

Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung

Universität Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

12. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten

**Verlustsysteme der Wählvermittlungstechnik
mit Prioritäten**

von

LOTHAR KATZSCHNER

Institute for Switching and Data Technics

University Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

12th Report on Studies in Congestion Theory

Loss Systems with Priorities

by

LOTHAR KATZSCHNER

ABSTRACT

In this paper loss systems with priorities are considered. To each incoming call a priority class is assigned according to its urgency.

Two types of priorities are investigated:

a) Displacing priorities

An arriving call, finding all channels occupied, can displace an established call of the momentarily lowest priority class, provided that this class is lower than its own class.

b) Nondisplacing priorities

Each call can hunt a certain number of outgoing lines. The number of lines to be hunted increases with the urgency of the call, corresponding to the priority class. The priorities then are realized by different probabilities of loss; established calls are not displaced.

Displacing priorities are applicable e.g. in the communication networks of the weather service or flight-traffic control. They may be useful also in public networks in the case of cable-breakdowns or catastrophes.

Nondisplacing priorities may be used in toll networks with alternate routing. In overflow groups direct traffic should have priority over alternate routed traffic. Moreover, traffic which has already been switched over a long distance via several toll exchanges should have priority for the final establishment of the connection over the short-distance toll traffic.

In the case of displacing priorities a system with n full available trunks is investigated. The probabilities of loss and displacement for a certain priority class are derived. Three disciplines how to select the established call to be displaced are considered: "first-come, last-displaced", "first-come, first-displaced" and "random-displacement".

Furthermore the distribution functions of the holding time of displaced and of non-displaced calls are derived for each discipline. It will be shown that these distribution functions

are represented by a sum of n exponential functions.

To realize systems with nondisplacing priorities five connecting arrangements are suggested. For the three most important arrangements the probabilities of loss are derived in the case, where the structure of the system and the offered traffics of each class are given. Moreover, an optimum structure is determined, when the offered traffics and prescribed probabilities of loss are given.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
SCHRIFTTUMVERZEICHNIS	5
ABKÜRZUNGEN UND DEFINITIONEN	7
1. Einleitung	9
2. Das Verlustsystem mit unterbrechenden Prioritäten bei vollkommener Erreichbarkeit	11
2.1 Aufgabenstellung	11
2.2 Die zu berechnenden Größen	12
2.3 Der Unterbrechungsvorgang	14
2.4 Verlust- und Unterbrechungswahrscheinlichkeiten, Belastung	17
2.5 Die allgemeine Lösung des Problems für R Prioritätsklassen	20
2.6 Die Belegungsdauerverteilungsfunktionen Disziplin: der zuletzt eingefallene Ruf wird zuerst unterbrochen	22
2.6.1 Das Differenzen-Differentialgleichungssystem	23
2.6.2 Die Bestimmung der Eigenwerte des Differentialgleichungssystems	27
2.6.3 Die Partialbruchzerlegung der Laplace-Transformierten $g_v(s)$ und deren Rücktransformation	31
2.6.4 Die Belegungsdauerverteilungsfunktion $P(>\tau)$	34
2.6.5 Die Bestimmung der Verteilungsdichten $p_e(\tau)$ und $p_u(\tau)$ bezogen auf erfolgreich beendete bzw. unterbrochene Belegungen	36
2.6.6 Die Verteilungsfunktionen $P_e(>\tau)$ und $P_u(>\tau)$, Mittelwerte der Belegungsdauern	40
2.7 Die Lösung des Problems mit der Disziplin: der zuletzt eingefallene Ruf wird zuletzt unterbrochen	45
2.7.1 Verlust- und Unterbrechungswahrscheinlichkeiten, Belastung	45
2.7.2 Belegungsdauerverteilungsfunktionen	47

	Seite
2.8 Die Lösung des Problems mit der Disziplin: die Auswahl des zu unterbrechenden Rufes er- folgt zufällig	48
2.8.1 Verlust- und Unterbrechungswahrschein- lichkeiten, Belastung	48
2.8.2 Belegungsdaerverteilungsfunktionen	49
3. Verlustsysteme mit Prioritäten ohne Unterbre- chung bestehender Belegungen	54
3.1 Aufgabenstellung	54
3.2 Das System mit belegungsabhängigem Zugriff je Prioritätsklasse nach Faulhaber und Dunkl	55
3.3 Überlaufanordnungen zur Verwirklichung von Prioritäten in Verlustsystemen (ÜPE I und II)	58
3.3.1 Die Verlustberechnung bei vorgegebener Struktur und vorgegebenen Angeboten A_r	58
3.3.2 Die Bestimmung der Leitungszahlen n_r bei vorgeschriebenen Verlusten δ_r und Angeboten A_r	60
3.4 Der Sonderfall eines Überlaufsystems ÜPE II für zwei Prioritätsklassen	61
3.4.1 Die Zustandswahrscheinlichkeiten	61
3.4.2 Die Berechnung der Verteilung p_{x1} im Primärbündel	68
3.4.3 Die Berechnung der Verteilung p_{x2} im Sekundärbündel	70
3.4.4 Die Berechnung der Anfangswerte K_{x2}	71
3.4.5 Die Berechnung der Verlustwahrschein- lichkeiten B_1 und B_2	73
3.5 Ein System mit prioritätsabhängiger Zahl von Suchschritten für Wählereinrichtungen ohne feste Ruhestellung	73
3.6 Die Bündelteilung nach Prioritätsklassen	75
3.7 Vergleichende Betrachtung der Systeme mit Prioritäten ohne Unterbrechung bestehender Belegungen	76

	Seite
3.8 Die näherungsweise Berechnung der Systeme ÜPE I und II nach dem Streuwertverfahren	91
4. Zusammenfassung	95
ANHANG	97
LEBENS LAUF	118

SCHRIFTTUMVERZEICHNIS

- /1/ Brockmeyer, E., Halstrøm, H.L. und Jensen, A.:
The Life and Works of A.K. Erlang.
Acta Polytech. Scandinavica, Copenhagen, 1960
- /2/ Palm, C.: Table of the Erlang Loss Formula. Kunigl.
Telestyrelsen, Stockholm, 1954
- /3/ Wagner, W.: Über ein kombiniertes Warte-Verlust-
system mit Prioritäten.
Dissertation an der Universität Stuttgart, 1968
- /4/ Palm, C.: Research on telephone traffic carried by
full availability groups.
TELE (1957) 1, S. 1-107
- /5/ Vaulot, E.: Délais d'attente des appels téléphoni-
ques traités au hasard.
C.R. Acad. Sci. Paris (1946) v. 222, S. 268-269
- /6/ Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der
Mathematik.
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1962
- /7/ Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure
und Physiker.
Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961
- /8/ Carlsson, S.G., Elldin, A.: Solving Equations of
State with Digital Computers.
2. Int. Teletraffic Congress, The Hague (1958), Doc. 19
oder: Ericsson Techn. 14 (1958), S. 221-244
- /9/ Schehrer, R.: Über die exakte Berechnung von Überlauf-
systemen der Wählvermittlungstechnik
Dissertation an der Universität Stuttgart, 1969
- /10/ Faulhaber, G.R., Dunkl, Ph.: Design of Systems with
Priority Reservation.
5. Int. Teletraffic Congress, New York, 1967
- /11/ Brockmeyer, E.: The Simple Overflow Problem in the
Theorie of Telephone Traffic.
Teletechnik 5 (1954), S. 361-374
- /12/ Chastang, J.: Ein Beitrag zur Untersuchung des Überlauf-
verkehrs.
Elektr. Nachrichtenwesen 38 (1963) S. 88-95
- /13/ Jordan, Ch.: Calculus of finite Differences.
Chelsea Publishing Company, New York, 1965
- /14/ Wilkinson, R.I.: Theories for Toll Traffic Engineering
in the USA.
BSTJ 35 (1956) S. 421-515
- /15/ Bretschneider, G.: Die Berechnung von Leitungsgruppen
für überfließenden Verkehr in Fernsprechwählanlagen
NTZ 9 (1956), S. 533-540
- /16/ Lotze, A.: A Traffic Variance Method for Gradings of
Arbitrary Type
4. Int. Teletraffic Congress, London, 1964, Doc. 80
- /17/ Lotze, A.: Verkehrstheoretische Fragen bei der Gestal-
tung internationaler Fernwählnetze.
Vortrag bei der NTG Tagung (Sept. 1965) in München
oder: NTZ 19 (1966) S. 633-639
- /18/ Herzog, U., Lotze, A.: Das RDA Verfahren, ein Streu-
wertverfahren für unvollkommene Bündel.
NTZ 19 (1966), S. 640-646
- /19/ Lotze, A.: Tafeln für Streuwert D und Überlaufverkehr
R von einstufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener
Erreichbarkeit. Berechnung von Sekundärbündeln für an-
gebotenen Überlaufverkehr.
Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbei-
tung, TH Stuttgart, 1965
- /20/ Syski, R.: Introduction to Congestion Theorie in Tele-
phone Systems
Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1960
- /21/ Riordan, J.: Stochastic Server Systems.
John Wiley and Sons, New York and London, 1962

ABKÜRZUNGEN UND DEFINITIONEN

a) Größen der Fernsprechverkehrstheorie

A	(Verkehrs-) Angebot
Y	(Verkehrs-) Belastung
B	Verlustwahrscheinlichkeit, Verlust
δ	vorgeschriebener Verlust, max. zulässiger Verlust
$E_n(A)$	Verlustwahrscheinlichkeit nach der 1. Erlang'schen Formel
c_A	Anrufrichte, Einfallsrate
ε	Endedichte, Enderate
U_A	Unterbrechungswahrscheinlichkeit, bezogen auf alle angebotenen Rufe
U_Y	Unterbrechungswahrscheinlichkeit, bezogen auf alle ins Bündel gelangten Rufe
R	Zahl der Prioritätsklassen
n	Zahl der Abnehmerleitungen
P_x	Wahrscheinlichkeit, daß x Rufe einer oder mehrerer betrachteter Prioritätsklassen im Leitungsbündel sind
$P(>t)$	(Mindestwert-) Verteilungsfunktion, Verteilung
$p(t)$	Verteilungsdichte (-funktion)
t	Zeit
τ, \mathcal{J}	auf $t_m = 1/\varepsilon$ normierte Zeit
$\bar{\tau}$	auf $t_m = 1/\varepsilon$ normierter Mittelwert der Belegungs-dauer

b) mathematische Größen und Hilfsgrößen

s	komplexe Variable der Laplace-Transformation
$g_\nu(s) = L\{P_\nu(>\tau)\}$	Laplace-Transformierte der Verteilungsfunktion, in Abhängigkeit vom Belegungszustand ν nach Einfall des betrachteten Rufes
$D_\nu(s)$	Determinante, hier: Polynom ν -ten Grades in s
$d_{\mu,\nu}$	Koeffizienten von $D_\nu(s)$
$Z_\nu(s)$	Zählerpolynom der Laplace-Transformierten $g_\nu(s)$
$c_{\mu,\nu}$	Koeffizienten von $Z_\nu(s)$

$K_{\mu,\nu}$	Koeffizient des μ -ten Exponentialausdruckes der Funktion $P_\nu(>\tau)$
C_μ	Koeffizient des μ -ten Exponentialausdruckes der Funktion $P(>\tau)$
b_μ	Koeffizienten der Funktion $p(\tau)$
α_μ	Koeffizienten der Funktion $p_u(\tau)$
β_μ	Koeffizienten der Funktion $p_e(\tau)$
$u(t) = G\{p_x\}$	erzeugende Funktion
S_{x_1, x_2}	Polynome x_2 -ter Ordnung und x_1 -ten Grades in A
K_{x_2}	Randfunktion in x_2
F_{λ, x_2}	Hilfsfunktion
k	Erreichbarkeit
σ	Sperrwahrscheinlichkeit
c) Indices	
r, q	Prioritätsklassen-Indices
x_1, x_2, ν	den Zustand x_1 bzw. x_2 bzw. ν betreffend
e, u	bezogen auf <u>er</u> folgreich beendete bzw. <u>u</u> nterbrochene Rufe
d) Im Anhang verwendete Größen	
$f_{\mu,\nu}; g_{\mu,\nu}; h_{\mu,\nu}$	Hilfsfunktionen (Funktionen zweier diskreter Variablen)

1. Einleitung

In den bestehenden öffentlichen Fernsprechnetzen werden in den Knotenpunkten Gesprächswünsche solange durchgeschaltet, wie noch eine freie Leitung in der gewünschten Richtung erreichbar ist. Trifft ein Ruf am Eingang einer Kopelanordnung ein, während alle erreichbaren Leitungen belegt sind, so wird dieser Ruf abgewiesen und geht verloren ("Verlustsystem"), unabhängig davon, woher der Ruf kam.

Nun gibt es aber verschiedene Gründe, den einfallenden Rufen Prioritäten zuzuweisen, also gewisse Rufe bevorzugt abzufertigen.

So ist es denkbar, daß im Fernsprechnetzverkehr diejenigen Verbindungen, die bereits über mehrere Teilstrecken durchgeschaltet sind, gegenüber Verbindungswünschen, die nur eine Teilstrecke benötigen, bevorzugt abgefertigt werden. Auf diese Weise werden die teureren Weitverbindungen vorrangig behandelt und die Blindbelegung mehrerer Teilstrecken während der Dauer des Verbindungsaufbaues vermieden.

Sinnvoll kann auch die Einführung von Prioritäten in militärischen Vermittlungsnetzen sein. Die Teilnehmer oder die Gesprächsarten werden hier nach Rang oder Dringlichkeit in entsprechende Prioritätsklassen eingeteilt.

In modernen Ortsvermittlungsstellen, in welchen die Herstellung aller gewünschten Verbindungen von einem programmgesteuerten Rechner zentral vorgenommen wird, stellt die Einteilung der Teilnehmer in Prioritätsklassen eine wirkungsvolle Maßnahme in Katastrophenfällen dar. In den meisten bisherigen Systemen werden alle Teilnehmer, die während eines das Fernmeldenetz ungewöhnlich belastenden Katastrophenfalls keine wichtige Funktion innehaben, für eine begrenzte Zeit gesperrt. Bei der Einführung von Prioritäten könnten auch von jenen Teilnehmern mit niederen Prioritätsklassen noch Gespräche geführt werden, ohne daß dabei der Verkehr der höheren Klassen behindert wird.

Für die Einführung von Prioritäten zur Abfertigung von Rufen

in Verlustsystemen (also ohne die Möglichkeit, auf freierwerdende Leitungen zu warten) bieten sich zwei verschiedene Lösungen an:

a) Unterbrechende Prioritäten

Sind alle Leitungen des betrachteten Abnehmerbündels voll belegt, wenn ein Anruf eintrifft, so wird eine der bereits bestehenden Verbindungen einer niederen Prioritätsklasse unterbrochen. Nur wenn keine Belegung einer niederen Prioritätsklasse vorhanden ist, wird der einfallende Ruf abgewiesen.

b) Prioritäten durch höhere Erreichbarkeit

Den einzelnen Prioritätsklassen werden mit steigender Priorität mehr Leitungen des betreffenden Abnehmerbündels zugänglich gemacht. Es wird also ein Leitungsbündel mit mehr als einer Leitung vorausgesetzt.

Dieses zuletzt angeführte Verfahren der Erreichbarkeitspriorität eignet sich besonders im Fernsprechnetzverkehr, da hier Unterbrechungen bestehender Verbindungen unzweckmäßig sind und andererseits stets Bündel mit mehr als einer Leitung zur Verfügung stehen.

Verlustsysteme mit unterbrechenden Prioritäten eignen sich in der Regel besser für nichtöffentliche Vermittlungsnetze (Flugsicherung, militärische Netze usw.) sowie in öffentlichen Netzen für die oben angeführten Katastrophenfälle.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht nun darin, die Gütemerkmale eines Vermittlungssystems, in welchem Rufe nach den Verfahren a) oder b) mit verschiedenen Prioritätsklassen abgefertigt werden, aus angegebenen Strukturparametern sowie aus den Parametern des Fernsprechnetzes zu bestimmen. Als Gütemerkmale können z.B. die Wahrscheinlichkeit für den Verlust eines Rufes einer bestimmten Prioritätsklasse und die Wahrscheinlichkeit für die Unterbrechung einer Belegung betrachtet werden.

Häufig sind aber diese Gütemerkmale zusammen mit den Parametern des Verkehrs vorgegeben. Dann besteht die Aufgabe darin, die Struktur des Vermittlungssystems so zu bestimmen, daß die Gütemerkmale bei minimaler Leitungszahl erfüllt werden.

2. Das Verlustsystem mit unterbrechenden Prioritäten bei vollkommener Erreichbarkeit

2.1 Die Aufgabenstellung

Es soll ein vollkommen erreichbares Bündel mit n Abnehmerleitungen betrachtet werden, d.h. ein Bündel, bei welchem jeder ankommende Ruf auf jede freie Abnehmerleitung durchgeschaltet werden kann. Die ankommenden Rufe werden in R Prioritätsklassen (Ränge) eingeteilt. Es ist einerseits denkbar, daß auf bestimmten Zubringerleitungen nur Rufe einer bestimmten Klasse eintreffen oder andererseits, daß eintreffende Rufe eine bestimmte Kennung besitzen, aus welcher die Steuerung der Koppelanordnung die Prioritätsklasse entnehmen kann. Wenn im letzteren Fall ein Ruf eine Leitung belegt, muß die Information über seine Priorität auf jeden Fall dieser Leitung zugeordnet werden.

Klasse 1 sei die höchste oder dringlichste Klasse; mit zunehmendem r ($r = 1, 2, \dots, R$) nehme die Dringlichkeit ab.

Im Folgenden werden nur zwei Prioritätsklassen betrachtet. Es wird aber gezeigt, daß das Problem mit R Prioritätsklassen und unterbrechenden Prioritäten stets auf den Fall von zwei Klassen zurückführbar ist, wenn folgende Annahmen getroffen werden, die im weiteren stets gelten sollen:

a) Der Anrufprozess ist ein Poisson-Prozess, d.h. die Abstände von zwei aufeinanderfolgenden, in das System einfallenden Rufen sind negativ exponentiell verteilt. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß in dem differentiellen Zeitelement dt ein Ruf eintrifft, unabhängig vom momentanen Belegungszustand, von der Zeit t sowie von den vorhergegangenen Rufen. Diese Wahrscheinlichkeit ist $c_A \cdot dt$, wobei c_A die Anrufrichte (Einfallrate) darstellt.

b) Die Endedichte ϵ_r einer Belegung (Enderate) ist für alle Klassen gleich und konstant, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf - ohne unterbrochen zu werden - im Zeitintervall zwischen t und $t+dt$ endet, ist unabhängig vom Belegungszustand, vom Anrufprozess und auch vom Zeitpunkt t . Diese

Wahrscheinlichkeit ist $\epsilon_r \cdot dt = \epsilon \cdot dt$, wobei ϵ die Endedichte darstellt.

c) Der Verkehr ist stationär, d.h. die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen eines bestimmten, aber beliebig herausgegriffenen Belegungszustandes ist unabhängig von der Zeit t .

d) Sofort abgewiesene Rufe und unterbrochene Rufe verlassen das System und gehen verloren, so daß der Anrufprozess nach a) erhalten bleibt.

Verkehrsmessungen haben gezeigt, daß diese Annahmen - insbesondere die Annahme eines Poisson-Anrufprozesses - während der Hauptverkehrsstunde sehr wirklichkeitsgetreu sind und zu einer zulässigen Modellvorstellung für die Rechnung führen.

2.2 Die zu berechnenden Größen

Trifft nun ein Ruf der Klassen $r = 1, 2, \dots, R-1$ in ein vollbelegtes System ein, so sind zwei Ereignisse möglich. Entweder alle n Rufe im System sind von gleicher oder höherer Priorität (d.h. gleicher oder kleinerer Ordnungsnummer der Klasse), dann geht dieser Ruf verloren; es interessiert dann, mit welcher Wahrscheinlichkeit B_r dieses "Verlust-Ereignis" eintritt. Oder es ist mindestens eine Belegung einer geringeren Prioritätsklasse im System, dann gelangt der neue Ruf in das System, wobei eine Belegung einer geringeren Klasse unterbrochen wird.

Es interessiert nun, mit welcher Wahrscheinlichkeit U_A (bezogen auf alle Rufe der betroffenen Klasse) bzw. U_Y (bezogen auf die in das System gelangten Rufe dieser Klasse) solche Unterbrechungen auftreten. Eine unterbrochene Belegung gilt dabei als beendet und wird später nicht mehr fortgesetzt.

Ein Ruf der niedrigsten Priorität R kann keinen anderen Ruf unterbrechen; er geht also immer verloren, wenn zum Zeitpunkt seines Eintreffens das Leitungsbündel voll belegt ist.

Rufe einer Prioritätsklasse $r > 1$, die unterbrochen werden, haben keine Belegungsdauern mehr, die negativ exponentiell um den Mittelwert $1/\epsilon$ verteilt sind, es wird nun von Interesse sein, welcher Belegungsdauer-Verteilungsfunktion $P_u(>t)$ die un-

terbrochenen Rufe gehorchen. Aber auch die nicht unterbrochenen Rufe (erfolgreichen Rufe) einer Prioritätsklasse $r > 1$ besitzen keine negativ exponentielle Belegungs-dauer-Verteilungsfunktion $P_e(>t)$ mehr, weil dieser Anteil der nicht unterbrochenen Rufe keine zufällige Auswahl aus der Gesamtheit aller Rufe der betrachteten Klasse darstellt.

Darüber hinaus ist es auch von Interesse, die Mittelwerte der Belegungs-dauern dieser Verteilungsfunktionen zu kennen: der Mittelwert \bar{t}_r aller Rufe einer Klasse r sowie die Mittelwerte $\bar{t}_{r,e}$ und $\bar{t}_{r,u}$ der erfolgreich beendeten bzw. der unterbrochenen Rufe.

Abb. 1 veranschaulicht den Belegungs- und Unterbrechungsvorgang für zwei Prioritätsklassen, auf den - wie schon bemerkt - sich der allgemeine Fall mit R Prioritätsklassen stets zurück-führen läßt.

In einer Zeiteinheit werden folgende Ereignisse im Mittel eintreten:

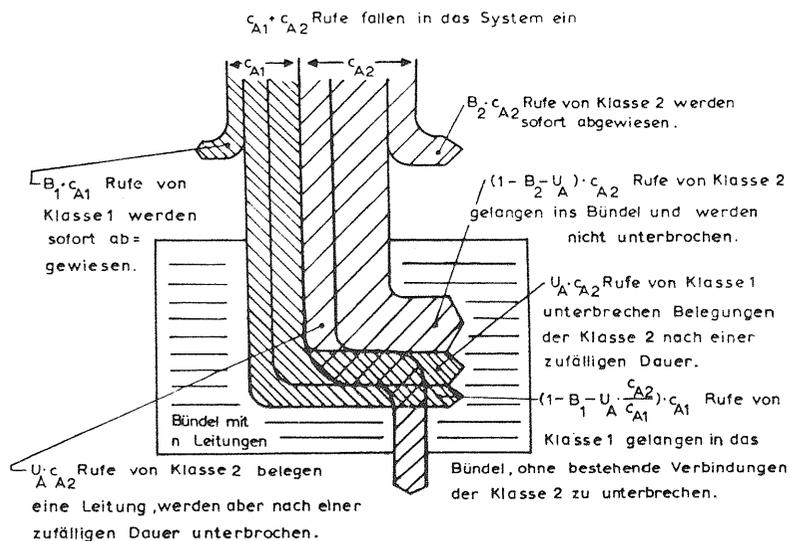


Abb. 1. Zur Veranschaulichung des Unterbrechungsvorganges

Zwei weitere Größen sind zur Beschreibung des Fernsprechverkehrs im Bündel notwendig: das Angebot A und die Belastung Y .

Unter dem Angebot A versteht man diejenige Zahl von Belegungen, die im Mittel im Bündel anzutreffen wäre, wenn kein Ruf verloren ginge oder unterbrochen würde. Also gilt allgemein

$$A = c_A \cdot \bar{t}_m \quad \text{wobei} \quad \bar{t}_m = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{ist.} \quad (1)$$

Die Belastung Y stellt dann die tatsächliche, im Mittel gleichzeitig existierende Anzahl von Belegungen im Bündel dar.

Es ergibt sich:

$$Y = c_A \cdot (1 - B) \cdot \bar{t} \quad (2)$$

Dabei bedeutet $c_A(1-B)$ den pro Zeiteinheit in das Bündel gelangenden Anteil der betrachteten Rufe, \bar{t} den Mittelwert der Belegungs-dauer dieser Rufe.

2.3 Der Unterbrechungsvorgang

Betrachten wir zunächst die Rufe der Prioritätsklasse 1. Trifft ein Ruf dieser Klasse in den Zustand "x+n Leitungen belegt" ein, dann kann er auf jeden Fall eine freie Leitung belegen. Trifft er in den Zustand "x=n Leitungen belegt" ein, dann wird er durch Unterbrechung ebenso zum Ziel kommen, sofern mindestens eine der n Leitungen durch einen Ruf der Klasse 2 belegt ist. Daher ist es also für Klasse 1 völlig gleichgültig, ob und wieviel Belegungen der Klasse 2 im betrachteten Bündel sind; eine von Klasse 2 belegte Leitung ist für Klasse 1 gleichbedeutend mit einer freien Leitung. Verluste treten für Klasse 1 damit erst auf, wenn alle n Leitungen durch die eigene Klasse belegt sind.

Betrachten wir jetzt einen Ruf der Klasse 2. Würden keine Unterbrechungen auftreten, so wäre die Verteilungsfunktion der Belegungs-dauern

$$P(>t) = e^{-\frac{t}{\bar{t}_m}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein zum Zeitpunkt 0 eingefallener Ruf zum Zeitpunkt t_0 noch existiert, ist damit

$$P(>t_0) = e^{-\frac{t_0}{t_m}} \quad (3)$$

Dieses bedeutet aber, daß der relative Anteil jener Belegungen, die $>t_0$ werden, gleich $P(>t_0)$ ist.

Andererseits ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Belegung die Zeit $t = t_0 + t_1$ überschreitet

$$P(>t_0 + t_1) = e^{-\frac{(t_0 + t_1)}{t_m}} \quad (4)$$

d.h. der relative Anteil der Belegungen, die länger dauern als $t_0 + t_1$ ist $P(>t_0 + t_1)$.

Die Belegungsdauer-Verteilung bezogen auf jene Belegungen, die zum Zeitpunkt t_0 nach ihrem Beginn noch existieren, ergibt sich dadurch aus Gleichung (3) und (4)

$$P_{t_0}(>t_1) = \frac{e^{-\frac{(t_0 + t_1)}{t_m}}}{e^{-\frac{t_0}{t_m}}} = e^{-\frac{t_1}{t_m}} \quad (5)$$

Das bedeutet aber, daß alle zum Zeitpunkt t_0 betrachteten Rufe für den restlichen Teil ihrer Belegung wieder negativ exponentiell verteilt sind und wieder den Mittelwert t_m für die restliche Belegungsdauer besitzen, unabhängig davon, wie lange diese Belegungen bereits andauerten.

Werden also bestehende Belegungen der Klasse 2 zum beliebigen Zeitpunkt t_0 unterbrochen, dann hätten sie immer noch im Mittel die Zeit t_m angedauert.

Nun ist aber andererseits die Belegungsdauer-Verteilung der unterbrechenden Rufe der Klasse 1 ebenfalls

$$P(>t_1) = e^{-\frac{t_1}{t_m}} \quad (6)$$

und zwar ist die Dauer eines unterbrechenden Rufes der Klasse 1 unabhängig von der Dauer des unterbrochenen Rufes der Klasse 2.

Daraus folgt, daß die Belegungsdauer-Verteilung, welche die

unterbrochenen Rufe der Klasse 2 gehabt hätten, wenn keine Unterbrechungen zugelassen wären, identisch ist mit jener Belegungsdauer-Verteilung, die jetzt die unterbrochenen Rufe einschließlich der ihnen "angehängten" Rufe der Klasse 1 besitzen. Mit anderen Worten: wird eine Belegung mit der konstanten Endedichte ε durch einen einfallenden Ruf einer höherwertigeren Klasse vorzeitig beendet und setzt dieser Ruf die unterbrochene Belegung seinerseits mit der gleichen Endedichte fort, dann unterscheidet sich die Belegungsdauer-Verteilung dieser zusammengesetzten Belegungen nicht von derjenigen, welche die Belegungen der Klasse 2 ohne Zulassung von Unterbrechungen gehabt hätten.

Auf Grund dieser Überlegungen läßt sich nun eine Übersicht der verschiedenen Belegungsdauer-Verteilungen angeben (Tabelle 1)

Art der Belegungen	Belegungsvert.	Gleichung
a) alle Beleg.d.Kl. 1 nicht unterbrechende Beleg. Kl. 1 unterbrechende Beleg. d.Kl. 1	e^{-t/t_m} e^{-t/t_m} e^{-t/t_m}	(6)
b) nicht unterbrochene Beleg. Kl. 2. + unterbrochene Beleg.d.Kl.2 einschließlich der anschließenden Belegungen d.Kl. 1	e^{-t/t_m}	(7)
c) nicht unterbrechende Beleg.d. Kl. 1 + Beleg. nach b) = alle Beleg.Kl.1 u.2	e^{-t/t_m}	(8)
d) alle Beleg.von Kl.2	$P_2(>t) \neq e^{-t/t_m}$	Siehe (47)
e) nicht unterbrochene Beleg. d. Kl. 2	$P_{2e}(>t) \neq e^{-t/t_m}$	Siehe (68)
f) unterbr.Beleg.Kl.2	$P_{2u}(>t) \neq e^{-t/t_m}$	Siehe (67)

Tabelle 1. : Die verschiedenen Verteilungsfunktionen

Damit sind nur die Belegungsdauer-Verteilungen der Prioritätsklasse 2 zu berechnen; und zwar

- d) für alle Rufe der Klasse 2 : $P_2(>t)$;
sowie getrennt nach ihren Schicksalen:
- e) für erfolgreiches Enden: $P_{2,e}(>t)$ und
- f) für Enden durch Unterbrechung : $P_{2,u}(>t)$

Der Index 2 (Klasse 2) wird im folgenden der Einfachheit halber weggelassen, da die Berechnung der Belegungsdauer-Verteilungsfunktionen nur für diese Klasse notwendig ist.

Es wird sich zeigen, daß diese Verteilungsfunktionen abhängig sind von der Vorschrift für die Auswahl der zu unterbrechenden Rufe:

Im wesentlichen unterscheidet man bei Unterbrechung einer Belegung drei verschiedene Auswahlmöglichkeiten aus der in Frage kommenden Prioritätsklasse:

- der zuletzt eingefallene Ruf wird zuerst unterbrochen,
- der zuletzt eingefallene Ruf wird zuletzt unterbrochen,
- die Auswahl des zu verdrängenden Rufes erfolgt zufällig.

Unter der bis jetzt getroffenen Voraussetzung, daß von einem einfallenden Ruf stets nur Rufe einer geringeren Prioritätsklasse unterbrochen werden, hat diese Auswahlvorschrift dagegen keinen Einfluß auf Verlust- und Unterbrechungswahrscheinlichkeit (siehe Kap. 2.8). Deshalb gelten diese im folgenden abgeleitenden Größen für alle Auswahlvorschriften.

Eine Ausnahme stellt lediglich Kap. 2.7 dar, wo zusätzlich angenommen wird, daß auch Belegungen der eigenen Klasse unterbrochen werden können.

2.4 Verlust- und Unterbrechungswahrscheinlichkeiten, Belastung

a) für Klasse 1

Da von Klasse 2 belegte Leitungen für Klasse 1 gleichbedeutend mit freien Leitungen sind, kann man Verlustwahrscheinlichkeit B_1 und Belastung Y_1 für Klasse 1 aus bekannten Lösungen gewinnen, die Systeme mit nur einer Klasse von Rufen, also Systeme ohne Unterbrechungen betrachten. Damit gilt für den

Verlust:

$$B_1 = E_n(A_1) \tag{9}$$

mit

$$E_n(A_1) = \frac{A_1^n}{n!} \sum_{v=0}^n \frac{A_1^v}{v!} \tag{10}$$

Gl. (10) wurde bereits von A.K. Erlang (1917) angegeben /1/ und von C.Palm als Tafelwerk veröffentlicht /2/. Die Belastung ergibt sich zu:

$$Y_1 = c_{A1} (1 - B_1) \cdot t_m = A_1 [1 - E_n(A_1)] \tag{11}$$

b) für Klasse 2

Aus Gleichung (8) und der Erläuterung auf Seite 16 folgt nun: Betrachtet man jede unterbrochene Belegung mit dem "angehängten", unterbrechenden Ruf als eine Belegung, so ist der gesamte Belegungsprozess beider Prioritätsklassen identisch mit einem, der durch eine Anrufrichte ($c_{A1} + c_{A2}$) erzeugt wird. Denn jener Anteil aller Rufe der Klasse 1, der im Zustand "x = n Leitungen belegt" eintrifft und der ohne die Zulassung von Unterbrechungen verloren ginge, wird jetzt zwar vorhandene Rufe der Klasse 2 unterbrechen, aber jeder dieser Rufe mit der Belegungsdauerverteilung $P(>t) = \exp(-t/t_m)$ wird auf Kosten einer unterbrochenen Belegung durchgesetzt, deren Restdauer ebenfalls nach $P(>t) = \exp(-t/t_m)$ verteilt gewesen wäre. Damit ergibt sich der Verlust für Prioritätsklasse 2:

$$B_2 = E_n(A_1 + A_2) \tag{12}$$

Die Belastung des Bündels durch Rufe der Klasse 2 ergibt sich nach (2):

$$Y_2 = c_{A_2}(1-B_2) \cdot \bar{t} = A_2(1-B_2) \cdot \frac{\bar{t}}{t_m} \quad (13)$$

wobei \bar{t} noch zu berechnen ist, siehe Gl. (15).

Andererseits läßt sich die Belastung Y_2 auch aus folgender Überlegung gewinnen:

Genau jene Belastung, welche die Prioritätsklasse 1 durch Unterbrechungen zusätzlich durchsetzt, geht der Prioritätsklasse 2 verloren; denn zum Zeitpunkt des Unterbrechens haben sowohl die unterbrochene Belegung als auch der unterbrechende, neue Ruf den Erwartungswert t_m für ihre nachfolgende Belegungsdauer.

Die zusätzlich durchgesetzte Belastung der Klasse 1 beträgt:

$$\Delta Y_1 = A_1[1 - E_n(A_1)] - A_1[1 - E_n(A_1 + A_2)] = A_1[E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)]$$

Damit läßt sich nun Y_2 wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} Y_2 &= A_2[1 - E_n(A_1 + A_2)] - A_1[E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)] \\ &= A_2[1 - E_n(A_1 + A_2)] \cdot \left\{ 1 - \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)}{1 - E_n(A_1 + A_2)} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Ein Vergleich zwischen den Gleichungen (13) und (14) liefert den Mittelwert der Belegungsdauer aller Rufe der Klasse 2

$$\bar{t} = \left[1 - \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)}{1 - E_n(A_1 + A_2)} \right] \cdot t_m \quad (15)$$

Nun läßt sich aber die Verringerung ΔY_2 der Belastung Y_2^* ohne Unterbrechungen auf den tatsächlichen Wert Y_2 mit Unterbrechungen auch mit Hilfe der Unterbrechungswahrscheinlichkeit U_A ausdrücken:

$$\Delta Y_2 = U_A \cdot c_{A_2} \cdot t_m = U_A \cdot A_2$$

Damit wird ausgesagt, daß von den c_{A_2} Rufen pro Zeiteinheit der Anteil U_A durch Unterbrechung verloren geht. Diese unterbrochenen Rufe hätten im Mittel je noch die Zeit t_m gedauert.

Aus der Bedingung $\Delta Y_2 = \Delta Y_1$ folgt:

$$\begin{aligned} U_A \cdot A_2 &= A_1[E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)] \\ U_A &= \frac{A_1}{A_2} \cdot [E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)] \end{aligned} \quad (16)$$

Bezieht man die Unterbrechungswahrscheinlichkeit nur auf die ins Bündel gelangten Rufe der Klasse 2, so erhält man die Unterbrechungswahrscheinlichkeit U_Y :

$$U_Y = \frac{U_A \cdot A_2}{A_2[1 - E_n(A_1 + A_2)]} = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)}{1 - E_n(A_1 + A_2)} \quad (17)$$

In den Abbn. 2a, b sind die Unterbrechungswahrscheinlichkeiten U_A und U_Y als Funktion des Angebotes A_1 aufgetragen.

Mit Gl. (17) läßt sich nun Gl. (15) vereinfachen:

$$\bar{t} = t_m(1 - U_Y) \quad (18)$$

Bei einem Problem der Warteschlangentheorie mit Prioritäten ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit der Verdrängung eines Rufes aus der Warteschlange - aus einer anderen Herleitung - eine zu Gl. (16) analoge Formel (W. Wagner /3/).

2.5 Die allgemeine Lösung des Problems für R Prioritätsklassen

Verallgemeinert man Gleichung (8), so folgt, daß alle Rufe der Klassen 1 bis r-1 negativ exponentielle Belegungsdauerverteilungsfunktionen besitzen, wenn man die Dauer des unterbrechenden Rufes zu der Dauer der unterbrochenen Belegung hinzuzählt. Dabei soll hier als die Dauer einer Belegung die Zeit zwischen

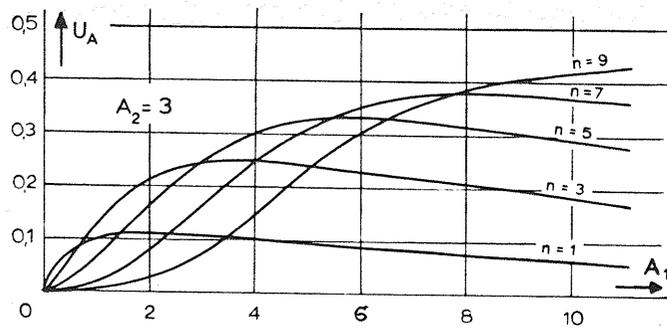


Abb. 2a. Die Unterbrechungswahrscheinlichkeit U_A (bezogen auf alle Rufe der Klasse 2) in Abhängigkeit vom Angebot A_1 der Klasse 1.

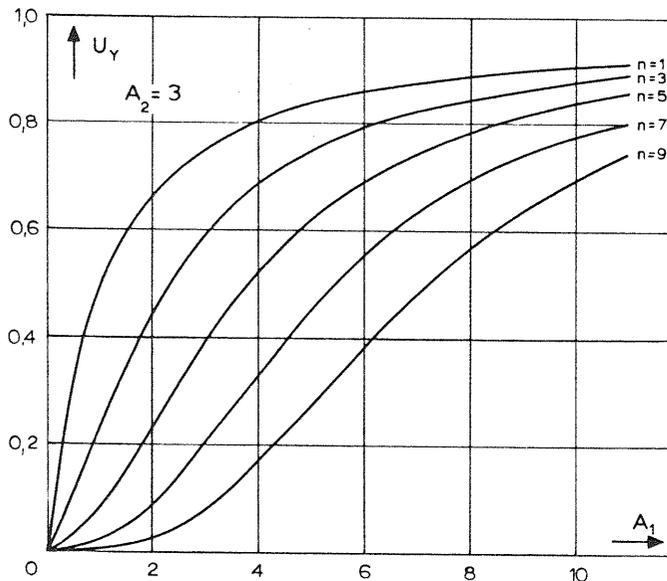


Abb. 2b. Die Unterbrechungswahrscheinlichkeit U_A (bezogen auf alle ins Bündel gelangten Rufe der Klasse 2) in Abhängigkeit vom Angebot A_1 der Klasse 1.

der Belegung einer Leitung und dem Freiwerden dieser Leitung betrachtet werden. Dabei ist es ohne Bedeutung, ob diese Belegung von einem Ruf oder gegebenenfalls - infolge von Unterbrechungen - von zwei oder mehr Rufen herrührt. Der Belegungsprozess unterscheidet sich insoweit nicht von demjenigen, der von den Angeboten A_1, A_2 , bis A_{r-1} erzeugt würde, wenn keine Unterbrechungen zugelassen werden.

Es ist nun für die betrachtete Klasse r belanglos, wie sich die Angebote der Klassen 1 bis $r-1$ in einzelnen aufteilen, genauso ist es für diese Klasse uninteressant, wie sich in einem momentanen Belegungszustand die existierenden Belegungen auf die Klassen 1 bis $r-1$ aufteilen. Denn Klasse r kann bei voll belegtem Bündel von jedem einfallenden Ruf der Klassen 1 bis $r-1$ unterbrochen werden; Klasse r kann aber ihrerseits keinen dieser Rufe unterbrechen. Dadurch können für die Berechnung der Verkehrsgrößen der Klasse r alle Klassen 1 bis $r-1$ zu einer Klasse mit einem Angebot, welches der Summe $A_1 + A_2 + \dots + A_{r-1}$ entspricht, zusammengefaßt werden.

Rufe der Klassen $r+1$ bis R können dagegen von Klasse r aus dem vollen Bündel verdrängt werden; die von ihnen belegten Leitungen gelten so für Klasse r als frei.

Nach diesen Überlegungen lassen sich jetzt die bereits für zwei Klassen berechneten Größen auch für den allgemeinen Fall angeben, wenn

$$A_1 \text{ durch } \sum_{i=1}^{r-1} A_i \text{ und } A_2 \text{ durch } A_r \text{ ersetzt wird.}$$

Dann ergeben die für Klasse 2 gewonnenen Ergebnisse die entsprechenden Lösungen für die Klasse r .

Daher genügt es, auch weiterhin nur zwei Prioritätsklassen zu betrachten.

2.6 Die Belegungsdauer-Verteilungsfunktionen

Disziplin: der zuletzt eingefallene Ruf wird zuerst unterbrochen

2.6.1 Das Differenzen-Differentialgleichungssystem

Ein Ruf der Klasse 2 fällt in das Bündel ein und belegt eine Leitung. Der nun beginnende Belegungsvorgang kann durch die Belegungsdauer-Verteilungsfunktion $P(>t)$ beschrieben werden. Um diese Funktion zu finden, ist es zweckmäßig, zunächst die Verteilungsfunktionen $P_\nu(>t)$ zu bestimmen, d.h. die Verteilungsfunktionen der Belegungsdauer in Abhängigkeit von dem Belegungszustand $x=\nu$, der unmittelbar nach Einfall des Rufes in den Zustand $x = \nu - 1$ existiert.

Da Unterbrechungen nur im Zustand " $x = x_1 + x_2 = n$ Leitungen belegt" ($x_2 > 0$) auftreten, ist sofort ersichtlich, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Ruf, unterbrochen zu werden, umso größer wird, je mehr Rufe der gleichen oder der höheren Prioritätsklassen beim Eintreffen des betrachteten Rufes bereits im System sind. Deshalb wird der Erwartungswert der Belegungsdauer mit wachsendem x abnehmen.

Die Disziplin, daß der zuletzt eingefallene Ruf zuerst unterbrochen wird, führt zu folgenden zwei Sätzen:

- a) Rufe der Klasse 2, welche nach dem betrachteten Ruf eintreffen, haben keinen Einfluß auf dessen Verteilungsfunktion der Belegungsdauer, da sie stets vor dem betrachteten Ruf unterbrochen werden.
- b) Belegungen der Klasse 2, die bereits im System sind, unterscheiden sich in ihrem Einfluß auf die Verteilung der Belegungsdauer des betrachteten Rufes nicht von Belegungen der Klasse 1, da sie, wenn überhaupt, stets nach dem betrachteten Ruf unterbrochen werden.

Somit ist es für das Schicksal eines Rufes der Klasse 2 nur maßgebend, wieviel Leitungen zum Zeitpunkt seines Einfallens insgesamt von den Klassen 1 und 2 belegt sind. Darüber hinaus ist nur noch der Einfallprozess der Klasse 1, gekennzeichnet durch das Angebot A_1 , von Einfluß auf die Belegungsdauer-Verteilung $P_\nu(>t)$ der Klasse 2. Der Index ν gibt dabei die Zahl der belegten Leitungen unmittelbar nach Eintreffen des betrachteten Rufes an.

Um diese Verteilungsfunktionen zu berechnen, soll ein Ansatz angewendet werden, welcher im wesentlichen auf C.Palm und E.Vaulot /4,5/ zurückgeht.

Zum Zeitpunkt t_0 trifft ein Ruf der Klasse 2 in dem Zustand $x = \nu - 1 < n$ ein und erzeugt damit den Zustand " $x = \nu$ Leitungen belegt". Innerhalb eines differentiell kleinen Zeitelements dt , welches auf den Zeitpunkt t_0 folgt, können nun folgende Ereignisse eintreten, die für die weitere Belegungsdauer von Bedeutung sind:

- 1) Der Zustand bleibt unverändert. Das bedeutet, kein Ruf endet und kein Ruf der Klasse 1 fällt ein. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist

$$[1 - c_{A1} \cdot dt][1 - \nu \epsilon dt] \quad (19a)$$

- 2) Einer der $\nu - 1$ Rufe endet. (Der betrachtete Ruf darf nicht enden). Kein Ruf der Klasse 1 fällt ein. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$(\nu - 1) \epsilon dt \cdot [1 - c_{A1} \cdot dt] \quad (19b)$$

- 3) Kein Ruf endet. Ein Ruf der Klasse 1 fällt ein. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$c_{A1} \cdot dt [1 - \nu \epsilon dt] \quad (19c)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb des Zeitelements dt zwei oder mehrere Ereignisse eintreten, führt auf Terme in höherer Ordnung von dt und diese können im Hinblick auf den später vollzogenen Grenzübergang $dt \rightarrow 0$ sofort unberücksichtigt bleiben.

Man fragt nun zunächst nach der Wahrscheinlichkeit $P_\nu(>t+dt)$, daß ein zum Zeitpunkt t_0 eingetroffener Ruf länger als die Zeit $(t+dt)$ andauern wird. Diese Wahrscheinlichkeit läßt sich in den Wahrscheinlichkeiten $P_{\nu+1}(>t)$, $P_\nu(>t)$, $P_{\nu-1}(>t)$ ausdrücken. Denn je nach den Ereignissen gemäß (19a, b, c) befindet sich nach Ablauf der Zeitspanne dt die betrachtete Belegung in dem Bündel mit dem Belegungszustand ν oder $\nu+1$

oder $\nu - 1$. Sie muß jetzt noch eine Zeit $> t$ andauern, damit insgesamt ihre Belegungsdauer $> t + dt$ wird.

Der Einfallzeitpunkt spielt wegen der vorausgesetzten Stationarität des Verkehrs im Bündel keine Rolle.

Es wird zunächst der Fall $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ betrachtet.

Dann gilt für die betrachtete Belegung, die beim Einfall den Zustand $(\nu-1)$ antraf:

$$P_{\nu}(>t+dt) = [1 - c_{A_1} dt][1 - \nu \varepsilon dt] P_{\nu}(>t) + (\nu-1) \varepsilon dt [1 - c_{A_1} dt] P_{\nu-1}(>t) + c_{A_1} dt [1 - \nu \varepsilon dt] P_{\nu+1}(>t)$$

Auch hier brauchen Terme, welche dt^2 als Faktor enthalten, nicht berücksichtigt werden. Deshalb erhält man

$$P_{\nu}(>t+dt) = [1 - c_{A_1} dt - \nu \varepsilon dt] P_{\nu}(>t) + (\nu-1) \varepsilon dt P_{\nu-1}(>t) + c_{A_1} dt P_{\nu+1}(>t)$$

Diese Gleichung umgeformt und $dt \rightarrow 0$ ergibt

$$\frac{dP_{\nu}(>t)}{dt} = -(\nu \varepsilon + c_{A_1}) P_{\nu}(>t) + (\nu-1) \varepsilon P_{\nu-1}(>t) + c_{A_1} P_{\nu+1} \quad (20)$$

Normiert man die Zeit t auf die mittlere Belegungsdauer $t_m = 1/\varepsilon$ (des Systems ohne Unterbrechungen), so lautet mit

$$\tau = \frac{t}{t_m} = \varepsilon t \quad (21)$$

die entsprechende Gleichung für $P_{\nu}(>\tau)$:

$$\frac{dP_{\nu}(>\tau)}{d\tau} = -(\nu + A_1) P_{\nu}(>\tau) + (\nu-1) P_{\nu-1}(>\tau) + A_1 P_{\nu+1}(>\tau) \quad (22)$$

$\nu = 1, 2, \dots, n-1$

Berücksichtigt man, daß im Zustand $\nu = n$ kein Ruf der Klasse 1 einfallen darf, da dieser die betrachtete Belegung verdrängen würde, so findet man in analoger Weise für $\nu = n$

$$\frac{dP_n(>\tau)}{d\tau} = -(n + A_1) P_n(>\tau) + (n-1) P_{n-1}(>\tau) \quad (22a)$$

Zur Lösung dieses Systemes von n Differentialgleichungen gemäß (22) und (22a) gehören noch die Anfangsbedingungen

$$P(>0) = 1 \quad \text{für } \nu = 1, 2, \dots, n \quad (22b)$$

Diese Anfangsbedingungen ergeben sich aus der Tatsache, daß jeder Ruf, gleichgültig in welchem Zustand er einfällt, stets mit Sicherheit eine Belegungsdauer > 0 besitzt.

Man kann nun Gleichung (22) allein zur vollständigen Beschreibung des Differentialgleichungssystems verwenden, indem man diese Gleichung als eine Differenzen-Differentialgleichung auffaßt und zusätzlich die Randbedingungen

$$P_0(>\tau) = P_{n+1}(>\tau) = 0 \quad (22c)$$

in Hinblick auf die unabhängige, diskrete Variable ν der Differenzengleichung einführt.

Damit enthält diese Differenzen-Differentialgleichung (homogene Differenzengleichung 2. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten) ein homogenes Differentialgleichungssystem 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Die Lösung dieses Differenzen-Differentialgleichungssystems soll nun in zwei Schritten erfolgen. Zunächst werden die Laplace-Transformierten der Verteilungsfunktionen eingeführt; es verbleibt dann für die Bestimmung dieser Laplace-Transformierten eine inhomogene Differenzengleichung 2. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten. Nach Lösung dieser Differenzengleichung wird dann die Rücktransformation vorgenommen und die gesuchte Lösung für $P_{\nu}(>t)$ erhalten.

Es sollen nun mit $g_{\nu}(s)$ die Laplace-Transformierten $L\{P_{\nu}(>\tau)\}$ bezeichnet werden. Zusammen mit den Anfangsbedingungen (22b) ergibt sich:

$$s \cdot g_{\nu}(s) + (\nu + A_1) g_{\nu}(s) - (\nu-1) g_{\nu-1}(s) - A_1 g_{\nu+1}(s) = 1 \quad (23)$$

mit den Randbedingungen entsprechend (22c)

$$g_0(s) = g_{n+1}(s) = 0$$

Andererseits läßt sich Gleichung (23) in der üblichen Determinantendarstellung angeben:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 g_1(s) & g_2(s) & g_3(s) & \dots & g_{n-1}(s) & g_n(s) & \\
 \hline
 s+1+A_1 & -A_1 & & & & & 1 \\
 -1 & s+2+A_1 & -A_1 & & & 0 & 1 \\
 & -2 & s+3+A_1 & -A_1 & & & 1 \\
 & & \dots & \dots & \dots & & \vdots \\
 0 & & -(n-2) & s+(n-1)+A_1 & -A_1 & & 1 \\
 & & & -(n-1) & s+n+A_1 & & 1 \\
 \hline
 \end{array} \quad (24)$$

Diese Determinantendarstellung macht sofort ersichtlich, daß alle Laplace-Transformierten $g(s)$ gebrochene rationale Funktionen darstellen. Dabei ist das Nennerpolynom identisch mit der Systemdeterminante und stellt ein Polynom n-ten Grades dar. Die komplexe Variable s tritt nur in der Hauptdiagonale auf und damit liefert das Produkt aller Glieder der Hauptdiagonale den Term, der s in der höchsten Potenz enthält. Daher ist das Zählerpolynom vom $(n-1)$ -ten Grade, da beim Einsetzen der rechten Seite in die ν -te Spalte der Term $s+\nu+A_1$ durch 1 ersetzt wird.

Zur Rücktransformation der Laplace-Transformierten in den Zeitbereich ist es notwendig, diese gebrochenen rationalen Funktionen in Partialbrüche zu zerlegen. Dazu müssen die n Nullstellen des Nennerpolynoms sowie die jeweils n Residuen aller Funktionen $g_\nu(s)$ bestimmt werden. Es sollen daher zunächst die Nullstellen des Nennerpolynoms näher untersucht werden. Diese Nullstellen im Bildbereich stellen gleichzeitig im Zeitbereich die Eigenwerte des Systems von n Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten dar.

2.6.2 Bestimmung der Eigenwerte des Differentialgleichungssystems

Entsprechend Gleichung (24) ergeben sich die Eigenwerte aus

$$D_n = \begin{vmatrix} s+1+A_1 & -A_1 & & & 0 \\ -1 & s+2+A_1 & & -A_1 & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & & & -(n-1) & s+n+A_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

D_n stellt die Determinante eines Systems mit n Leitungen dar. Gesucht ist D_n als Polynom, d.h. es sind die Koeffizienten dieses Polynoms zu bestimmen. Sind diese berechnet, dann können mittels bekannter Verfahren, welche für die meisten Digitalrechner bereits programmiert vorliegen, die Nullstellen numerisch bestimmt werden.

Um diese Koeffizienten zu gewinnen, wird zunächst die Determinante nach den Elementen der letzten Zeile entwickelt:

$$D_n = (s+n+A_1) \cdot D_{n-1} - (n-1) \cdot A_1 \cdot D_{n-2} \quad (26a)$$

Die Determinante D_n läßt sich also durch die Determinanten D_{n-1} und D_{n-2} der Systeme mit $n-1$ bzw. $n-2$ Leitungen darstellen. Obwohl nur die Determinante D_n gesucht ist, wird es sich als notwendig erweisen, in der Zwischenrechnung alle Determinanten D_ν mit $\nu = 1, 2, \dots, n$ zu verwenden. In der üblichen Darstellung von Differenzgleichungen ergibt sich aus Gl. (26a):

$$D_{\nu+2} = (s+\nu+2+A_1) \cdot D_{\nu+1} - (\nu+1) A_1 \cdot D_\nu \quad (26b)$$

Aus Gl. (25) folgt:

$$D_1 = s+A_1+1$$

Da nur die Koeffizienten $d_{\mu,\nu}$ ($\mu = 0, 1, 2, \dots, \nu$) des Polynoms D_ν interessieren, wird der Ansatz

$$D_\nu = \sum_{\mu=0}^{\nu} d_{\mu,\nu} \cdot s^\mu \quad (27)$$

in Gl. (26b) eingeführt.

$$\sum_{\mu=0}^{\nu+2} d_{\mu,\nu+2} \cdot s^{\mu} - (s + \nu + 2 + A_1) \cdot \sum_{\mu=0}^{\nu+1} d_{\mu,\nu+1} \cdot s^{\mu} + (\nu+1) \cdot A_1 \sum_{\mu=0}^{\nu} d_{\mu,\nu} \cdot s^{\mu} = 0 \quad (28)$$

Dabei gilt $d_{1,1} = 1$ (29)

und $d_{\mu,\nu} = 0$ für $\mu < 0$ und $\mu > \nu$

Gleichung (28) muß für beliebige Werte der komplexen Variablen s erfüllt sein. Dieses ist aber nur der Fall, wenn in dieser Gleichung alle Koeffizienten der Terme s^{μ} ($\mu = 0, 1, \dots, \nu + 2$) für sich verschwinden. Dann erhält man:

$$d_{\mu,\nu+2} - (\nu+2+A_1)d_{\mu,\nu+1} - d_{\mu-1,\nu+1} + (\nu+1)A_1d_{\mu,\nu} = 0 \quad (30)$$

Dieses stellt nun eine homogene, jedoch partielle Differenzengleichung 2. Grades dar.

Für den Sonderfall $\mu = \nu + 2$ läßt sich sofort eine Lösung angeben, da die Glieder $d_{\nu+2,\nu+1}$ und $d_{\nu+1,\nu}$ nach (29) verschwinden.

$$d_{\nu+2,\nu+2} - d_{\nu+1,\nu+1} = 0$$

daraus

$$d_{\nu,\nu} = 1, \quad \text{da } d_{1,1} = 1 \text{ ist.} \quad (31)$$

Die übrigen Koeffizienten $d_{\mu,\nu}$ können aus Gl. (30) folgendermaßen berechnet werden:

Man berechnet zunächst $d_{0,\nu}$. Da $d_{-1,\nu} = 0$ ist, ergibt sich für $d_{0,\nu}$ nur eine gewöhnliche Differenzengleichung 2. Ordnung, welche im Anhang A1 gelöst wird.

Als Lösung findet man:

$$d_{0,\nu} = \nu! \sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{A_1^{\mu}}{\mu!} \quad (32)$$

Ist nun $d_{0,\nu}$ bekannt, so kann man diese Lösung für $d_{0,\nu}$ (32) in (30) für $\mu = 1$ einsetzen und erhält jetzt eine inhomogene, dafür aber wieder gewöhnliche Differenzengleichung 2. Ordnung, die wiederum leicht gelöst werden kann. Die gefundene Lösung für $\mu = 1$ kann nun ihrerseits in Gl. (30) für $\mu = 2$ eingesetzt werden ... usf. Auf diese Weise lassen sich sämtliche Koeffizienten angeben. Im Anhang A2 wird zunächst eine Rekursionsformel für $d_{\mu,\nu}$ in Abhängigkeit der Terme $d_{\mu-1,\lambda}$ abgeleitet. ($\lambda = 0, 1, \dots, \nu-1$; $\mu > 0$)

$$d_{\mu,\nu} = \nu! \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{A_1^k}{(k+1)!} \sum_{\lambda=\mu-1}^k \frac{d_{\mu-1,\lambda}}{A_1^{\lambda}} \quad (33)$$

Man sieht, daß die ansich uninteressanten Koeffizienten $d_{\mu,\nu}$ für $\nu < n$ Summanden in dem Ausdruck $d_{\mu,n}$ darstellen und daher ist die Berechnung dieser Koeffizienten auf jeden Fall notwendig.

Es läßt sich nun aber auch mittels der Gln. (32) und (33) eine geschlossene Lösung für $d_{\mu,\nu}$ angeben:

$$d_{\mu,\nu} = \nu! \sum_{k_{\mu}=0}^{\nu-1} \frac{A_1^{k_{\mu}}}{(k_{\mu}+1)!} \cdot \sum_{\lambda_{\mu}=\mu-1}^{k_{\mu}} \frac{\lambda_{\mu}!}{A_1^{\lambda_{\mu}}} \cdot \sum_{k_{\mu-1}=0}^{\lambda_{\mu}} \frac{A_1^{k_{\mu-1}}}{(k_{\mu-1}+1)!} \cdot \sum_{\lambda_{\mu-1}=\mu-2}^{k_{\mu-1}} \dots \dots \dots \frac{\lambda_2!}{A_1^{\lambda_2}} \cdot \sum_{k_1=0}^{\lambda_2} \frac{A_1^{k_1}}{(k_1+1)!} \cdot \sum_{\lambda_1=0}^{k_1} \frac{\lambda_1!}{A_1^{\lambda_1}} \cdot \sum_{k_0=0}^{\lambda_1} \frac{A_1^{k_0}}{k_0!} \quad (34)$$

Formal gestattet nun Gl. (34) für $\nu = n$ eine direkte Berechnung der gewünschten Koeffizienten $d_{\mu,n}$. Jedoch enthält Gl. (34) implizit die nicht benötigten Koeffizienten $d_{\mu,\nu}$ ($\nu < n-1$) als Summanden. Daher ist eine Verwendung von Gl. (34) in der Praxis nicht sinnvoll; zweckmäßig ist eine Berechnung nach den Gleichungen (32) und (33). Außerdem ist auch eine Berechnung der $d_{\mu,\nu}$ direkt aus Gl. (30) zusammen mit den Anfangsbedingungen nach (29) und mit der bekannten Lösung für $d_{\nu,\nu}$ (31) möglich.

Liegen nun diese Koeffizienten $d_{\mu,n}$ berechnet vor, so lassen sich die Eigenwerte des Systems von Differentialgleichungen nach bekannten Lösungsverfahren berechnen:

$$\sum_{\mu=0}^n d_{\mu,n} \cdot S^{\mu} = 0 \quad (35)$$

Die Lösung von Gl. (35) ergibt dann die Eigenwerte s_1, s_2, \dots, s_n .

2.6.3 Die Partialbruchzerlegung der Laplace-Transformierten $g_{\nu}(s)$ und deren Rücktransformation

Die Art der Partialbrüche von $g_{\nu}(s) = \frac{Z_{\nu}(s)}{N_{\nu}(s)} = \frac{Z_{\nu}(s)}{D_n(s)}$ ist abhängig von der Art der Nullstellen des Nennerpolynoms $D_n(s)$. Ein Partialbruch hat also jeweils eine andere Gestalt, abhängig davon, ob die dazugehörige Nullstelle reell oder komplex ist und ob diese einfach oder mehrfach ist.

Nun wird aber im Anhang A3 gezeigt, daß alle Nullstellen des Nennerpolynoms $D_n(s)$ einfach und negativ-reell sind. Damit läßt sich die Berechnung der für die Partialbruchzerlegung notwendigen Residuen - zusammen mit der Tatsache, daß das Zählerpolynom um einen Grad niedriger ist als das Nennerpolynom - nun leicht angeben:

$$Res_{\mu} [g_{\nu}(s)] = \frac{Z_{\nu}(s_{\mu})}{\left. \frac{d}{ds} [D_n(s)] \right|_{s=s_{\mu}}}$$

Damit liegt nun auch die Lösung der gesuchten Laplace-Transformierten vor.

$$g_{\nu}(s) = \sum_{\mu=1}^n \frac{Res_{\mu} [g_{\nu}(s)]}{s - s_{\mu}} = \sum_{\mu=1}^n \frac{Z_{\nu}(s_{\mu})}{\left. \frac{d}{ds} [D_n(s)] \right|_{s=s_{\mu}}} \cdot \frac{1}{s - s_{\mu}} \quad (36)$$

Es verbleibt nun noch, das Zählerpolynom $Z_{\nu}(s)$ zu bestimmen. Setzt man $g_{\nu}(s) = \frac{Z_{\nu}(s)}{D_n(s)}$ in Gl. (24) ein, so ergibt sich für $Z_{\nu}(s)$ eine inhomogene Differenzgleichung 2. Ordnung

$$-\nu Z_{\nu}(s) + (s + \nu + 1 + A_1) Z_{\nu+1}(s) - A_1 Z_{\nu+2}(s) = D_n(s) \quad (37)$$

mit den Randbedingungen $Z_{\nu}(s) = 0$ für $\nu = 0$ und $\nu = n+1$.

Zur Lösung dieser Differenzgleichung wird folgender Ansatz eingeführt:

$$Z_{\nu}(s) = \sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\mu,\nu} \cdot s^{\mu}$$

und in Gl. (37) eingesetzt.

$$-\nu \sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\mu,\nu} \cdot s^{\mu} + (s + \nu + 1 + A_1) \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\mu,\nu+1} \cdot s^{\mu} - A_1 \sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\mu,\nu+2} \cdot s^{\mu} = \sum_{\mu=0}^n d_{\mu,n} s^{\mu}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt nun:

$$-\nu c_{\mu,\nu} + (\nu + 1 + A_1) c_{\mu,\nu+1} + c_{\mu-1,\nu+1} - A_1 c_{\mu,\nu+2} = d_{\mu,n} \quad (38)$$

mit den Randbedingungen $c_{\mu,0} = c_{\mu,n+1} = 0$
und $c_{\mu,\nu} = 0$ für $\mu < 0$ sowie $\mu > n$.

Gl. (38) stellt eine inhomogene, partielle Differenzgleichung 2. Ordnung dar. Zur Lösung dieser Gleichung kann jedoch wiederum zunächst $\mu = 0$ gesetzt werden. Die sich so ergebende Differenzgleichung ist nunmehr gewöhnlich und kann leicht gelöst werden.

Die Berechnung von $c_{0,\nu}$ ist im Anhang A4 durchgeführt und liefert folgendes Ergebnis:

$$c_{0,\nu} = d_{0,n} \left\{ 1 - \frac{E_n(A_1)}{E_{\nu-1}(A_1)} \right\} \quad (39)$$

$E_{\nu}(A_1)$ stellen Ausdrücke entsprechend Gl. (10) dar und sind hier nur eine formale Abkürzung.

Allgemein wird ebenso in A4 die folgende Rekursionsformel abgeleitet:

$$c_{\mu, \nu} = d_{\mu, n} \left\{ 1 - \frac{E_n(A_1)}{E_{\nu-1}(A_1)} \right\} + \frac{(\nu-1)!}{A_1^\nu} \cdot \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{A_1^k}{k!} \cdot \sum_{\lambda=1}^k c_{\mu-1, \lambda}$$

$$- \frac{1}{A_1} \frac{E_n(A_1)}{E_{\nu-1}(A_1)} \cdot \frac{n!}{A_1^n} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{A_1^k}{k!} \cdot \sum_{\lambda=1}^k c_{\mu-1, \lambda} \quad (40)$$

Sind alle Koeffizienten der Zählerpolynome berechnet, so kann man nun Gl. (36) folgendermaßen umformen

$$g_\nu(s) = \sum_{\mu=1}^n \frac{\sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{\lambda, \nu} \cdot s_\mu^\lambda}{\sum_{\lambda=1}^n \lambda d_{\lambda, n} \cdot s_\mu^{\lambda-1}} \cdot \frac{1}{s - s_\mu} \quad (41)$$

und die Rücktransformation dieser Laplace-Transformierten jetzt unmittelbar angeben

$$P_\nu(>\tau) = \sum_{\mu=1}^n \frac{\sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{\lambda, \nu} \cdot s_\mu^\lambda}{\sum_{\lambda=1}^n \lambda d_{\lambda, n} \cdot s_\mu^{\lambda-1}} \cdot e^{+s_\mu \tau} \quad (42)$$

In Abb. 3 sind für $n=5$ und $A_1=2$ die Belegungsdauerverteilungsfunktionen $P_\nu(>\tau)$ aufgetragen.

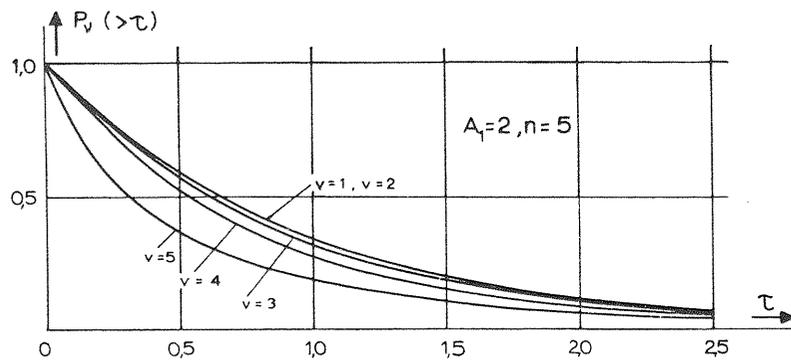


Abb. 3 Die Belegungsdauerverteilungsfunktionen $P_\nu(>\tau)$

Die Verteilungsfunktionen $P_1(>\tau)$ und $P_2(>\tau)$ liegen praktisch aufeinander und sind um weniger als Strichstärke von der Funktion $e^{-\tau}$ verschieden, die Verkürzung der Rufe durch Unterbrechungen macht sich noch nicht bemerkbar. Deutlich sieht man dagegen, daß diejenigen Rufe, welche im Zustand " $\nu = n$ Leitungen belegt" ihre Belegung beginnen, im Mittel schon wesentlich verkürzt werden.

2.6.4 Die Belegungsdauerverteilungsfunktion $P(>\tau)$

Mit Gl. (42) existiert nun eine Lösung für die Belegungsdauerverteilungsfunktionen $P_\nu(>\tau)$, d.h. also für die Belegungsdauerverteilungen der Klasse 2 in Abhängigkeit von der jeweiligen Zahl der insgesamt belegten Leitungen nach Einfall des betrachteten Rufes. Es interessiert nun aber auch die Belegungsdauerverteilung aller Rufe der Klasse 2, die ins Bündel gelangen, unabhängig vom Belegungszustand, der beim Eintreffen vorgefunden wurde.

Diese Verteilungsfunktion $P(>\tau)$ kann aus den Funktionen $P_\nu(>\tau)$ unter Verwendung der Zustandswahrscheinlichkeiten p_x gewonnen werden. Mit p_x ist die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, mit welcher der Zustand " x Leitungen von Klasse 1 und 2 belegt" getroffen wird. Nach den Überlegungen über den Unterbrechungsvorgang wird die Zustandswahrscheinlichkeit durch die Unterbrechungen nicht beeinflußt und ist daher identisch mit der Zustandswahrscheinlichkeit eines Systemes ohne Unterbrechungen. Diese wurde bereits von A.K.Erlang angegeben/1/.

Somit ist:

$$P_x = \frac{(A_1 + A_2)^x}{\sum_{\lambda=0}^n \frac{(A_1 + A_2)^\lambda}{\lambda!}} \quad (43)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Belegung im Zustand $x = \nu$ beginnt, ist aber gleich der Wahrscheinlichkeit $p_{\nu-1}$, daß dieser Ruf während des Zustandes $x = \nu - 1$ eintrifft.

Im Zustand $x = n$ kann keine Belegung der Klasse 2 in das Bündel

gelangen, alle Belegungen beginnen daher während der Zustände p_0 bis p_{n-1} .

Die Belegungsdauerverteilungen sollen aber nur auf die Rufe bezogen werden, die auch wirklich ins Bündel gelangen. Nun sei p_v^* die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf, der nicht abgewiesen wurde, seine Belegung im Zustand "v Leitungen belegt" beginnt. Dann ergibt sich p_v^* zu:

$$P_v^* = \frac{P_{v-1}}{1 - E_n(A_1 + A_2)} = \frac{\frac{(A_1 + A_2)^{v-1}}{(v-1)!} / \sum_{\lambda=0}^n \frac{(A_1 + A_2)^\lambda}{\lambda!}}{\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(A_1 + A_2)^\lambda}{\lambda!} / \sum_{\lambda=0}^n \frac{(A_1 + A_2)^\lambda}{\lambda!}}$$

$$= \frac{\frac{(A_1 + A_2)^{v-1}}{(v-1)!}}{\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{(A_1 + A_2)^\lambda}{\lambda!}} \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (44)$$

Zur Berechnung von $P(>\tau)$ ist es erforderlich, alle Verteilungsfunktionen $P_v(>\tau)$ mit der Wahrscheinlichkeit des entsprechenden Belegungszustandes zu gewichten und aufzusummieren.

$$P(>\tau) = \sum_{v=1}^n p_v^* \cdot P_v(>\tau) \quad (45)$$

Mit

$$K_{\mu, v} = \frac{\sum_{\lambda=0}^{n-1} c_{\lambda, v} \cdot S_\mu^\lambda}{\sum_{\lambda=1}^n \lambda \cdot d_{\lambda, n} \cdot S_\mu^{\lambda-1}}$$

läßt sich Gl. (42) einfacher darstellen:

$$P_v(>\tau) = \sum_{\mu=1}^n K_{\mu, v} \cdot e^{S_\mu \cdot \tau} \quad (46)$$

Setzt man Gl. (46) in Gl. (45) ein, so ergibt sich:

$$P(>\tau) = \sum_{v=1}^n p_v^* \cdot \sum_{\mu=1}^n K_{\mu, v} \cdot e^{S_\mu \cdot \tau} = \sum_{\mu=1}^n C_\mu \cdot e^{S_\mu \cdot \tau} \quad (47)$$

mit

$$C_\mu = \sum_{v=1}^n p_v^* \cdot K_{\mu, v} \quad (48)$$

Damit ist nun die Belegungsdauerverteilungsfunktion $P(>\tau)$ aller Belegungen der Klasse 2 berechnet. Es soll abschließend noch deren Verteilungsdichtefunktion angegeben werden. Diese ist definiert durch:

$$p(\tau) = - \frac{dP(>\tau)}{d\tau}$$

Daher ergibt sich:

$$p(\tau) = \sum_{\mu=1}^n (-S_\mu) \cdot C_\mu \cdot e^{S_\mu \tau} = \sum_{\mu=1}^n b_\mu \cdot e^{S_\mu \tau} \quad (49)$$

mit

$$b_\mu = -S_\mu C_\mu \quad (50)$$

2.6.5 Die Bestimmung der Verteilungsdichten $p_e(\tau)$ und $p_u(\tau)$ bezogen auf erfolgreich beendete bzw. unterbrochene Belegungen

Es sollen zunächst alle Rufe der Klasse 2 betrachtet werden, die in das Bündel gelangen. Deren Verteilungsdichte $p(\tau)$ ist durch Gl. (49) gegeben. Diese setzt sich aber aus den zwei Verteilungsdichten $p_e(\tau)$ und $p_u(\tau)$ zusammen. Dann gilt die

folgende Beziehung:

$$(1 - U_Y) p_e(\tau) + U_Y \cdot p_u(\tau) = p(\tau) \quad (51)$$

Nun sollen alle Belegungen der Klasse 2 einschließlich der unterbrechenden Belegungen der Klasse 1 betrachtet werden. Dabei wird nun der unterbrochene und der ihn unterbrechende Ruf als eine einzige Belegung betrachtet.

Die Verteilungsdichte $p_{u,1+2}(\tau)$ der Belegungsdauer dieser zusammengesetzten Rufe läßt sich aber - da die Belegungsdauer des unterbrechenden Rufes unabhängig von der Dauer der unterbrochenen Belegung ist - unmittelbar durch die Faltung beider Verteilungsdichten angeben:

$$p_{u,1+2}(\tau) = \int_{v=0}^{\infty} p_u(\tau-v) \cdot p_1(v) dv \quad (52)$$

Mit $p_1(\tau)$ ist die Verteilungsdichte der Klasse 1 bezeichnet. Berücksichtigt man, daß beide Dichten für negative τ verschwinden und $p_1(\tau) = e^{-\tau}$ ist, so ergibt sich:

$$p_{u,1+2}(\tau) = \int_{v=0}^{\tau} p_u(\tau-v) \cdot e^{-v} dv \quad (53)$$

Faßt man diese zusammengesetzten Belegungen mit den erfolgreich beendeten Belegungen der Klasse 2 zusammen, so ist nach Gl. (7) die Dichte dieser Belegungen $e^{-\tau}$. Daraus folgt:

$$(1 - U_Y) p_e(\tau) + U_Y \int_{v=0}^{\tau} p_u(\tau-v) e^{-v} dv = e^{-\tau} \quad (54)$$

Subtrahiert man von Gl. (54) jetzt Gl. (51), so erhält man:

$$\int_{v=0}^{\tau} p_u(\tau-v) e^{-v} dv - p_u(\tau) = \frac{1}{U_Y} [e^{-\tau} - p(\tau)] \quad (55)$$

Gleichung (55) enthält nun außer $p_u(\tau)$ keine unbekannte Funktion mehr.

Zur Auflösung von Gl. (55) nach $p_u(\tau)$ erweist sich der Ansatz

$$p_u(\tau) = \sum_{\mu=1}^n \alpha_{\mu} e^{s_{\mu} \tau} \quad (56)$$

als zweckmäßig. Dieser Ansatz wird nun in Gl. (55) eingesetzt.

$$\int_{v=0}^{\tau} \sum_{\mu=1}^n \alpha_{\mu} e^{s_{\mu}(\tau-v)} e^{-v} dv - \sum_{\mu=1}^n \alpha_{\mu} e^{s_{\mu} \tau} = \frac{1}{U_Y} [e^{-\tau} - p(\tau)] \quad (57)$$

Zunächst soll das Integral aufgelöst werden. Dabei müßte $s_{\mu} = -1$ als Sonderfall bei der Integration unterschieden werden. Im Anhang A.5 wird aber gezeigt, daß für $A_1 > 0$ stets $s_{\mu} \neq -1$ ist, so daß dieser Fall nicht berücksichtigt zu werden braucht.

$$\int_{v=0}^{\tau} \sum_{\mu=1}^n \alpha_{\mu} e^{s_{\mu}(\tau-v)} e^{-v} dv = \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu}}{s_{\mu}+1} \cdot e^{s_{\mu} \tau} - \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu}}{s_{\mu}+1} \cdot e^{-\tau} \quad (58)$$

Setzt man Gl. (58) und (49) in (57) ein, so erhält man:

$$-\sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu} s_{\mu}}{s_{\mu}+1} \cdot e^{s_{\mu} \tau} - \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu}}{s_{\mu}+1} \cdot e^{-\tau} = \frac{1}{U_Y} [e^{-\tau} - \sum_{\mu=1}^n b_{\mu} e^{s_{\mu} \tau}] \quad (59)$$

Gl. (59) ist für jedes τ erfüllt, wenn die Koeffizienten gleicher Exponentialfunktionen auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen. Dann ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$\sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_{\mu}}{1+s_{\mu}} = -\frac{1}{U_Y} \quad (60)$$

$$\alpha_{\mu} = \frac{b_{\mu}}{U_Y} \cdot \frac{1+s_{\mu}}{s_{\mu}} \quad \mu = 1, \dots, n \quad (61)$$

Damit liegen aber $n+1$ Gleichungen zur Bestimmung von n Unbekannten vor. Es muß daher noch gezeigt werden, daß die Gleichung (60) und die Gln. (61) widerspruchsfrei sind. Zunächst soll Gl. (61) mittels Gl. (50) umgeformt werden.

$$U_Y \cdot \frac{\alpha_\mu}{1+s_\mu} = \frac{b_\mu}{s_\mu} = \frac{-s_\mu \cdot C_\mu}{s_\mu} = -C_\mu$$

Es werden nun beide Seiten der Gleichung über μ aufsummiert.

$$U_Y \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_\mu}{1+s_\mu} = - \sum_{\mu=1}^n C_\mu$$

Mit Gl. (48) ergibt sich:

$$U_Y \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_\mu}{1+s_\mu} = - \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n P_\nu^* K_{\mu,\nu} = - \sum_{\nu=1}^n P_\nu^* \sum_{\mu=1}^n K_{\mu,\nu} \quad (62)$$

Nun ist aber - bedingt durch die Anfangsbedingungen für $P_\nu(>\tau)$ nach (22b) - $P_\nu(>0) = 1$ und daraus folgt:

$$\sum_{\mu=1}^n K_{\mu,\nu} = 1 \quad \nu = 1, 2, \dots, n$$

Damit läßt sich nun Gl. (62) unter Berücksichtigung von Gl. (44) angeben:

$$U_Y \sum_{\mu=1}^n \frac{\alpha_\mu}{1+s_\mu} = - \sum_{\nu=1}^n P_\nu^* = -1$$

Diese Gleichung ist aber identisch mit Gl. (60). Somit ist gezeigt, daß Gl. (60) in den Gln. (61) enthalten ist und damit immer erfüllt ist, wenn die Gln. (61) erfüllt sind.

Es verbleibt damit das Gleichungssystem (61) zu lösen. Dieses System mit n Gleichungen zerfällt aber direkt in die n Lösungen für α_μ .

Die Bestimmung der Verteilungsdichte der erfolgreich beendeten Belegungen kann sehr leicht mit Hilfe der Gln. (51), (61) und dem Ansatz

$$p_e(\tau) = \sum_{\mu=1}^n \beta_\mu e^{s_\mu \tau} \quad (63)$$

vorgenommen werden.

$$(1-U_Y) \sum_{\mu=1}^n \beta_\mu e^{s_\mu \tau} + U_Y \sum_{\mu=1}^n \frac{b_\mu}{U_Y} \cdot \frac{1+s_\mu}{s_\mu} \cdot e^{s_\mu \tau} = \sum_{\mu=1}^n b_\mu e^{s_\mu \tau}$$

$$(1-U_Y) \cdot \beta_\mu = \frac{-b_\mu(1+s_\mu)}{s_\mu} + b_\mu$$

$$\beta_\mu = - \frac{1}{1-U_Y} \cdot \frac{b_\mu}{s_\mu} \quad (64)$$

Damit liegen nun zunächst die gesuchten Dichtefunktionen für die Belegungsdauern der erfolgreich beendeten und der unterbrochenen Belegungen vor:

$$p_e(\tau) = - \frac{1}{1-U_Y} \cdot \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{s_\mu} \cdot b_\mu \cdot e^{s_\mu \tau} \quad (65)$$

$$p_u(\tau) = \frac{1}{U_Y} \cdot \sum_{\mu=1}^n \frac{1+s_\mu}{s_\mu} \cdot b_\mu e^{s_\mu \tau} \quad (66)$$

2.6.6 Die Verteilungsfunktionen $P_u(>\tau)$ und $P_e(>\tau)$; Mittelwerte der Belegungsdauern

Als nächstes sollen die Belegungsdauerverteilungsfunktionen $P_u(>\tau)$ und $P_e(>\tau)$ berechnet werden.

Definitionsgemäß ist:

$$\frac{dP_u(>\tau)}{d\tau} = -p_u(\tau)$$

$$P_u(>\tau) = -\int p_u(\tau) d\tau + K$$

Und mit Gl. (65):

$$\begin{aligned} P_u(>\tau) &= -\frac{1}{U_Y} \sum_{\mu=1}^n \frac{1+S_\mu}{S_\mu} \cdot b_\mu \int e^{S_\mu \tau} d\tau + K \\ &= -\frac{1}{U_Y} \sum_{\mu=1}^n \frac{1+S_\mu}{S_\mu^2} \cdot b_\mu \cdot e^{S_\mu \tau} + K \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante K muß verschwinden, da $P_u(>\infty) = 0$ sein muß.

Somit liegt nun die Lösung für $P_u(>\tau)$ vor.

$$P_u(>\tau) = -\frac{1}{U_Y} \sum_{\mu=1}^n \frac{1+S_\mu}{S_\mu^2} \cdot b_\mu \cdot e^{S_\mu \tau} \quad (67)$$

Auf gleiche Weise findet man:

$$P_e(>\tau) = \frac{1}{1-U_Y} \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{S_\mu^2} \cdot b_\mu e^{S_\mu \tau} \quad (68)$$

In Abb. 4 sind diese Belegungs Dauerverteilungen $P_u(>\tau)$, $P_e(>\tau)$ und $P(>\tau)$ für $A_1 = 2$, $A_2 = 1$, $n = 5$ aufgetragen.

Die Mittelwerte der Belegungs dauern:

Der Mittelwert einer Verteilungsfunktion berechnet sich nach:

$$\bar{\tau} = \int_0^\infty \tau p(\tau) d\tau$$

Nach einer in /4/ angegebenen Beziehung gilt bei Verteilungsfunktionen:

$$\bar{\tau} = \int_0^\infty \tau p(\tau) d\tau = -\int_0^\infty P(>\tau) d\tau \quad (69)$$

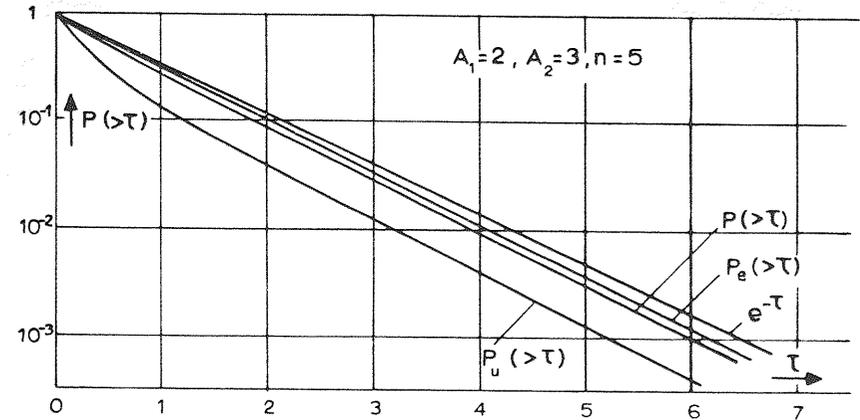


Abb. 4 Die Belegungs dauerverteilungen $P(>\tau)$, $P_e(>\tau)$, $P_u(>\tau)$ sowie zum Vergleich die Belegungs dauerverteilung $e^{-\tau}$ eines Systemes ohne Unterbrechungen

Auf diese Weise läßt sich noch einmal die mittlere Belegungs dauern aller Belegungen der Klasse 2 angeben:

$$\bar{\tau} = \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{S_\mu^2} b_\mu \quad \bar{\tau} = t_m \cdot \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{S_\mu^2} b_\mu \quad (70)$$

Auf gleiche Weise erhält man:

$$\bar{\tau}_u = \frac{1}{U_Y} \sum_{\mu=1}^n \frac{1+S_\mu}{S_\mu^3} \cdot b_\mu \quad \bar{\tau}_u = t_m \cdot \bar{\tau}_u \quad (71)$$

$$\bar{\tau}_e = \frac{-1}{1-U_Y} \sum_{\mu=1}^n \frac{1}{S_\mu^3} \cdot b_\mu \quad \bar{\tau}_e = t_m \cdot \bar{\tau}_e \quad (72)$$

Die Abhängigkeit dieser mittleren Belegungs dauern vom Angebot A_1 bzw. vom Angebot A_2 ist in den Abbn. 5a und 5b für $n = 5$ Leitungen dargestellt.

Interessant ist dabei der Verlauf von $\bar{\tau}_u = \bar{\tau}_u(A_1)$ (Abb. 5b).

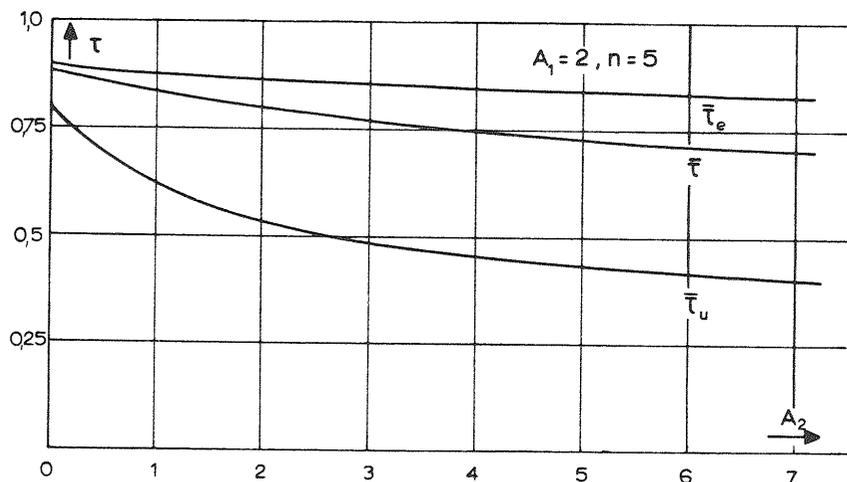


Abb. 5a. Die Abhängigkeit der Mittelwerte der Belegungsauern $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}_e$ und $\bar{\tau}_u$ vom Angebot A_2 .

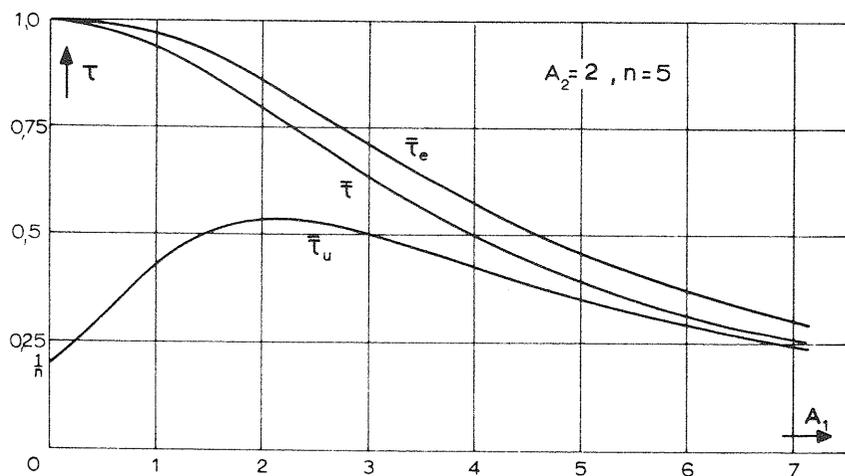


Abb. 5b. Die Abhängigkeit der Mittelwerte der Belegungsauern $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}_e$ und $\bar{\tau}_u$ vom Angebot A_1 .

Es ist zunächst ohne weiteres einzusehen, daß bei großem A_1 ($A_1 \gg n$) die mittlere Belegungsduer der unterbrochenen Rufe mit zunehmendem Angebot A_1 abnimmt. Da bei zunehmendem A_1 die Unterbrechungswahrscheinlichkeit für Belegungen der Klasse 2 zunimmt, muß auch der mittlere Abstand zwischen dem Einfallszeitpunkt und dem Zeitpunkt des Unterbrechens abnehmen.

Weniger anschaulich ist dagegen die Tatsache, daß bei kleinem Angebot A_1 ($A_1 \ll n$) die mittlere Belegungsduer der unterbrochenen Rufe mit zunehmendem A_1 zunächst ebenfalls zunimmt.

Die Erklärung dafür ist folgende: Bei kleinem Angebot A_1 muß ein Ruf der Klasse 2 seine Belegung im Zustand "x = n Leitungen belegt" beginnen, damit er überhaupt unterbrochen werden kann. Beginnt eine Belegung der Klasse 2 in dem Zustand $x = v$ mit $v < n$, so muß mehr als ein Ruf der Klasse 1 während der Dauer dieser Belegung eintreffen, damit sie unterbrochen werden kann. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist aber von höherer Ordnung von A_1 und strebt mit $A_1 \rightarrow 0$ stärker gegen Null als die Wahrscheinlichkeit für den Einfall eines Rufes.

Ein Ruf, der vom Zustand "n Leitungen belegt" durch das Ende einer Belegung in den Zustand "n-1 Leitungen belegt" gelangt, kann daher bei der betrachteten Unterbrechungsdisziplin praktisch nicht mehr unterbrochen werden. Das bedeutet aber, daß eine Belegung der Klasse 2 bei $A_1 \rightarrow 0$ nur noch in der Zeit zwischen ihrem Einfall in den Zustand "n-1 Leitungen belegt" und dem Ende des Zustandes "n Leitungen belegt" unterbrochen werden kann. Je größer die Leitungszahl n, desto kleiner muß folglich die mittlere Belegungsduer der unterbrochenen Rufe sein, wenn A_1 gegen Null strebt.

Im Anhang A6. wird dieser Grenzwert für $A_1 \rightarrow 0$ berechnet. Es ergibt sich $\bar{\tau}_u(0) = 1/n$.

2.7 Die Lösung des Problems mit der Disziplin:

Der zuletzt eingefallene Ruf wird zuletzt unterbrochen

Die in Kapitel 2.6 angenommene Disziplin, daß die zuletzt eingetroffene Belegung der Klasse 2 im Falle einer Unterbrechung durch Klasse 1 als erste aus dem System verdrängt wird, ist in der Regel die vernünftigste und im gewissen Sinne auch die gerechteste Auswahlvorschrift der zu unterbrechenden Rufe.

Nun sind aber Systeme denkbar, bei denen die Information eines Gespräches mit der voranschreitenden Zeit inaktuell wird und daher ein neu eintreffender Ruf eine größere Aktualität besitzt. Dann ist es sinnvoll, daß ein Ruf, welcher in ein vollbelegtes System einfällt, nicht nur Belegungen von niederwertigeren Prioritätsklassen unterbrechen kann, sondern auch Belegungen seiner eigenen Klasse.

Neu ist dann bei dieser Unterbrechungsvorschrift, daß jetzt auch Belegungen der Prioritätsklasse 1 unterbrochen werden können.

Unter diesen Voraussetzungen ist es möglich, die bisher gefundenen Ergebnisse zur Lösung dieses Problems heranzuziehen (Vgl. auch /3/).

2.7.1 Verlust- und Unterbrechungswahrscheinlichkeiten, Belastung

Auch hier genügt es wieder, nur zwei Prioritätsklassen zu betrachten.

a) Klasse 2

Ein Ruf der Klasse 2 wird jetzt nur noch abgewiesen, wenn alle Leitungen durch Klasse 1 belegt sind.

$$B_2^{(i)} = E_n(A_1)$$

(Der Index i weist auf die Unterbrechungsdisziplin hin, die auch als invers bezeichnet wird /3/).

Die Unterbrechungswahrscheinlichkeit setzt sich aus zwei Komponenten zusammen

$$U_{A_2}^{(i)} = U_{A_2}^{(1)} + U_{A_2}^{(2)}$$

$U_{A_2}^{(1)}$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein einfallender Ruf der Klasse 1 eine Belegung der Klasse 2 unterbricht, $U_{A_2}^{(2)}$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf der Klasse 2 eine Belegung der eigenen Klasse unterbricht.

Dabei gilt wieder Gl. (16)

$$U_{A_2}^{(1)} = \frac{A_1}{A_2} [E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)]$$

Andererseits ist aber

$$U_{A_2}^{(2)} \cdot A_2 = [E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)] \cdot A_2$$

denn $[E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)] \cdot A_2$ ist die Zahl der Rufe der Klasse 2, die durch Unterbrechungen von Belegungen der eigenen Klasse zusätzlich ins Bündel gelangt.

$$U_{A_2}^{(i)} = \frac{A_1 + A_2}{A_2} [E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)] \quad (73)$$

$$U_{Y_2}^{(i)} = \frac{A_1 + A_2}{A_2 [1 - E_n(A_1)]} [E_n(A_1 + A_2) - E_n(A_1)] \quad (74)$$

Die Belastung Y_2 bleibt unverändert, da Unterbrechungen innerhalb der eigenen Klasse für die Belastung dieser Klasse ohne Belang sind

$$Y_2^{(i)} = Y_2 \quad (75)$$

Betrachtet man nun ein System mit R Prioritätsklassen, so findet man die Ergebnisse für Klasse r ($r = 1, 2, \dots, R$) indem man

$$\begin{aligned} A_1 &\text{ durch } A_1 + A_2 + \dots + A_{r-1} \text{ und} \\ A_2 &\text{ durch } A_r \text{ ersetzt.} \end{aligned} \quad (76)$$

b) Klasse 1

Die Ergebnisse für Klasse 1 kann man formal aus den Gln. (73) (74) und (75) gewinnen, wenn man A_2 durch A_1 ersetzt und A_0

gleich Null setzt, d.h. wenn man berücksichtigt, daß keine Belegungen der Klasse 1 von Rufen einer anderen Klasse unterbrochen werden können.

Bemerkenswert ist dabei, daß Rufe der Klasse 1 nie abgewiesen werden.

$$B_1^{(j)} = E_n(o) = 0 \tag{77}$$

$$U_{A_1}^{(i)} = U_{Y_1}^{(i)} = E_n(A_1) \tag{78}$$

2.7.2 Belegungsdauerverteilungsfunktionen

Betrachtet man wieder einen Ruf der Klasse 2, welcher zu einem bestimmten Zeitpunkt in das System eingefallen ist, so lassen sich folgende Sätze aufstellen:

- a) Rufe der Klasse 2, die nach dem betrachteten Ruf eintreffen, unterscheiden sich in ihrem Einfluß auf die Belegungsdauerverteilung des betrachteten Rufes nicht von denen der Klasse 1, da sie, wenn überhaupt, stets nach dem betrachteten Ruf unterbrochen werden.
- b) Rufe der Klasse 2, die bereits im System sind, haben keinen Einfluß auf die Belegungsdauerverteilung des betrachteten Rufes, da sie stets vor dem betrachteten Ruf unterbrochen werden.

Damit ist bei einem Ruf der Klasse 2 für seine Belegungsdauerverteilung nur die Zahl x_1 der zum Zeitpunkt seines Eintreffens von Klasse 1 belegten Leitungen sowie die Summe der Angebote $A_1 + A_2$ maßgeblich.

Die entsprechende Überlegung gilt auch für Klasse 1. Auf die Belegungsdauerverteilung der Klasse 1 hat damit nur das Angebot A_1 einen Einfluß. Da bei der hier betrachteten Disziplin stets der zuletzt gekommene Ruf einer Klasse nach allen bereits bestehenden Belegungen der gleichen oder niederen Klasse unterbrochen wird, ist bei Klasse 1 der Belegungszustand beim Eintreffen eines Rufes ohne Einfluß auf dessen Belegungsdauer. Alle Rufe der Klasse 1 beginnen ihre Belegung in einem

Zustand, der gleichbedeutend dem Zustand "eine Leitung belegt" ist. Daher ist die Belegungsdauerverteilung für alle Belegungen der Klasse 1 identisch mit der Belegungsdauerverteilung für die Rufe der Klasse 1, welche in den Zustand "0 Leitungen belegt" eintreffen.

Damit lassen sich nun allgemein die Belegungsdauerverteilungen für Klasse r angeben:

$P_{r,v}(>\tau)$ wird berechnet, indem man - entsprechend zur Disziplin: der zuletzt eingefallene Ruf wird zuerst unterbrochen - $P_v(>\tau)$ bestimmt, dabei aber A_1 durch $A_1 + A_2 + \dots + A_r$ ersetzt. $P_r(>\tau)$, $P_{r,e}(>\tau)$, $P_{r,u}(>\tau)$ und alle Mittelwerte werden bestimmt, wenn man diese entsprechend Kap. 2.6 berechnet, aber bei der Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeit p_v^* das Angebot $A_1 + A_2$ durch $A_1 + A_2 + \dots + A_{r-1}$ ersetzt, wobei $A_0 = 0$ anzunehmen ist.

2.8 Das Problem mit der Disziplin:

Die Auswahl des zu unterbrechenden Rufes erfolgt zufällig

2.8.1 Verlust- und Unterbrechungswahrscheinlichkeiten, Belastung

Die bisher behandelten Unterbrechungsdisziplinen verlangen, daß innerhalb der Vermittlungsstelle gespeichert wird, in welcher Reihenfolge die Belegungen eingefallen sind. Ist diese Speichermöglichkeit nicht vorhanden, so muß ein Ruf der Klasse 1, wenn er eine Belegung der Klasse 2 unterbricht, diese aus allen Belegungen der Klasse 2 zufällig auswählen.

Es soll jetzt wieder angenommen werden, daß Rufe einer Klasse nur von Rufen höherer Priorität unterbrochen werden können.

Damit sind aber die gesuchten Lösungen für die Verlust- und Unterbrechungswahrscheinlichkeiten identisch mit denen, die in Kap. 2.4 abgeleitet wurden. Denn bei der Ableitung dieser Wahrscheinlichkeiten ist nur die Zahl der abgewiesenen bzw. unterbrochenen Rufe wesentlich und jeder Ruf - gleichgültig ob es ein zuletzt eingefallener, ein zuerst eingefallener oder ein beliebiger Ruf ist - hätte im Mittel noch die restliche Belegungsdauer t_m gehabt.

Deshalb gilt auch hier wieder die in Gl. (15) gefundene Lösung für den Mittelwert \bar{t} aller Belegungen der Klasse 2 (bzw. der Klasse r).

Somit ist auch das Ergebnis für die Belastungen direkt aus Kap. 2.4 zu übernehmen. Zu berechnen sind damit nur noch die Verteilungen der Belegungsdauern.

2.8.2 Die Belegungsdauerverteilungsfunktionen

Während bei den bisher betrachteten Disziplinen beim Einfall eines Rufes nur wesentlich war, wieviel Rufe der Klassen 1 und 2 insgesamt bzw. nur der Klasse 1 im System waren, ist es nun wesentlich, wie sich die Gesamtzahl x der Belegungen in x_1 Belegungen der Klasse 1 und x_2 Belegungen der Klasse 2 aufteilt. Wird eine Belegung der Klasse 2 unterbrochen, so wird nicht mehr wie bisher der zuletzt bzw. der zuerst eingetroffene Ruf sondern ein zufällig ausgewählter Ruf aus einer Menge von x_2 Rufen ausgewählt.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für eine Belegung der Klasse 2, im Zustand "n Leitungen belegt" unterbrochen zu werden, umso kleiner, je mehr Belegungen der Klasse 2 im System sind; sie hängt also davon ab, wie sich die n Belegungen auf die beiden Klassen aufteilen.

Die Berechnung einer Belegungsdauerverteilung $P_y(>\tau)$ analog zu Gl. (42) ist daher nicht möglich. Es kann nur eine Differenzen-Differentialgleichung für die Verteilung $P_{\nu_1, \nu_2}(>\tau)$ angegeben werden, wobei ν_1, ν_2 die nach dem Einfall eines betrachteten Rufes der Klasse 2 von Klasse 1 bzw. 2 belegten Leitungen bedeuten.

Um daraus $P(>\tau)$ zu bestimmen, ist es notwendig, die Zustandswahrscheinlichkeiten p_{ν_1, ν_2} jedes Belegungsmusters (ν_1, ν_2) zu kennen.

Wie es sich zeigen wird, sind die Gleichungen zur Berechnung der Funktionen $P_{\nu_1, \nu_2}(>\tau)$ und p_{ν_1, ν_2} partielle Differenzgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten, für welche es keine allgemeinen Lösungsverfahren zur Ermittlung einer geschlossenen Lösung gibt.

Zunächst sei hier die Differenzen-Differentialgleichung für $P_{\nu_1, \nu_2}(>\tau)$ entsprechend Kap. 2.6.1 abgeleitet.

Trifft ein Ruf der Klasse 2 in dem Zustand " $x_1 = \nu_1$ und $x_2 = \nu_2 - 1$ Leitungen belegt" mit $\nu_1 + \nu_2 < n$ in das System ein, so beginnt er seine Belegung im Zustand " ν_1, ν_2 Leitungen belegt". Innerhalb eines differentiell kleinen Zeitelementes dt können folgende Ereignisse eintreten, die Einfluß auf die Belegungsdauer des betrachteten Rufes haben:

a) der Zustand bleibt unverändert mit der Wahrscheinlichkeit:

$$[1 - (\nu_1 + \nu_2) \varepsilon dt][1 - (c_{A1} + c_{A2}) dt]$$

b) ein Ruf der Klasse 1 fällt ein, kein Ruf der Klasse 2 fällt ein, kein Ruf endet mit der Wahrscheinlichkeit:

$$c_{A1} dt [1 - (\nu_1 + \nu_2) \varepsilon dt][1 - c_{A2} dt]$$

c) ein Ruf der Klasse 2 fällt ein, kein Ruf der Klasse 1 fällt ein, kein Ruf endet mit der Wahrscheinlichkeit:

$$c_{A2} dt [1 - (\nu_1 + \nu_2) \varepsilon dt][1 - c_{A1} dt]$$

d) eine Belegung der Klasse 1 endet, kein Ruf der Klasse 2 endet, kein Ruf fällt ein mit der Wahrscheinlichkeit:

$$\nu_1 \cdot \varepsilon \cdot dt [1 - \nu_2 \varepsilon dt][1 - (c_{A1} + c_{A2}) dt]$$

e) eine Belegung der Klasse 2 (aber nicht die betrachtete) endet, keine Belegung der Klasse 1 endet, kein Ruf fällt ein mit der Wahrscheinlichkeit:

$$(\nu_2 - 1) \varepsilon dt [1 - \nu_1 \varepsilon dt][1 - (c_{A1} + c_{A2}) dt]$$

Glieder mit dt in höherer Ordnung können im Hinblick auf den Grenzübergang $dt \rightarrow 0$ unberücksichtigt bleiben; es ergibt sich daher folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} P_{\nu_1, \nu_2}(>t+dt) = & [1 - (\nu_1 + \nu_2) \varepsilon dt - (c_{A1} + c_{A2}) dt] \cdot P_{\nu_1, \nu_2}(>t) \\ & + c_{A1} dt \cdot P_{\nu_1+1, \nu_2}(>t) + c_{A2} dt \cdot P_{\nu_1, \nu_2+1}(>t) \\ & + \nu_1 \cdot \varepsilon dt \cdot P_{\nu_1-1, \nu_2}(>t) + (\nu_2 - 1) \cdot \varepsilon dt \cdot P_{\nu_1, \nu_2-1}(>t) \end{aligned} \quad (79)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{\nu_1, \nu_2}(>t) = & \varepsilon [-(\nu_1 + \nu_2 + A_1 + A_2) \cdot P_{\nu_1, \nu_2}(>t) + \\ & + A_1 P_{\nu_1+1, \nu_2}(>t) + A_2 P_{\nu_1, \nu_2+1}(>t) + \\ & + \nu_1 \cdot P_{\nu_1-1, \nu_2}(>t) + (\nu_2-1) \cdot P_{\nu_1, \nu_2-1}(>t)] \end{aligned} \quad (80)$$

Wobei gilt:

$$\nu_1 = 0, 1, \dots, n-1$$

$$\nu_2 = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\nu_1 + \nu_2 = 1, 2, \dots, n-1$$

Fällt ein Ruf der Klasse 1 in den Zustand " $\nu_1 + \nu_2 = n$ Leitungen belegt" ein und ist $\nu_2 > 0$, so wird eine Belegung der Klasse 2 unterbrochen. Die Wahrscheinlichkeit, daß gerade der betrachtete Ruf nicht unterbrochen wird, ist $\nu_2 - 1 / \nu_2$, das ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine der $\nu_2 - 1$ anderen Belegungen der Klasse 2 ausgewählt wird.

Damit ergibt sich für diesen Zustand analog zu Gl. (80) folgende Differenzen-Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P_{n-\nu_2, \nu_2}(>t) = & \varepsilon [-(n + A_1) P_{n-\nu_2, \nu_2}(>t) + \\ & + (n - \nu_2) P_{n-\nu_2-1, \nu_2}(>t) + (\nu_2 - 1) P_{n-\nu_2, \nu_2-1} \\ & + A_1 \frac{\nu_2 - 1}{\nu_2} \cdot P_{n-\nu_2+1, \nu_2-1}(>t)] \end{aligned} \quad (80a)$$

Mit dieser Gleichung und der Randfunktion

$$P_{\nu_1, \nu_2}(>t) = 0 \text{ für } \nu_2 = 0, \nu_1 = 0, 1, \dots, n$$

sind die Randbedingungen für die partielle Differenzengleichung festgelegt.

Im Hinblick auf die Variable t gehören zu den Gln. (80) und (80a) die Anfangsbedingungen

$$P_{\nu_1, \nu_2}(>t) = 1 \text{ für } \nu_1 = 0, 1, \dots, n-1; \nu_2 = 1, 2, \dots, n \text{ und } t = 0.$$

Damit ist prinzipiell Gleichung (80) und auch Gl. (80a) lös-

bar. Für die praktische Ausführung könnte man wieder eine Laplace-Transformierte $g_{\nu_1, \nu_2}(s)$ einführen und diese bestimmen. Jedoch sind die partiellen Differenzengleichungen, die sich zur Bestimmung des Zähler- und Nennerpolynoms der Laplace-Transformierten ergeben, derart komplex, daß eine zu Kap 2.6 analoge Lösung nicht möglich ist.

Eine numerische Auswertung könnte aber folgendermaßen auf Digitalrechnern ausgeführt werden, besonders dann, wenn eine Auflösung des Differentialgleichungssystems mit seinen $m = (n+1) \cdot n / 2$ Differentialgleichungen zu umfangreich wird:

Das Nennerpolynom $D_m(s)$ und die m Zählerpolynome $Z_{\nu_1, \nu_2}(s)$ können dadurch gewonnen werden, daß man jeweils $m+1$ bzw. m geeignete Werte für s (z.B. $s = 0, 1, 2, \dots, m$) in die Systemdeterminante bzw. in die m Unterdeterminanten einsetzt und aus den Wertepaaren $D_m(s_i)$ bzw. $Z_{\nu_1, \nu_2}(s_i)$ und s_i die Zählerpolynome und das Nennerpolynom bestimmt. Danach lassen sich die m Nullstellen und die m^2 Residuen entsprechend 2.6 berechnen, so daß sich auf diese Weise die m Verteilungsfunktionen $P_{\nu_1, \nu_2}(>t)$ bestimmen lassen.

Um $P(>t)$ zu bestimmen, benötigt man die Zustandswahrscheinlichkeiten p_{ν_1, ν_2} , aus welchen analog Gl. (44) p_{ν_1, ν_2}^* bestimmt werden kann. Auch diese Zustandswahrscheinlichkeiten sind Lösung einer partiellen Differenzengleichung, diese Differenzengleichung soll hier ohne Ableitung angegeben werden:

$$\begin{aligned} P_{\nu_1, \nu_2} \cdot (A_1 + A_2 + \nu_1 + \nu_2) = & A_1 p_{\nu_1-1, \nu_2} + A_2 p_{\nu_1, \nu_2-1} \\ & + \nu_1 p_{\nu_1+1, \nu_2} + \nu_2 p_{\nu_1, \nu_2+1} \end{aligned} \quad (81)$$

$$\text{für } 1 \leq \nu_1 \leq n-1$$

$$1 \leq \nu_2 \leq n-1$$

$$\nu_1 + \nu_2 \leq n-1$$

und für $\nu_1 + \nu_2 = n$, $\nu_2 > 0$

$$P_{\nu_1, \nu_2} \cdot (A_1 + \nu_1 + \nu_2) = A_1 p_{\nu_1-1, \nu_2} + A_2 p_{\nu_1, \nu_2-1} + A_1 p_{\nu_1+1, \nu_2+1} \quad (81a)$$

Zusammen mit der Normalisierungsbedingung

$$\sum_{v_1=0}^n \sum_{v_2=0}^{n-v_1} P_{v_1, v_2} = 1 \quad (82)$$

liegen damit $z = (n+2)(n+1)/2$ Gleichungen für die gleiche Anzahl von Unbekannten vor. Die Auflösung dieses Gleichungssystems kann hier mit bekannten Verfahren, z.B. Gauß-Jordan-Auflösung, auf Digitalrechnern ausgeführt werden. Zweckmäßig sind bei großen Systemen ($n = 10 \dots 100$) Iterationsverfahren, bei welchen statt der gesamten Determinante mit z^2 Größen nur z Größen gespeichert werden müssen /7,8,9/.

Die weitere Berechnung des Problems, also insbesondere die Bestimmung der Verteilungsfunktionen $P_e(>t)$, $P_u(>t)$ und der Mittelwerte dieser Verteilungen, kann nun direkt wie in den Kapiteln 2.6.5 und 2.6.6 erfolgen.

3. Verlustsysteme mit Prioritäten ohne Unterbrechung bestehender Belegungen

3.1 Aufgabenstellung

Im zivilen Fernsprechverkehr ist es praktisch für den Teilnehmer unzumutbar, daß bestehende Verbindungen unterbrochen werden. Andererseits soll aber das Zustandekommen von Fernverbindungen, die bereits über mehrere Teilstrecken aufgebaut worden sind, nicht daran scheitern, daß für eine einzige Teilstrecke keine freie Leitung zur Verfügung steht. Also sollten die Gesprächswünsche, die bereits über mehrere Teilstrecken durchgeschaltet sind, gegenüber jenen, die weniger Teilstrecken benötigen, bevorzugt werden.

Bei Verlustsystemen mit Unterbrechung ist es prinzipiell nicht möglich, ein System zu finden, welches bei R verschiedenen Prioritätsklassen mit R Angeboten A_r ($r = 1, 2, \dots, R$) vorgeschriebene Verlustwahrscheinlichkeiten oder vorgeschriebene Unterbrechungswahrscheinlichkeiten je Klasse zu realisieren gestattet. Denn das System besitzt nur einen einzigen Parameter - die Leitungszahl n .

Bei Verlustsystemen mit Prioritäten, aber ohne Unterbrechung, kann man dagegen Systemstrukturen finden, welche R Parameter enthalten; jedoch sind nicht alle Systemstrukturen geeignet, vorgegebene Verlustwahrscheinlichkeiten δ_r ($r = 1, 2, \dots, R$) ohne komplizierte Iterationen zu verwirklichen.

Da die Zahl der Leitungen eines Bündels stets ganzzahlig ist und man bei vorgegebenen Angeboten daher nicht jeden Wert der Verlustwahrscheinlichkeit realisieren kann, soll das System so ausgelegt werden, daß stets der tatsächliche Wert $B_r \leq \delta_r$ und die Gesamtzahl der Schaltglieder ein Minimum wird.

Über den Verkehr sollen weiterhin die selben Annahmen getroffen werden, wie sie im System mit Unterbrechungen gültig sind.

3.2 Das System mit belegungsabhängigem Zugriff je Prioritätsklasse nach Faulhaber und Dunkl

Eine Möglichkeit, die vorgeschriebenen Verlustwahrscheinlichkeiten δ_r bei gegebenen Angeboten A_r mit einem Minimum an Schaltgliedern zu erreichen, bietet ein System mit belegungsabhängigem Zugriff je Prioritätsklasse. Hierüber wurde erstmals von G.F. Faulhaber und Ph. Dunkl unter der Bezeichnung "Priority Reservation System" veröffentlicht /10/. Es war bislang als einziges Verlustsystem mit Prioritäten bekannt.

Gegeben ist eine Koppelanordnung mit n Abnehmerschaltgliedern, kurz Leitungen genannt. Die Verkehrsangebote A_1, A_2, \dots, A_R der R Prioritätsklassen suchen diese n Leitungen ab.

Klasse 1 sei wiederum die höchste, Klasse R die niedrigste Prioritätsklasse.

Der belegungsabhängige Zugriff wird dadurch erreicht, daß man jeder Klasse eine Leitungszahl n_r zuordnet, derart, daß ein Ruf dieser Klasse nicht mehr abgefertigt wird, wenn zum Zeitpunkt seines Eintreffens die Anzahl x der belegten Leitungen $x \geq n_r$ ist. Dabei gilt:

$$n_{r-1} \geq n_r \geq n_{r+1}$$

und sinnvollerweise

$$n_1 = n$$

Gesucht ist nun einerseits $B_r = B_r(n_1, n_2, \dots, n_R)$ bei vorgegebenen A_r und n_r sowie andererseits die Leitungszahlen n_r bei vorgegebenen A_r und δ_r .

Zunächst sollen die Verluste B_r bestimmt werden, wenn die Angebote A_r und die Leitungszahlen n_r gegeben sind.

Führt man die Abkürzung

$$A_{\leq r} = \sum_{i=1}^r A_i \quad (83)$$

ein, so läßt sich für

$$n_r < x \leq n_{r-1} \quad \text{und } r = 2, 3, \dots, R+1 \quad \text{mit } n_{R+1} = 0$$

folgende Differenzgleichung für p_x angeben:

$$A_{\leq r-1} p_{x-1} = x \cdot p_x \quad (84)$$

Die Gl. (84) entspricht im wesentlichen der Reduktionsformel der Erlangverteilung /1/. Zu beachten ist aber jetzt, daß das Angebot $A_{\leq r}$ eine Funktion von x ist.

Als Lösung von Gl. (84) findet man:

$$p_x = \prod_{i=r}^R A_{\leq i}^{n_i - n_{i+1}} \cdot \frac{A_{\leq r-1}^{x-n_r}}{x!} \cdot p_0 \quad (85)$$

Die Zustandswahrscheinlichkeit p_0 wird dabei aus der Normierungsbedingung

$$\sum_{x=0}^n p_x = 1 \quad (86)$$

gewonnen.

Damit sind auch die gesuchten Verlustwahrscheinlichkeiten bekannt:

$$B_r = B_r(n_1, n_2, \dots, n_R; A_1, A_2, \dots, A_R) = \sum_{x=n_r}^n p_x \quad (87)$$

Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_r hängen damit von allen Angeboten A_r und von allen Leitungszahlen n_r ab.

In /10/ wird nun aus Gl. (87) folgende Beziehung abgeleitet:

$$\begin{aligned} B_r(n_1+1, \dots, n_q+1, \dots, n_{R+1}) &\leq B_r(n_1, \dots, n_q, \dots, n_R) \\ &\leq B_r(n_1, \dots, n_q+1, \dots, n_R) \quad \text{für } r \neq q \text{ und } n_j \leq n_{j-1} \text{ wobei} \\ &j = 2, 3, \dots, R \text{ ist.} \end{aligned} \quad (88)$$

Beachtenswert ist dabei die Aussage, daß, wenn eine Leitungszahl n_q erhöht wird, alle Verlustwahrscheinlichkeiten B_r mit $r \neq q$ ansteigen. Insbesondere nehmen die Verlustwahrscheinlichkeiten B_r ($r = 2, 3, \dots, R$) zu, wenn die Gesamtleitungszahl $n = n_1$ erhöht wird.

Mit Hilfe der Gln. (87) und (88) wird nun in /10/ ein Algorithmus angegeben, der es gestattet, bei vorgegebenen Angeboten A_r und vorgegebenen Verlustwahrscheinlichkeiten δ_r die Leitungszahlen so zu bestimmen, daß $B_r \leq \delta_r$ und gleichzeitig die Gesamtzahl der Leitungen ein Minimum wird.

Man beginnt stets mit $n_r = 0$ und erhöht dann die Leitungszahlen schrittweise, bis alle Verlustwahrscheinlichkeiten kleiner oder gleich den vorgeschriebenen Werten sind. Die Leitungszahlen durchlaufen dabei je eine Folge:

$$n_r^0, n_r^1, n_r^2, \dots, n_r^j \dots$$

wobei j die Zählvariable des Algorithmus darstellt.

Dieser Algorithmus läßt sich dann folgendermaßen beschreiben:

$$\begin{aligned} n_r^0 &= 0 \\ n_r^{j+1} &= n_r^j && \text{wenn } B_r(n_1^j, \dots, n_r^j) \leq \delta_r \\ n_r^{j+1} &= n_r^j + 1 && \text{wenn } B_r(n_1^j, \dots, n_r^j) > \delta_r \end{aligned}$$

Die hinsichtlich der Leitungszahl n optimale Lösung liegt vor, wenn im j -ten Schritt keine Leitungszahl n_r mehr geändert wurde. Die Leitungszahlen n_r^j stellen dann das gesuchte Ergebnis dar.

Der Beweis, daß die so berechnete Gesamtleitungszahl $n = n_1$ ein Minimum darstellt, wird ebenfalls in /10/ erbracht. Gleichzeitig stellen aber auch die Leitungszahlen n_r ($r = 2, 3, \dots, R$) jeweils ein Minimum dar.

Die Ungleichung (88) besagt, daß während jedem Schritt j des Algorithmus alle R Verlustwahrscheinlichkeiten überprüft werden müssen, ob $B_r \leq \delta_r$ ist, also auch diejenigen, bei denen im $(j-1)$ -ten Schritt diese Bedingung erfüllt war. Denn bei der Erhöhung irgend einer Leitungszahl n_q steigt die Verlustwahrscheinlichkeit von allen anderen Klassen mit $r \neq q$. So muß also ein neuer Durchlauf des Algorithmus und damit verbunden eine erneute Berechnung aller Verluste B_r erfolgen, wenn im vorhergehenden Schritt auch nur eine einzige Leitungszahl geändert wurde.

In den folgenden Abschnitten sollen nun weitere Verfahren zur

Realisierung von Prioritäten in Verlustsystemen ohne Unterbrechung bestehender Belegungen entwickelt werden.

3.3 Überlaufanordnungen zur Verwirklichung von Prioritäten in Verlustsystemen (ÜPE I und ÜPE II)

3.3.1 Die Verlustberechnung bei vorgegebener Struktur und vorgegebenen Angeboten A_r

Um Verlustsysteme mit Prioritäten ohne Unterbrechung zu verwirklichen, ist auch eine Anordnung von hintereinandergeschalteten Leitungsbündeln denkbar. In Abb. 6 sind zwei mögliche Anordnungen für $R = 3$ Prioritätsklassen dargestellt, welche im weiteren mit Überlaufanordnung mit prioritätenabhängiger Erreichbarkeit (ÜPE I und ÜPE II) bezeichnet werden.

Der Absuchvorgang soll von einer Ruhelage aus, stets mit dem ersten erreichbaren Teilbündel beginnend, erfolgen. Dabei nimmt bei beiden Anordnungen die Zahl der absuchbaren Teilbündel mit der Dringlichkeit der Prioritätsklasse zu.

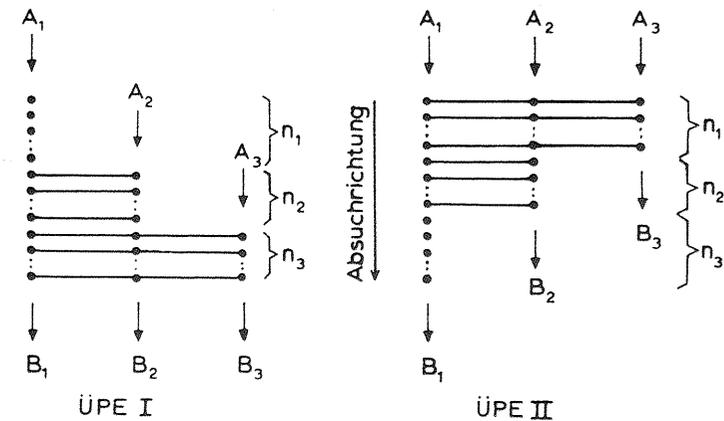


Abb. 6 Zwei mögliche Überlaufanordnungen zur Verwirklichung von Prioritäten in Verlustsystemen

Beide Verfahren zeichnen sich durch ihre Einfachheit aus, da

sie keinerlei speziellen Steuerungsaufwand benötigen und könnten daher für die Praxis Bedeutung erlangen.

Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten B_r je Prioritätsklasse r bei vorgegebenen Strukturen, d.h. vorgegebenen Leitungszahlen der Bündel und vorgegebenen Angeboten ist im allgemeinen nicht geschlossen durchführbar (Lösung einer R-dimensionalen, partiellen Differenzgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten). Es werden lediglich in Kap. 3.4 die Verlustwahrscheinlichkeiten der ÜPE II für den Sonderfall $R=2$ explizit bestimmt; es lassen sich hier direkt $B_1 = B_1(A_1, A_2; n_1, n_2)$ und $B_2 = B_2(A_1, A_2; n_1, n_2)$ angeben.

Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten im allgemeinen Fall kann aber mit Hilfe von Digitalrechnern direkt aus den Zustandsgleichungen erfolgen, d.h. es muß ein durch Anwendung des statistischen Gleichgewichtes /1/ sich ergebendes Gleichungssystem mit $m = (n_1+1)(n_2+1) \dots (n_R+1)$ unbekanntem Zustandswahrscheinlichkeiten p_{x_1, x_2, \dots, x_R} gelöst werden. Hierbei können vorteilhaft Iterationsverfahren angewendet werden, wenn die Zahl der Unbekannten sehr groß wird /8/.

Im Anhang A7 wird gezeigt, wie man für beide Anordnungen die i-te Zeile des Gleichungssystems allgemein für R Prioritätsklassen bestimmt, so daß eine Auflösung des Gleichungssystems für die Zustandswahrscheinlichkeiten leicht möglich ist.

Sind die Zustandswahrscheinlichkeiten berechnet, so ergeben sich die gesuchten Verlustwahrscheinlichkeiten auf folgende Weise:

ÜPE I :

$$B_r = \sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} \dots \sum_{x_{r-1}=0}^{n_{r-1}} P_{x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, n_r, n_{r+1}, \dots, n_R} \quad (89)$$

ÜPE II :

$$B_r = \sum_{x_{R+2-r}=0}^{n_{R+2-r}} \sum_{x_{R+3-r}=0}^{n_{R+3-r}} \dots \sum_{x_R=0}^{n_R} P_{n_1, n_2, \dots, n_{R+1-r}, x_{R+2-r}, \dots, x_R} \quad (90)$$

3.3.2 Die Bestimmung der Leitungszahlen n_r bei vorgeschriebenen Verlustwahrscheinlichkeiten δ_r und Angeboten A_r

ÜPE I :

Die Berechnung der Leitungszahlen n_r kann bei diesem System - abgesehen von äußerst komplizierten Iterationsrechnungen (Probiervverfahren) - nicht eindeutig ausgeführt werden. Die Angabe einer optimalen Lösung ist daher praktisch nicht möglich, d.h. es läßt sich nicht ohne weiteres die minimale Gesamtleitungszahl bei gleichzeitig minimalem Koppelpunktbedarf bestimmen.

Es hat sich aber gezeigt, daß ÜPE I ohnehin für die Praxis weniger geeignet ist: Die Berechnung mehrerer Anordnungen ÜPE I und II (Kap. 3.7) ergab, daß sich stets bei gleichen Angeboten und gleicher Gesamtleitungszahl eine ÜPE II angeben läßt, deren Gesamtverlust $B = (A_1 B_1 + \dots + A_R B_R) / (A_1 + \dots + A_R)$ kleiner ist als bei ÜPE I und dabei gleichzeitig die Forderung $B_r \leq \delta_r$ einhält.

ÜPE II :

Hier ist eine optimale Dimensionierung des Systems ohne Schwierigkeiten möglich, d.h. man kann die minimale Gesamtleitungszahl bei gleichzeitig minimalem Koppelpunktbedarf bestimmen.

Man bestimmt zunächst die Leitungszahl n_1 derart, daß die Summe aller Angebote einen Verlust $B_R \leq \delta_R$ bei minimaler Leitungszahl n_1 erzeugt. Da bei diesem Bündel der angebotene Verkehr noch kein Überlaufverkehr ist, kann n_1 iterativ aus der Erlangformel berechnet werden /1,2/.

Danach wird die Leitungszahl n_2 bestimmt. Dabei geht man von $n_2 = 1$ aus und erhöht n_2 solange um eine Leitung, bis $B_{R-1} \leq \delta_{R-1}$ wird. Dabei nimmt n_2 automatisch den minimalen Wert an. Das Anfügen dieses Bündels hat keinen Einfluß auf den vorher berechneten Verlust B_R . Allgemein sind alle bereits berechneten Verluste B_r unabhängig von der Leitungszahl n_q ($q > r$) der folgenden Bündel.

Die Leitungszahl n_r wird also bestimmt, indem man, von $n_r = 1$ ausgehend, diese so oft um eine weitere Leitung erhöht, bis

für die Zustandswahrscheinlichkeiten liefert als es mit der in /11/ gefundenen Lösung möglich wäre.

Das Zustandsdiagramm (Abb. 7) liefert folgende Gleichungen:

$$0 \leq x_1 \leq n_1 \quad ; \quad 0 \leq x_2 \leq n_2$$

$$(x_1 + x_2 + A) \cdot p_{x_1, x_2} = A p_{x_1-1, x_2} + (x_2 + 1) p_{x_1, x_2+1} + (x_1 + 1) p_{x_1+1, x_2} \quad (91)$$

$$x_1 = n_1 \quad , \quad 0 \leq x_2 < n_2$$

$$(n_1 + x_2 + A) \cdot p_{n_1, x_2} = A_1 p_{n_1, x_2-1} + (x_2 + 1) p_{n_1, x_2+1} + A p_{n_1-1, x_2} \quad (92)$$

$$x_1 = n_1 \quad , \quad x_2 = n_2$$

$$(n_1 + n_2) \cdot p_{n_1, n_2} = A_1 p_{n_1, n_2-1} + A p_{n_1-1, n_2}$$

$$\text{mit } A = A_1 + A_2 \quad (94)$$

Dazu gehören die Randbedingungen:

$$p_{-1, x_2} = 0 \quad (95)$$

$$p_{x_1, n_2+1} = 0$$

Das Gleichungssystem (91), (92), (93) ist ein homogenes System, dessen Determinante verschwindet. Daher kann im weiteren Gl. (93) unberücksichtigt bleiben. Statt ihrer wird die Normierungsbedingung

$$\sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} p_{x_1, x_2} = 1 \quad (96)$$

zur vollständigen Bestimmung des Gleichungssystems herangezogen. Es kann aber auch - bei Berücksichtigung der Tatsache, daß die Verteilung im Bündel 1 eine Erlangverteilung ist - die folgende Bedingung Verwendung finden:

$$\sum_{x_2=0}^{n_2} p_{0, x_2} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n_2} \frac{A^i}{i!}} \quad (96a)$$

Die Lösung des Problems soll in folgenden Schritten ausgeführt

werden:

Zunächst wird mit Gl. (91) unter Berücksichtigung von Gl. (95) die Lösung der Zustandswahrscheinlichkeiten p_{x_1, x_2} angegeben, wobei n_2+1 zunächst noch unbekannte Anfangswerte K_{x_2} , welche nicht mit den Zustandswahrscheinlichkeiten p_{0, x_2} identisch sind, in dieser Lösung enthalten sind. Danach werden mit Hilfe von Gl. (92) und Gl. (96a) diese n_2+1 Anfangswerte bestimmt.

Die Auflösung von Gl. (91) nach p_{x_1, x_2} verlangt die Lösung einer partiellen, homogenen Differenzgleichung 2. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten und ist daher direkt nicht ohne Schwierigkeiten anzugeben. Die Lösung dieser partiellen Differenzgleichung läßt sich aber umgehen. Betrachtet man den oberen Rand des Zustandsdiagramms (Abb. 7) mit den Zustandswahrscheinlichkeiten p_{x_1, n_2} , so erkennt man, daß für $x_2 = n_2$ Gl. (91) nur noch eine gewöhnliche, homogene Differenzgleichung 2. Ordnung darstellt. Löst man diese, so lassen sich die Zustandswahrscheinlichkeiten p_{x_1, n_2-1} unter Verwendung der bereits bestimmten Lösung für p_{x_1, n_2} aus einer wiederum gewöhnlichen, aber inhomogenen Differenzgleichung bestimmen. Führt man in diesem Sinne fort, so ist auf diese Weise allgemein p_{x_1, x_2} als Funktion von n_1, n_2, A und K_{x_2} darstellbar. Dabei ist K_{x_2} eine nur von x_2 abhängige Größe, die mit Hilfe der Gl. (92) und (96a) bestimmt werden kann.

Zur Bestimmung einer geschlossenen Lösung für p_{x_1, x_2} nach Gl. (91) werden erzeugende Funktionen verwendet. Diese sollen folgendermaßen definiert sein /13/:

$$u(t) = G \{ p_{x_1, x_2} \} = \sum_{x_1=0}^{\infty} p_{x_1, x_2} \cdot t^{x_1} \quad (97)$$

Dabei stellt x_2 lediglich einen Parameter dar.

Folgende Beziehungen, die im weiteren von Bedeutung sind und alle aus Gl. (97) folgen, seien hier kurz angeführt:

$$G \{ A \cdot p_x \} = A \cdot G \{ p_x \} \quad (98)$$

$$G \{ p_{1,x} + p_{2,x} \} = G \{ p_{1,x} \} + G \{ p_{2,x} \} \quad (99)$$

$$G\{p_{x-1}\} = t \cdot G\{p_x\} + p_{-1} \quad (100)$$

$$G\{p_{x+1}\} = \frac{1}{t} \cdot [G\{p_x\} - p_0] \quad (101)$$

$$G\{x \cdot p_x\} = t \cdot \frac{d}{dt} \cdot G\{p_x\} \quad (102)$$

Nun läßt sich Gl. (91) folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} x_2 \cdot p_{x_1, x_2} + [x_1 \cdot p_{x_1, x_2} - A \cdot p_{x_1-1, x_2}] &= \\ &= [(x_1+1) p_{x_1+1, x_2} - A \cdot p_{x_1, x_2}] + (x_2+1) \cdot p_{x_1, x_2+1} \end{aligned} \quad (91a)$$

Zunächst soll $x_2 = n_2$ gesetzt werden, dann läßt sich Gl. (91a) mit Gl. (95) und der Abkürzung

$$f_{x_1, n_2} = x_1 \cdot p_{x_1, n_2} - A \cdot p_{x_1-1, n_2} \quad (103)$$

folgendermaßen angeben:

$$x_2 \cdot p_{x_1, n_2} + f_{x_1, n_2} = f_{x_1+1, n_2} \quad (104)$$

Mit den Gln. (95), (98), (99), (100) und (102) folgt:

$$G\{f_{x_1, n_2}\} = t \cdot u'(t) - A \cdot t \cdot u(t) - A \cdot p_{-1, x_2} = t[u'(t) - A \cdot u(t)] \quad (105a)$$

und

$$G\{f_{x_1+1, n_2}\} = \frac{1}{t} [G\{f_{x_1, n_2}\} - f_{0, n_2}] \quad (105b)$$

Mit den Gln. (95) und (103) ergibt sich

$$f_{0, n_2} = -A \cdot p_{-1, n_2} = 0$$

Setzt man die Gln. (105a, b) in Gl. (104) ein, so findet man für die erzeugende Funktion $u(t)$

$$\begin{aligned} n_2 \cdot u(t) + t[u'(t) - A u(t)] &= u'(t) - A u(t) \\ u'(t)(t-1) + u(t) \cdot [n_2 - A(t-1)] &= 0 \end{aligned} \quad (106)$$

Diese Differentialgleichung für $u(t)$ hat die Lösung

$$u(t) = K_{n_2} \cdot \frac{1}{(t-1)^{n_2}} \cdot e^{At} \quad (107)$$

Dabei stellt K_{n_2} die Integrationskonstante dar.

Zur Rücktransformation muß $u(t)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden. Dazu wird zunächst Gl. (107) umgeformt:

$$u(t) = K_{n_2} \cdot (-1)^{n_2} \cdot \frac{1}{(1-t)^{n_2}} \cdot e^{At}$$

Danach ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(t) &= K_{n_2} \cdot (-1)^{n_2} [(-n_2) - (-n_2)t + (-n_2)t^2 + \dots] \left[1 + \frac{(At)}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \dots\right] \\ &= K_{n_2} (-1)^{n_2} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{x_1} (-1)^v \binom{-n_2}{v} \cdot \frac{A^{x_1-v}}{(x_1-v)!} \cdot t^{x_1} \end{aligned} \quad (108)$$

Vergleicht man Gl. (108) mit (97), so folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} p_{x_1, n_2} &= K_{n_2} (-1)^{n_2} \sum_{v=0}^{x_1} (-1)^v \binom{-n_2}{v} \cdot \frac{A^{x_1-v}}{(x_1-v)!} \\ &= K_{n_2} (-1)^{n_2} \sum_{v=0}^{x_1} \binom{n_2-1+v}{v} \cdot \frac{A^{x_1-v}}{(x_1-v)!} \end{aligned} \quad (109)$$

Verwendet man die von Brockmeyer eingeführte Abkürzung

$$S_{x_1, x_2} = \sum_{v=0}^{x_1} \binom{x_2-1+v}{v} \cdot \frac{A^{x_1-v}}{(x_1-v)!} \quad (110)$$

so ergibt sich:

$$p_{x_1, n_2} = (-1)^{n_2} \cdot K_{n_2} \cdot S_{x_1, n_2}$$

Setzt man nun in Gl. (91) $x_2 = n_2 - 1$ ein, so läßt sich entsprechend Gl. (106) die folgende Differentialgleichung für $u(t)$ angeben, die aber diesmal inhomogen ist:

$$u'(t)(t-1) + u(t)[n_2-1 - A(t-1)] = n_2 \cdot K(n_2) \cdot \frac{1}{(t-1)^{n_2}} \cdot e^{At}$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist entsprechend Gl. (107):

$$u(t) = c(t) \cdot \frac{1}{(t-1)^{n_2-1}} \cdot e^{At}$$

Durch Variation der Konstanten C findet man die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für u(t):

$$c(t) = K_{n_2-1} - \frac{n_2 \cdot K_{n_2}}{t-1}$$

$$u(t) = K_{n_2-1} \cdot \frac{1}{(t-1)^{n_2-1}} \cdot e^{At} + \frac{n_2 \cdot K_{n_2}}{(-1)(t-1)^{n_2}} \cdot e^{At}$$

Für $x_2 = n_2 - 2$ folgt:

$$u(t) = C \cdot \frac{1}{(t-1)^{n_2-2}} \cdot e^{At}$$

$$c(t) = K_{n_2-2} + \frac{n_2-1}{(-1)} \cdot \frac{K_{n_2-1}}{(t-1)^1} + \frac{n_2 \cdot (n_2-1)}{(-1)(-2)} \cdot \frac{K_{n_2}}{(t-1)^2}$$

und für $x_2 = n_2 - 3$:

$$u(t) = c(t) \cdot \frac{1}{(t-1)^{n_2-3}} \cdot e^{At}$$

$$c(t) = K_{n_2-3} + \frac{n_2-2}{(-1)} \cdot \frac{K_{n_2-2}}{(t-1)^1} + \frac{(n_2-2)(n_2-1)}{(-1)(-2)} \cdot \frac{K_{n_2-1}}{(t-1)^2} + \frac{(n_2-2)(n_2-1)n_2}{(-1)(-2)(-3)} \cdot \frac{K_{n_2}}{(t-1)^3}$$

Daraus ist nun die allgemeine Lösung für C(t) und u(t) in Abhängigkeit von x_2 ersichtlich.

$$c(t) = \sum_{v=0}^{n_2-x_2} (-1)^{n_2-x_2-v} \binom{n_2-v}{n_2-x_2-v} \cdot \frac{K_{n_2-v}}{(t-1)^{n_2-x_2-v}}$$

und

$$u(t) = \sum_{v=0}^{n_2-x_2} (-1)^{n_2-x_2-v} \binom{n_2-v}{x_2} \cdot \frac{K_{n_2-v}}{(t-1)^{n_2-x_2-v}} \cdot \frac{1}{(t-1)^{x_2}} \cdot e^{At}$$

$$= (-1)^{x_2} \sum_{v=0}^{n_2-x_2} \binom{n_2-v}{x_2} \frac{K_{n_2-v}}{(1-t)^{n_2-v}} \cdot e^{At} \quad (111a)$$

$$= (-1)^{x_2} \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2} \frac{K_{\lambda}}{(1-t)^{\lambda}} \cdot e^{At} \quad (111b)$$

Da obige Herleitung von u(t) nach Gl. (111) nicht vollständig ist, muß die Gültigkeit von Gl. (111) noch bewiesen werden. Dies ist aber leicht möglich, indem man zu Gl. (91) die entsprechende Gleichung für die erzeugende Funktion bildet und in diese Gleichung u(t) nach Gl. (111) einsetzt. Es läßt sich dann zeigen, daß diese Gleichung von u(t) befriedigt wird (s. Anhang A8).

Zur Rücktransformation von u(t) in p_{x_1, x_2} ist wieder die Potenzreihenentwicklung von u(t) notwendig. Diese kann wieder analog zu Gl. (108) vorgenommen werden:

$$u(t) = (-1)^{x_2} \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2} K_{\lambda} \cdot \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{x_1} \binom{\lambda-1+v}{v} \cdot \frac{A^{x_1-v}}{(x_1-v)!} \cdot t^{x_1} \quad (112)$$

$$p_{x_1, x_2} = (-1)^{x_2} \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2} K_{\lambda} \cdot S_{x_1, \lambda} \quad (113)$$

Unbekannt sind dabei noch die Anfangswerte K_{λ} mit $\lambda = 0, 1, \dots, n_2$. Die Berechnung dieser Größen soll zunächst einmal zurückgestellt werden; es werden vorher die Zustandswahrscheinlichkeiten p_{x_1} und p_{x_2} , also die Belegungsverteilungen im ersten bzw. im zweiten Bündel, berechnet.

3.4.2 Die Berechnung der Verteilung p_{x_1} im Primärbündel

Die Berechnung von p_{x_1} soll nur zur Bestätigung der Richtigkeit von Gl. (113) ausgeführt werden. Das Ergebnis kann auch unmittelbar angegeben werden, weil das erste Bündel ein vollkommen erreichbares Bündel darstellt, dem ein Zufallsverkehr mit dem Angebot $A = A_1 + A_2$ angeboten wird. Somit muß gelten:

$$p_{x_1} = \frac{A^{x_1}}{x_1!} \bigg/ \sum_{v=0}^{n_1} \frac{A^v}{v!} \quad (114)$$

Es soll nun gezeigt werden, daß Gl. (114) - bis auf einen konstanten Faktor - auch mit Hilfe von Gl. (113) abgeleitet werden kann. Diese Herleitung soll im Bildbereich der erzeugenden Funktion ausgeführt werden. Es gilt:

$$p_{x_1} = \sum_{x_2=0}^{n_2} p_{x_1, x_2}$$

Und mit Gl. (99) und Gl. (111b)

$$\begin{aligned} G\{p_{x_1}\} &= G\left\{\sum_{x_2=0}^{n_2} p_{x_1, x_2}\right\} = \sum_{x_2=0}^{n_2} G\{p_{x_1, x_2}\} \\ &= \sum_{x_2=0}^{n_2} \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} (-1)^{x_2} \binom{\lambda}{x_2} \cdot \frac{K_\lambda}{(1-t)^\lambda} \cdot e^{At} \end{aligned}$$

Vertauscht man die Summationsreihenfolge von x_2 und λ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} G\{p_{x_1}\} &= \sum_{\lambda=0}^{n_2} \sum_{x_2=0}^{\lambda} \frac{K_\lambda}{(1-t)^\lambda} \cdot e^{At} (-1)^{x_2} \binom{\lambda}{x_2} \\ &= \sum_{\lambda=0}^{n_2} \frac{K_\lambda}{(1-t)^\lambda} \cdot e^{At} \cdot \sum_{x_2=0}^{\lambda} (-1)^{x_2} \binom{\lambda}{x_2} \end{aligned}$$

Da nun aber

$$\sum_{x_2=0}^{\lambda} (-1)^{x_2} \binom{\lambda}{x_2} = (1-1)^\lambda$$

für alle $\lambda \neq 0$ verschwindet und für $\lambda=0$ gleich 1 wird, verbleibt für $G\{p_{x_1}\}$

$$G\{p_{x_1}\} = K_0 \cdot e^{At}$$

Die Rücktransformation ist damit sofort anzugeben:

$$p_{x_1} = K_0 \cdot \frac{A^{x_1}}{x_1!} \quad (115)$$

Die Übereinstimmung von Gl. (115) mit Gl. (114) ist gegeben, wenn man K_0 wie folgt bestimmt:

$$K_0 = \frac{1}{\sum_{v=0}^{n_1} \frac{A^v}{v!}} = \frac{1}{S_{n_1, 1}} \quad (116)$$

Hierbei zeigt sich nun bereits ein Vorteil der verwendeten Anfangswerte K_{x_2} . Während bei dem hier betrachteten Problem - im Gegensatz zum einfachen Überlaufproblem bei Brockmeyer - keine Zustandswahrscheinlichkeit p_{0, x_2} unter Verwendung der bekannten Erlangverteilung für p_{x_1} explizit angegeben werden kann, ist es statt dessen bei den gewählten Anfangswerten K_{x_2} möglich, den Wert K_0 unmittelbar anzugeben.

3.4.3 Die Berechnung der Verteilung p_{x_2} im Sekundärbündel

Es gilt:

$$p_{x_2} = \sum_{x_1=0}^{n_1} p_{x_1, x_2} = (-1)^{x_2} \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2} K_\lambda \cdot \sum_{x_1=0}^{n_1} S_{x_1, \lambda}$$

Da aber

$$\sum_{x_1=0}^{n_1} S_{x_1, \lambda} = S_{x_1, \lambda+1}$$

ist (/11/ Gl. (10)), ergibt sich für p_{x_2} :

$$p_{x_2} = (-1)^{x_2} \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2} K_\lambda S_{n_1, \lambda+1} \quad (117)$$

Legt man durch das Zustandsdiagramm (Abb. 7) eine waagrechte Schnittlinie, so folgt aus der Stationarität des Prozesses, daß diese Schnittlinie im Mittel genau so oft von oben wie von unten überschritten wird. Daraus folgt aber

$$x_2 \cdot p_{x_2} = A_1 p_{n_1, x_2-1}$$

$$p_{x_2} = \frac{A_1}{x_2} (-1)^{x_2-1} \cdot \sum_{\lambda=x_2-1}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2-1} K_\lambda \cdot S_{n_1, \lambda} \quad (118)$$

für $x_2 = 1, 2, \dots, n_2$.

Damit liegen nun zwei Gleichungen vor, welche beide die Berechnung der p_{x_2} gestatten.

3.4.4 Die Berechnung der Anfangswerte K_{x_2}

Durch Gleichsetzen der Gln. (117) und (118) kann nunmehr leicht eine Rekursionsformel für K_{x_2} angegeben werden. Die Anwendung von Gl. (92) erübrigt sich dabei, da Gl. (118) die Gegebenheiten des rechten Randes des Zustandsdiagramms enthält.

$$\frac{A_1}{x_2} (-1)^{x_2-1} \sum_{\lambda=x_2-1}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2-1} K_\lambda \cdot S_{n_1, \lambda} = (-1)^{x_2} \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2} K_\lambda S_{n_1, \lambda+1}$$

$$\frac{A_1}{x_2} \binom{x_2-1}{x_2-1} K_{x_2-1} \cdot S_{n_1, x_2-1} + \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \left[\frac{A_1}{x_2} \binom{\lambda}{x_2-1} K_\lambda \cdot S_{n_1, \lambda} + \binom{\lambda}{x_2} K_\lambda \cdot S_{n_1, \lambda+1} \right] = 0$$

$$A_1 K_{x_2-1} \cdot S_{n_1, x_2-1} = - \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2-1} K_\lambda [A_1 S_{n_1, \lambda} + (\lambda - x_2 + 1) S_{n_1, \lambda+1}]$$

gültig für $x_2 = 1, 2, \dots, n_2$.

Daraus ergibt sich:

$$K_{x_2} = - \frac{1}{A_1 \cdot S_{n_1, x_2}} \cdot \sum_{\lambda=x_2+1}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2} K_\lambda [A_1 S_{n_1, \lambda} + (\lambda - x_2) S_{n_1, \lambda+1}] \quad (119)$$

gültig für $x_2 = 0, 1, 2, \dots, n_2-1$.

Die Berechnung der K_{x_2} kann nun folgendermaßen vorgenommen werden:

Man setzt zunächst willkürlich $K_{n_2}^* = 1$ und bestimmt dann mit

Gl. (119) die Zahlenwerte für $K_{n_2-1}^*, K_{n_2-2}^*, \dots$ usw. Im allgemeinen ergibt sich dann ein $K_0^* \neq K_0$. Man findet dann die endgültige Lösung:

$$K_{x_2} = \frac{K_0}{K_0^*} \cdot K_{x_2}^* \quad (120)$$

Es soll nun noch eine geschlossene Lösung für K_{x_2} angegeben werden, wenn auch diese für die Praxis belanglos ist, da die numerische Berechnung der K_{x_2} nach dieser Lösung äußerst umständlich wäre.

Führt man zunächst die Abkürzung

$$F_{\lambda, x_2} = - \binom{\lambda}{x_2} \cdot \frac{A_1 S_{n_1, \lambda} + (\lambda - x_2) S_{n_1, \lambda+1}}{A_1 S_{n_1, x_2}} \quad (121)$$

ein, so ergibt sich mit Gl. (119):

$$K_{x_2} = \sum_{\lambda=x_2+1}^{n_2} F_{\lambda, x_2} \cdot K_\lambda$$

Daraus folgt unmittelbar die explizite Formel für K_{x_2} :

$$K_{x_2} = \frac{1}{S_{n_1, 1}} \cdot \frac{\sum_{\lambda_1=x_2+1}^{n_2} F_{\lambda_1, x_2} \cdot \sum_{\lambda_2=\lambda_1+1}^{n_2} F_{\lambda_2, \lambda_1} \cdots \sum_{\lambda_{n_2-x_2}=\lambda_{n_2-x_2-1}+1}^{n_2} F_{\lambda_{n_2-x_2}, \lambda_{n_2-x_2-1}}}{\sum_{\lambda_1=1}^{n_2} F_{\lambda_1, 0} \cdot \sum_{\lambda_2=\lambda_1+1}^{n_2} F_{\lambda_2, \lambda_1} \cdots \sum_{\lambda_{n_2}=\lambda_{n_2-1}+1}^{n_2} F_{\lambda_{n_2}, \lambda_{n_2-1}}} \quad (122)$$

gültig für $x_2 = 0, 1, \dots, n_2-1$.

In den Gln. (122) und (123) muß noch zusätzlich vereinbart werden, daß alle Summen, welche einer Summe mit oberer und unterer Grenze n_2 folgen, gleich 1 gesetzt werden müssen.

Für $x_2 = n_2$ gilt:

$$K_{n_2} = \frac{1}{S_1^{n_1}} \cdot \frac{1}{\sum_{\lambda_1=1}^{n_2} F_{\lambda_1, 0} \cdot \sum_{\lambda_2=\lambda_1+1}^{n_2} F_{\lambda_2, \lambda_1} \cdots \sum_{\lambda_{n_2}=\lambda_{n_2-1}+1}^{n_2} F_{\lambda_{n_2}, \lambda_{n_2-1}}} \quad (123)$$

3.4.5 Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2

Der Verlust B_2

Ein Ruf der Klasse 2, also ein Ruf aus dem Angebot A_2 wird dann abgewiesen, wenn alle n_1 Leitungen des Primärbündels belegt sind. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Zustand ist aber p_{x_1} für $x_1 = n_1$; d.h.

$$B_2 = E_{n_1}(A) \quad (124)$$

Der Verlust B_1

Ein Ruf der Klasse 1 geht nur verloren, wenn er im Zustand (n_1, n_2) einfällt. Daher gilt:

$$B_1 = p_{n_1, n_2}$$

und mit Gl. (113)

$$B_1 = (-1)^{n_2} \cdot K_{n_2} \cdot S_{n_1, n_2} \quad (125)$$

Wobei K_{n_2} nach den Gln. (119) oder (123) bestimmt werden kann.

3.5 Ein System mit prioritätsabhängiger Zahl von Suchschritten für Wählereinrichtungen ohne feste Ruhestellung

Gegeben sei ein Leitungsbündel mit n Leitungen. Jede Prioritätsklasse sucht die Leitungen dieses Bündels zufällig ab, d.h. von keiner festen Ruhelage aus. Die zulässige Anzahl von Suchschritten soll dabei aber von der Prioritätsklasse abhängen. Es soll gelten:

$$k_{r-1} \geq k_r \geq k_{r+1} \quad \text{mit } r = 2, 3, \dots, R; \quad k_{R+1} = 0.$$

Die Berechnung der interessierenden Verlustwahrscheinlichkeiten ist bei diesem System sehr einfach durchzuführen.

Trifft ein Ruf in den Zustand "x Leitungen belegt" ein, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß die erste abgesuchte Leitung belegt ist

$$p = \frac{x}{n}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß bei k_r aufeinanderfolgenden Suchschritten, welche im Zustand "x Leitungen belegt" ausgeführt

werden, keine freie Leitung gefunden wird, ist

$$p_r = \frac{x}{n} \cdot \frac{x-1}{n-1} \cdot \frac{x-2}{n-2} \dots \frac{x-k_r+1}{n-k_r+1} = \frac{\binom{x}{k_r}}{\binom{n}{k_r}} = G_{r,x} \quad (126)$$

Mit der Abkürzung

$$a_x = \sum_{r=1}^R A_r [1 - G_{r,x}] \quad (127)$$

ergibt sich die folgende Rekursionsformel für die Zustandswahrscheinlichkeiten p_x

$$a_x \cdot p_x = (x+1) \cdot p_{x+1} \quad (128)$$

Die Lösung von Gl. (128) läßt sich aber unmittelbar angeben:

$$p_x = p_0 \prod_{i=0}^{x-1} a_i \cdot \frac{1}{x!} \quad (129)$$

Aus der Normierungsbedingung

$$\sum_{x=0}^n p_x = 1$$

folgt nun

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \prod_{i=0}^{j-1} a_i} \quad (130)$$

Die Gleichungen (129) und (130) gestatten, die gesuchten Verlustwahrscheinlichkeiten B_r anzugeben.

$$B_r = \sum_{x=k_r}^n p_x \cdot G_{r,x} \quad (131)$$

Die Aufgabe, bei gegebenen Angeboten A_r und vorgeschriebenen

Verlusten δ_r die Gesamtleitungszahl n und die Erreichbarkeiten k_r zu bestimmen, stößt hier auf Schwierigkeiten, da prinzipiell auch $k_1 < n$ sein kann und somit ein weiterer Strukturparameter existiert. Wählt man aber (sinnvollerweise) $k_1 = n$, so läßt sich kein Algorithmus entsprechend demjenigen aus Kap. 3.2 angeben, weil dann die Ungleichung (88) nicht mehr gilt, diese aber Voraussetzung für die Anwendung dieses Algorithmus ist.

So wäre es daher notwendig, einen wesentlich komplizierteren Algorithmus zu entwickeln. Es hat sich aber durch numerischen Vergleich dieses Systems mit den bisher betrachteten Systemen gezeigt, daß letztere stets einen geringeren Gesamtverlust bei gleicher Gesamtleitungszahl n und gleichzeitig eingehaltenen Forderungen $B_r \leq \delta_r$ aufweisen, so daß dieses System praktisch ohne große Bedeutung ist.

3.6 Die Bündelteilung nach Prioritätsklassen

Wird einem vollkommen erreichbaren Bündel mit n Leitungen ein Verkehrswert A angeboten, so ist die Zahl der Verluste stets kleiner als wenn dieses Angebot in zwei oder mehrere Anteile aufgeteilt würde und diese jeweils für sich n_r Leitungen absuchen, wobei die Summe aller n_r gleich n ist. Trotzdem kann unter gewissen Umständen, wenn $A_r \ll A_q$ und $\delta_r \ll \delta_q$ für $r < q$ gilt, eine Bündelaufteilung nach Prioritätsklassen zu Leistungserparnissen gegenüber einem System ohne Prioritäten führen, bei welchem die einheitliche Verlustwahrscheinlichkeit δ_1 zugrunde gelegt werden muß.

Die Berechnung der Teilbündel ist äußerst einfach, da

$$B_r = E_{nr}(A_r)$$

ist und zur Berechnung der n_r vorhandene Tafelwerke /2/ verwendet werden können.

Wie jedoch die Diagramme 8e, 9e und die Tabellen 2 und 3 zeigen, ist, verglichen mit den bereits behandelten Verfahren, die Bündelteilung am unwirtschaftlichsten, solange ausschließlich die Gesamtzahl n der Abnehmerleitungen als Vergleichskriterium maßgeblich ist. Wie jedoch in Kap. 3.7 gezeigt wird,

kann bei speziellen Koppelanordnungen die Bündelteilung zweckmäßig sein, wenn die Zahl der Koppelpunkte für die Auswahl eines wirtschaftlich optimalen Systems ausschlaggebend ist.

3.7 Vergleichende Betrachtung der Systeme mit Prioritäten ohne Unterbrechung bestehender Belegungen

Für die Einführung von nichtunterbrechenden Prioritäten im Fernspreverkehr stehen nun die in Kap. 3.2 bis 3.6 geschilderten fünf verschiedenen Systeme zur Verfügung. Für die Auswahl dieser Systeme sind drei Kriterien maßgebend: Der durch die Einführung von Prioritäten bedingte, zusätzliche Aufwand an Steuerung der Koppelanordnung, die bei vorgegebenen Angeboten und vorgeschriebenen Verlusten benötigte Gesamtleitungszahl und der Bedarf an Koppelpunkten.

Die Überlaufanordnungen UPE I und II sowie die Bündelteilung zeichnen sich dadurch aus, daß sie keinerlei zusätzlichen Aufwand an Steuerung benötigen. Die Prioritätsklasse liegt dabei aber für jede Zubringerleitung fest.

Das System mit belegungsabhängigem Zugriff und das System mit prioritätenabhängiger Zahl der Suchschritte benötigen eine zusätzliche Steuerung. Bei ersterem System muß darüber hinaus stets der momentane Belegungszustand ausgewertet werden, da es von diesem abhängt, ob ein Ruf abgewiesen wird. Die Prioritätsklasse kann der Steuerung für jeden Ruf übermittelt werden und muß bei beiden Systemen nicht der betreffenden Zubringerleitung zugeordnet werden.

Sind die Leitungskosten im Verhältnis zu den Kosten der Koppelanordnung klein, z.B. dann, wenn es sich um interne Bündel innerhalb einer Vermittlungsstelle handelt, sind Systeme ohne zusätzliche Steuerung und mit wenig Koppelpunkten zu wählen. Im Fernverkehr, wo die Kosten der Leitungsbündel ausschlaggebend sind, ist in jedem Fall dasjenige System zu bevorzugen, welches die geringste Anzahl an Leitungen benötigt.

Es gilt daher zu untersuchen, welches der oben angeführten Systeme bei vorgegebenen Angeboten und vorgeschriebenen Verlusten die niedrigste Anzahl von Abnehmerleitungen bzw. die

geringste Anzahl von Koppelpunkten benötigt. Wenn die Zahl der Abnehmerleitungen gleich sein sollte, kann darüber hinaus der sich ergebende Gesamtverlust

$$B_{ges} = \frac{\sum_{r=1}^R A_r B_r}{\sum_{s=1}^S A_s}$$

als zusätzliches Kriterium für die Auswahl eines Systems herangezogen werden.

Da geschlossene Lösungen nicht für alle Systeme vorliegen und auch die vorliegenden, geschlossenen Lösungen nicht nach der Leitungszahl n auflösbar sind, wird diese Untersuchung anhand der numerischen Auswertung einiger charakteristischer Beispiele durchgeführt.

Bestimmt man die Gesamtleitungszahl n als Funktion von $A_1, A_2, \dots, \delta_1, \delta_2, \dots$ und wählt man n als Vergleichskriterium für die Güte eines Systems, so treten zwei Probleme auf: Erstens ist die Berechnung von n für ÜPE I und das System mit prioritätenabhängiger Zahl der Suchschritte nur auf komplizierte Weise möglich und zweitens muß ein System, das für bestimmte Werte der Verkehrsparameter $A_1, A_2, \dots, \delta_1, \delta_2, \dots$ mehr Leitungen als ein anderes System benötigt, nicht unbedingt für andere Werte dieser Parameter ungünstiger sein als letzteres. Der Grund liegt darin, daß ein System bei welchem sich alle Verluste $B_r \approx \delta_r$ realisieren lassen, oft weniger Leitungen benötigt bzw. bei gleicher Leitungszahl einen geringeren Gesamtverlust besitzt als ein anderes System, bei welchem sich die meisten Verluste nur mit Werten $B_r \ll \delta_r$ realisieren lassen.

Der Vergleich der Systeme wurde nun auf folgende Weise durchgeführt:

In den Abbn. 8a bis 8e sind für alle fünf Systeme bei einheitlicher Leitungszahl $n = 10$ (bzw. $n = 30$ in den Abbn. 9a bis 9e) die Verluste B_1, B_2, B_{ges} für zwei Prioritätsklassen bei jeweils vorgegebenen Angeboten aufgetragen. Auf der Abszisse ist bei der ÜPE I die Leitungszahl $n_2 = n - n_1$ aufgetragen; bei anderen Systemen eine jeweils entsprechende Größe.

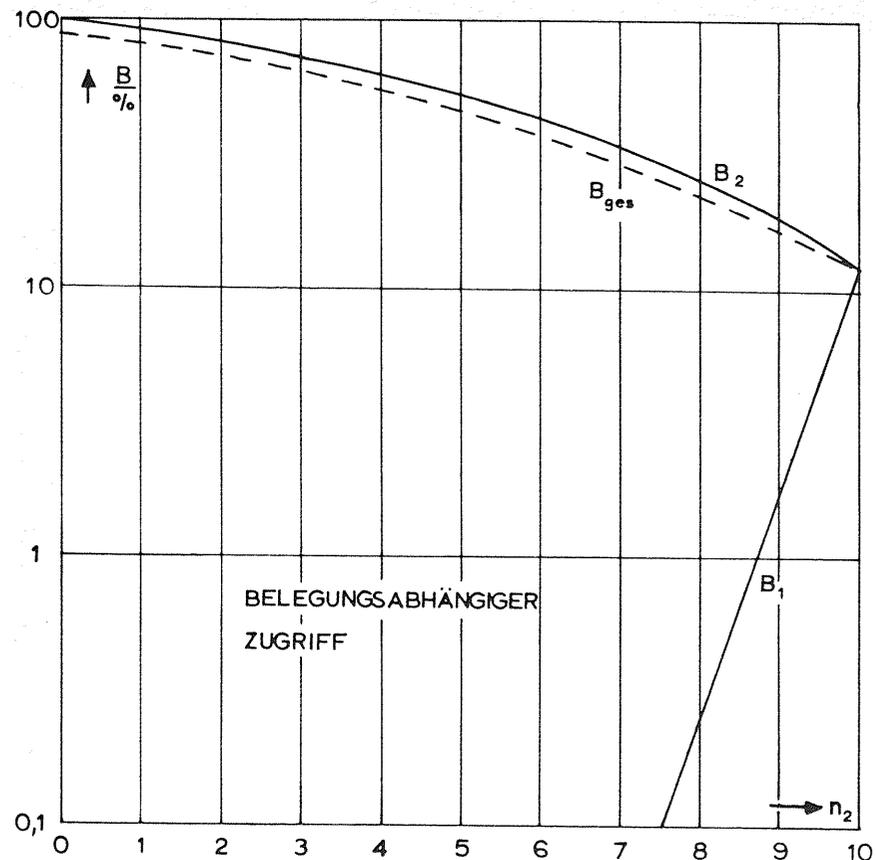


Abb. 8a. Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 bei belegungsabhängigem Zugriff in Abhängigkeit von der Leitungszahl n_2 mit $n_1 + n_2 = 10$, $A_1 = 1$, $A_2 = 7$.

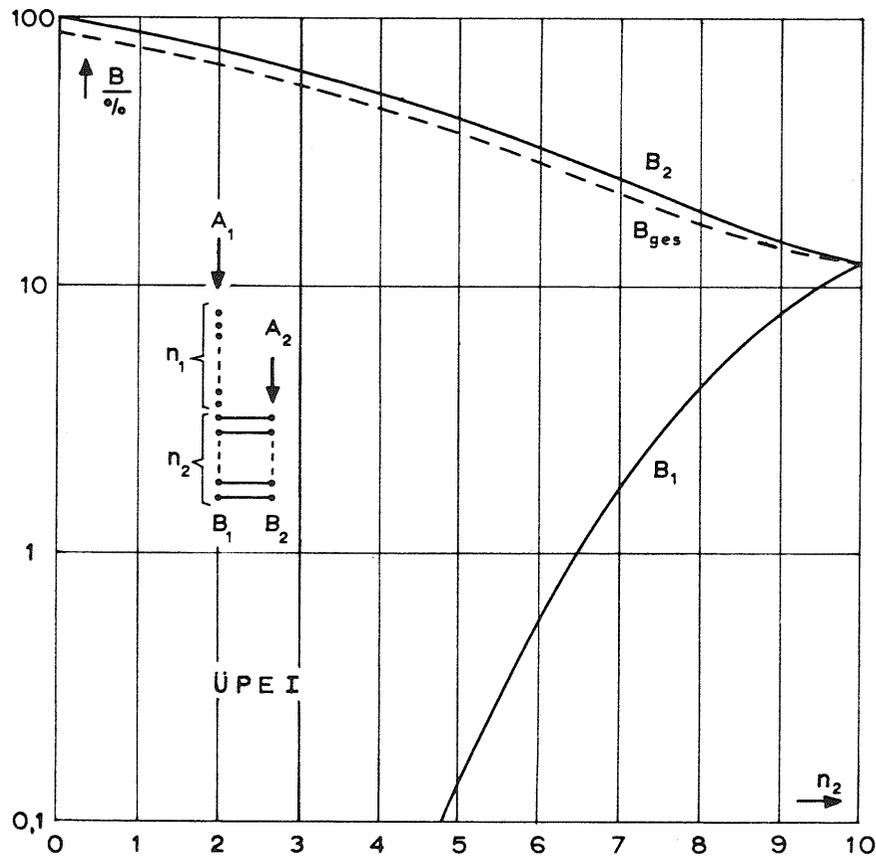


Abb. 8b. Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 bei ÜPE I in Abhängigkeit von der Leitungszahl n_2 mit $n_1+n_2 = 10$, $A_1 = 1$, $A_2 = 7$.

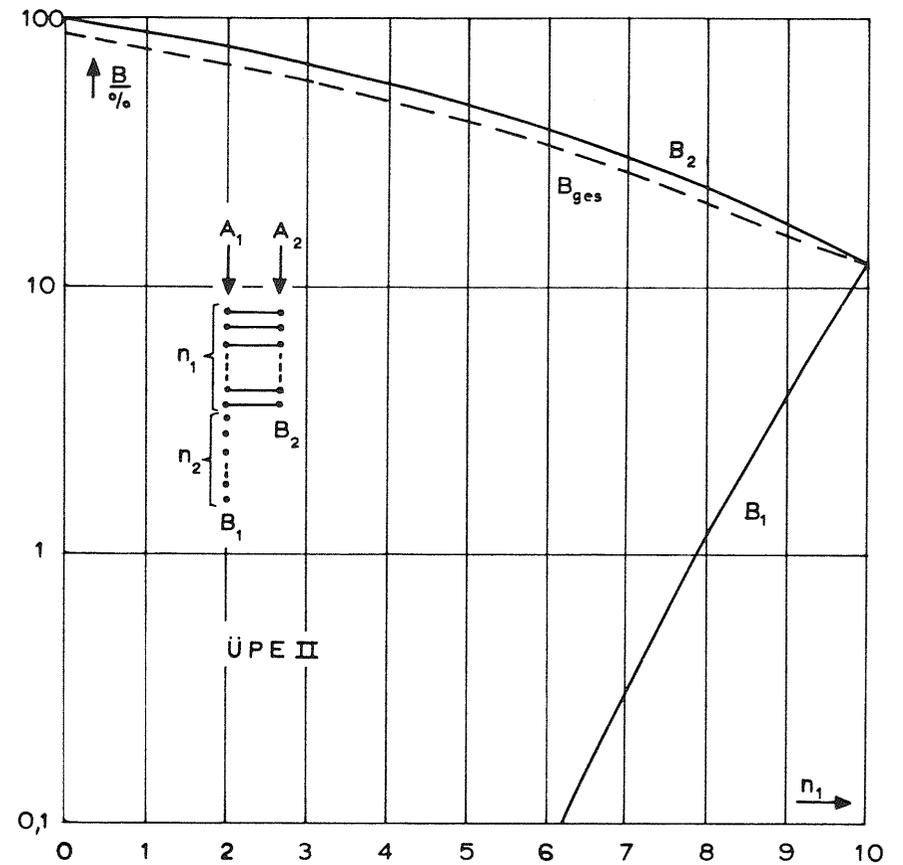


Abb. 8c. Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 bei ÜPE II in Abhängigkeit von der Leitungszahl n_1 mit $n_1+n_2 = 10$, $A_1 = 1$, $A_2 = 7$.

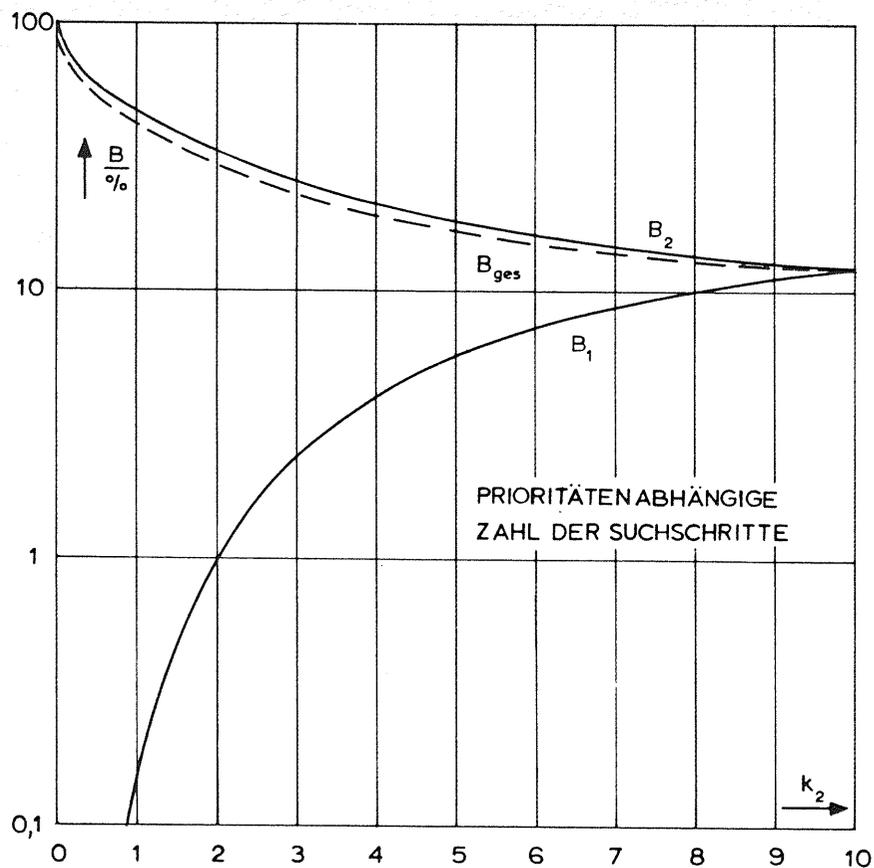


Abb. 8d. Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 beim System mit prioritätenabhängiger Zahl der Suchschritte in Abhängigkeit von der Erreichbarkeit k_2 mit $n_1+n_2 = 10$, $A_1 = 1$, $A_2 = 7$.

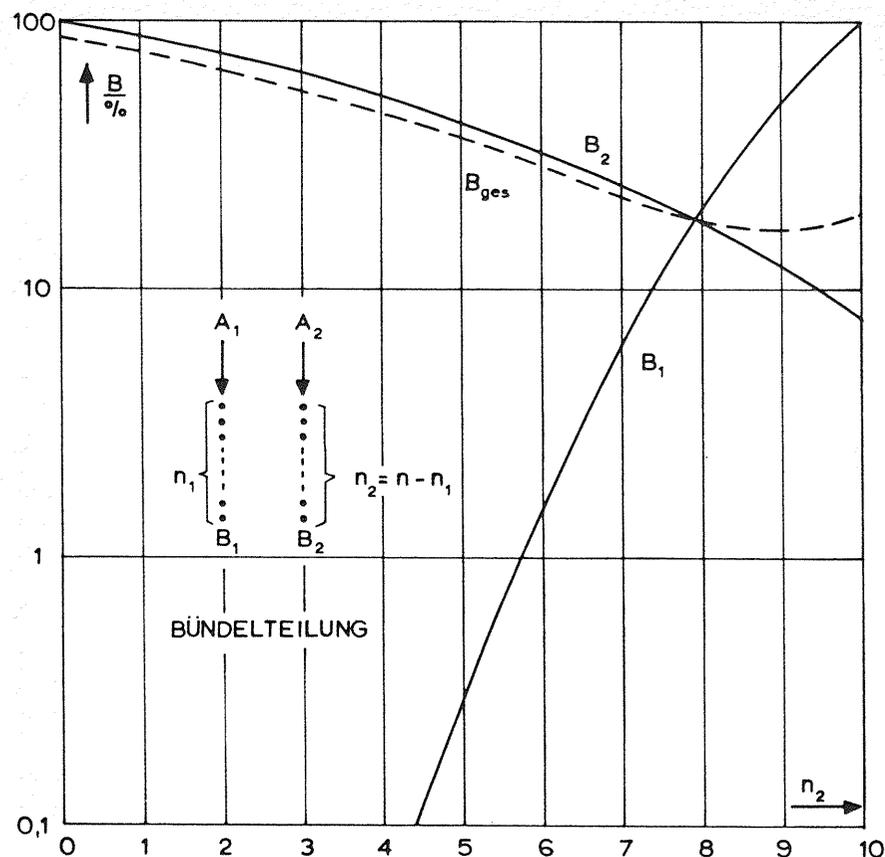


Abb. 8e. Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 bei der Bündelteilung in Abhängigkeit von der Leitungszahl n_2 mit $n_1+n_2 = 10$, $A_1 = 1$, $A_2 = 7$.

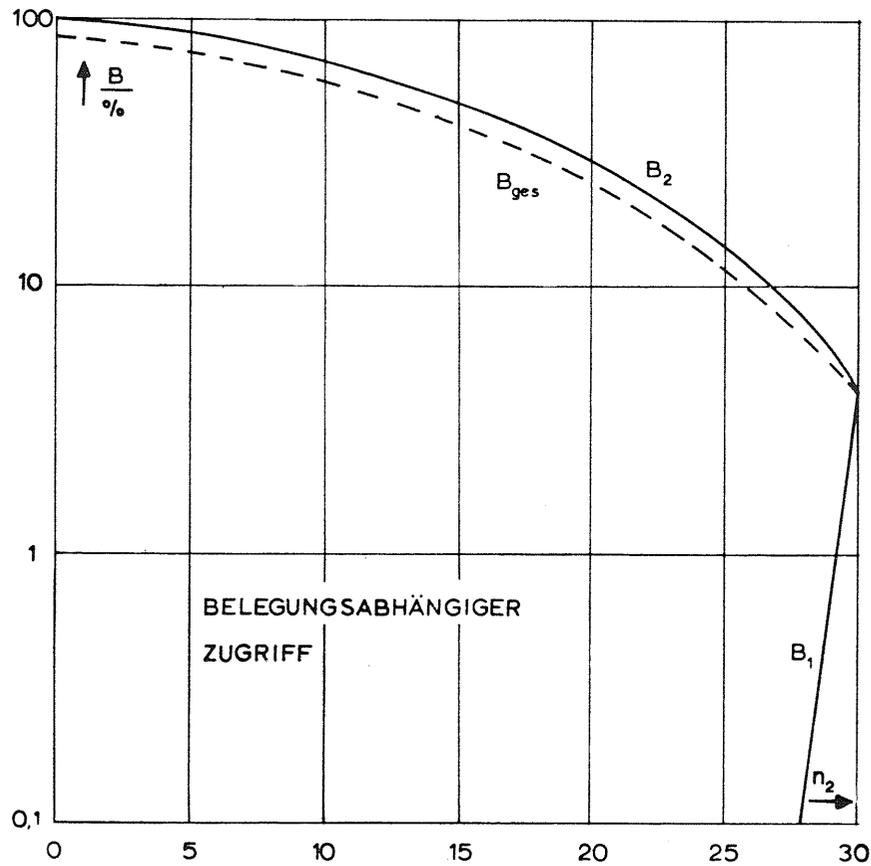


Abb. 9a. Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 bei belegungsabhängigem Zugriff in Abhängigkeit von der Leitungszahl n_2 mit $n_1+n_2 = 30$, $A_1 = 4$, $A_2 = 20$.

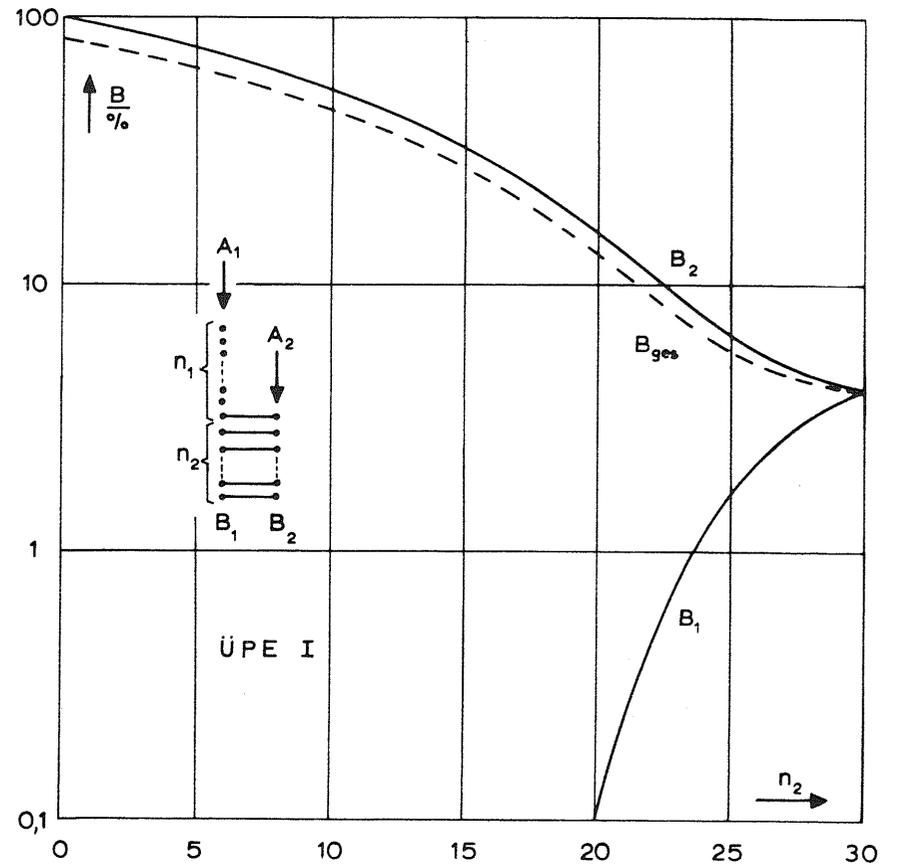


Abb. 9b. Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 bei ÜPE I in Abhängigkeit von der Leitungszahl n_2 mit $n_1+n_2 = 30$, $A_1 = 4$, $A_2 = 20$.

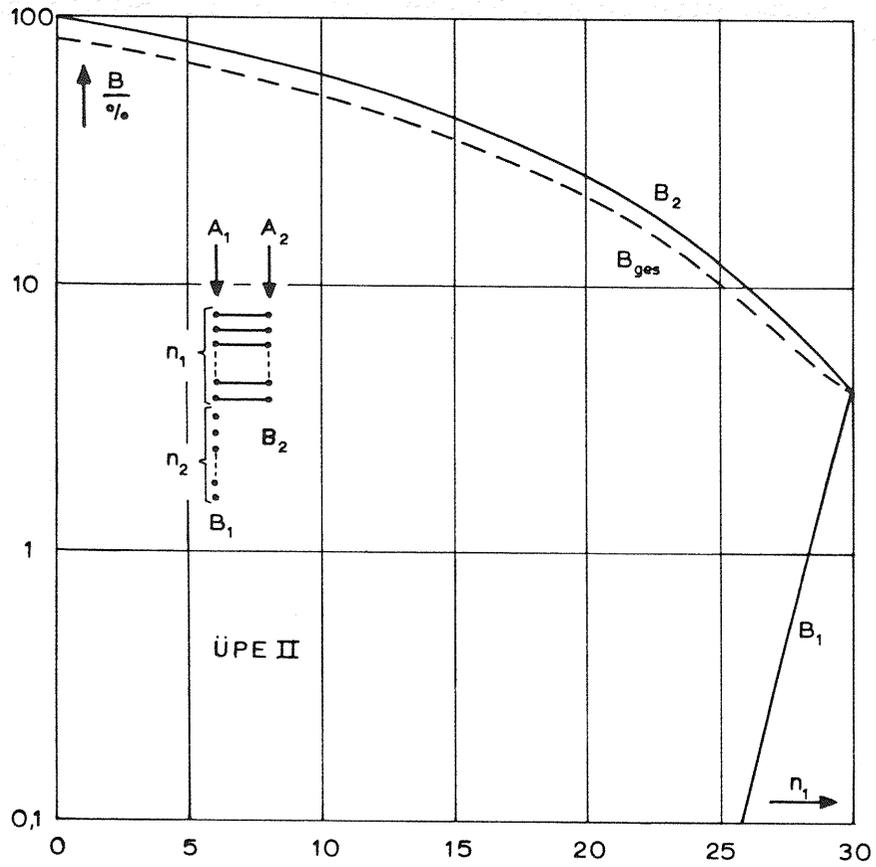


Abb. 9c. Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 bei ÜPE II in Abhängigkeit von der Leitungszahl n_1 mit $n_1+n_2 = 30$, $A_1 = 4$, $A_2 = 20$.

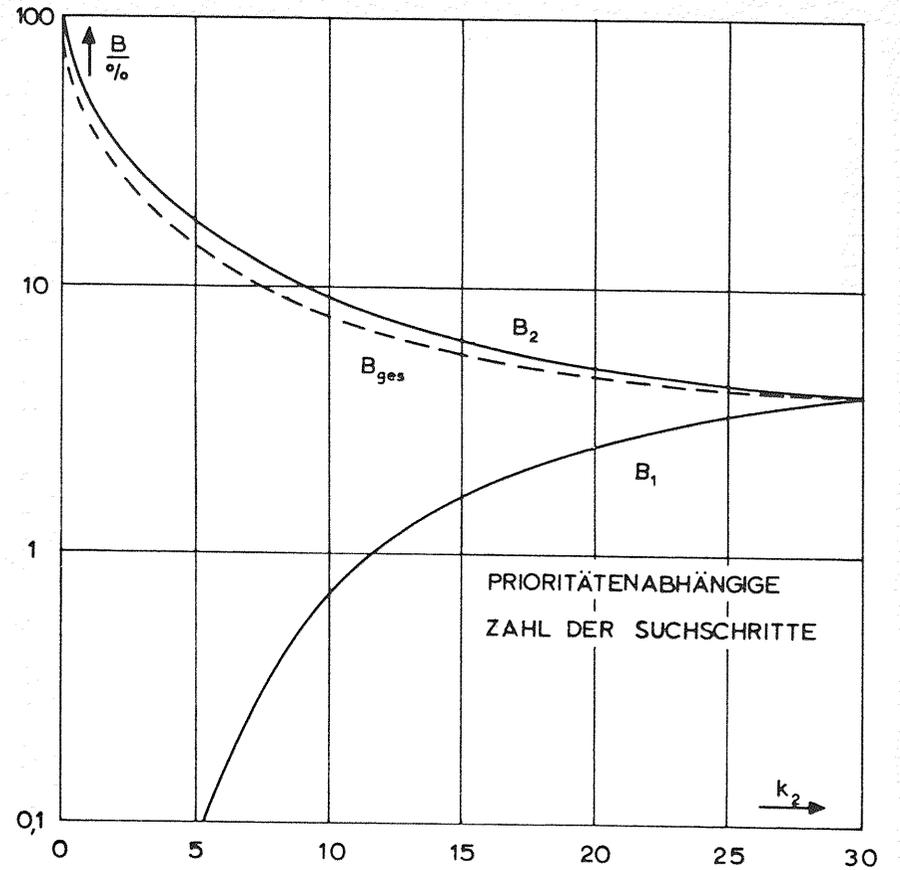


Abb. 9d. Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 beim System mit prioritätenabhängiger Zahl der Suchschritte in Abhängigkeit von der Erreichbarkeit k_2 mit $n_1+n_2 = 30$, $A_1 = 4$, $A_2 = 20$.

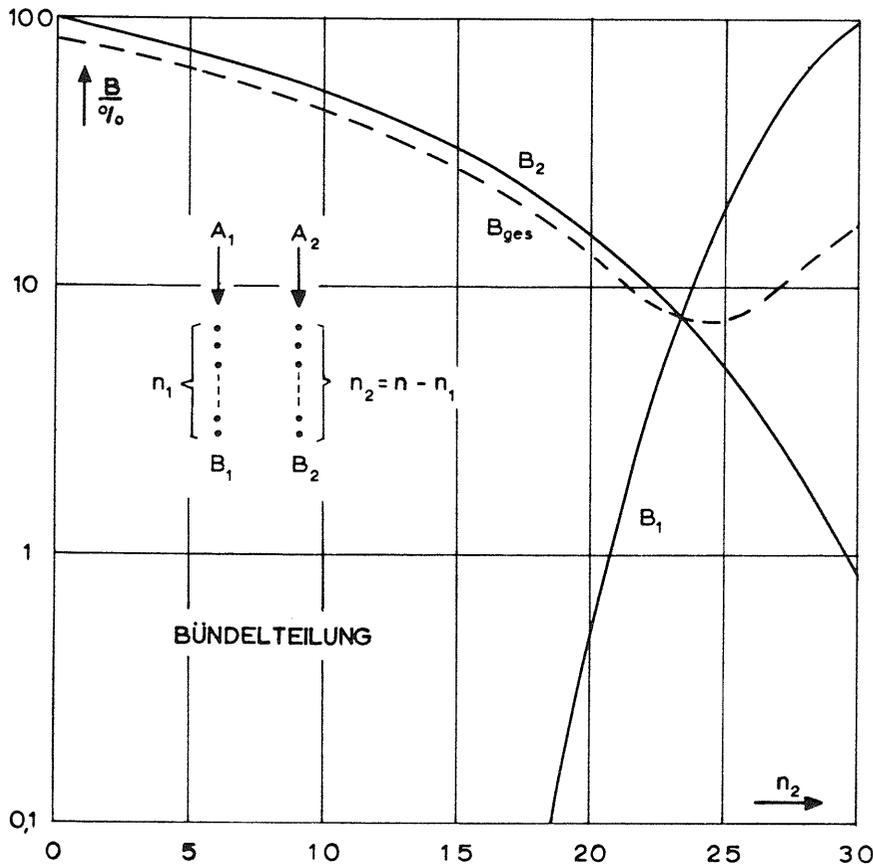


Abb. 9e. Die Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 bei der Bündelteilung in Abhängigkeit von der Leitungszahl n_2 mit $n_1 + n_2 = 30$, $A_1 = 4$, $A_2 = 20$.

System	δ_1 %	B_1 %	B_2 %	B_{ges} %	n_1 k_1	n_2 k_2	Ko. Pkte	
							Kl.1	2
Belegungs- abhängiger Zugriff	0,1	0,04	33,7	29,5	10	7	10	7
	0,2	0,04	33,7	29,5	10	7	10	7
	0,5	0,25	25,7	22,5	10	8	10	8
	1,0	0,25	25,7	22,5	10	8	10	8
	2,0	1,70	18,7	16,5	10	9	10	9
ÜPE I	0,1	0,05	47,4	41,5	6	4	10	4
	0,2	0,14	42,5	37,2	5	5	10	5
	0,5	0,14	42,5	37,2	5	5	10	5
	1,0	0,56	33,2	29,1	4	6	10	6
	2,0	1,76	25,3	22,3	3	7	10	7
ÜPE II	0,1	0,08	39,0	34,1	6	4	10	6
	0,2	0,08	39,0	34,1	6	4	10	6
	0,5	0,31	30,8	27,0	7	3	10	7
	1,0	0,31	30,8	27,0	7	3	10	7
	2,0	1,15	23,6	20,7	8	2	10	8
Prior.- abhängige Zahl der Suchschr.	0,1	0,00	100,0	87,5	10	0	10	0
	0,2	0,16	47,1	41,2	10	1	10	10
	0,5	0,16	47,1	41,2	10	1	10	10
	1,0	1,00	33,0	29,0	10	2	10	10
	2,0	1,00	33,0	29,0	10	2	10	10
Bündel- teilung	0,1	0,05	52,7	46,2	6	4	6	4
	0,2	0,05	52,7	46,2	6	4	6	4
	0,5	0,31	42,5	37,2	5	5	5	5
	1,0	0,31	42,5	37,2	5	5	5	5
	2,0	1,54	33,1	29,2	4	6	4	6
ohne Priori- täten	0,1	0,09	0,09	0,09	18	18	18	18
	0,2	0,09	0,09	0,09	18	18	18	18
	0,5	0,45	0,45	0,45	16	16	16	16
	1,0	0,91	0,91	0,91	15	15	15	15
	2,0	1,72	1,72	1,72	14	14	14	14

Tabelle 2 : Vergleich der Systeme mit nichtunterbrechenden Prioritäten. $A_1 = 1$, $A_2 = 7$, $n_1 + n_2 = 10$.

System	δ_1	B_1	B_2	B_{ges}	n_1	n_2	Ko. Pkte	
	%	%	%	%	k_1	k_2	Kl.1	2
Belegungs- abhängiger Zugriff	0,1	0,02	9,57	7,98	30	27	30	27
	0,2	0,12	7,63	6,37	30	28	30	28
	0,5	0,12	7,63	6,37	30	28	30	28
	1,0	0,69	5,88	5,02	30	29	30	29
ÜPE I	0,1	0,10	15,94	13,30	10	20	30	20
	0,2	0,10	15,94	13,30	10	20	30	20
	0,5	0,43	10,94	9,19	8	22	30	22
	1,0	0,75	9,01	7,63	7	23	30	23
ÜPE II	0,1	0,05	12,33	10,28	25	5	30	25
	0,2	0,13	10,22	8,54	26	4	30	26
	0,5	0,33	8,33	6,99	27	3	30	27
	1,0	0,81	6,67	5,69	28	2	30	28
Prior.- abhängige Zahl der Suchschr.	0,1	0,08	17,12	14,28	30	5	30	30
	0,2	0,15	14,57	12,18	30	6	30	30
	0,5	0,38	11,16	9,36	30	8	30	30
	1,0	0,89	8,28	7,06	30	11	30	30
Bündel- teilung	0,1	0,06	22,12	18,44	12	18	12	18
	0,2	0,19	18,89	15,77	11	19	11	19
	0,5	0,19	18,89	15,77	11	19	11	19
	1,0	0,53	15,89	13,33	10	20	10	20
ohne Priori- täten	0,1	0,07	0,07	0,07	40	40	40	40
	0,2	0,12	0,12	0,12	39	39	39	39
	0,5	0,49	0,49	0,49	36	36	36	36
	1,0	0,75	0,75	0,75	35	35	35	35

Tabelle 3 : Vergleich der Systeme mit nichtunterbrechenden Prioritäten. $A_1 = 4$, $A_2 = 20$, $n_1 + n_2 = 30$.

Man kann nun verschiedene Werte δ_1 vorschreiben und jeweils B_1 , B_2 und B_{ges} bestimmen. Der Wert für B_2 oder B_{ges} stellt dann ein Vergleichskriterium dar.

In Tabelle 2 sind die berechneten Strukturparameter und die sich ergebenden Verluste für $A_1 = 1$, $A_2 = 7$, $n = 10$ und in Tabelle 3 diese Werte für $A_1 = 4$, $A_2 = 20$, $n = 30$ eingetragen.

Es zeigt sich dabei, daß in jedem Fall das System mit belegungsabhängigem Zugriff den kleinsten Gesamtverlust B_{ges} zu realisieren gestattet. Dieser Vorteil muß aber durch einen beachtlichen Aufwand an Steuerung erkauft werden. ÜPE II besitzt zwar stets geringfügig höhere Gesamtverluste, sie zeichnet sich aber aus durch eine geringere Anzahl von Koppelpunkten für Klasse 2 und durch die Tatsache, daß sie keinerlei zusätzlichen Aufwand für die Steuerung der Koppelanordnung benötigt.

Daher sind diese beiden Systeme am geeignetesten für die Einführung von nichtunterbrechenden Prioritäten in Verlustsystemen, wenn auf eine minimale Anzahl von Abnehmerleitungen Wert gelegt wird.

Ist die Zahl der benötigten Koppelpunkte maßgebend, so kann aber auch die Bündelteilung nach Prioritätsklassen sinnvoll sein, wie an folgendem Beispiel gezeigt werden soll:

An eine Konzentradorstufe mit anschließender Richtungswahlstufe wird ein Verkehr angeboten, welcher sich in zwei Klassen aufteilt. Klasse 1 soll für ein Angebot $A_1 = 3$ einen Verlust $\delta_1 = 0,1\%$, Klasse 2 soll für ein Angebot $A_2 = 15$ einen Verlust $\delta_2 = 3,6\%$ nicht überschreiten. Die Zahl der Zubringerleitungen sei $q_1 = 60$, $q_2 = 240$.

Die anschließenden Richtungswahlstufen haben 10 Richtungen mit je 10 Koppelpunkten pro Richtung, also $k_{ges} = 100$.

In Tabelle 4 sind für das System mit prioritätenabhängigem Zugriff (1), für die ÜPE I (2) und II (3) sowie für die Bündelteilung (4) die berechneten Leitungszahlen, die Verluste und der Koppelpunktbedarf für die Konzentradorstufe angegeben.

Die Leitungszahl nach der Konzentradorstufe und damit die Zahl der notwendigen Gruppenwahlstufen hängt von dem verwendeten System ab. In der Spalte "Koppelpunktbedarf" ist daher noch

derjenige Mehrbedarf an Koppelpunkten berücksichtigt, der, verglichen mit dem System mit belegungsabhängigem Zugriff, durch zusätzliche Gruppenwahlstufen verursacht wird.

In der Zeile (5) sind zum Vergleich die Daten der Konzentrationstufe angegeben, wenn keine Prioritäten eingeführt werden.

	n_1	n_2	$\frac{B_1}{\%}$	$\frac{B_2}{\%}$	$\frac{B_{ges}}{\%}$	Koppelpunktbedarf
(1)	27	25	0,032	2,78	2,33	$27 \cdot 60 + 25 \cdot 240 = 7\ 620$
(2)	7	21	0,100	3,25	2,73	$28 \cdot 60 + 21 \cdot 240 + 100 = 6\ 820$
(3)	24	3	0,049	3,53	2,95	$27 \cdot 60 + 24 \cdot 240 = 7\ 380$
(4)	10	21	0,081	3,15	2,63	$10 \cdot 60 + 21 \cdot 240 + 400 = 6\ 040$
(5)	32	32	0,085	0,085	0,085	$32 \cdot 60 + 32 \cdot 240 + 500 = 10\ 100$

Tabelle 4 Beispiel für den Koppelpunktbedarf einer Konzentrationstufe für die verschiedenen Systeme mit nichtunterbrechenden Prioritäten.

3.8 Die näherungsweise Berechnung der Systeme ÜPE I und ÜPE II nach dem Streuwertverfahren

Für die Überlaufanordnungen ÜPE I und II existieren gute Näherungsverfahren zur Berechnung der Verluste bei vorgegebenen Angeboten und vorgegebener Struktur der Koppelanordnung, deren Grundlage das aus der Literatur bekannte Streuwertverfahren ist /14,15/. Die Anwendung dieses Verfahrens ist besonders dann sinnvoll, wenn entweder die Teilbündel der Koppelanordnungen unvollkommen erreichbar sind oder die angebotenen Ver-

kehre keine Zufallsverkehre sind /9,16,17,18,19/.

In den Abbn. 10a und 10b sind für die ÜPE I und II die nach dem Streuwertverfahren berechneten, zu den Abbn. 9b und 9c analogen Kurven aufgezeichnet. Die exakten Werte (+) sind zum Vergleich ebenso eingetragen. Man sieht, daß das Streuwertverfahren insbesondere für die interessierende ÜPE II eine gute Näherung zur Berechnung der Verluste darstellt.

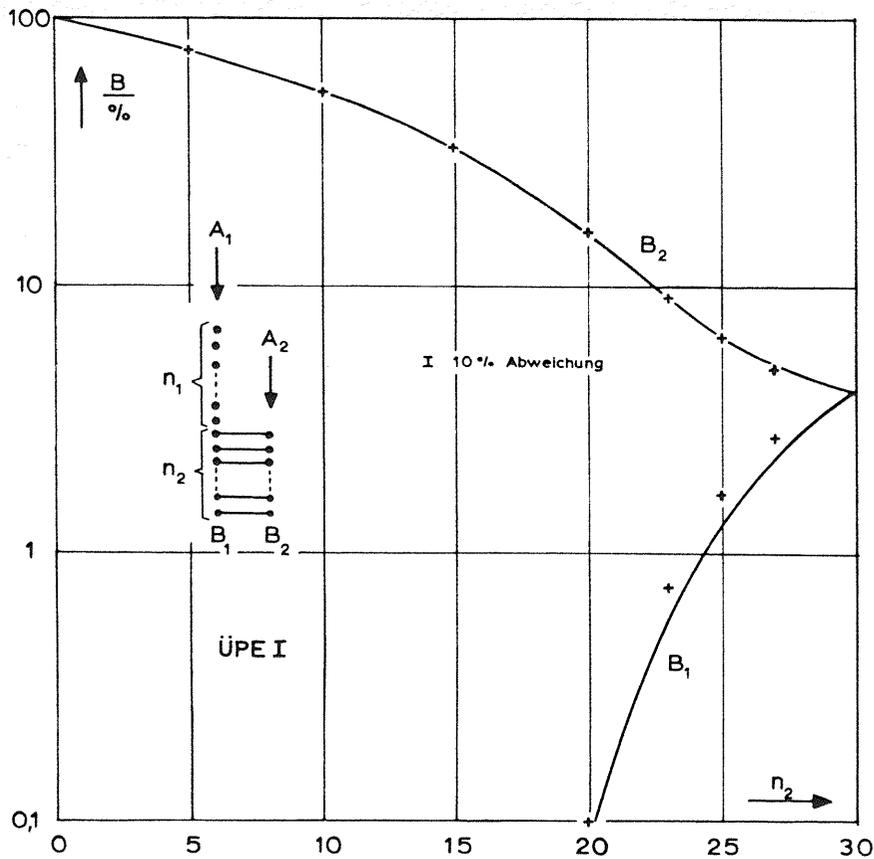


Abb. 10a. Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 bei ÜPE I nach dem Streuwertverfahren (ausgezogene Kurve) in Abhängigkeit von n_2 mit $n_1+n_2 = 30$, $A_1 = 4$, $A_2 = 20$. Die Funktionswerte der exakten Lösung (+) sind zum Vergleich ebenfalls eingetragen.

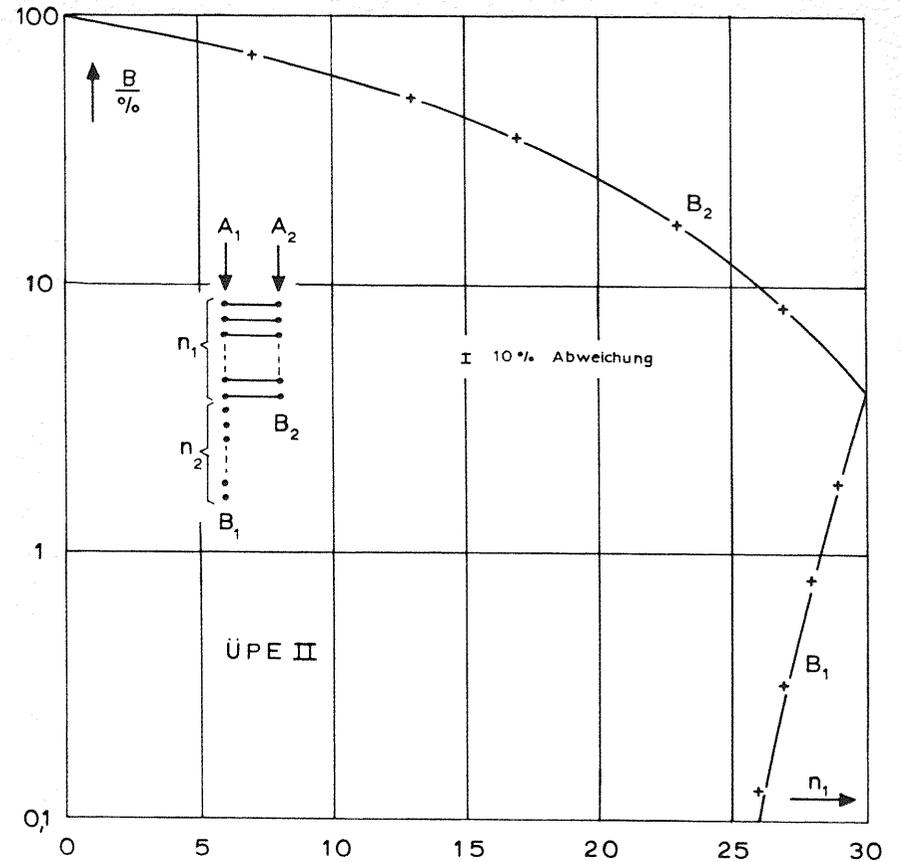


Abb. 10b. Die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten B_1 und B_2 bei ÜPE II nach dem Streuwertverfahren (ausgezogene Kurve) in Abhängigkeit von n_1 mit $n_1+n_2 = 30$, $A_1 = 4$, $A_2 = 20$. Die Funktionswerte der exakten Lösung (+) sind zum Vergleich ebenfalls eingetragen.

4. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt Vermittlungssysteme, in denen allen Rufen eine bestimmte Priorität zugeordnet wird. Es werden zwei Möglichkeiten untersucht, diese Prioritäten zu realisieren:

- a) Ein Ruf, der ein vollbelegtes Bündel antrifft, kann eine Belegung einer niedrigeren Prioritätsklasse unterbrechen, so daß diese zwangsweise beendet wird; der eingetroffene Ruf der höheren Prioritätsklasse belegt die freigewordene Leitung.
- b) Jede Prioritätsklasse kann eine gewisse Zahl von Abnehmerleitungen absuchen. Dabei nimmt mit zunehmender Dringlichkeit die Zahl der absuchbaren Leitungen zu. Die Priorität wirkt sich dann in unterschiedlichen Verlustwahrscheinlichkeiten aus; es werden jedoch keine Belegungen unterbrochen.

Es werden für ein System mit n vollkommen erreichbaren Leitungen und unterbrechenden Prioritäten für eine beliebige Prioritätsklasse die Wahrscheinlichkeiten für Verlust und Unterbrechung sowie die Belastung Y angegeben.

Für die Unterbrechungsdisziplinen "der zuletzt eingetroffene Ruf wird zuerst unterbrochen" und "der zuerst eingetroffene Ruf wird zuerst unterbrochen" wurden die Belegungsdauerverteilungen für alle Rufe einer Klasse bestimmt. Aus dieser Verteilung werden die Belegungsdauerverteilungen bezogen auf diejenigen Belegungen, die erfolgreich endeten bzw. auf diejenigen, die unterbrochen wurden, berechnet.

Für die Disziplin "die Auswahl des zu unterbrechenden Rufes erfolgt zufällig" wird ein Lösungsweg zur numerischen Berechnung dieser drei Belegungsdauerverteilungen angegeben.

Es zeigt sich, daß bei allen drei Disziplinen keine der Belegungsdauerverteilungen eine negativ-exponentielle Verteilung ist, und auch die Mittelwerte dieser Verteilungen ungleich derjenigen sind, welche man im System ohne Unterbrechungen erhalten würde.

Zur Realisierung von nichtunterbrechenden Prioritäten werden

fünf verschiedene Möglichkeiten vorgeschlagen, von denen sich eine Überlaufanordnung und ein System mit belegungsabhängigem Zugriff als für die Praxis geeignet erweisen. Aber auch eine Bündelaufteilung nach Prioritätsklassen kann in bestimmten Fällen, bei denen ein minimaler Koppelpunktbedarf angestrebt wird, praktische Bedeutung haben.

Für diese Systeme werden Verfahren angegeben, welche es erlauben, für vorgegebene Angebote und vorgegebene Verluste die Struktur des Systems mit einer minimalen Leitungszahl zu berechnen.

ANHANG

A1. Lösung der Differenzgleichung für $d_{0,v}$

Aus Gl. (30) folgt für $\mu = 0$:

$$d_{0,v+2} - (v+2+A_1)d_{0,v+1} + (v+1)A_1d_{0,v} = 0$$

Durch teilweises Ausmultiplizieren des mittleren Termes gewinnt man

$$[d_{0,v+2} - (v+2)d_{0,v+1}] = A_1[d_{0,v+1} - (v+1)d_{0,v}]$$

Setzt man den linken Klammerausdruck gleich $f_{0,v+1}$, so stellt der rechte Klammerausdruck $f_{0,v}$ dar und es verbleibt auf diese Weise eine homogene Differenzgleichung für $f_{0,v}$ von nur noch erster Ordnung:

$$f_{0,v+1} = A_1 f_{0,v} \quad (A1.1) \quad \text{mit} \quad f_{0,v} = d_{0,v+1} - (v+1)d_{0,v} \quad (A1.2)$$

Die Lösung dieser Differenzgleichung ist aber sofort anzugeben:

$$f_{0,v} = f_{0,0} \cdot A_1^v$$

Mit $f_{0,0} = d_{0,1} - d_{0,0} = 1 + A_1 - 1 = A_1$ folgt aber

$$f_{0,v} = A_1^{v+1} \quad (A1.3)$$

Setzt man Gl. (A1.3) in (A1.2) ein, so erhält man jetzt eine inhomogene Differenzgleichung für $d_{0,v}$, welche wiederum von erster Ordnung ist:

$$d_{0,v+1} - (v+1)d_{0,v} = A_1^{v+1} \quad (A1.4)$$

Diese inhomogene Differenzgleichung kann nun in zwei Schritten gelöst werden. Zunächst soll die homogene Differenzgleichung

$$d_{0,v+1} - (v+1)d_{0,v} = 0$$

gelöst werden. Diese Lösung ist unmittelbar anzugeben:

$$d_{0,v} = v!$$

Zur Lösung der inhomogenen Differenzgleichung setzt man jetzt

$$d_{0,v} = h_{0,v} \cdot v! \quad (A1.5)$$

und führt diesen Ausdruck in Gl. (A1.4) ein:

$$h_{0,v+1} \cdot (v+1)! - (v+1)h_{0,v} \cdot v! = A_1^{v+1}$$

$$h_{0,v+1} - h_{0,v} = \frac{A_1^{v+1}}{(v+1)!}$$

Hieraus folgt wiederum:

$$h_{0,v} = \sum_{\lambda=0}^v \frac{A_1^\lambda}{\lambda!} \quad \text{mit} \quad h_{0,0} = 0! \cdot d_{0,0} = 1$$

und weiterhin mit Gl. (A1.5)

$$d_{0,v} = v! \sum_{\lambda=0}^v \frac{A_1^\lambda}{\lambda!} \quad (A1.6)$$

A.2 Ableitung der Rekursionsformel für $d_{\mu,v}$ für $\mu > 0$

Es gilt nach (30):

$$d_{\mu,v+2} - (v+2+A_1)d_{\mu,v+1} + (v+1)A_1d_{\mu,v} = d_{\mu-1,v+1} \quad (30)$$

Es soll nun $d_{\mu-1,v+1}$ als eine bekannte - in einem vorhergehenden Schritt berechnete - Funktion betrachtet werden. Dann ist es aber möglich, eine Rekursionsformel für $d_{\mu,v}$ anzugeben. Mit der Kenntnis von $d_{0,v}$ nach Gl. (A1.6) kann damit jedes $d_{\mu,v}$ berechnet werden.

Gleichung (30) läßt sich nun wiederum umformen:

$$[d_{\mu,v+2} - (v+2)d_{\mu,v+1}] - A_1[d_{\mu,v+1} - (v+1)d_{\mu,v}] = d_{\mu-1,v+1} \quad (A2.1)$$

Es soll wieder

$$d_{\mu, \nu+1} - (\nu+1)d_{\mu, \nu} = f_{\mu, \nu} \quad (\text{A2.2})$$

gesetzt und zunächst die homogene Differenzgleichung

$$f_{\mu, \nu+1} - A_1 f_{\mu, \nu} = 0$$

gelöst werden.

Diese Lösung ist aber unmittelbar anzugeben:

$$f_{\mu, \nu} = A_1^\nu$$

Zur Lösung der inhomogenen Differenzgleichung erweist sich folgender Ansatz als geeignet:

$$f_{\mu, \nu} = g_{\mu, \nu} \cdot A_1^\nu \quad (\text{A2.3})$$

Setzt man nun Gl. (A2.3) in die aus Gl. (A2.1) folgende inhomogene Differenzgleichung

$$f_{\mu, \nu+1} - A_1 f_{\mu, \nu} = d_{\mu-1, \nu+1}$$

ein, so ergibt sich:

$$g_{\mu, \nu+1} \cdot A_1^{\nu+1} - A_1^{\nu+1} \cdot g_{\mu, \nu} = d_{\mu-1, \nu+1}$$

$$g_{\mu, \nu+1} - g_{\mu, \nu} = \frac{d_{\mu-1, \nu+1}}{A_1^{\nu+1}} \quad (\text{A2.4})$$

Aus den Gln. (A2.3) und (A2.2) folgt nun:

$$g_{\mu, \nu} = \frac{f_{\mu, \nu}}{A_1^\nu} = \frac{d_{\mu, \nu+1} - (\nu+1)d_{\mu, \nu}}{A_1^\nu}$$

Mit den Randbedingungen nach Gl. (29) gilt

$$g_{\mu, \nu} = \frac{1}{A_1^\nu} \quad \text{für } \nu = \mu - 1$$

und

$$g_{\mu, \nu} = 0 \quad \text{für } \nu \leq \mu - 2$$

Damit ist also der Term $g_{\mu, \mu-1}$ der erste Term, welcher bei wachsendem ν von Null verschieden ist und wird daher zweckmäßigerweise als Anfangswert von $g_{\mu, \nu}$ in Gl. (A2.4) verwendet. Damit kann nun die Lösung dieser Gleichung angegeben werden

$$g_{\mu, \nu} = \sum_{\lambda=\mu}^{\nu} \frac{d_{\mu-1, \lambda}}{A_1^\lambda} + g_{\mu, \mu-1}$$

Da nun $g_{\mu, \mu-1} = \frac{1}{A_1^{\mu-1}}$ ist, läßt sich dieser Term in die Summation einbeziehen.

$$g_{\mu, \nu} = \sum_{\lambda=\mu-1}^{\nu} \frac{d_{\mu-1, \lambda}}{A_1^\lambda}$$

Daraus folgt mit Gl. (A2.3)

$$f_{\mu, \nu} = A_1^\nu \cdot \sum_{\lambda=\mu-1}^{\nu} \frac{d_{\mu-1, \lambda}}{A_1^\lambda} \quad (\text{A2.5})$$

Gleichung (A2.5) eingesetzt in Gl. (A2.2) liefert:

$$d_{\mu, \nu+1} - (\nu+1)d_{\mu, \nu} = A_1^\nu \cdot \sum_{\lambda=\mu-1}^{\nu} \frac{d_{\mu-1, \lambda}}{A_1^\lambda} \quad (\text{A2.6})$$

Die zu Gl. (A2.6) gehörende homogene Differenzgleichung

$$d_{\mu, \nu+1} - (\nu+1)d_{\mu, \nu} = 0$$

besitzt die Lösung

$$d_{\mu, \nu} = \nu!$$

Es soll wiederum

$$d_{\mu, \nu} = h_{\mu, \nu} \cdot \nu! \quad (\text{A2.7})$$

gesetzt werden und in Gl. (A2.6) eingeführt werden

$$h_{\mu, \nu+1} \cdot (\nu+1)! - (\nu+1) \cdot h_{\mu, \nu} \cdot \nu! = A_1^\nu \sum_{\lambda=\mu-1}^{\nu} \frac{d_{\mu-1, \lambda}}{A_1^\lambda}$$

$$h_{\mu, \nu+1} - h_{\mu, \nu} = \frac{A_1^\nu}{(\nu+1)!} \cdot \sum_{\lambda=\mu-1}^{\nu} \frac{d_{\mu-1, \lambda}}{A_1^\lambda}$$

Aus den Gln. (29) und (A2.7) folgt:

$$h_{\mu, \nu} = 0 \quad \text{für } \nu \leq \mu-1 \quad \text{und} \quad h_{\mu, \nu} = \frac{1}{\mu!} \quad \text{für } \nu = \mu;$$

somit wird

$$h_{\mu, \nu} = \sum_{k=\mu}^{\nu-1} \frac{A_1^k}{(k+1)!} \cdot \sum_{\lambda=\mu-1}^k \frac{d_{\mu-1, \lambda}}{A_1^\lambda} + h_{\mu, \mu}$$

Der Term $h_{\mu, \mu} = \frac{1}{\mu!}$ kann für $\kappa = \mu-1$ in die Summation einbezogen werden. Dann folgt mit Gl. (A2.7)

$$d_{\mu, \nu} = \nu! \sum_{k=\mu-1}^{\nu-1} \frac{A_1^k}{(k+1)!} \sum_{\lambda=\mu-1}^k \frac{d_{\mu-1, \lambda}}{A_1^\lambda} \quad (\text{A2.8})$$

A.3 Beweis, daß alle Nullstellen des Polynoms $D_n(s)$ negativ-reell und einfach sind

Aus Gl. (34) folgt zunächst, daß alle Koeffizienten $d_{\mu, n}$ des Polynoms D_n positiv sind. Daraus folgt aber unmittelbar, daß das Polynom D_n keine positive Nullstelle besitzen kann, und damit für $s > 0$ stets auch $D_n > 0$ ist.

Für den Beweis, daß die Nullstellen von D_n weder komplex noch mehrfach sind, wird zunächst folgende Annahme getroffen:

a) Annahme:

Die Polynome D_ν und $D_{\nu+1}$ haben nur negativ-reelle, einfache Nullstellen. Diese sollen so gelegen sein, daß jeweils zwischen zwei benachbarten Nullstellen $s_{\mu, \nu+1}$ und $s_{\mu+1, \nu+1}$ (für $\mu = 1, 2, \dots, \nu$) des Polynoms $D_{\nu+1}$ genau eine Nullstelle $s_{\mu, \nu}$

des Polynoms D_ν liegt. Es soll also gelten:

$$s_{\mu+1, \nu+1} < s_{\mu, \nu} < s_{\mu, \nu+1} \quad \mu = 1, 2, \dots, \nu$$

b) Behauptung:

Unter dieser Annahme hat dann $D_{\nu+2}$ auch nur negativ-reelle Nullstellen, wobei diese wieder jeweils zwischen zwei benachbarten Nullstellen genau eine Nullstelle des Polynoms $D_{\nu+1}$ einschließen.

$$s_{\mu+1, \nu+2} < s_{\mu, \nu+1} < s_{\mu, \nu+2} \quad \mu = 1, 2, \dots, \nu+1$$

c) Beweis:

Gleichung (26b) lautete:

$$D_{\nu+2} = (s + \nu + 2 + A_1) D_{\nu+1} - (\nu+1) \cdot A_1 \cdot D_\nu$$

Bei denjenigen Funktionswerten für s , für welche $D_{\nu+1} = 0$ wird, folgt aus Gl. (26b) :

$$D_{\nu+2} = -A_1 (\nu+1) D_\nu \Big|_{s=s_{\mu, \nu+1}} \quad \mu = 1, 2, \dots, \nu+1$$

und daraus ergibt sich:

$$\text{sign } D_{\nu+2}(s_{\mu, \nu+1}) = -\text{sign } D_\nu(s_{\mu, \nu+1}) \quad (\text{A3.1})$$

Weiterhin folgt aus $d_{\mu, \nu} > 0$, daß $D_\nu(s \geq 0) > 0$ ist. (A3.2)

Außerdem ist nach Gl. (31) $d_{\nu, \nu} = 1$, also sind für $s \rightarrow -\infty$ gerade Polynome positiv, ungerade negativ. (A3.3)

Das Polynom D_ν hat unter der getroffenen Annahme zwischen jeder Nullstelle von $D_{\nu+1}$ genau eine Nullstelle; da diese aber nach Voraussetzung alle einfache Nullstellen sind, kann eine Nullstelle immer nur ein Schnittpunkt, nie aber ein Berührungspunkt der Polynome mit der s -Achse sein. Daher wechselt das Vorzeichen der Polynome $D_\nu, D_{\nu+1}$ nach jeder Nullstelle $s_{\mu, \nu}$ bzw. $s_{\mu, \nu+1}$.

Damit folgt aus Gl. (A3.1), daß an den $\nu+1$ Nullstellen des Polynoms $D_{\nu+1}$ das Polynom $D_{\nu+2}$ im Vorzeichen abwechselnde

von Null verschiedene Funktionswerte besitzt. Daraus folgt nun, daß das Polynom $D_{\nu+2}$ jeweils zwischen zwei benachbarten Nullstellen des Polynoms $D_{\nu+1}$ mindestens einen Schnittpunkt mit der s -Achse aufweist und somit zwischen den $\nu+1$ Nullstellen von $D_{\nu+1}$ mindestens ν reelle Nullstellen von $D_{\nu+2}$ liegen.

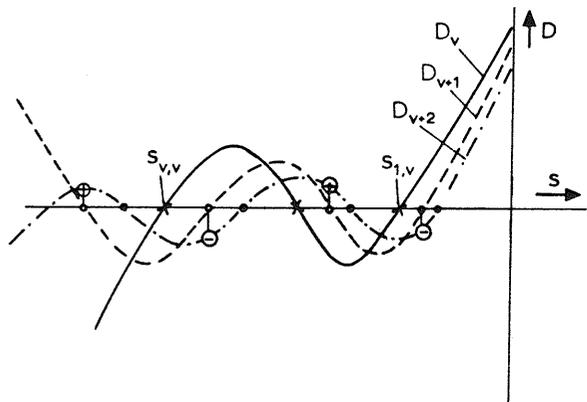


Abb. A1. Zum Beweis A3.

Es sei $s_{1,\nu}$ die am weitesten rechts liegende Nullstelle von D_ν (Abb. A1). Mit $s > s_{1,\nu}$ ist $D_\nu > 0$ wegen (A3.2). Andererseits muß nach Voraussetzung rechts von $s_{1,\nu}$ noch eine Nullstelle $s_{1,\nu+1}$ des Polynoms $D_{\nu+1}$ liegen, da sich alle Nullstellen $s_{\mu,\nu}$ zwischen jeweils zwei Nullstellen von $D_{\nu+1}$ befinden sollen. An dieser Nullstelle ist aber $D_\nu > 0$ und somit muß wegen (A3.1) $D_{\nu+2} < 0$ sein. Da nun für positive Werte von s auch das Polynom $D_{\nu+2}$ positiv ist, folgt, daß zwischen $s_{1,\nu+1}$ und $s = 0$ mindestens eine reelle Nullstelle von $D_{\nu+2}$ liegen muß.

Es sei ferner $s_{\nu,\nu}$ die am weitesten links liegende Nullstelle von D_ν . Für $s < s_{\nu,\nu}$ ist D_ν negativ (positiv), wenn der Grad von D_ν ungerade (gerade) ist. Andererseits muß voraussetzungsgemäß auch hier wieder links von $s_{\nu,\nu}$ noch eine Nullstelle $s_{\nu+1,\nu+1}$ des Polynoms $D_{\nu+1}$ liegen. An dieser Stelle ist $D_{\nu+2}$ nach (A2.1) positiv (negativ), wenn D_ν ungerade

(gerade) ist. Wenn aber D_ν ungerade (gerade) ist, dann ist es auch das Polynom $D_{\nu+2}$. Das bedeutet aber, daß an dieser Nullstelle $s_{\nu+1,\nu+1}$ das Polynom $D_{\nu+2}$ stets das entgegengesetzte Vorzeichen wie der Wert dieses Polynomes für $s \rightarrow -\infty$ besitzt. Somit muß zwischen $s_{\nu+1,\nu+1}$ und $s \rightarrow -\infty$ noch mindestens eine Nullstelle des Polynoms $D_{\nu+2}$ liegen.

Die Bilanz der Nullstellen ergibt aber, da das Polynom $D_{\nu+2}$ vom $\nu+2$ -ten Grade ist und somit genau $\nu+2$ Nullstellen besitzt, daß zwischen den $\nu+1$ Nullstellen des Polynoms $D_{\nu+1}$ genau ν einfache, reelle Nullstellen des Polynoms $D_{\nu+2}$ liegen und daß dieses Polynom bei $-\infty < s < s_{\nu+1,\nu+1}$ und $s_{1,\nu} < s < 0$ jeweils genau eine einfache, reelle Nullstelle besitzt.

Damit liegen nun aber die Nullstellen von $D_{\nu+2}$ so, daß diese jeweils ihrerseits genau eine Nullstelle des Polynoms $D_{\nu+1}$ einschließen.

Somit gelten die für D_ν und $D_{\nu+1}$ getroffenen Annahmen auch für $D_{\nu+1}$ und $D_{\nu+2}$; sie gelten damit für beliebiges ν , wenn sie einmal für zwei vorhergehende und aufeinanderfolgende Polynome D_λ und $D_{\lambda+1}$ mit $\lambda+1 < \nu$ gegolten haben.

Zur vollständigen Beweisführung bleibt nur noch zu zeigen, daß für $\lambda = 1$ die getroffenen Annahmen gültig sind; dann ist bewiesen, daß ein beliebiges Polynom $D_n(s)$ nur negativ-reelle und einfache Nullstellen besitzt.

Aus Gl. (25) folgt:

$$D_1 = s + 1 + A_1$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} s+1+A_1 & -A_1 \\ -1 & s+2+A_1 \end{vmatrix} = s^2 + s(3+2A_1) + 2+2A_1+A_1^2$$

$$s_{1,1} = -(1+A_1)$$

$$s_{1,2} = -(1,5+A_1) + \sqrt{0,25+A_1}$$

$$s_{2,2} = -(1,5+A_1) - \sqrt{0,25+A_1}$$

Für $A_1 > 0$ gilt:

$$-(1,5+A_1) - \sqrt{0,25+A_1} < -(1+A_1) < -(1,5+A_1) + \sqrt{0,25+A_1}$$

(Der Fall $A_1 = 0$ ist trivial und braucht daher nicht gesondert behandelt werden).

Also gilt

$$s_{2,2} < s_{1,1} < s_{1,2}$$

und damit allgemein

$$s_{\mu,n} < s_{\mu-1,n-1} < s_{\mu-1,n} \quad \mu=2,3..n$$

Damit ist nun bewiesen, daß alle Nullstellen des betrachteten Polynoms $D_n(s)$ negativ-reell und einfach sind.

A4. Ableitung der Koeffizienten $c_{\mu,v}$

In diesem Abschnitt soll die inhomogene, partielle Differenzgleichung (38) gelöst werden.

$$-v \cdot c_{\mu,v} + (v+1+A_1)c_{\mu,v+1} - A_1 c_{\mu,v+2} = d_{\mu,n} - c_{\mu-1,v+1} \quad (A4.1)$$

Die Randbedingungen ergeben sich nach (38a).

Beginnt man die Auflösung von (A4.1) zunächst für $\mu = 0$, so verbleibt für diesen Fall nur noch eine gewöhnliche Differenzgleichung zu lösen.

$$[A_1 c_{0,v+1} - v c_{0,v}] - [A_1 c_{0,v+2} - (v+1)c_{0,v+1}] = d_{0,n} \quad (A4.2)$$

Mit

$$f_{0,v} = A_1 \cdot c_{0,v+1} - v c_{0,v} \quad (A4.3)$$

erhält man für $f_{0,v}$ eine Differenzgleichung von nur noch erster Ordnung, deren Lösung unmittelbar anzugeben ist:

$$f_{0,v+1} - f_{0,v} = -d_{0,n}$$

$$f_{0,v} = f_{0,0} + v \cdot d_{0,n}$$

Dabei ist

$$f_{0,0} = A_1 \cdot c_{0,1}$$

nach den Gln. (A4.3) und (38a). Damit ergibt sich nun

$$f_{0,v} = A_1 c_{0,1} + v \cdot d_{0,n} \quad (A4.4)$$

Da Gleichung (A4.2) eine Differenzgleichung zweiter Ordnung darstellt, sind zwei Randbedingungen zur vollständigen Bestimmung von $c_{0,v}$ notwendig. Es werden daher zunächst die Randwerte $c_{0,0}$ und $c_{0,1}$ benötigt, wobei aber $c_{0,1}$ nicht bekannt ist. Dieser letztere Wert muß daher formal als bekannte Größe angesehen werden und kann dann nach gefundener Lösung durch den Randwert $c_{0,n+1} = 0$ festgelegt werden.

Setzt man (A4.4) in (A4.3) ein, so ergibt sich:

$$A_1 c_{0,v+1} - v c_{0,v} = A_1 c_{0,1} + v d_{0,n} \quad (A4.5)$$

Zunächst soll die homogene Differenzgleichung

$$A_1 c_{0,v+1} - v c_{0,v} = 0$$

gelöst werden. Diese Lösung lautet:

$$c_{0,v} = \frac{(v-1)!}{A_1^{v-1}}$$

Es soll nun zur Lösung der inhomogenen Differenzgleichung

$$c_{0,v} = b_{0,v} \cdot \frac{(v-1)!}{A_1^{v-1}} \quad (A4.6)$$

gesetzt werden. Mit diesem Ansatz geht man in Gl. (A4.5) ein

$$b_{0,v+1} \cdot \frac{v! A_1}{A_1^v} - b_{0,v} \cdot \frac{v \cdot (v-1)!}{A_1^{v-1}} = A_1 c_{0,1} - v d_{0,n}$$

$$b_{0,\nu+1} - b_{0,\nu} = \frac{A_1^{\nu-1}}{\nu!} [A_1 c_{0,1} - \nu d_{0,n}] \quad (A4.7)$$

Als Randwert findet man mittels Gl. (A4.5)

$$c_{0,1} = b_{0,1} \cdot \frac{0!}{A_1^0} \quad b_{0,1} = c_{0,1}$$

Die Lösung von Gl. (A4.7) lautet nun

$$b_{0,\nu} = c_{0,1} + \sum_{\lambda=1}^{\nu-1} \frac{A_1^{\lambda-1}}{\lambda!} (A_1 c_{0,1} - \lambda d_{0,n})$$

und da für $\lambda = 0$

$$\frac{A_1^{\lambda-1}}{\lambda!} (A_1 c_{0,1} - \lambda d_{0,n}) = c_{0,1}$$

ist, folgt

$$b_{0,\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{A_1^{\lambda-1}}{\lambda!} (A_1 c_{0,1} - \lambda d_{0,n})$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Lösung für $c_{0,\nu}$

$$c_{0,\nu} = \frac{(\nu-1)!}{A_1^{\nu-1}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{A_1^{\lambda-1}}{\lambda!} (A_1 c_{0,1} - \lambda d_{0,n}) \quad (A4.8)$$

Es ist jetzt noch $c_{0,1}$ zu bestimmen. Dazu muß zunächst $c_{0,n+1}$ ermittelt werden

$$c_{0,n+1} = \frac{n!}{A_1^n} \cdot \sum_{\lambda=0}^n \frac{A_1^{\lambda-1}}{\lambda!} (A_1 c_{0,1} - \lambda d_{0,n}) = 0$$

$$A_1 c_{0,1} \cdot \sum_{\lambda=0}^n \frac{A_1^{\lambda-1}}{\lambda!} = \sum_{\lambda=0}^n \frac{A_1^{\lambda-1}}{\lambda!} \cdot \lambda \cdot d_{0,n} = d_{0,n} \sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{A_1^{\lambda}}{\lambda!}$$

$$\begin{aligned} A_1 c_{0,1} &= \frac{\sum_{\lambda=0}^{n-1} \frac{A_1^{\lambda}}{\lambda!}}{\sum_{\lambda=0}^n \frac{A_1^{\lambda-1}}{\lambda!}} \cdot d_{0,n} = A_1 \left\{ 1 - \frac{\frac{A_1^n}{n!}}{\sum_{\lambda=0}^n \frac{A_1^{\lambda}}{\lambda!}} \right\} d_{0,n} \\ &= A_1 [1 - E_n(A_1)] \cdot d_{0,n} \end{aligned} \quad (A4.9)$$

Gl. (A4.9) eingesetzt in (A4.8)

$$c_{0,\nu} = \frac{(\nu-1)!}{A_1^{\nu-1}} \cdot \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{A_1^{\lambda-1}}{\lambda!} (A_1 [1 - E_n(A_1)] - \lambda) d_{0,n}$$

Nach einigen Umformungen erhält man:

$$c_{0,\nu} = d_{0,n} \left\{ 1 - \frac{E_n(A_1)}{E_{\nu-1}(A_1)} \right\} \quad (A4.10)$$

Die Auflösung der Differenzgleichung (38) für $\mu > 0$ geht nun auf ähnliche Weise vorstatten. Die Funktion $c_{\mu-1,\nu+1}$ betrachtet man dabei als bekannt.

$$[A_1 c_{\mu,\nu+1} - \nu c_{\mu,\nu}] - [A_1 c_{\mu,\nu+2} - (\nu+1) \cdot c_{\mu,\nu+1}] = d_{\mu,n} - c_{\mu-1,\nu+1}$$

Mit

$$f_{\mu,\nu} = A_1 c_{\mu,\nu+1} - \nu \cdot c_{\mu,\nu} \quad \text{und} \quad f_{\nu,0} = A_1 \cdot c_{\nu,1} \quad (A4.11)$$

erhält man wieder

$$\begin{aligned} f_{\mu,\nu+1} - f_{\mu,\nu} &= -d_{\mu,n} + c_{\mu-1,\nu+1} \\ f_{\mu,\nu} &= A_1 \cdot c_{\mu,1} - \nu d_{\mu,n} + \sum_{\lambda=1}^{\nu} c_{\mu-1,\nu+1} \end{aligned} \quad (A4.12)$$

Die Gln. (A4.11) und (A4.12) ergeben die folgende Gleichung:

$$A_1 c_{\mu,\nu+1} - \nu c_{\mu,\nu} = A_1 c_{\mu,1} - \nu d_{\mu,n} + \sum_{\lambda=1}^{\nu} c_{\mu-1,\lambda}$$

Die homogene Differenzgleichung

$$A_1 c_{\mu, \nu+1} - \nu c_{\mu, \nu} = 0$$

liefert als Lösung

$$c_{\mu, \nu} = \frac{(\nu-1)!}{A_1^\nu}$$

Die inhomogene Differenzgleichung wird mit den Ansatz

$$c_{\mu, \nu} = b_{\mu, \nu} \cdot \frac{(\nu-1)!}{A_1^\nu}$$

gelöst. Es ergibt sich:

$$b_{\mu, \nu+1} - b_{\mu, \nu} = \frac{A_1^\nu}{(\nu-1)!} \cdot \left[A_1 c_{\mu, 1} - \nu d_{\mu, n} + \sum_{\lambda=1}^{\nu} c_{\mu-1, \lambda} \right]$$

$$b_{\mu, \nu} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{A_1^k}{k!} \left[A_1 c_{\mu, 1} - k d_{\mu, n} + \sum_{\lambda=1}^k c_{\mu-1, \lambda} \right]$$

Und daraus folgt:

$$c_{\mu, \nu} = \frac{(\nu-1)!}{A_1^\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{A_1^k}{k!} \left[A_1 c_{\mu, 1} - k d_{\mu, n} + \sum_{\lambda=1}^k c_{\mu-1, \lambda} \right] \quad (A4.13)$$

Durch Verwendung des zweiten Randwertes $c_{\mu, n+1} = 0$ kann wiederum $c_{\mu, 1}$ bestimmt werden. Setzt man diese Größe in Gleichung (A4.13) ein, so ergibt sich:

$$c_{\mu, \nu} = d_{\mu, n} \left\{ 1 - \frac{E_n(A_1)}{E_{\nu-1}(A_1)} \right\} + \frac{(\nu-1)!}{A_1^\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{A_1^k}{k!} \sum_{\lambda=1}^k c_{\mu-1, \lambda} - \frac{n!}{A_1^{n+1}} \frac{E_n(A_1)}{E_{\nu-1}(A_1)} \sum_{k=0}^n \frac{A_1^k}{k!} \sum_{\lambda=1}^k c_{\mu-1, \lambda} \quad (A4.14)$$

Die Angabe einer geschlossenen Lösung ist möglich, indem man $c_{0, \nu}$ in die Gleichung für $c_{1, \nu}$ einsetzt, $c_{1, \nu}$ in die

Gleichung für $c_{2, \nu}$ usw. Man erhält dabei aber eine unhandliche und daher für die numerische Auswertung unbrauchbare Formel.

A5. Beweis, daß alle Eigenwerte $s_\mu \neq -1$ sind

Führt man in Gl. (26b) die Substitution $s = s^* - 1$ ein, so ergibt sich die neue Differenzgleichung

$$d_{\mu, \nu+2}^* - (\nu+1+A_1) d_{\mu, \nu+1}^* - d_{\mu-1, \nu+1}^* + A_1(\nu+1) d_{\mu, \nu}^* = 0 \quad (A5.1)$$

Für $\mu = 0$ verschwindet $d_{\mu-1, \nu+1}^*$ und es verbleibt:

$$d_{0, \nu+2}^* - (\nu+1+A_1) d_{0, \nu+1}^* + A_1(\nu+1) d_{0, \nu}^* = 0$$

Und weiterhin mit

$$f_{0, \nu} = d_{0, \nu+1}^* - A_1 d_{0, \nu}^* \quad (A5.2)$$

ergibt sich:

$$f_{0, \nu+1} - (\nu+1) f_{0, \nu} = 0$$

Die notwendige Randbedingung ergibt sich mit Gl. (A5.2) zu

$$f_{0, 0} = d_{0, 1}^* - A_1 d_{0, 0}^* = A_1 - A_1 = 0$$

(Vgl. Gl. (25); mit $s = s^* - 1$ folgt $D_1^* = s^* + A_1$)
Damit lautet die Lösung für $f_{0, \nu}$

$$f_{0, \nu} = 0$$

und daraus folgt mit Gl. (A2.5)

$$d_{0, \nu+1}^* - A_1 d_{0, \nu}^* = 0$$

und wegen $d_{0, 1}^* = A_1$ ergibt sich die gewünschte Lösung für $d_{0, \nu}^*$ zu:

$$d_{0, \nu}^* = A_1^\nu \quad (A5.3)$$

Gleichung (A5.3) besagt nun, daß das Absolutglied der algebraischen Gleichung zur Bestimmung der Eigenwerte s^* für $A_1 > 0$ nie verschwindet, damit kann aber $s^* = 0$ keine Lösung dieser Gleichung sein. Da aber $s = s^* - 1$ ist, folgt

daraus, daß keine Lösung $s_{\mu} = -1$ existieren kann.

A6. Bestimmung des Grenzwertes $\tau_u = \tau_u(A_1)$ für $A_1 \rightarrow 0$

Strebt A_1 gegen Null, so kann eine Belegung der Klasse 2 nur im Zustand "n Leitungen belegt" unterbrochen werden. Zur Unterbrechung einer Belegung in einem Zustand "<n Leitungen belegt" müßte mehr als ein Ruf der Klasse 1 während der Dauer der betrachteten Belegung der Klasse 2 eintreffen, diese Wahrscheinlichkeit ist aber von höherer Ordnung in A_1 und kann in Hinblick auf den Grenzübergang $A_1 \rightarrow 0$ unberücksichtigt bleiben.

Es gilt daher für die Wahrscheinlichkeit, daß eine Belegung im Zustand $x = v$ nach der Zeit τ innerhalb eines Zeitelementes $d\tau$ unterbrochen wird:

$$p_v(\tau, u) \cdot d\tau = e^{-A_1\tau} \cdot e^{-n\tau} \cdot A_1 d\tau \quad v=n$$

$$= 0 \quad v=1, 2, \dots, n-1$$

Der Faktor $e^{-A_1\tau} \cdot e^{-n\tau}$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß innerhalb der Zeit τ weder ein Ruf der Klasse 1 einfällt noch irgend eine (einschließlich der betrachteten) Belegung endet; $A_1 d\tau$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß innerhalb des sich anschließenden Zeitelementes $d\tau$ die betrachtete Belegung durch einen Ruf der Klasse 1 unterbrochen wird.

Durch Integration der Verteilungsdichte erhält man die entsprechende Verteilung:

$$P_v(>\tau, u) = \frac{A_1}{A_1+n} \cdot e^{-(A_1+n)\tau} \quad v=n$$

$$= 0 \quad v=1, 2, \dots, n-1$$

Für eine beliebige, ins Bündel gelangte Belegung der Klasse 2 ist damit die Belegungsdauerverteilung:

$$P(>\tau, u) = \sum_{v=1}^n p_v^* \cdot P_v(>\tau, u) = p_n^* \cdot P_n(>\tau, u)$$

wobei

$$p_n^* = E_{n-1}(A_1+A_2) \quad \text{ist (Gl. (44))}.$$

Bezieht man die Verteilung nur auf die unterbrochenen Belegungen, so ergibt sich :

$$P_u(>\tau) = \frac{P(>\tau, u)}{U_Y}$$

Mit

$$U_Y = \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{E_n(A_1+A_2) - E_n(A_1)}{1 - E_n(A_1+A_2)}$$

erhält man

$$P_u(>\tau) = \frac{E_{n-1}(A_1+A_2) \cdot [1 - E_n(A_1+A_2)] \cdot A_1}{A_1 \cdot [E_n(A_1+A_2) - E_n(A_1)] \cdot A_1+n} \cdot e^{-(A_1+n)\tau}$$

Vollzieht man nun den Grenzübergang $A_1 \rightarrow 0$, so verbleibt für $P_u(>\tau)$:

$$P_u(>\tau) = e^{-n\tau}$$

Daraus ergibt sich der gesuchte Mittelwert $\bar{\tau}_u$:

$$\bar{\tau}_u = \int_0^{\infty} P_u(>\tau) = \frac{1}{n}$$

A7. Ableitung der i-ten Gleichung des Gleichungssystems zur Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeiten der Überlaufanordnungen ÜPE I und ÜPE II

Innerhalb eines jeden Bündels mit n_r Leitungen sind die Belegungszustände "0, 1, ..., x_r , ... n_r Leitungen belegt" möglich, also jeweils $n_r + 1$ Zustände innerhalb eines Bündels.

Die Gesamtzahl der möglichen Zustände ist somit:

$$m = (n_R + 1)(n_{R-1} + 1) \dots (n_2 + 1)(n_1 + 1)$$

Jeder Zustand \bar{x} des Gesamtsystems soll durch ein R-Tupel $(x_R, x_{R-1}, \dots, x_2, x_1)$ charakterisiert werden. Dann läßt sich die Menge aller Zustände \bar{x} folgendermaßen angeben:

$$M = \{ \bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_{m-1} \}$$

Die Menge M der Zustände soll als eine geordnete Menge dargestellt werden. Dazu ist es notwendig, eine Zählgröße i nach einer eindeutigen Vorschrift einem R-Tupel $(x_R, x_{R-1}, \dots, x_2, x_1)$ zuzuordnen. Dazu werde jedes R-Tupel eines Zustandes \bar{x}_i als eine R-stellige Zahl zu einer Basis $> \text{Max}(n_r)$ interpretiert. Es soll dabei x_R die höchstwertige, x_1 die niederwertigste Stelle dieser Zahl bedeuten.

Ordnet man diese Zahlen der Größe nach, beginnend mit $x_R = x_{R-1} = \dots = x_2 = x_1 = 0$ und numeriert diese Zahlen mit der Zählgröße $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$, so liegt eine eindeutige Vorschrift zur Zuordnung der Zustände \bar{x}_i und ihrer Zählvariablen i vor.

Nun kann ein Zustand \bar{x}_i innerhalb eines kleinen Zeitelementes dt nicht in jeden beliebigen Zustand übergehen, sondern nur in diejenigen, welche dem Zustand \bar{x}_i "benachbart" sind, d.h. der Übergang ist nur in Zustände möglich, welche durch den Einfall genau eines Rufes oder durch das Ende genau einer Belegung aus dem Zustand \bar{x}_i entstehen können.

Zur Beschreibung der Koeffizienten der i-ten Gleichung des Systems soll daher zunächst der Begriff des "benachbarten Zustands" eingeführt werden.

Ein Zustand \bar{x}_j soll nach "oben benachbart im Grade r " (abgekürzt mit dem Symbol $= (\uparrow, r)$) mit einem Zustand \bar{x}_i sein

$$\bar{x}_j = (\uparrow, r) \bar{x}_i$$

wenn

$$j = i + (n_0 + 1)(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_{r-1} + 1) \text{ und } x_r < n_r \text{ ist } (n_0 = 0).$$

Ein Zustand \bar{x}_j soll nach "unten benachbart im Grade r " (abgekürzt mit dem Symbol $= (\downarrow, r)$) mit einem Zustand \bar{x}_i sein

$$\bar{x}_j = (\downarrow, r) \bar{x}_i$$

wenn

$$j = i - (n_0 + 1)(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots (n_{r-1} + 1) \text{ und } x_r > 0 \text{ ist } (n_0 = 0).$$

Die Zustände mit der Nummer $i + (n_0 + 1)(n_1 + 1) \dots (n_{r-1} + 1)$ sind dabei genau diejenigen Zustände, welche durch den Einfall genau eines Rufes oder durch das Ende genau einer Belegung im r -ten Teilbündel entstehen.

Die i -te Gleichung stellt also eine Verknüpfung der Zustandswahrscheinlichkeit $p_{\bar{x}_i}$ und der Wahrscheinlichkeiten der benachbarten Zustände $P(\uparrow, r) \bar{x}_i$ und $P(\downarrow, r) \bar{x}_i$ dar. Es gilt nun die Koeffizienten dieser Gleichung zu bestimmen.

Der Koeffizient $c_{i,i}$ besteht aus der Übergangswahrscheinlichkeit (auf dt normiert), daß der Zustand \bar{x}_i in einen benachbarten Zustand \bar{x}_j übergeht; die Koeffizienten $c_{i,j}$ enthalten die Übergangswahrscheinlichkeiten, daß der Zustand \bar{x}_i aus einem benachbarten Zustand \bar{x}_j entsteht.

Der Koeffizient der Zustandswahrscheinlichkeit $p_{\bar{x}_i}$ ergibt sich zu:

ÜPE I :

$$C_{i,l} = \sum_{K=1}^{r^*} A_K + x_1 + x_2 + \dots + x_R$$

wobei r^* die Nummer jenes in Absuchrichtung letzten Bündels ist, bei welchem noch $x_{r^*} < n_{r^*}$ gilt.

ÜPE II :

$$C_{i,l} = \sum_{K=1}^{R-r^*+1} A_K + x_1 + x_2 + \dots + x_R$$

wobei r^* die Nummer jenes in Absuchrichtung ersten Bündels ist, bei welchem $x_{r^*} < n_{r^*}$ gilt.

Die Koeffizienten der Zustandswahrscheinlichkeiten $p_{(\downarrow, r)\bar{x}_i}$ ergeben sich zu:

ÜPE I und ÜPE II :

$$C_{i,j} = x_{r+1}$$

Die Koeffizienten der Zustandswahrscheinlichkeiten $p_{(\downarrow, r)\bar{x}_i}$ ergeben sich zu:

ÜPE I :

$$C_{i,j} = \sum_{K=r^{**}+1}^r A_K$$

wobei r^{**} die Nummer des vom r -ten Bündel aus gegen die Absuchrichtung ersten Bündels mit $x_{r^{**}} < n_{r^{**}}$ ist. Dabei soll stets $x_0 < n_0$ angenommen werden.

ÜPE II :

$$C_{i,j} = \sum_{K=1}^{R-r^{**}+1} A_K$$

wobei r^{**} die Nummer des in Absuchrichtung ersten Bündels mit $x_{r^{**}} < n_{r^{**}}$ ist.

Damit läßt sich nun allgemein die i -te Gleichung für beide Systeme angeben:

ÜPE I :

$$\left(\sum_{r=1}^R x_r + \sum_{K=1}^{r^*} A_K \right) p_{\bar{x}_i} - \sum_{r=1}^R (x_{r+1}) \cdot p_{(\uparrow, r)\bar{x}_i} - \sum_{r=1}^R \sum_{K=r^{**}+1}^r A_K p_{(\downarrow, r)\bar{x}_i}$$

ÜPE II :

$$\left(\sum_{r=1}^R x_r + \sum_{K=1}^{R-r^*+1} A_K \right) p_{\bar{x}_i} - \sum_{r=1}^R (x_{r+1}) \cdot p_{(\uparrow, r)\bar{x}_i} - \sum_{r=1}^{r^{**}} \sum_{K=1}^{R-r+1} A_K p_{(\downarrow, r)\bar{x}_i}$$

AB. Beweis der allgemeinen Gültigkeit der in Gl. (111b) gefundenen Lösung für $u(t)$

Es soll gezeigt werden, daß $u(t)$ nach Gl. (111b) die erzeugende Funktion von p_{x_1, x_2} darstellt.

Dieses ist bewiesen, wenn die zur Gl. (91) analoge Gleichung für die erzeugende Funktion durch den in Gl. (111b) gefundenen Ausdruck für $u(t)$ befriedigt wird.

Die aus Gl. (91) durch Umformen entstandene Gl. (91a) lautet:

$$x_2 \cdot p_{x_1, x_2} + [x_1 \cdot p_{x_1, x_2} - A p_{x_1-1, x_2}] = \\ = [(x_1+1) \cdot p_{x_1+1, x_2} - A p_{x_1, x_2}] + (x_2+1) p_{x_1, x_2+1}$$

Mit

$$f_{x_1, x_2} = x_1 p_{x_1, x_2} - A p_{x_1-1, x_2}$$

läßt sich Gl. (91a) folgendermaßen umformen:

$$x_2 \cdot p_{x_1, x_2} + f_{x_1, x_2} = f_{x_1+1, x_2} + (x_2+1) \cdot p_{x_1, x_2+1} \quad (\text{A8.1})$$

Bei der Bildung der erzeugenden Funktion stellt x_2 lediglich einen Parameter dar; er soll hier zusätzlich zur Kennzeichnung an $u(t)$ angefügt werden.

Man findet nun entsprechend zu den Gln. (105a,b) :

$$G\{f_{x_1, x_2}\} = t [u'_{x_2}(t) - A u_{x_2}(t)] \quad (\text{A8.2})$$

$$G\{f_{x_1+1, x_2}\} = \frac{1}{t} [G\{f_{x_1, x_2}\} - f_{0, x_2}] = u'_{x_2}(t) - A u_{x_2}(t) \quad (\text{A8.3})$$

Setzt man nun (A8.2) und (A8.3) in (A8.1) ein, so folgt:

$$u'_{x_2}(t) \cdot (t-1) + u_{x_2}(t) [x_2 - A(t-1)] - (x_2+1) u_{x_2+1}(t) = 0 \quad (\text{A8.4})$$

In Gl. (A8.4) soll nun $u(t)$ gemäß Gl. (111b) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} & (-1)^{x_2} \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2} K_\lambda \cdot \frac{A \cdot e^{At} (1-t)^\lambda - e^{At} \cdot (-\lambda) (1-t)^{\lambda-1}}{(1-t)^{2\lambda}} \cdot (t-1) + \\ & + (-1)^{x_2} \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2} K_\lambda \cdot \frac{e^{At}}{(1-t)^\lambda} \cdot [x_2 - A(t-1)] \\ & - (-1)^{x_2+1} \sum_{\lambda=x_2+1}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2+1} K_\lambda \cdot \frac{e^{At}}{(1-t)^\lambda} \cdot (x_2+1) = \\ & = (-1)^{x_2} \cdot \frac{e^{At}}{(1-t)^\lambda} \cdot \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \left\{ \binom{\lambda}{x_2} K_\lambda (-\lambda + x_2) + \binom{\lambda}{x_2+1} K_\lambda (x_2+1) \right\} = \\ & = (-1)^{x_2} \cdot \frac{e^{At}}{(1-t)^\lambda} \cdot \sum_{\lambda=x_2}^{n_2} \binom{\lambda}{x_2} K_\lambda \left\{ -\lambda + x_2 + \frac{\lambda - x_2}{x_2+1} \cdot (x_2+1) \right\} = \\ & = 0 \end{aligned}$$

Damit ist nun der vollständige Beweis erbracht, daß $u(t)$ nach Gl. (111b) die erzeugende Funktion von p_{x_1, x_2} ist.

