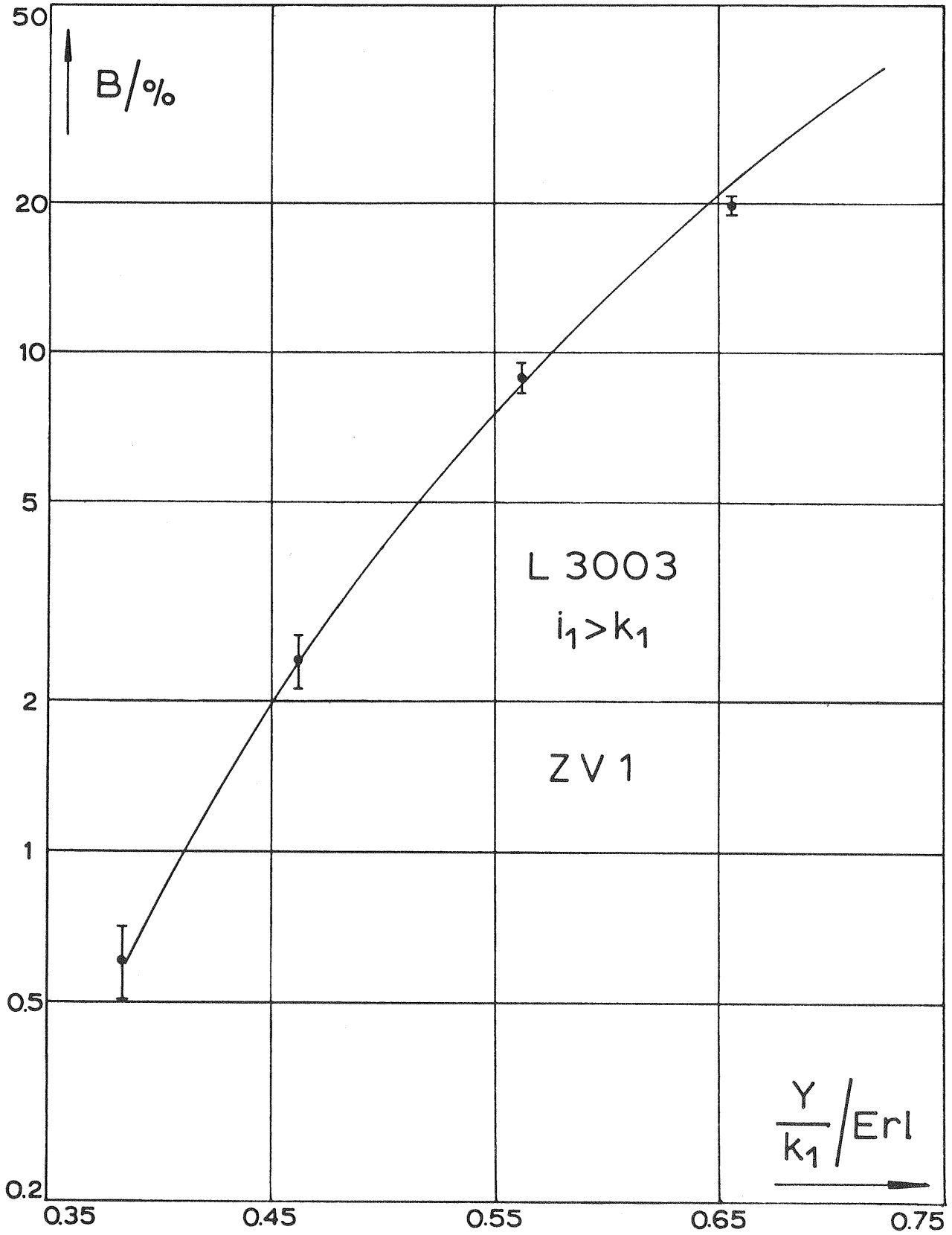


Diagramm VII.4 Erklärung siehe Abschnitt VII.3.6, Seite 166

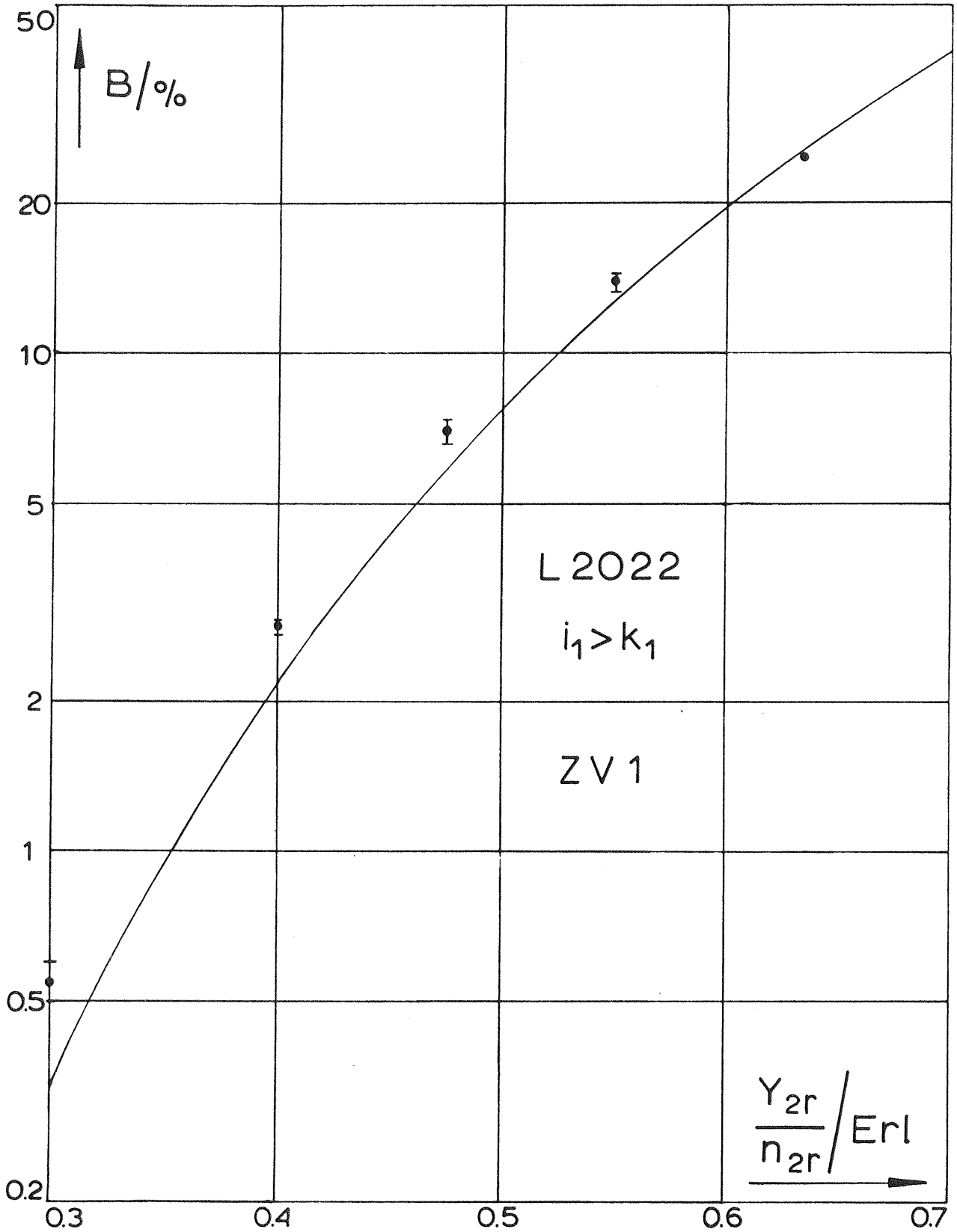


Diagramm VII.5 Erklärung siehe Abschnitt VII.3.6, Seite 166

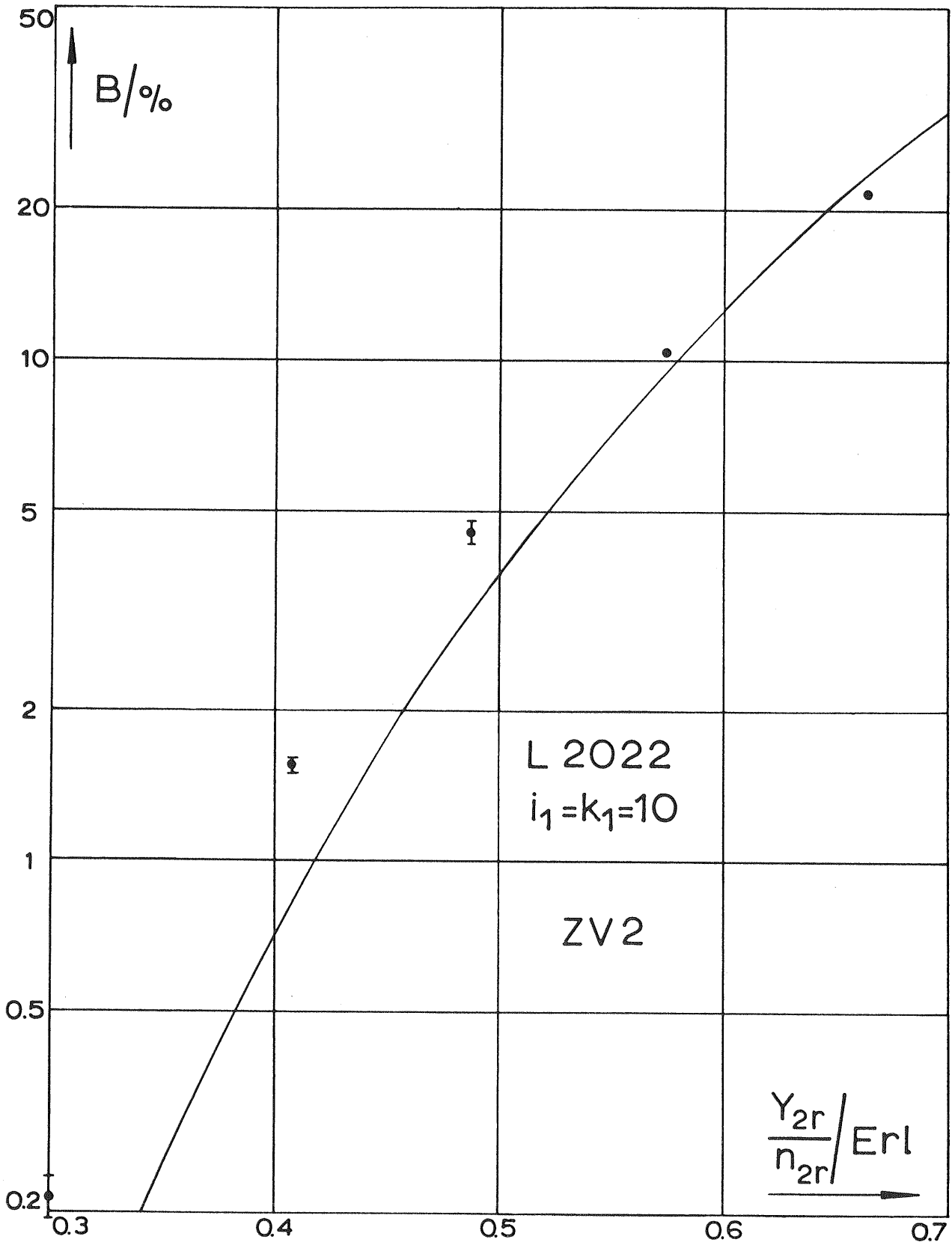


Diagramm VII.6 Erklärung siehe Abschnitt VII.3.6, Seite 166

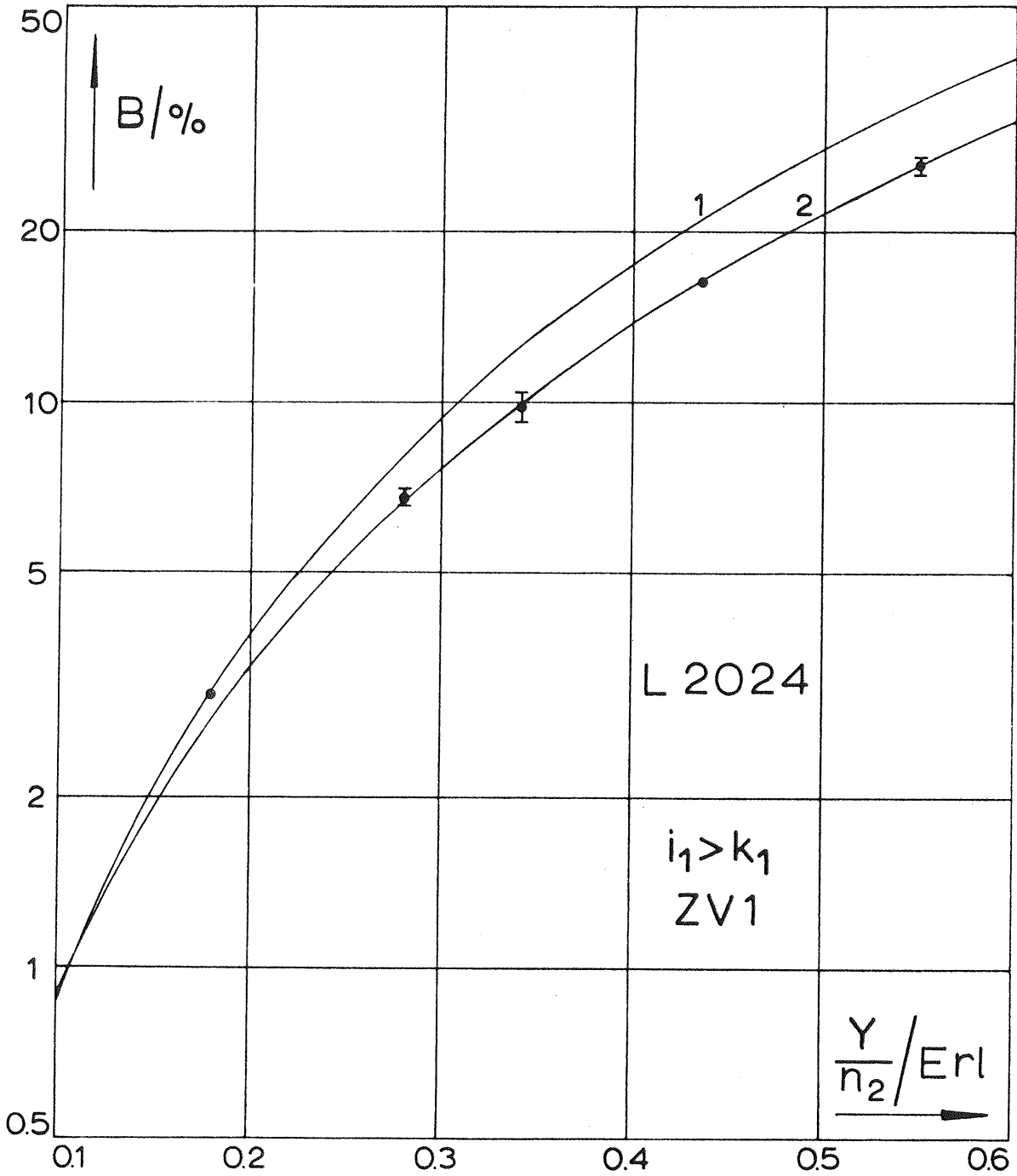


Diagramm IX.1 Erklärungen Kurven 1,2 siehe Abschnitt IX.7,
Seite 188

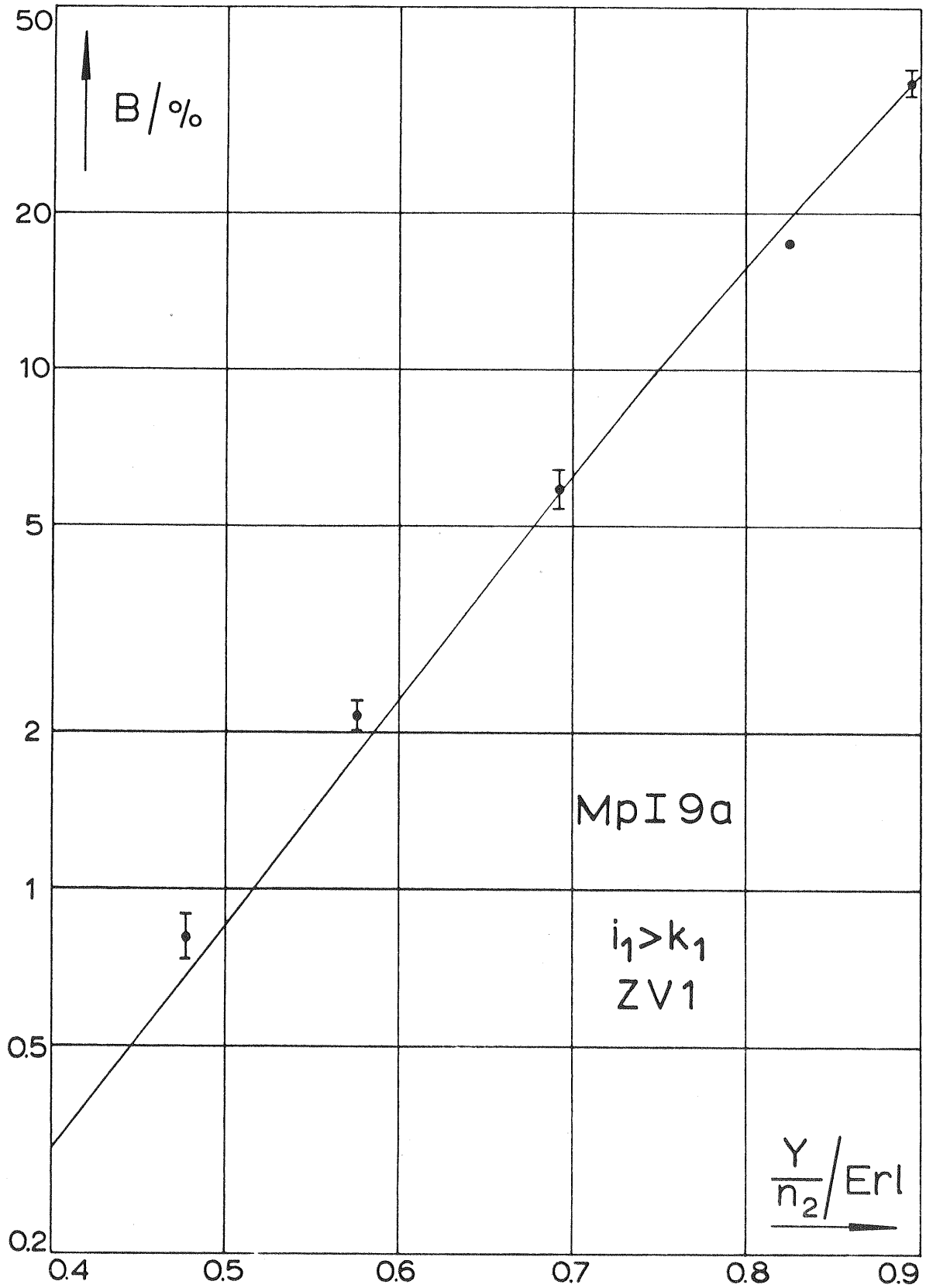


Diagramm IX.2 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

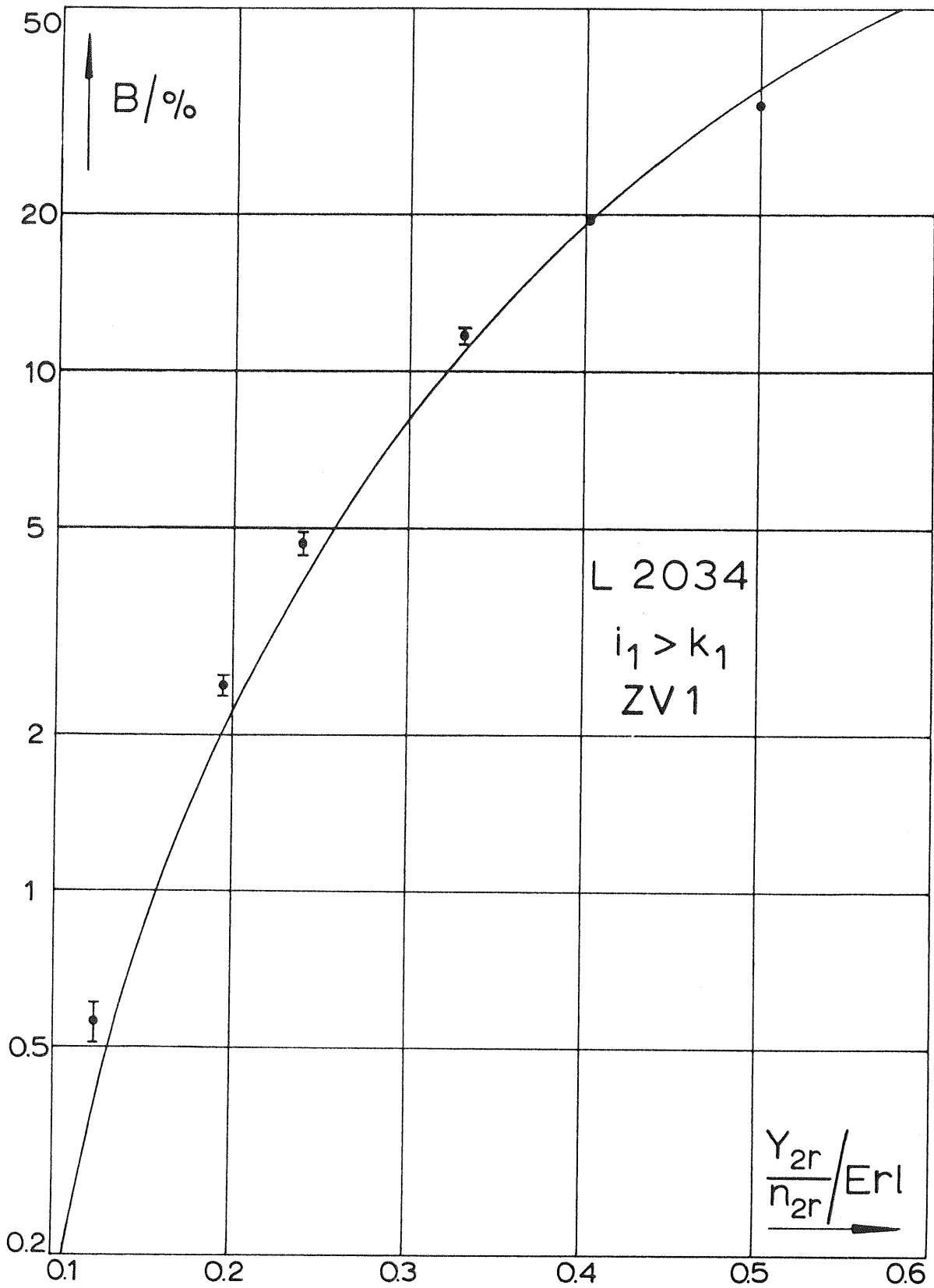


Diagramm IX.3 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

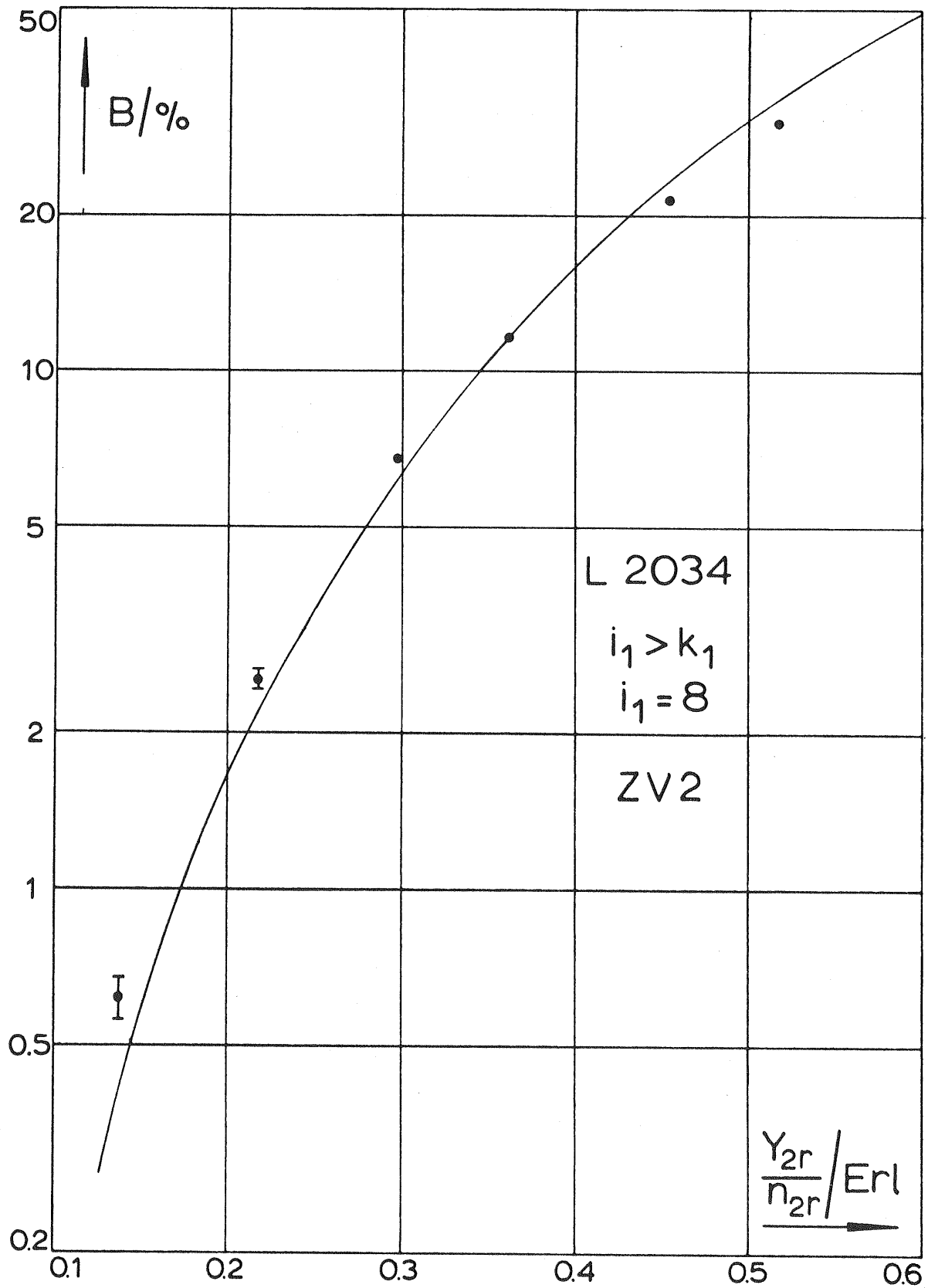


Diagramm IX.4 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

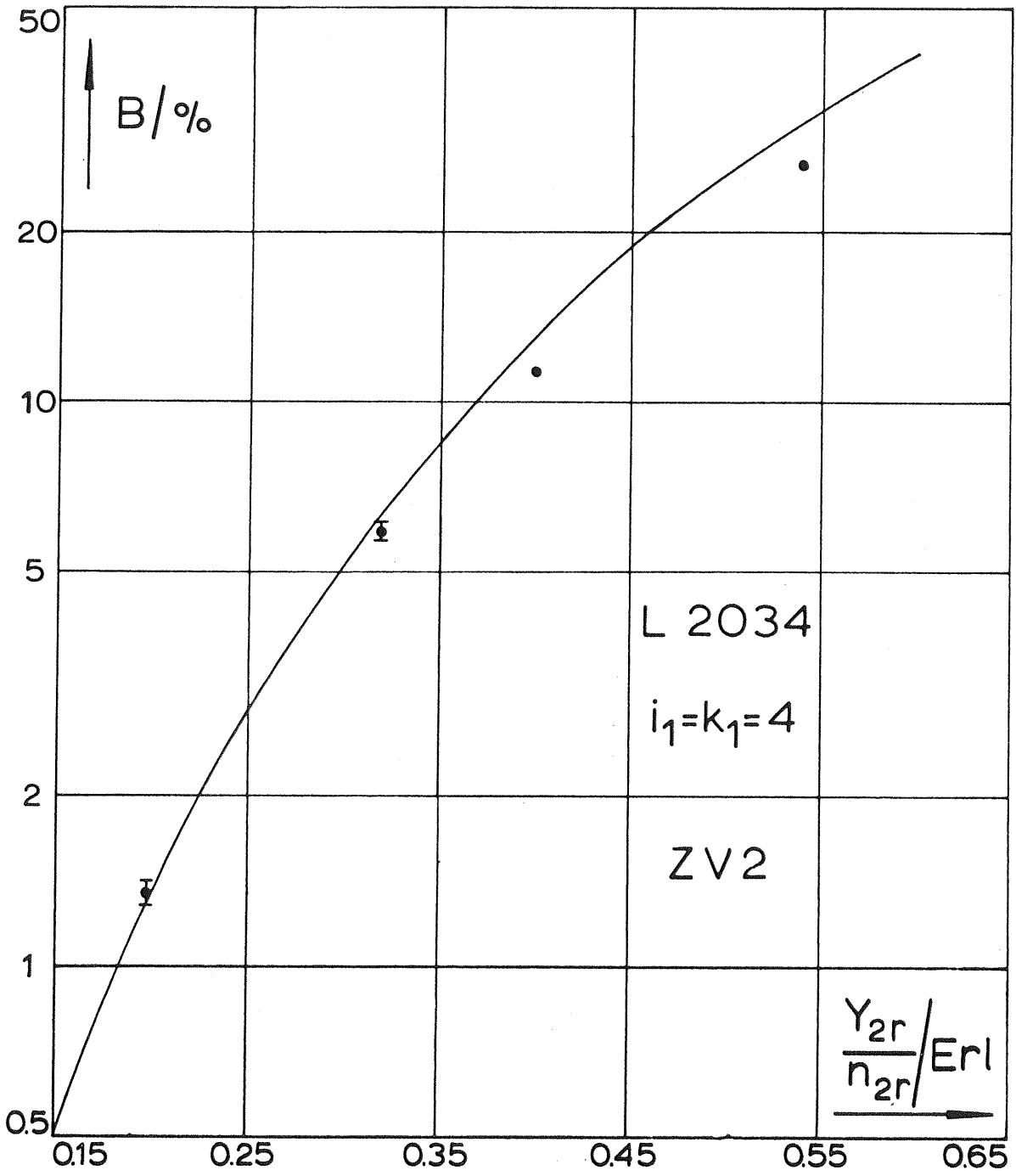


Diagramm IX.5 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

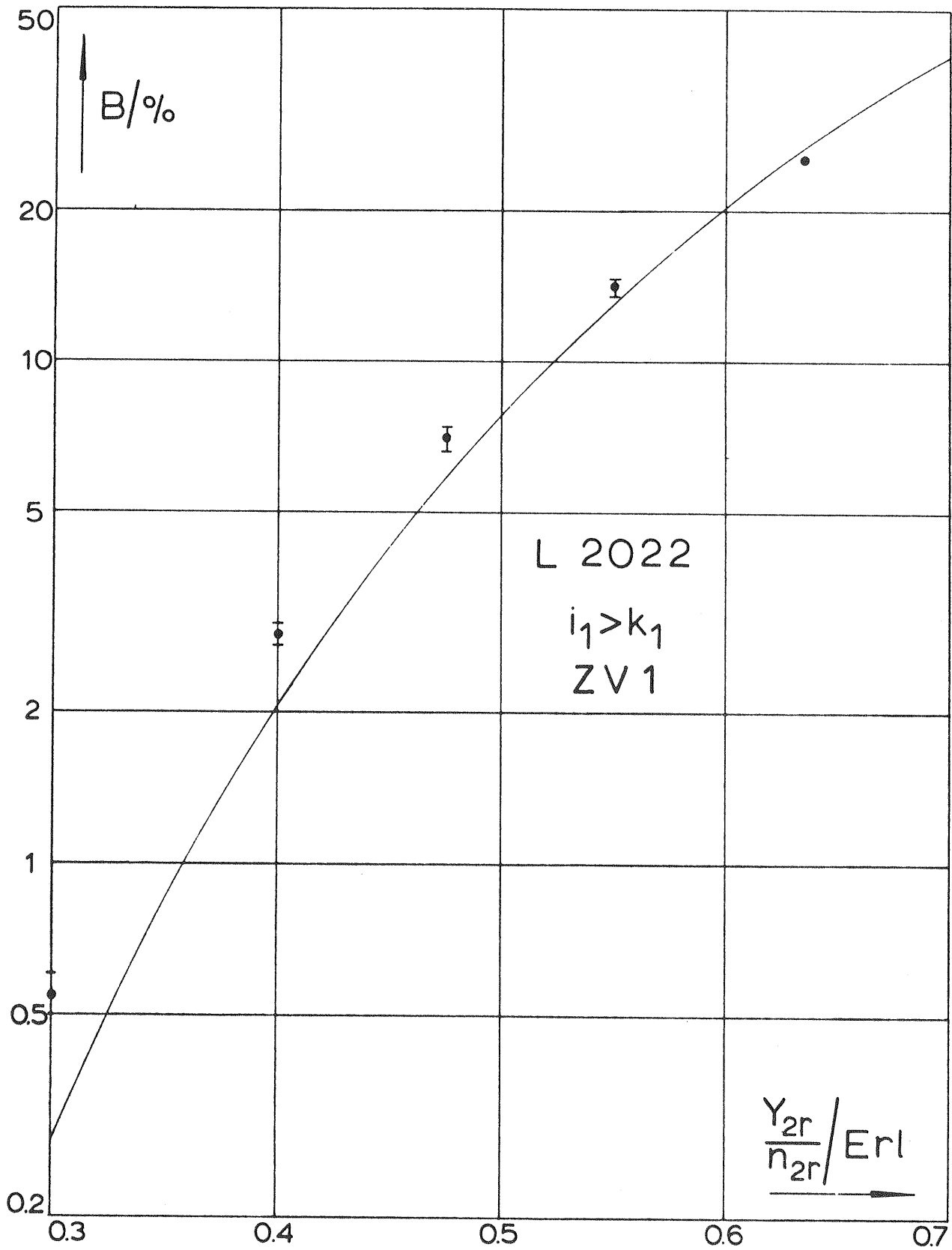


Diagramm IX.6 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

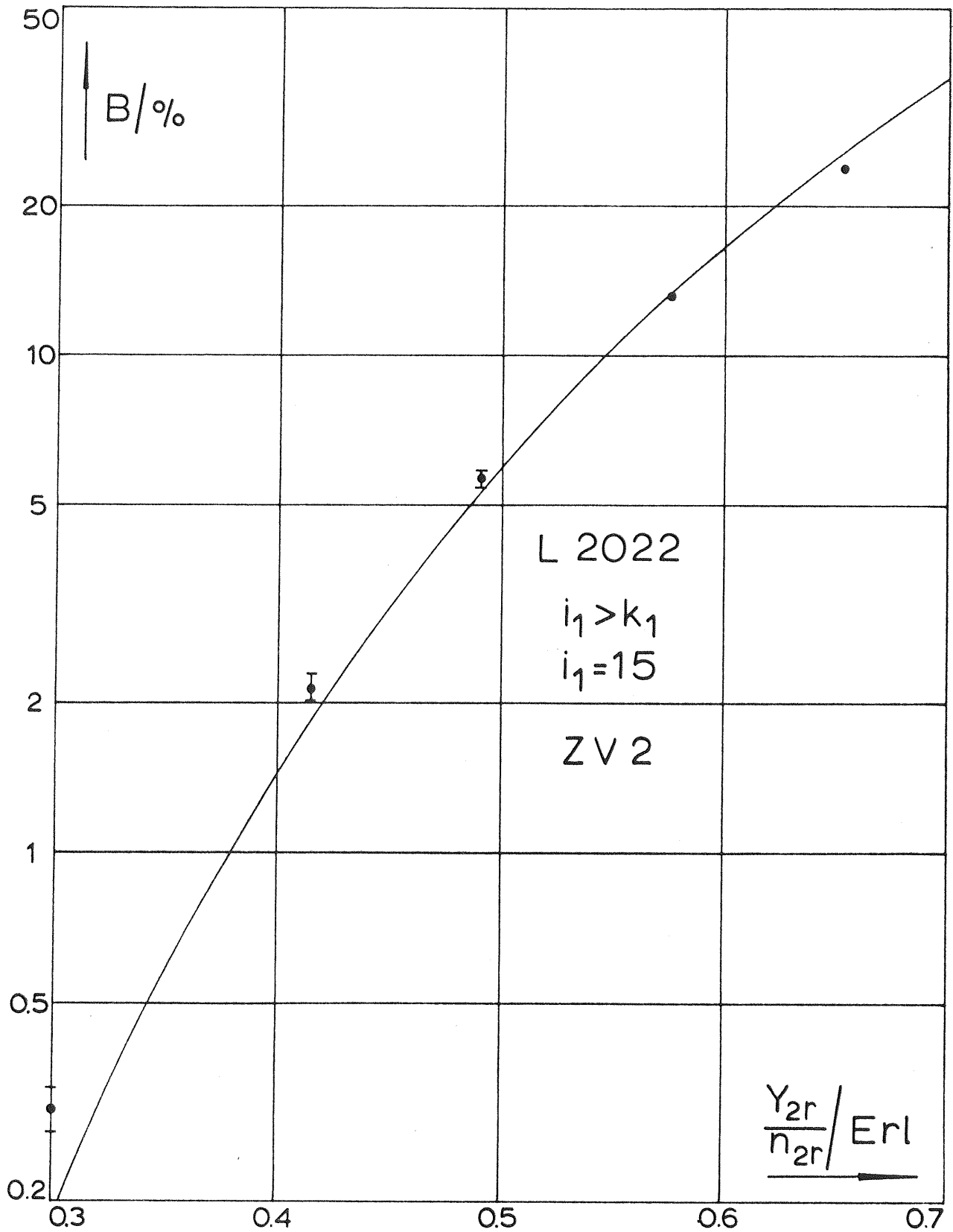


Diagramm IX.7 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

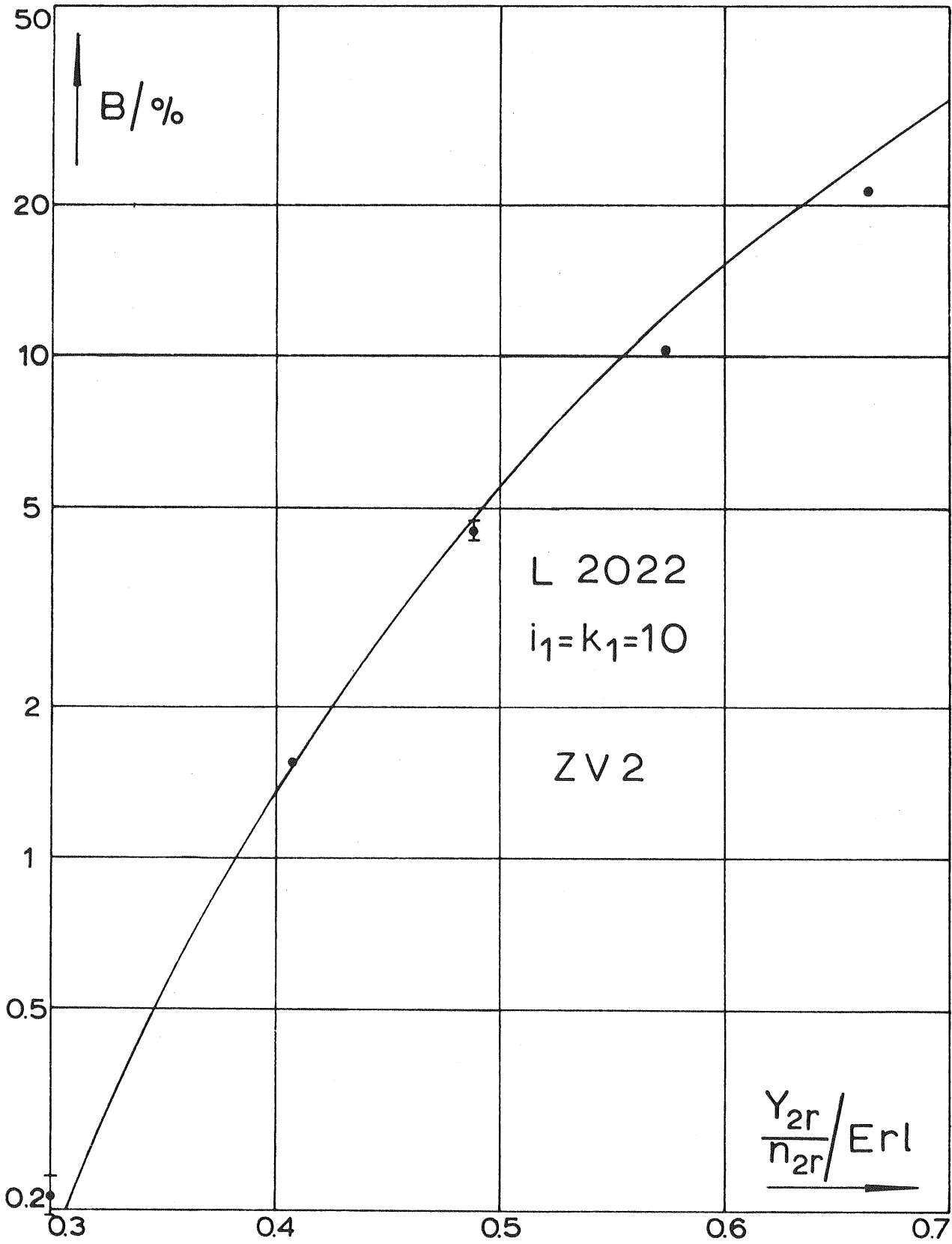


Diagramm IX.8 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

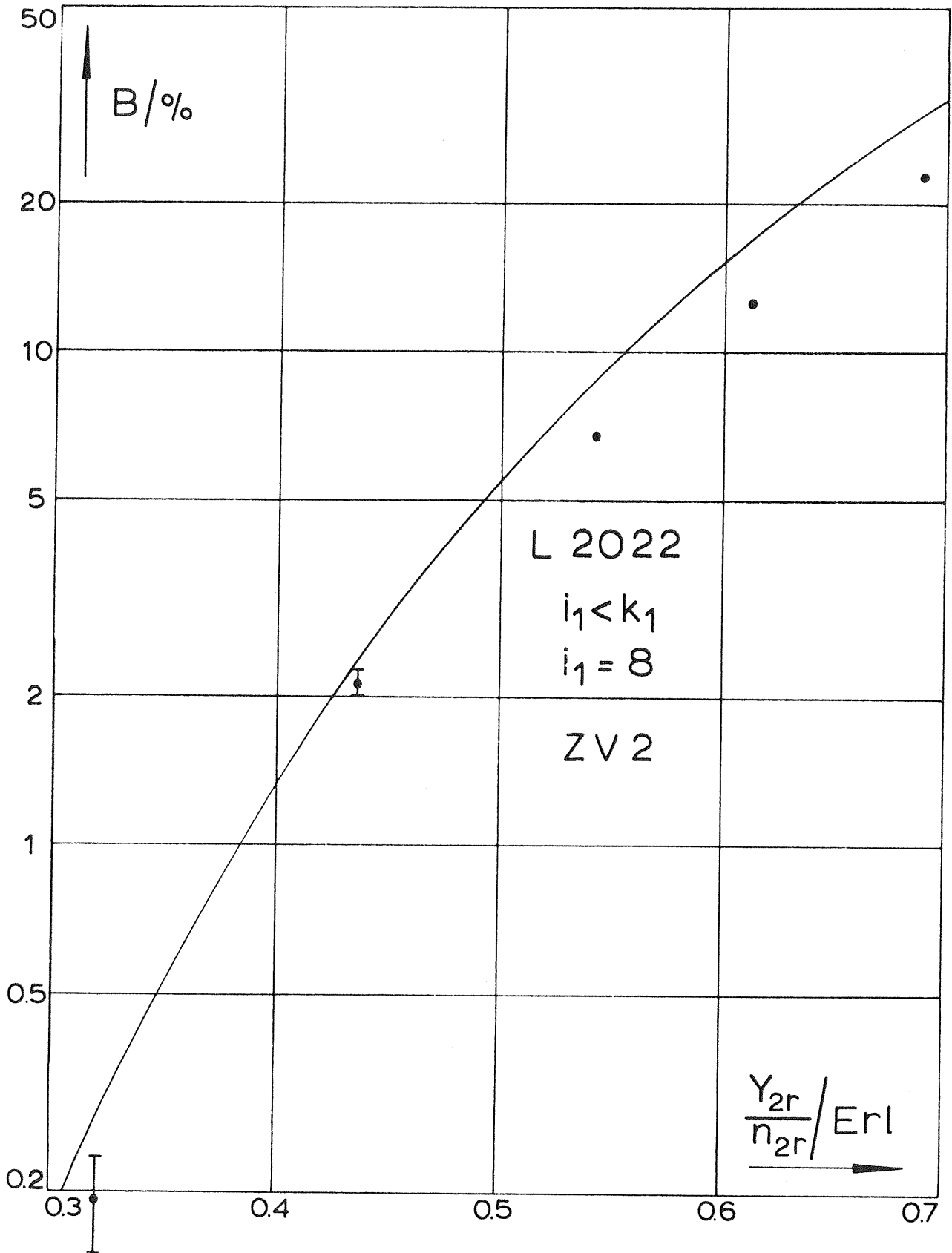


Diagramm IX.9 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

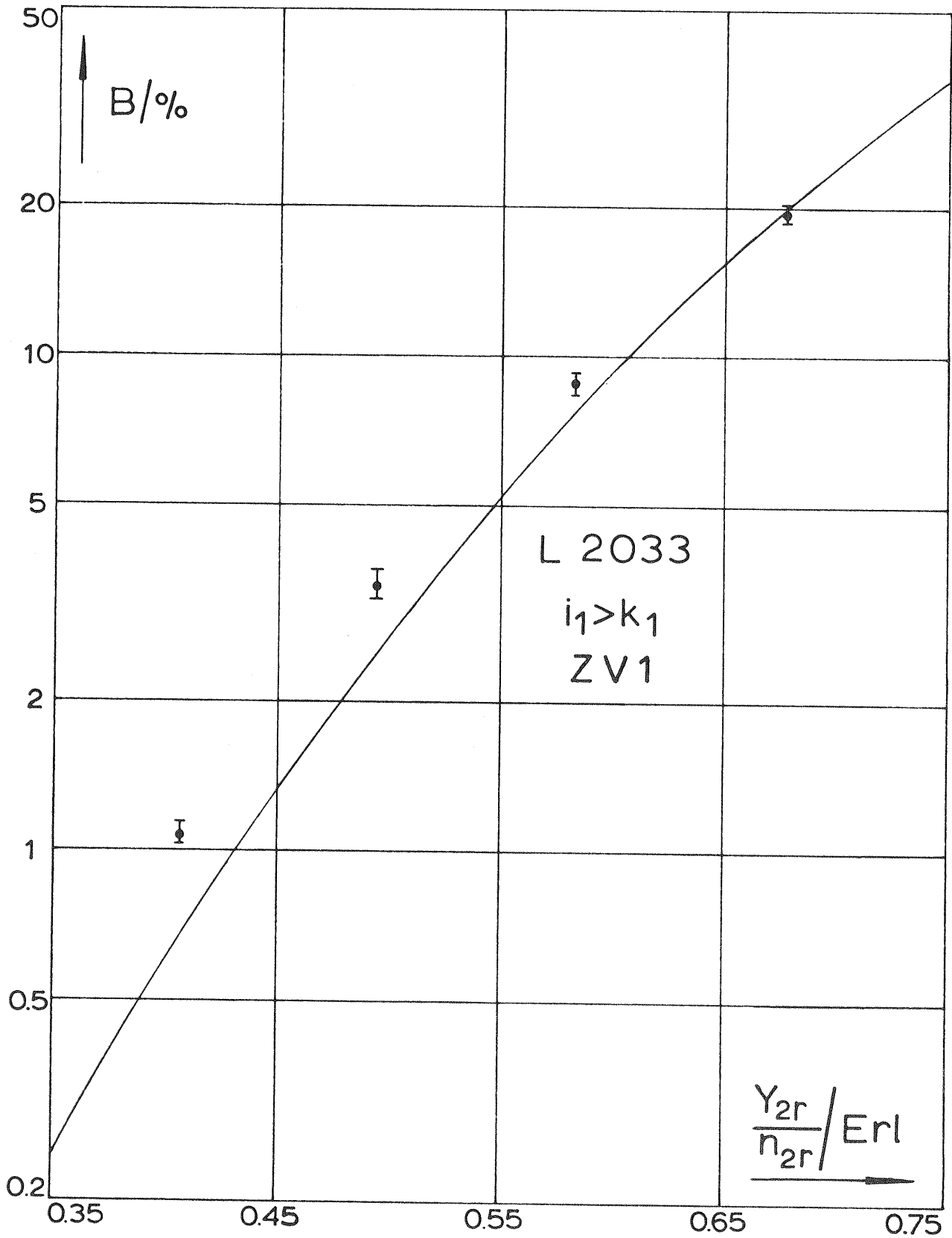


Diagramm IX.10 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

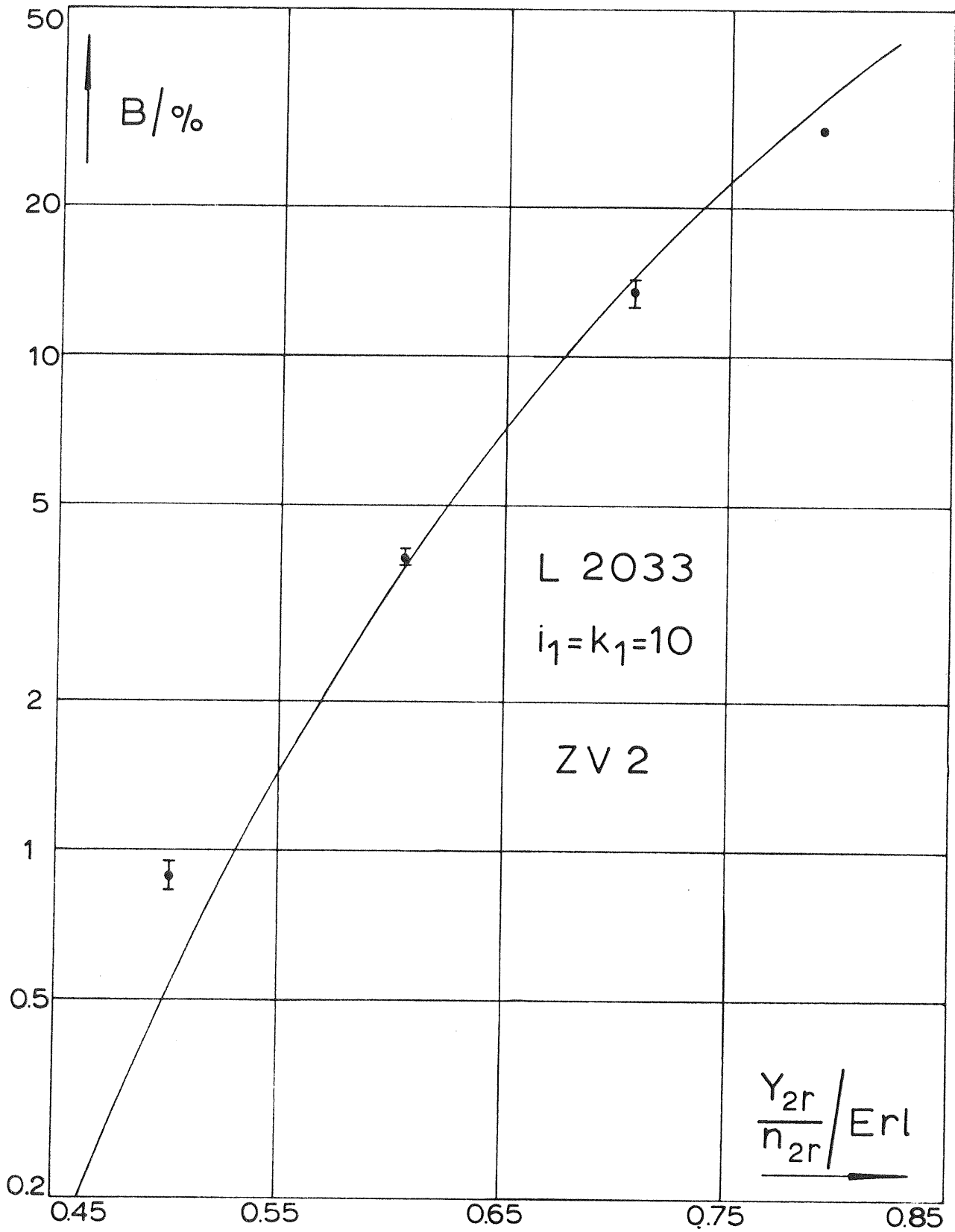


Diagramm IX.11 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

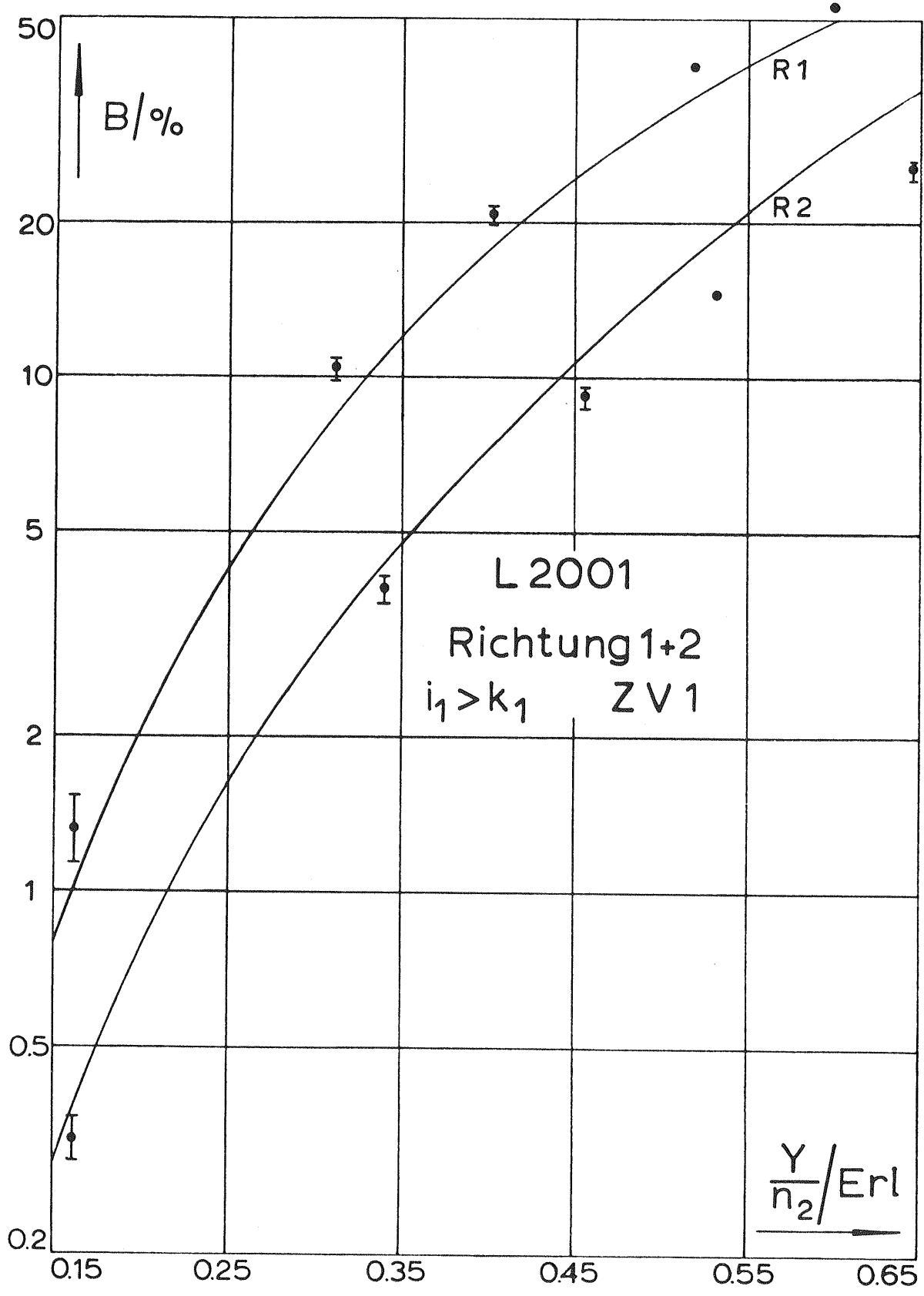


Diagramm IX.12 Erklärungen Kurven 1,2 siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

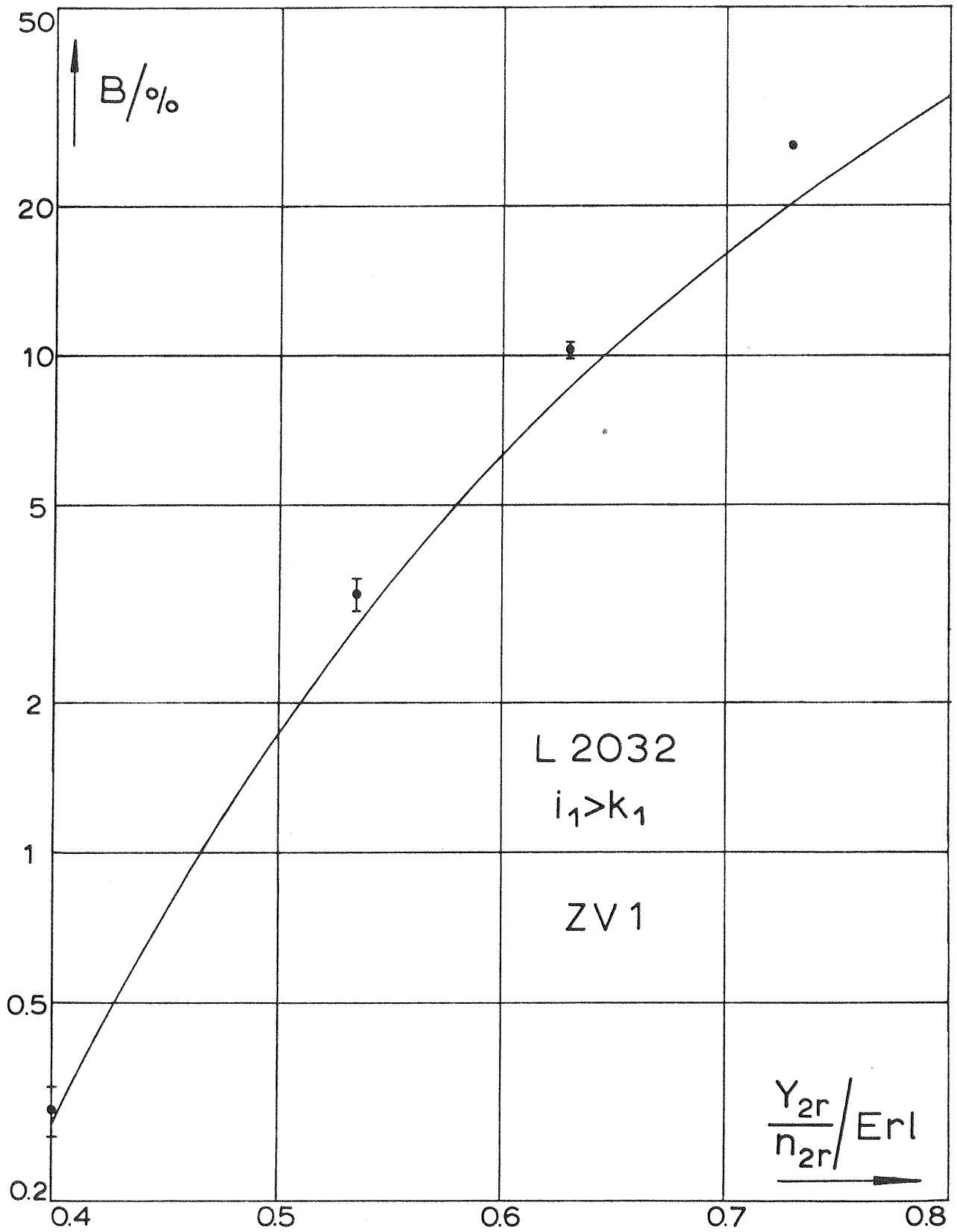


Diagramm IX.13 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

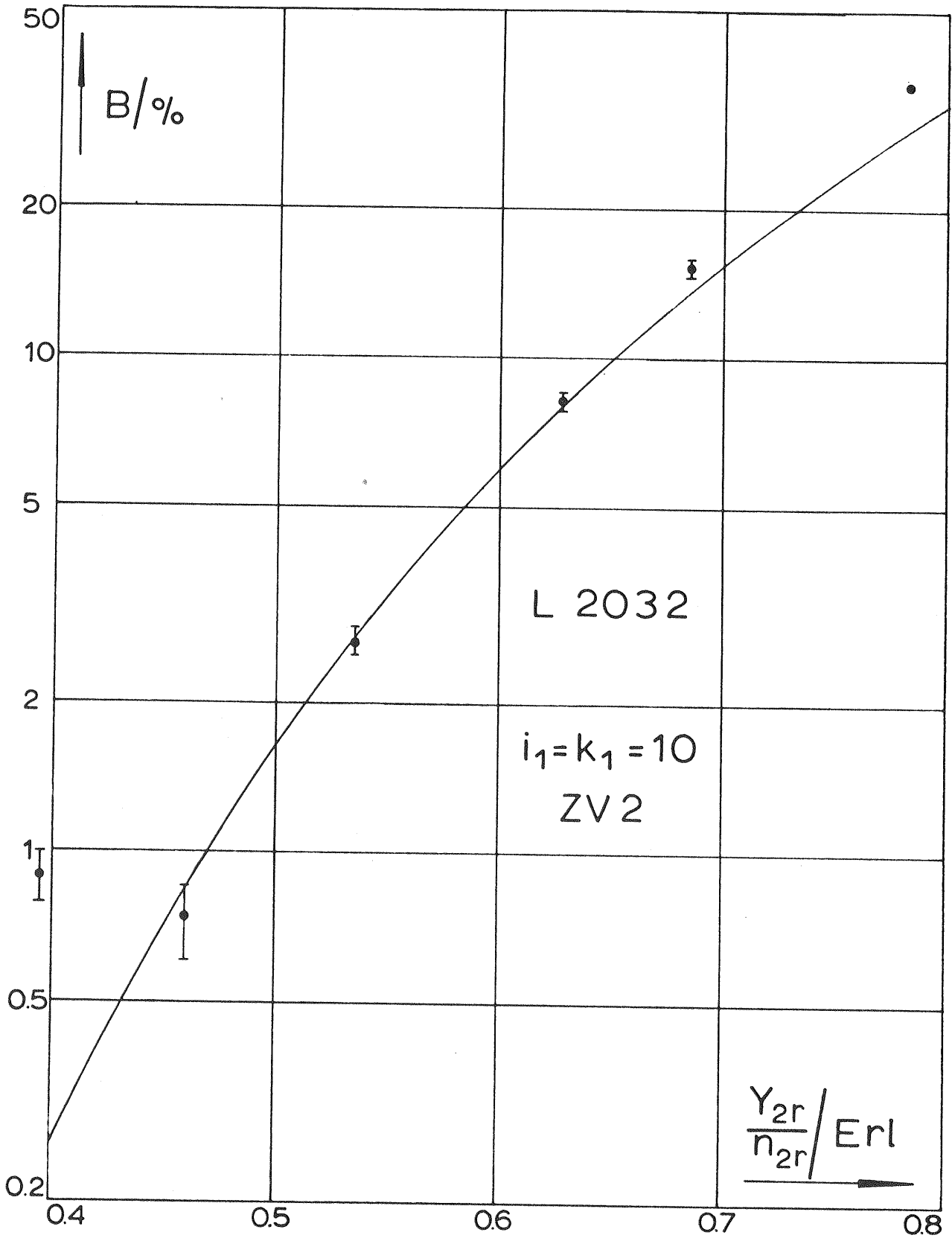


Diagramm IX.14 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

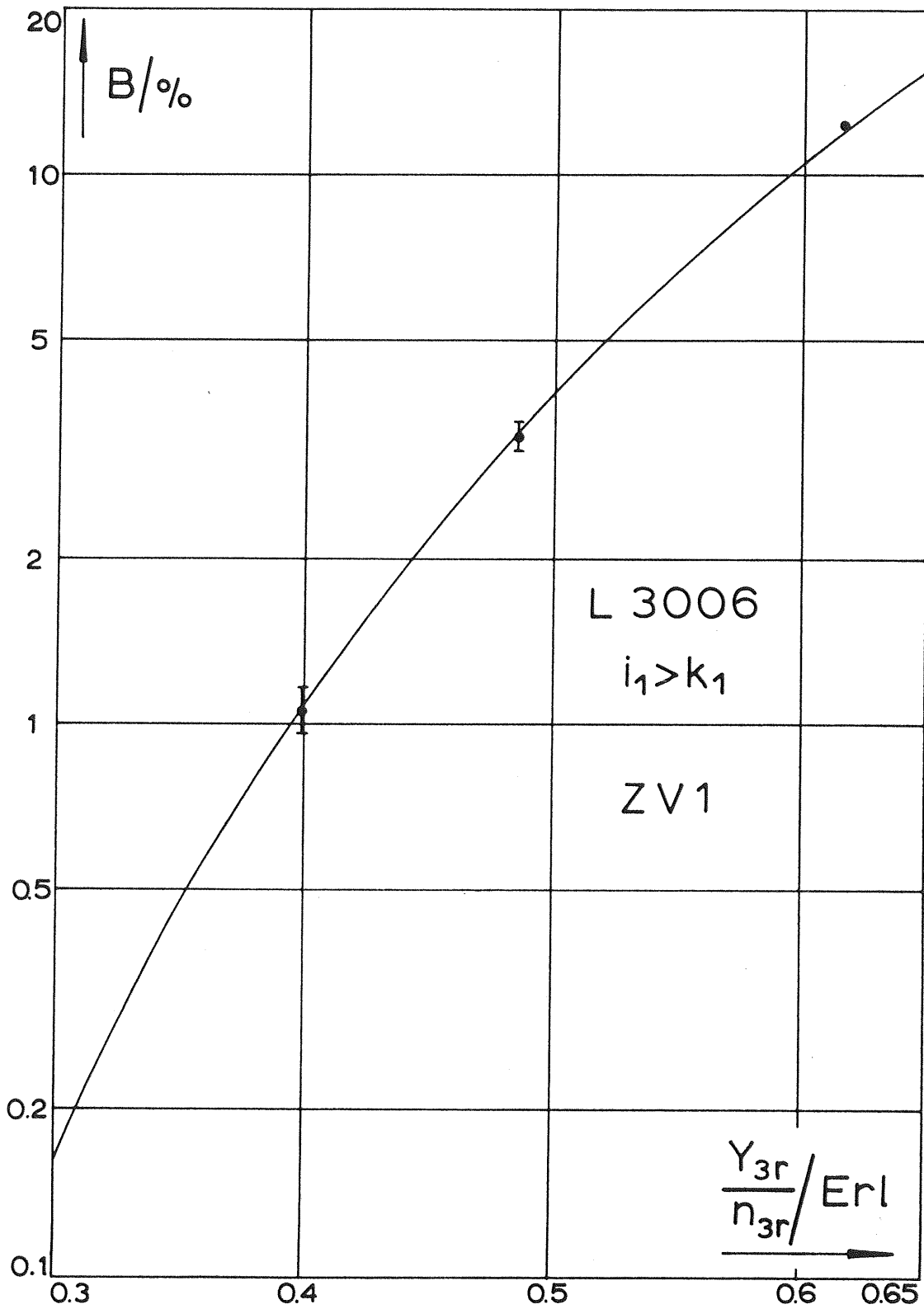


Diagramm IX.15 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

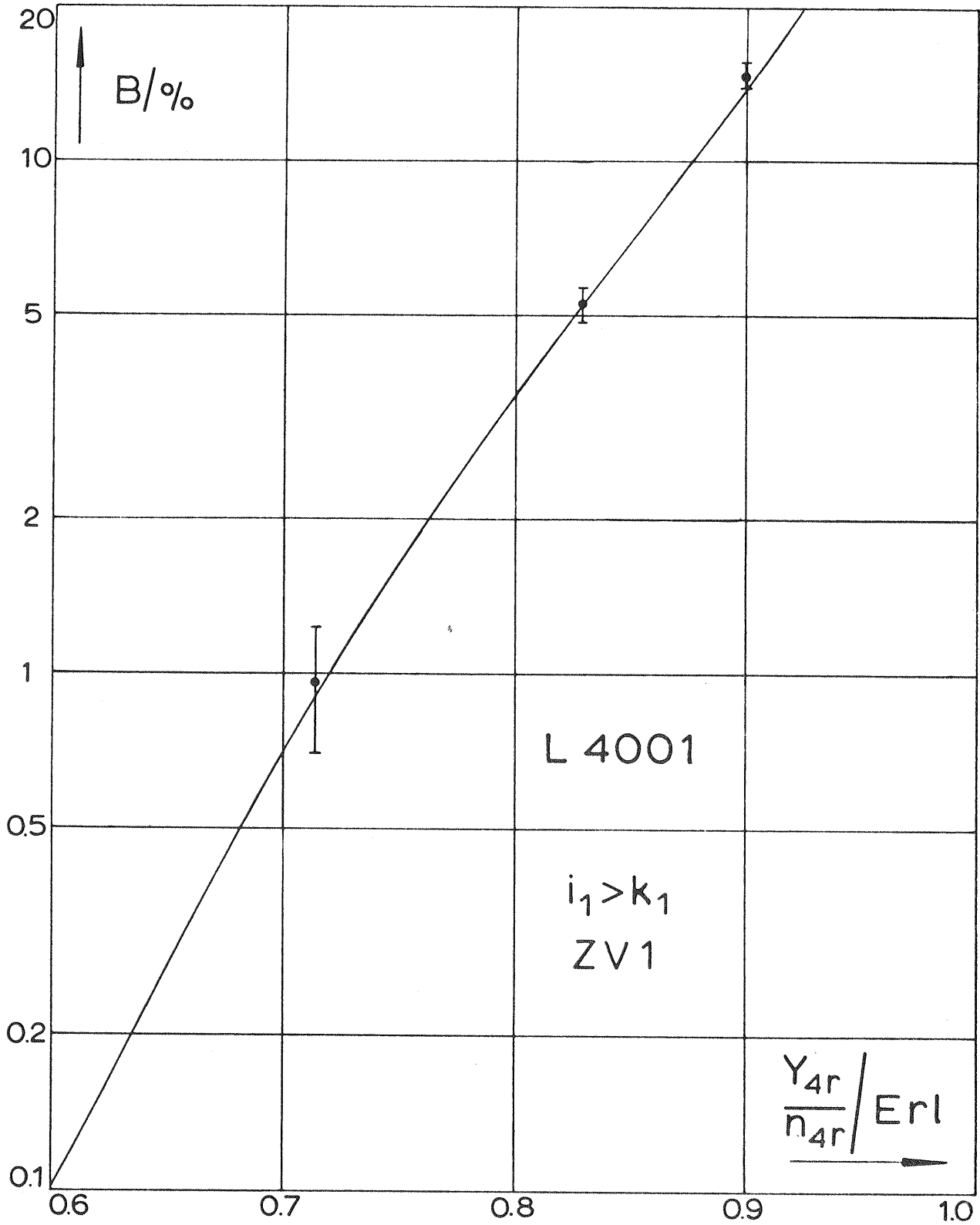


Diagramm IX.16 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

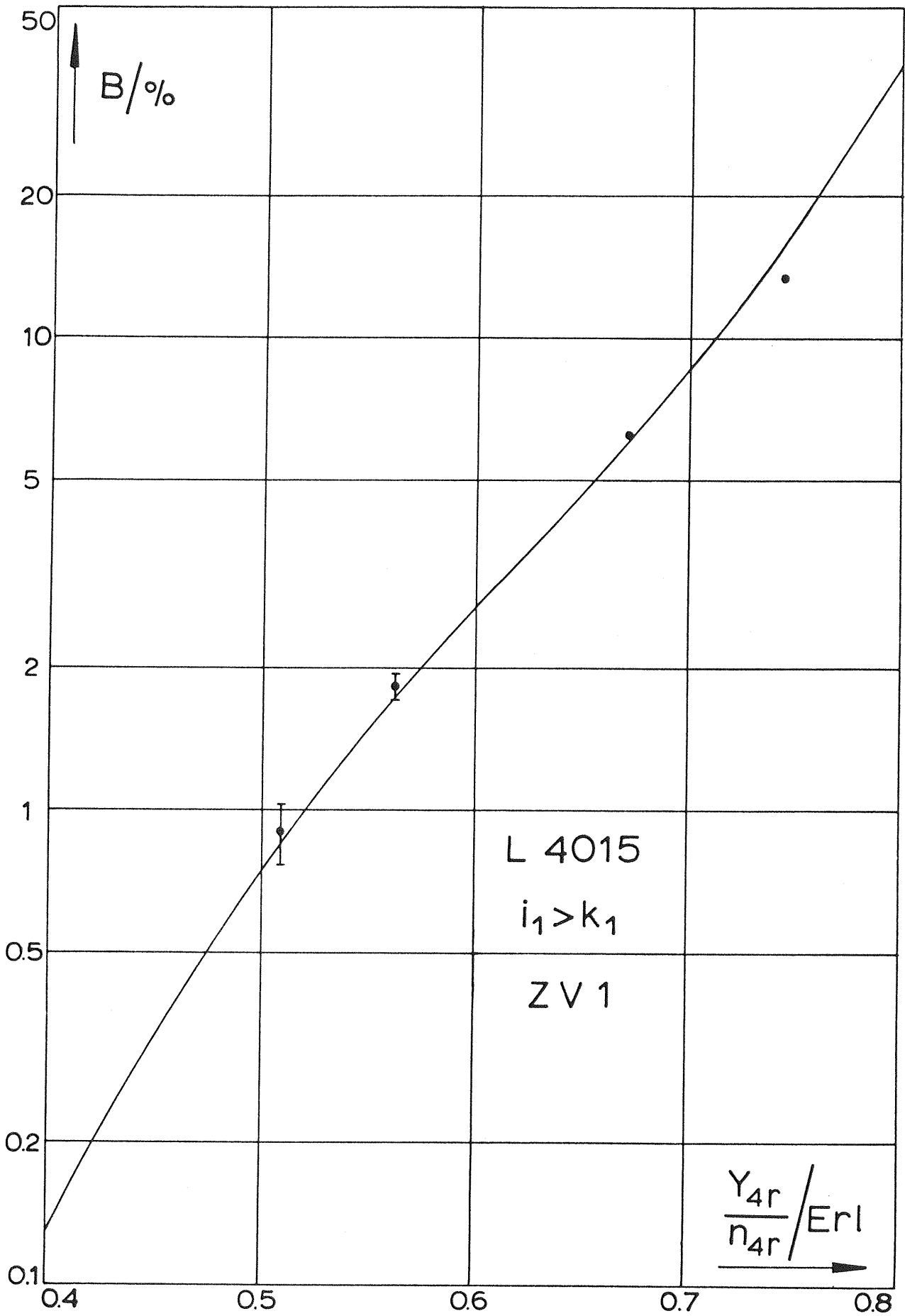


Diagramm IX.17 Erklärung siehe Abschnitt IX.7, Seite 188

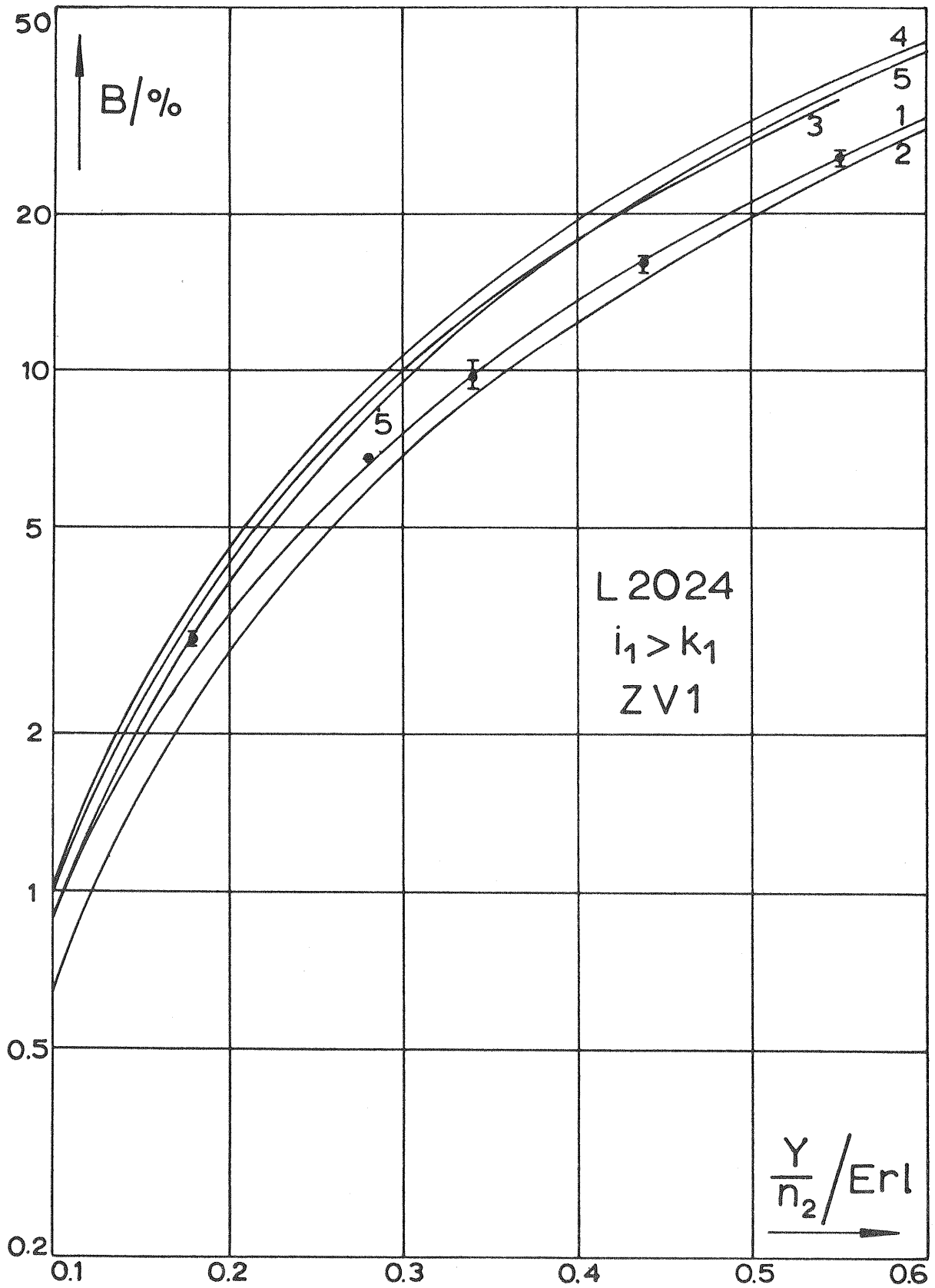


Diagramm X.1 Erklärungen Kurven 1-5 siehe Abschnitt X, Seite 191

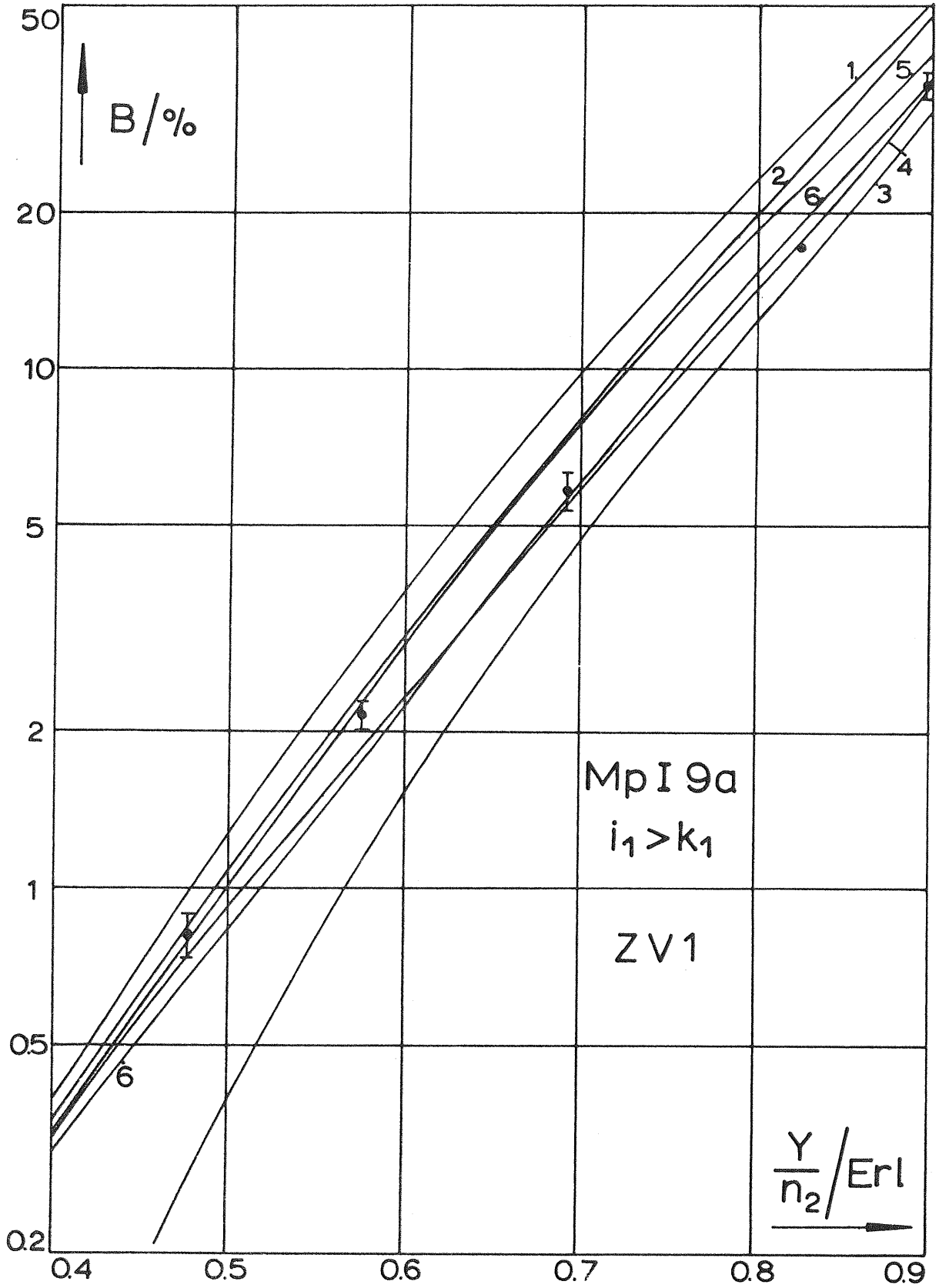


Diagramm X.2 Erklärungen Kurven 1-6 siehe Abschnitt X, Seite 191

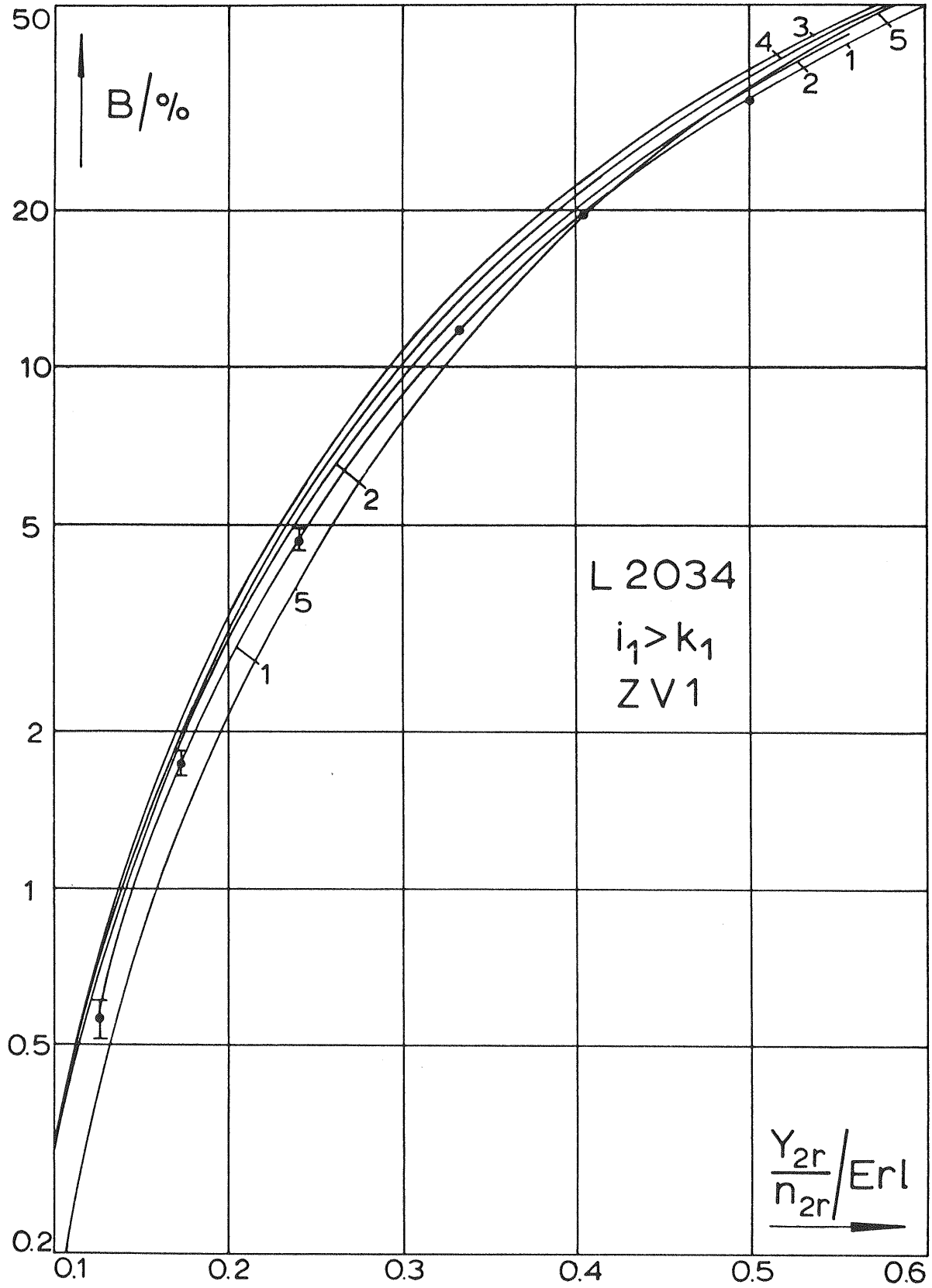


Diagramm X.3 Erklärungen Kurven 1-5 siehe Abschnitt X, Seite 192

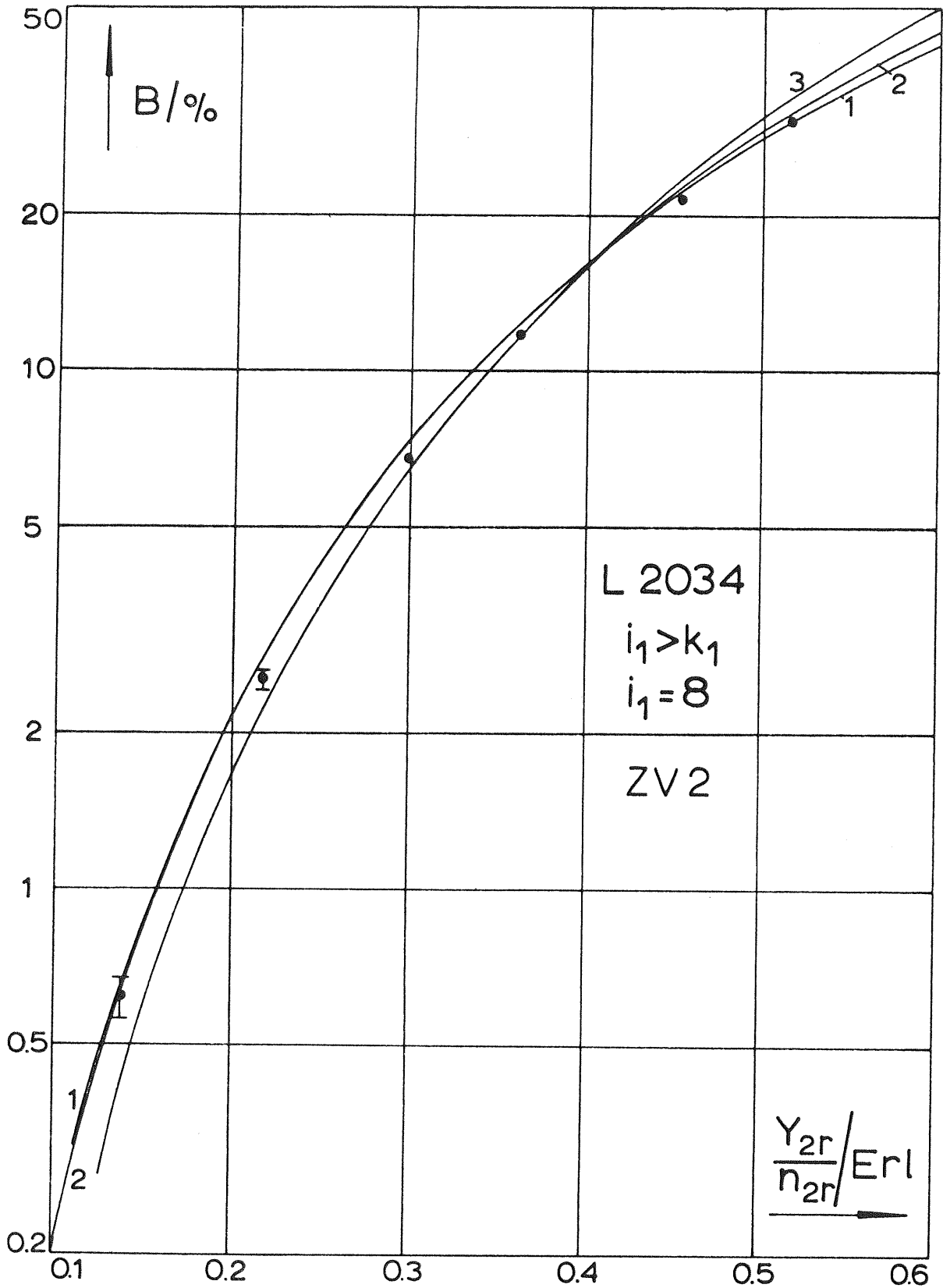


Diagramm X.4

Erklärungen Kurven 1-3 siehe Abschnitt X,
Seite 192

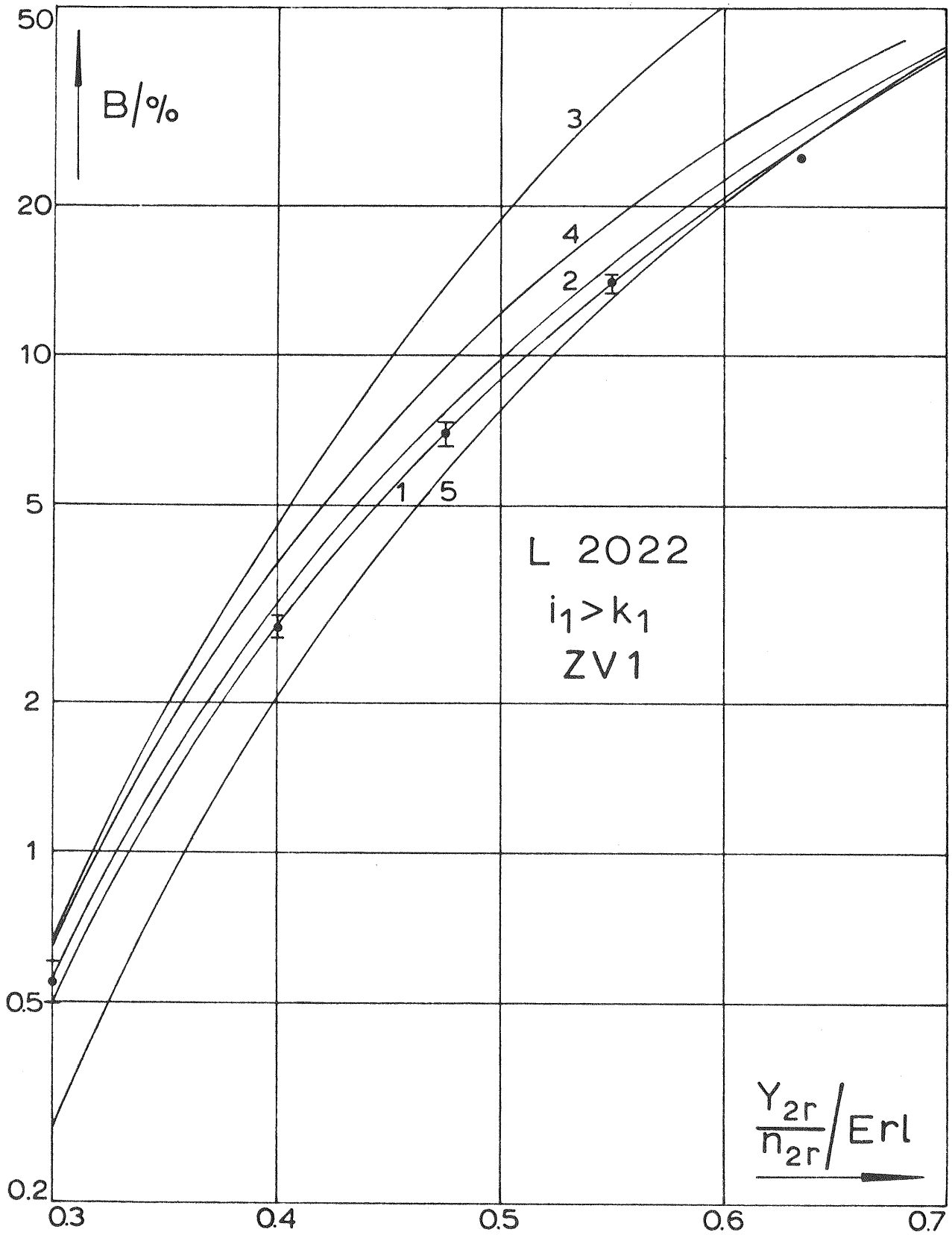


Diagramm X.5 Erklärungen Kurven 1-5 siehe Abschnitt X,
Seite 192

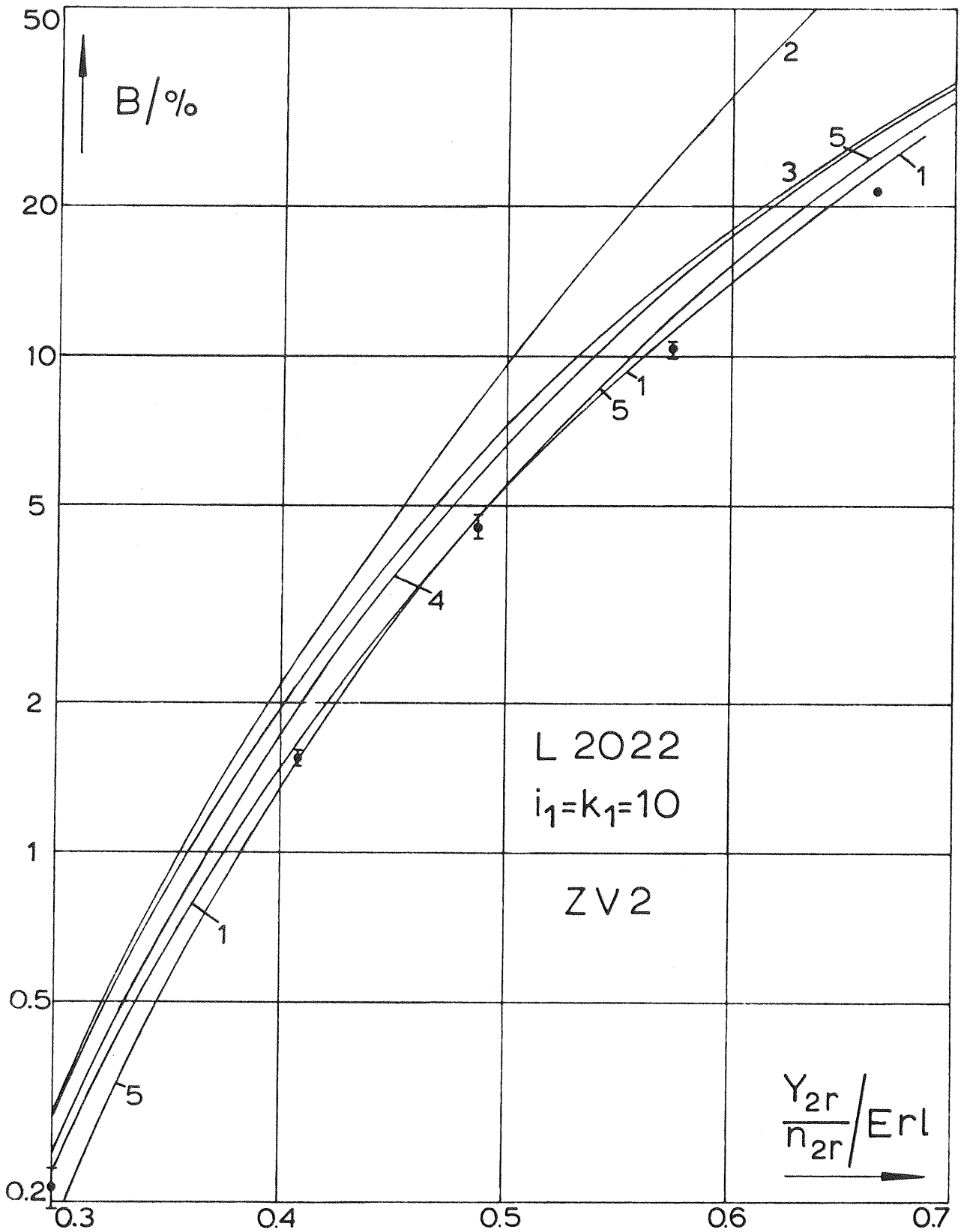


Diagramm X.6 Erklärungen Kurven 1-5 siehe Abschnitt X, Seite 192

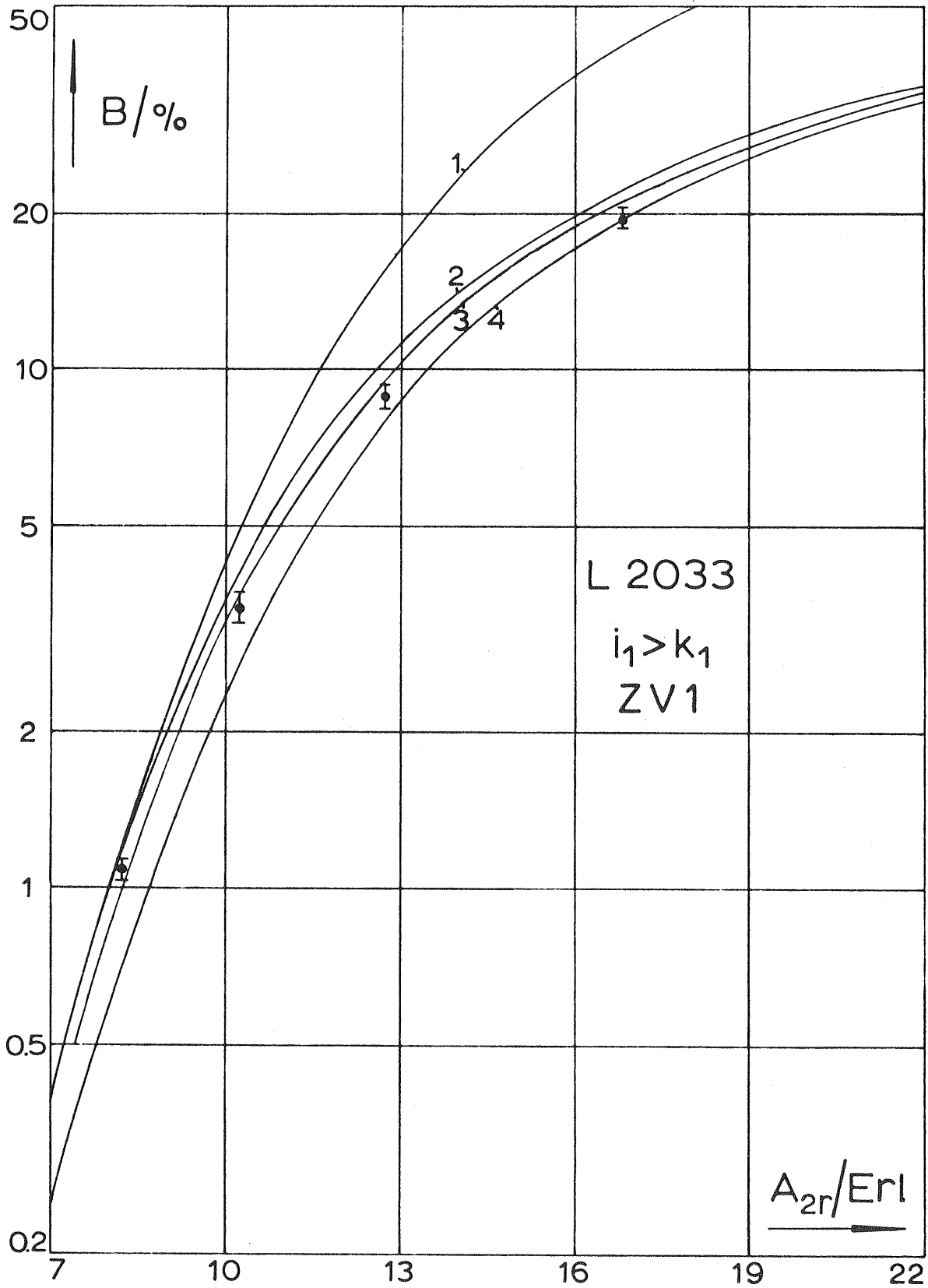


Diagramm X.7 Erklärungen Kurven 1-4 siehe Abschnitt X, Seite 192

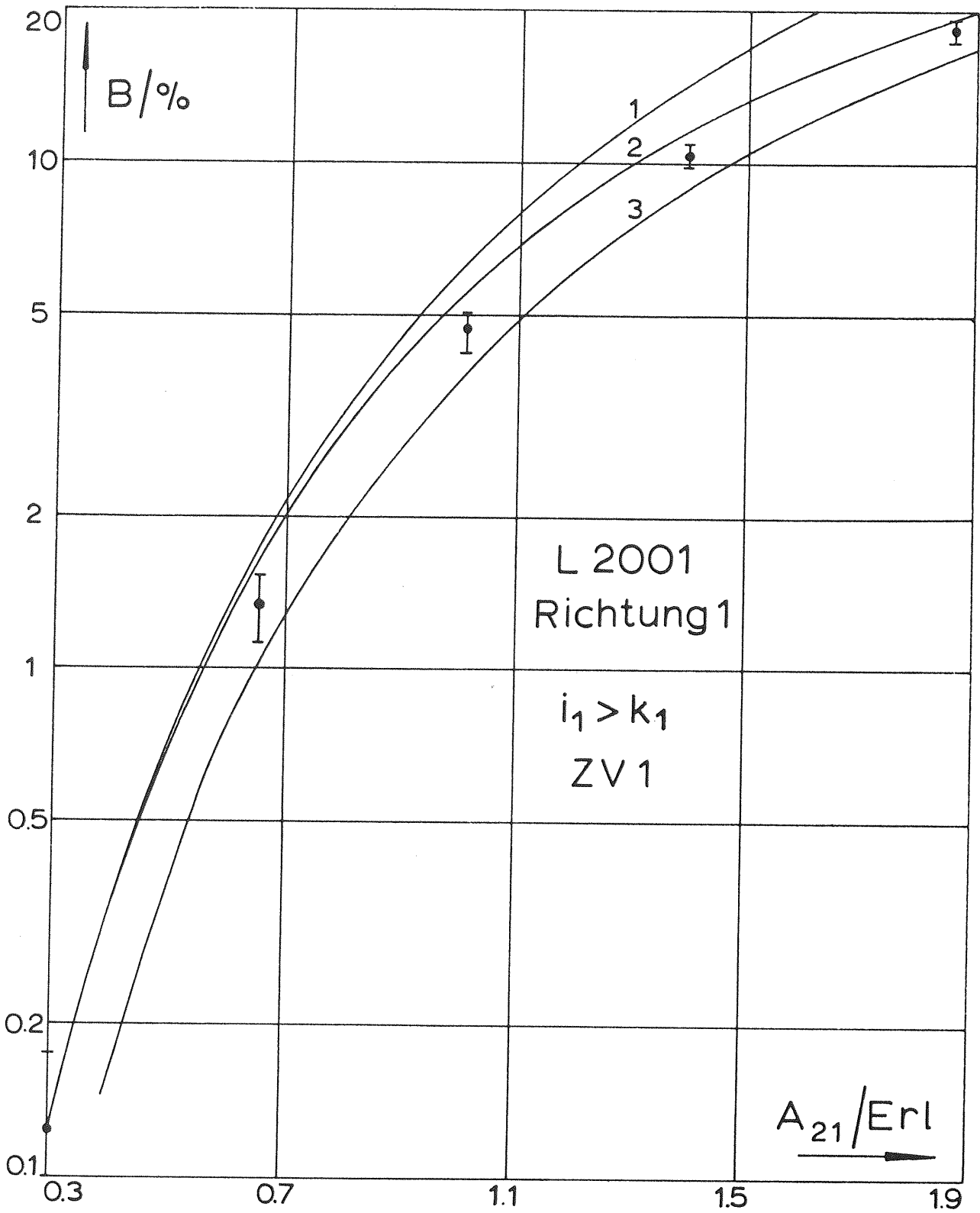


Diagramm X.8

Erklärungen Kurven 1-3 siehe Abschnitt X,
Seite 192

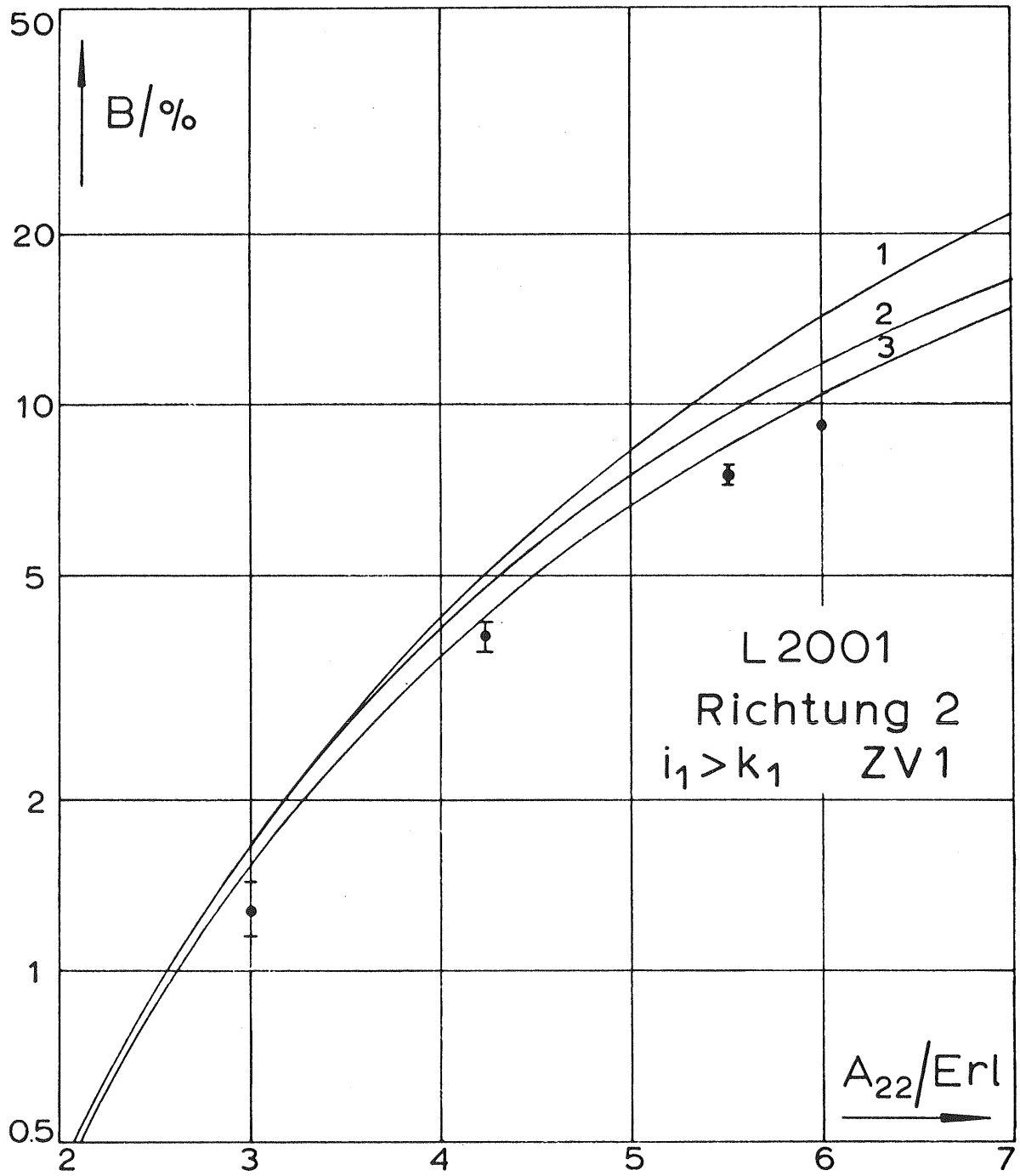


Diagramm X.9 Erklärungen Kurven 1-3 siehe Abschnitt X, Seite 192

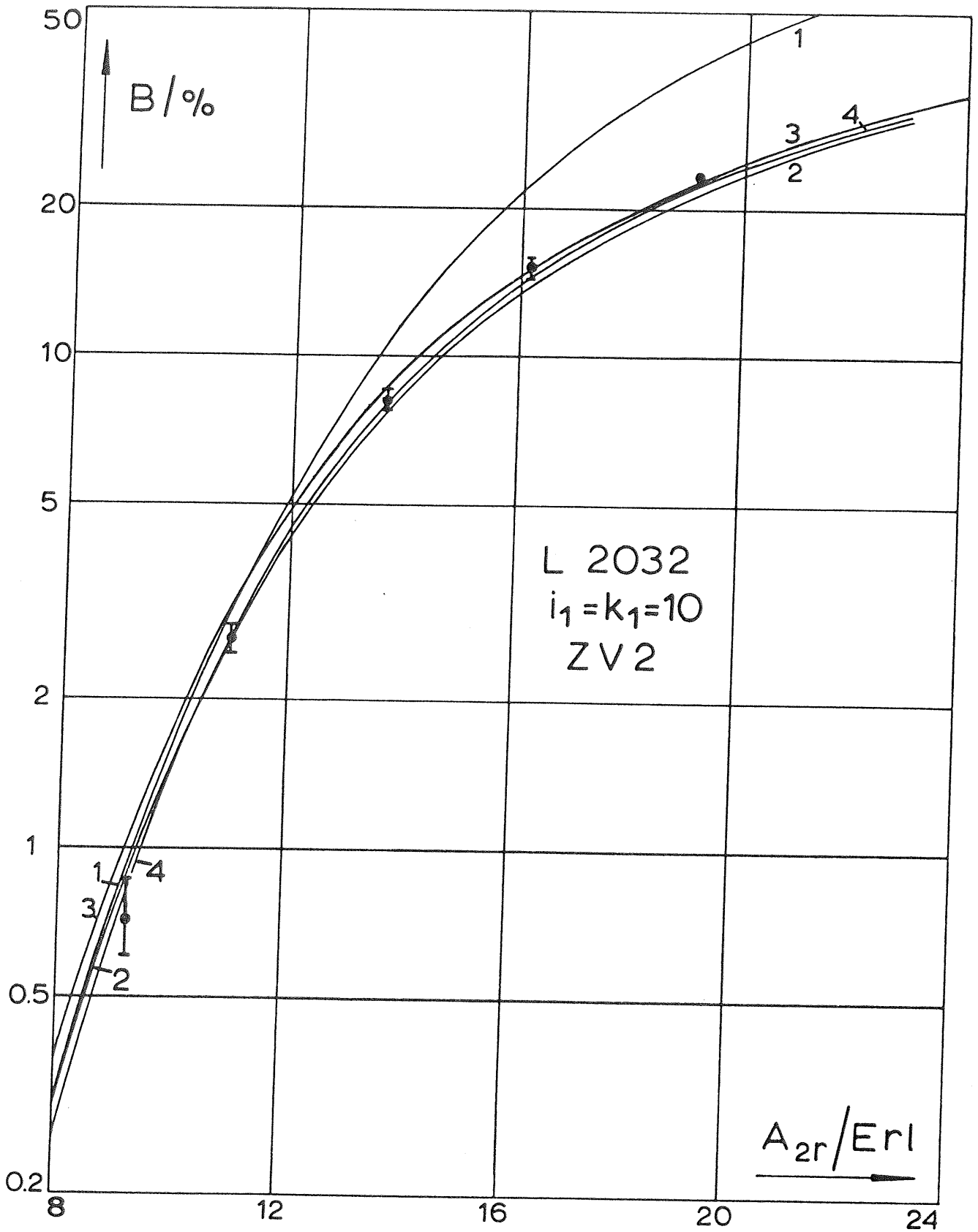


Diagramm X.10 Erklärungen Kurven 1-4 siehe Abschnitt X, Seite 193

