

Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung

Universität Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

11. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten

**Die Berechnung der Wartewahrscheinlichkeit
und der mittleren Wartezeit von Link-
systemen mit unbegrenzter Wartemöglichkeit**

von
LUDWIG HIEBER

Institute for Switching and Data Technics

University Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

11th Report on Studies in Congestion Theory

**The Calculation of the Probability of Delay
and the Mean Waiting Time of Link Systems
with unlimited Queuing**

by
LUDWIG HIEBER

Summary

There is little known about waiting problems arising in multi-stage link systems. This study deals with link systems where incoming calls can wait in front of the multiples of the first stage. The number of calls in these queues are assumed to be not limited.

For Poisson input the probability of dealy and the mean waiting time are approximately derived. The results of these formulae are compared with artificial traffic trials.

For two-stage link systems without groupselection a method is developed which can be used to calculate call congestion in systems with loss as well as the mean waiting time and the probability of delay in systems with waiting.

A large number of methods is known for calculating time congestion and call congestion occuring in multistage link systems with loss. It will be shown how some of these methods can be generalised and applied to link systems with waiting.

A part of this study is published in the Prebook of the 6th International Teletraffic Congress 1970.

Übersicht

Über die Behandlung von Warteproblemen, welche in mehrstufigen Linksystemen auftreten, ist wenig bekannt. In dieser Arbeit werden Linksysteme betrachtet bei denen einfallende Anrufe vor den Koppelvielfachen der ersten Stufe warten können. Dabei wird angenommen, daß die Anzahl der Anrufe in den Warteschlangen nicht begrenzt ist.

Für Poisson-Angebot wird die Wahrscheinlichkeit und die mittlere Wartezeit auf Grund von Näherungsannahmen abgeleitet. Die Ergebnisse dieser Beziehungen werden mittels Simulation überprüft.

Für zweistufige Systeme mit Mischwahl wird ein Verfahren angegeben mit dem man sowohl die Verlustwahrscheinlichkeit bei Verlustsystemen als auch die Wartewahrscheinlichkeit und die mittlere Wartezeit bei Wartesystemen berechnen kann.

Es sind eine ganze Reihe von Methoden bekannt mit denen man Zeitblockierung und Verlust bei mehrstufigen Linksystemen berechnen kann, falls diese als Verlustsysteme arbeiten. Hier wird gezeigt, wie einige dieser Verfahren erweitert und zur Berechnung von Wartesystemen verwendet werden können.

Ein Teil dieser Arbeit ist veröffentlicht im Prebook of the 6th International Teletraffic Congress 1970.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Literatur	4
Abkürzungen	7
1. <u>Allgemeines</u>	9
1.1 Einleitung	9
1.2 Die mehrstufige Koppelanordnung mit konjugierter Wahl ("Linksystem")	10
1.3 Mischungen	11
1.4 Beschreibung des Linksystems mit Warten	13
1.5 Voraussetzung über den Fernsprekverkehr	13
1.6 Die einstufige Koppelanordnung als Wartesystem	14
2. <u>Zweistufige Mischwahl</u>	17
2.1 Betrieb als Verlustsystem	19
2.1.1 Ein neues Verfahren mit Zustandsgleichungen (ZBMV)	20
2.1.2 Eine neue iterative Lösung (IBMV)	27
2.2 Betrieb als Wartesystem	35
2.2.1 Ein neues Verfahren mit Zustandsgleichungen (ZBMW)	35
2.2.2 Eine neue iterative Lösung (ZBMW)	43
2.2.3 Neues Verfahren CIRBW für zweistufige Mischwahl	47
3. <u>Zweistufige Richtungswahl mit Linksystem besonders symmetrischer Struktur im Wartesystem</u>	56
3.1 Herleitung eines neuen Iterationsverfahrens für Wartesysteme mit Richtungswahl (IBRW)	56
3.2 Herleitung eines neuen Verfahrens mit Zustandsgleichungen für Wartesysteme mit Richtungswahl (ZBRW)	71
4. <u>Mehrstufige Linksysteme mit Warten</u>	78
4.1 Der allgemeine Fall	78
4.2 Verallgemeinerung des Verfahrens für Verlustsysteme mit Aufteilung in Eingangs- und Abnehmerblockierung (CIRBW)	79
5. <u>Zusammenfassung von Ergebnissen</u>	96

	Seite
<u>Anhang 1</u>	97
Kurzfassung der Theorie von M. Thierer für einstufige Wartesysteme.	
<u>Anhang 2</u>	100
Zustandsgleichungen für zweistufiges symmetrisches Linksystem.	

Literatur

- [1] P. Kühn: Kombinierte Warte-Verlustsysteme mit einstufiger Koppelanordnung und unvollkommener bzw. vollkommener Erreichbarkeit. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart 1967.
- [2](a) A.D.Charkevitsch:Pribligennyj metod rastscheta tschisla soedinitelnych ustrojstv v ATS koordinatnoj sistemy (An Approximate Method for Calculating the Number of Junctions in a Crossbar System Exchange). Elektrosvjaz (1959), S.55-63; (engl.: Telecommunications (1960), S. 185-197).
- (b) N. Bininda und W. Wendt: Die effektive Erreichbarkeit für Abnehmerbündel hinter Zwischenleitungsanordnungen. Nachr.-techn. Z. 12 (1959), S. 579-585; 14 (1961), S. 40.
- (c) A. Lotze und W. Wagner: Tafel der modifizierten Palm-Jacobaeus-Verlustformel. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart 1963.
- [3] A. Lotze: Optimum Link Systems. 5. International Teletraffic Congress New York 1967, Prebook p. 242-251.
- [4] M. Thierer: Delay Systems with Limited Accesibility. 5. International Teletraffic Congress New York 1967, Prebook p. 203-213.
- [5] M. Thierer: Wartesystem-Tafeln für vollkommene und unvollkommene Erreichbarkeit nach der Interconnections-Warteformel (IDF).

7. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten, Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart.
- [6] E. Gambe: Artificial Traffic Studies on a Two-Stage Link System with Waiting.
5. Internationaler Teletraffic Congress New York 1967, Prebook p.351-359.
- [7] W. Wagner: Simulation von Fernsprechverkehr auf Rechenanlagen.
Diplomarbeit am Institut für Fernmeldeanlagen, TH Stuttgart, 1960.
- [8] H. Wagner und D. Dietrich: Bestimmung der Verkehrsleistung von Wartesystemen durch künstlichen Fernsprechverkehr.
Nachr. Techn. Zeitschrift 17 (1964) H. 6, S. 273-279.
- [9] R. Gunzenhäuser: Nichtnumerische Informationsverarbeitung.
Springer-Verlag Wien New York 1968.
- [10] G. Bretschneider und A. Wendt: Datenverarbeitungsanlagen als Hilfsmittel für die Fernsprech- und Fernschreibverkehrsplanung.
Nachr. Techn. Zeitschrift 1961, S. 487.
- [11] G.P. Basharin: Derivation of Equations of State for Two-Stage Telephone Circuits with Losses.
Elektrosvyaz Nr. 1 (1960), S. 52-63.
- [12] W. Lörcher: Exakte Berechnung von zweistufigen Linksystemen für Mischwahl nach Basharin.
Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart 1967.

- [13] A. Elldin: On the Dependence between the Two Stages in a Link System.
Ericsson Technics 17 (1961) No. 2, P. 183-259.
- [14] A. Lotze: Verluste und Güteermerekmale einstufiger Mischungen.
NTZ 14 (1961), Heft 9, S. 449-453.
- [15] T. Suzuki: Table for waiting system with full availability - infinite sources -
Electrical Communication Laboratory, Techn. Journal 1959.
- [16] W. Wagner: Über ein kombiniertes Warte-Verlust-System mit Prioritäten.
Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart.
6. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten 1968.
- [17] K. Kümmerle: An Analysis of Loss Approximations for Link Systems.
5. International Teletraffic Congress New York 1967, Prebook p. 327-336.
- [18] K. Kümmerle: Berechnungsverfahren für mehrstufige Koppelanordnungen mit konjugierter Durchwahl. Systematik und Analyse.
Universität Stuttgart.
Dissertation 1969.
- [19] E. Brockmeyer, H.L. Halstrom, A. Jensen: The Life and Works of A.K. Erlang, Copenhagen 1960.
- [20] C. Jacobaeus: A Study on Congestion in Link-Systems.
Ericson Technics (1950), No.48, p. 1-68.

Abkürzungen

A	Verkehrsangebot
A_i	Verkehrsangebot der Zubringerteilgruppe i
B	Verlustwahrscheinlichkeit
c_A	Anrufdichte
c_W	mittlere Zahl der Rufe, die je Zeiteinheit warten müssen.
$E_{1,n}(A)$	Verlustwahrscheinlichkeit eines vollkommen erreichbaren Bündels mit n Leitungen beim Angebot A.
$E_{2,n}(A)$	Wartewahrscheinlichkeit eines vollkommen erreichbaren Bündels mit n Leitungen beim Angebot A.
g	Anzahl der Zubringerteilgruppen
g_j	Anzahl der Koppelvielfache der Stufe j
k	Erreichbarkeit
k_j	Zahl der Ausgänge je Koppelvielfach der Stufe j
k_{sr}	Anzahl der Leitungen pro Koppelvielfach in Stufe s nach Richtung r.
$l_{j,j+1}$	Zahl der Leitungen von einem Koppelvielfach der Stufe j zu jedem Koppelvielfach der Stufe j+1.
H_j	Mischungsverhältnis der Mischung nach Stufe j
n	Anzahl der Abnehmerleitungen
n_{sr}	Anzahl der Abnehmerleitungen in Stufe s des Bündels in Richtung r.

$p(x)$	Wahrscheinlichkeit, x Abnehmerleitungen belegt
$p_i(x_i)$	Wahrscheinlichkeit, x_i Leitungen im i-ten Koppelvielfach belegt.
$p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$	Wahrscheinlichkeit für den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{g_1}\}$
$p(x, z)$	Wahrscheinlichkeit, x Leitungen belegt und z Teilnehmer warten.
m_r	Mittlere Prüfbarkeit der Leitungen des Abnehmerbündels in Richtung r.
t	Zeit
t_m	Mittlere Belegungsdauer
t_W	Mittlere Wartezeit der Wartenden
x	Anzahl der gleichzeitig belegten Leitungen
x_i	Anzahl der in der i-ten Zubringerteilgruppe belegten Leitungen.
Y	Verkehrsbelastung
z	Anzahl der gleichzeitig wartenden Rufe
τ_W	Mittlere Wartezeit der Wartenden, auf t_m bezogen.
τ_W^*	Mittlere Wartezeit aller Rufe, auf t_m bezogen
$\sigma(x)$	Sperrwahrscheinlichkeit
$\mu(x)$	Durchlaßwahrscheinlichkeit
Ω	Wartebelastung

1. Allgemeines

1.1 Einleitung

Zur Einsparung von Koppelpunkten für Verbindungen zwischen Fernsprechteilnehmern werden häufig mehrstufige Koppelanordnungen mit konjugierter Durchschaltung verwendet. Solche mehrstufige Kopplungsanordnungen werden Linkssysteme genannt. Ein Anruf wird nur dann durchgeschaltet, wenn sicher ist, daß die Verbindung über a l l e Stufen durchgeführt werden kann. Eine konjugierte Wahl vermeidet Belegungen von Koppelstufen durch Verbindungswünsche, von denen in der Zeit des stufenweisen Verbindungsaufbaues nicht bekannt ist, ob über a l l e Stufen durchgeschaltet werden kann.

In Vermittlungssystemen, die als Wartesysteme arbeiten, werden Anrufe, die nicht sofort durchgeschaltet werden können, auf Warteplätze verwiesen. Von dort aus werden diese Rufe bedient, sobald ein freier Verbindungsweg vorhanden ist. In Verlustsystemen dagegen werden solche Rufe abgewiesen.

In dieser Arbeit werden Linkssysteme mit Wartespeichern untersucht. Schon bei Linksystemen, die als Verlustsysteme arbeiten, führt die verkehrstheoretische Betrachtung des zugehörigen stationären stochastischen Prozesses zu sehr großen linearen Gleichungssystemen, die bei praktisch verwendeten Systemen nur in ganz speziellen Sonderfällen mit einem Digital-Rechner gelöst werden können, in Wartesystemen sind entsprechende Gleichungssysteme noch größer. Bereits eine einstufige Koppelanordnung mit 3 Abnehmerleitungen und jeweils 4 Warteplätzen vor 3 Zubringerteilgruppen, von denen jede $k = 2$ Abnehmerleitungen erreicht, ergibt ein System mit 132 Unbekannten (vgl. [1]). Deswegen muß nach vereinfachenden Modellen gesucht werden, deren Eigenschaften eine theoretische Behandlung und eine numerische Auswertung mit Digitalrechnern noch mit tragbarem Aufwand zulassen, andererseits jedoch das vorgegebene praktische System noch genügend genau nachbilden.

Diese Übereinstimmung kann durch Simulation des Systems und seines Fernsprechverkehrs auf einem Digital-Rechner nachgeprüft werden.

In der vorliegenden Arbeit werden solche Modelle beschrieben. Die interessierenden Verkehrsgrößen werden berechnet und mit Simulations-Ergebnissen verglichen.

1.2 Die mehrstufige Koppelanordnung mit konjugierter Wahl ("Linksystem")

Fernsprechwählnetze bestehen aus Leitungsbündeln, die über Wählknotenpunkte miteinander verbunden sind. In einem Wählknotenpunkt werden durch Steuerglieder ankommende Leitungen zu freien Teilnehmern oder auf freie Leitungen bestimmter Abnehmerbündel durchgeschaltet.

Koppelanordnungen können einstufig oder mehrstufig sein. In mehrstufigen Koppelanordnungen werden Verbindungen über mehrere Koppelpunkte geführt.

Den Eingängen einer Koppelanordnung wird der Verkehr über Zubringerleitungen angeboten. Am Ausgang einer Koppelanordnung sind weiterführende einzelne Abnehmerleitungen oder Leitungsbündel angeschlossen. Jede der Leitungen aus einer Zubringergruppe führt zu e i n e r Schaltanordnung, einem sogenannten K o p p e l v i e l f a c h . Jedes Koppelvielfach hat i Eingangsleitungen und k Ausgangsleitungen. Der Aufbau des Koppelvielfaches ist so, daß jede der i Eingangsleitungen mit jeder gewünschten Ausgangsleitung verbunden werden kann, falls diese nicht schon belegt ist. Bild 1.1 zeigt eine mehrstufige Koppelanordnung mit Warteplätzen vor den Zubringergruppen.

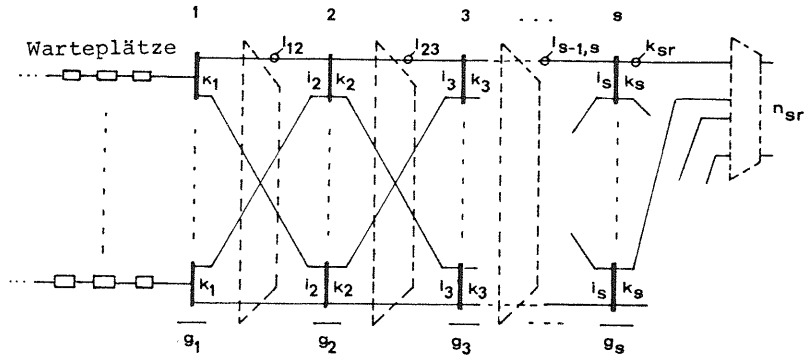


Bild 1.1 Mehrstufige Koppelanordnung

In Bild 1.1 sind folgende Bezeichnungen verwendet:

- i_2, i_3, \dots, i_s Eingänge je Koppelvielfach der Stufe $2, 3, \dots, s$
- k_1, k_2, \dots, k_s Ausgänge je Koppelvielfach der Stufe $1, 2, \dots, s$
- g_1, g_2, \dots, g_s Koppelvielfache in Stufe $1, 2, \dots, s$
- n_{sr} Anzahl der Abnehmerleitungen im Bündel r
- s Anzahl der Stufen

1.3 Mischungen

Es gibt Fälle, wo aus wirtschaftlichen und technischen Gründen nach einer oder mehreren Stufen eines Linksystems Mischungen eingebaut sind. Als Mischung (Mischplan) bezeichnet man das Schema, das angibt, in welcher Weise die Eingangsleitungen einer Koppelanordnung mit den abgehenden Leitungen verbunden werden. Bei einstufigen Koppelanordnungen bedeutet die Erreichbarkeit k jene Anzahl aus den n Abnehmerleitungen, die von einer Zubringerteilgruppe aus erreichbar sind. Bei idealen Mischungen (Erlangmischung) ist die Anordnung der Abnehmerleitungen so, daß von jeder Zubringerteilgruppe eine andere Kombination von k Abnehmerleitungen aus dem gesamten Bündel von n Abnehmerleitungen erreicht werden kann. Dazu sind $g = \binom{n}{k}$ Zubringerteilgruppen nötig.

Bild 1.2 zeigt einen sehr einfachen Mischungsplan einer idealen Mischung.

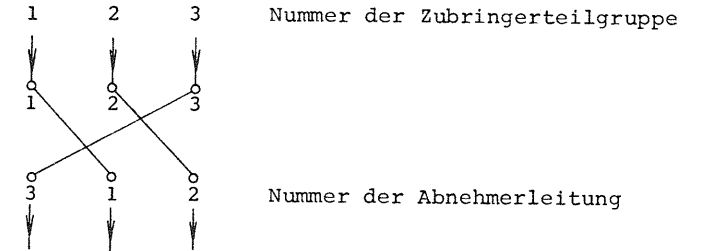


Bild 1.2 Ideale Mischung mit $g = 3$ Zubringergruppen, $n = 3$ Abnehmerleitungen und der Erreichbarkeit $k = 2$.

Bei der Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeit für "x Abnehmerleitungen der Mischung belegt" muß bekannt sein, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein neu eintreffender Ruf in einer bestimmten Zubringerteilgruppe keine freie Abnehmerleitung mehr findet. Wegen des speziellen Mischungsplanes der "idealen Erlangmischung" sind bei einer Belegung von x Abnehmerleitungen stets genau $\binom{x}{k}$ Zubringerteilgruppen für die Durchschaltung weiterer Rufe gesperrt. Das Verhältnis der gesperrten Zubringerteilgruppen zu allen $\binom{n}{k}$ Zubringerteilgruppen nennt man Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)$.

$$\sigma(x) = \frac{\binom{x}{k}}{\binom{n}{k}} \quad (1.1)$$

Für die in der Praxis auftretende Zahl von Abnehmerleitungen und den verwendeten Erreichbarkeiten k würde die Zahl der $g_1 = \binom{n}{k}$ Zubringerteilgruppen für ideale Mischungen zu groß werden. Es werden deshalb andere Mischungen verwendet, die nach aus der Erfahrung gewonnenen Vorschriften so aufgebaut sind, daß sie ein vorgegebenes Verkehrsverhalten der Koppelanordnung erreichen (z.B. möglichst kleiner Verlust bei einer vorgegebenen Verkehrsleistung, Erreichbarkeit und Leitungszahl).

Für solche nicht-idealen Mischungen kann im Falle eines Absuchens ohne Nullstellung zur Berechnung der Sperrwahrscheinlichkeit näherungsweise angenommen werden, daß alle $\binom{n}{x}$ Belegungsmuster im Zustand x Leitungen belegt, mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Mit dieser Näherungsannahme ergibt sich die Sperrwahrscheinlichkeit zu

$$\sigma(x) = \frac{\binom{n-k}{x-k}}{\binom{n}{x}} = \frac{\binom{x}{k}}{\binom{n}{k}} \quad (1.2)$$

Im Falle geordneten Absuchens treten diese Belegungsmuster nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Man kann die Gleichung (1.2) dann ebenfalls anwenden, wenn der Erwartungswert von $\sigma(x)$ für alle $\binom{n}{x}$ Belegungsmuster mit ausreichender Genauigkeit die Beziehung (1.2) erfüllt.

1.4 Beschreibung des Linksystems mit Warten

Es wird ein reines Wartesystem betrachtet, d.h. daß zu keinem Zeitpunkt ein Ruf wegen Mangel an Warteplätzen abgewiesen werden muß. Vor jeder Zubringerteilgruppe des Linksystems sei demnach eine (praktisch) unbegrenzte Anzahl von Warteplätzen vorhanden. Rufe, die nicht sofort vermittelt werden können, werden bei Eintreffen in eine Warteschlange eingereiht und verweilen dort so lange, bis ihre Durchschaltforderung erfüllt werden kann. Es können g_1 parallele Warteschlangen entstehen (vgl. Bild 1; Seite 11). Der Übergang von einer Warteschlange zu einer andern soll nicht möglich, und die Abfertigungsreihenfolge aus diesen g_1 Warteschlangen soll zufällig sein. Sobald ein Pfad von allen oder einem Teil der wartenden Rufe über Zwischenleitungen der Koppelanordnung zu einer freien Abnehmerleitung der gewünschten Richtung verfügbar ist, wird einer der wartenden Rufe bedient.

1.5 Voraussetzungen über den Fernspreverkehr

Zahlreiche Messungen des Verkehrs im öffentlichen Fernsprechnetz während der Hauptverkehrszeit (der Zeit mit dem stärksten

Tagesverkehr) haben gezeigt, daß hier das folgende mathematische Modell (Zufallsverkehr 1. Art) mit der Wirklichkeit gut übereinstimmt.

- (a) Der Verkehr in der betrachteten Koppelanordnung befindet sich im stationären Zustand (im "statischen Gleichgewicht"). Die Zustandswahrscheinlichkeiten der Koppelanordnung sind zeitinvariant. Demzufolge ändert sich die Anzahl der im Mittel belegten Leitungen in dem betrachteten Zeitraum nicht.
- (b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte c_A für das Eintreffen eines Rufes ist konstant, ist also unabhängig von der Zeit und der Anzahl der momentan bestehenden Belegungen der Koppelanordnung.
- (c) Die Wahrscheinlichkeitsdichte $1/t_m$ für das Endigen einer Belegung ist konstant, d.h. sie hängt nicht davon ab, wie lange die Belegung schon bestanden hat. Dies führt zu einer negativ exponentiellen Verteilung der Belegungsdauern.

$$P(>t) = e^{-t/t_m}$$

1.6 Die einstufige Koppelanordnung als Wartesystem

Für eine einstufige Koppelanordnung mit unvollkommener Erreichbarkeit wird auf die Ergebnisse von M. Thierer [4], [5] zurückgegriffen: Für die Ableitung der interessierenden Verkehrsgrößen wird dort von folgenden Voraussetzungen ausgegangen:

- (a) Das Angebot A (Zufallsverkehr 1. Art) verteilte sich gleichmäßig auf alle Zubringerteilgruppen.
- (b) Die Mischung der Koppelanordnung sei entweder eine ideale Erlangmischung oder eine nicht ideale Mischung, deren Durchlasswahrscheinlichkeiten in guter Näherung gleich jener einer idealen Mischung sind.

- (c) Keiner der Wartenden verzichtet wegen zu langen Wartens.
- (d) Kein Ruf wird wegen Mangel an Warteplätzen abgewiesen.

Bei der Ableitung der Zustandswahrscheinlichkeiten werden nur die z Wartenden des gesamten Systems betrachtet. Es wird nicht unterschieden, vor welcher Zubringerteilgruppe gewartet wird.

Der Ansatz für das "statistische Gleichgewicht" für einen Zustand z Wartende und x Leitungen belegt {x,z} führt auf folgendes Zustandsdiagramm:

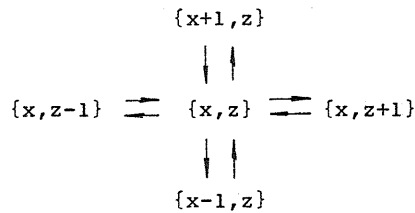


Bild 1.3 Der Zustand {x,z} und seine Nachbarzustände

Für die Zustände {x,z} ergibt sich daraus ein lineares Gleichungssystem. Weil die Zahl der Warteplätze nicht beschränkt ist, ergeben sich unendlich viele Unbekannte p(x,z). Zur Lösung wird ein Modell für die Koppelanordnung vorausgesetzt, für das folgendes gilt: Im statistischen Gleichgewicht ist die Wahrscheinlichkeit für das Verschwinden eines Zustandes {x,z} durch Enden einer Belegung gleich der Wahrscheinlichkeit für das Entstehen dieses Zustandes {x,z} infolge eines neuen Rufes.

Nach Thierer [4] ergibt sich daraus die Wahrscheinlichkeit p(x), daß x Abnehmerleitungen belegt sind zu (siehe auch Anhang 1):

$$p(x) = \frac{\sum_{x=k}^n A^x \cdot \frac{\prod_{i=0}^{x-1} \mu(i)}{x \prod_{i=1}^{x-1} (i-\sigma(i) \cdot A)}}{1 + \sum_{x=1}^n A^x \cdot \frac{\prod_{i=0}^{x-1} \mu(i)}{x \prod_{i=1}^{x-1} (i-\sigma(i) \cdot A)}} \quad (1.3)$$

In der Beziehung (1.3) für p(x) tritt die Anzahl der wartenden Rufe nicht auf. In der Gleichung (1.3) ist $\mu(x)$ die Durchlasswahrscheinlichkeit. Sie ergibt sich aus:

$$\mu(x) = 1 - \sigma(x) \quad (1.4)$$

2. Zweistufige Mischwahl

Die Koppelanordnung besteht aus zwei Stufen. Die Eingänge der 1. Stufe sind unterteilt in g_1 Zubringerteilgruppen. Jeweils eine Zubringerteilgruppe führt auf eines der g_1 Koppelvielfache der ersten Stufe.

Jedes Koppelvielfach der ersten Stufe habe $k_1 = g_2$ Ausgänge. Die Verbindungen zwischen den beiden Stufen, die Zwischenleitungen, sind so angeordnet, daß von jedem Koppelvielfach der 1. Stufe alle Koppelvielfache der 2. Stufe mit jeweils einer Leitung erreichbar sind. Alle Ausgänge der 2. Stufe führen in dieselbe Richtung. Bei einem Anruf werden die Ausgänge eines Koppelvielfachs nach freien Leitungen so abgesucht, daß kein Ausgang bevorzugt wird. Dieses zufällige Absuchen entspricht der Funktion eines Wählers ohne Nullstellung. Bild 2.1 zeigt eine 2-stufige Koppelanordnung für Mischwahl

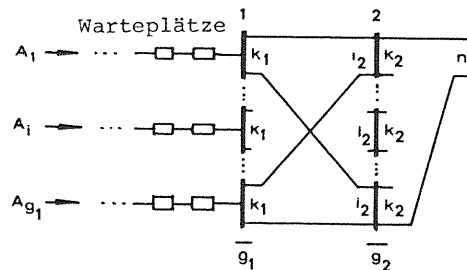


Bild 2.1 Zweistufige Mischwahl

Zur Ableitung der interessierenden Verkehrsgrößen werden nun folgende Bezeichnungen eingeführt (vgl. Bild 2.1):

- c_{A_i} Anrufrichte der Zubringerteilgruppe i
- $A_i = c_{A_i} \cdot t_m$ Angebot der Zubringerteilgruppe i
- n Zahl der Abnehmerleitungen

x	Anzahl der belegten Abnehmerleitungen
x_i	Anzahl der belegten Zwischenleitungen in der Zubringerteilgruppe i
$p(x)$	Wahrscheinlichkeit für " x Abnehmerleitungen belegt".
$p_i(x_i)$	Wahrscheinlichkeit für " x_i Zwischenleitungen in der Zubringerteilgruppe i belegt".
$p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$	Wahrscheinlichkeit für den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{g_1}\}$

Es wird nun zunächst ein neues Näherungsverfahren für Verlustsysteme abgeleitet. Darauf aufbauend wird dieses Verfahren verallgemeinert für Wartesysteme. Zur Beschreibung der beiden Systeme werden die Zustandsgleichungen abgeleitet. Dabei zeigt sich, daß die Zahl der zu unterscheidenden Zustände schon bei kleineren Systemen verhältnismäßig groß ist. Durch ein Iterationsverfahren, bei dem für n Abnehmerleitungen nur $(n+1)$ Unbekannte auftreten, erlaubt das Verfahren auch größere Systeme numerisch zu berechnen. Die abgeleiteten Zustandsgleichungen für Verlustsysteme lassen sich so umformen, daß sie dieselbe rekursive Form erhalten, wie sie für einstufige Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit aus der Literatur bekannt sind. Dasselbe gilt für Wartesysteme.

Vergleicht man die Herleitung beider Beziehungen, so stellt man fest, daß beim Übergang vom Verlustsystem auf das Wartesystem die Beziehung der Zustandsgleichungen für die 1-stufige Koppelanordnung im Verlustsystem ersetzt werden muß durch die entsprechende Form des Wartesystems.

Dieses Prinzip der Verallgemeinerung kann - wie anschließend gezeigt wird - auch auf andere aus der Literatur bekannte Verfahren zur Berechnung der Verkehrsgrößen von mehrstufigen Ver-

lustsystemen mit konjugierter Wahl angewendet werden. Die Genauigkeit der so gewonnenen Methoden für die Berechnung von Wartewahrscheinlichkeit und mittlerer Wartezeit von mehrstufigen Wartesystemen wird in den folgenden Abschnitten untersucht.

2.1 Betrieb als Verlustsystem

Im System nach Bild 2.1 seien zunächst keine Warteplätze vorhanden. Die Koppelanordnung arbeitet damit als Verlustsystem. Die Berechnung von Verkehrsgrößen für Systeme mit zweistufiger Mischwahl ist bereits in mehreren Arbeiten behandelt worden. Von K. Kümmerle [18] sind u.a. solche Verfahren zusammengestellt und miteinander verglichen worden.

Die exakten Verfahren führen auf sehr große Gleichungssysteme, deren Auflösung mit Digitalrechnern nur für kleine Systeme gelingt. Für in der Praxis vorkommende Systeme müssen fast ausschließlich Näherungsverfahren verwendet werden. Diese gehen von bestimmten Modellvorstellungen aus, welche die Zusammenhänge der Verkehrsgrößen innerhalb der Koppelanordnung genügend genau approximieren, jedoch eine vereinfachte Berechnung erlauben. Die systematische Analyse der Näherungsverfahren durch K. Kümmerle [17], [18] ergab, daß Näherungsverfahren, welche hinreichend genaue Ergebnisse liefern, die folgenden Zusammenhänge nur teilweise oder überhaupt nicht berücksichtigen müssen:

- (a) Die gegenseitige funktionelle Abhängigkeit zwischen den Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zwischenleitungen und der Abnehmerleitungen.
(b) Die statistische Abhängigkeit zwischen den Belegungszuständen der Zwischenleitungen und der Abnehmerleitungen.

In diesem Abschnitt wird ein neues Verfahren hergeleitet, das Näherungsannahmen nach (a) und (b) vermeidet. Dieses ist für bestimmte Strukturen exakt, für andere ergibt es ausgezeichnete Näherungslösungen. Als einzige Näherung wird angenommen, daß die Verteilungen p1(x1), p2(x2), ..., pg1(xg1) der Belegungen

in den Zubringerteilgruppen 1,2,...,g1 voneinander unabhängig sind. Mit dieser Voraussetzung kann die Lösung für das Verlustsystem (und Wartesystem) hergeleitet werden. Dabei treten weit weniger Zustände im System auf, die unterschieden werden müssen, als bei einer exakten Lösung nach G. Basharin [11]. Vergleiche mit Simulation und dem exakten Verfahren haben gezeigt, daß mit obiger Voraussetzung außerordentlich gute Ergebnisse gewonnen werden. Der Rechenaufwand kann jedoch unter Umständen auch hier erheblich sein und die Berechnung größerer Systeme ausschließen.

2.1.1 Ein neues Verfahren mit Zustandsgleichungen (ZBMV)

Bei der Ableitung der Zustandsgleichungen wird vom "statistischen Gleichgewicht" ausgegangen. Dabei müssen die Wahrscheinlichkeiten für die Ende-Übergänge a u s dem Zustand {x1,x2,...,xg1} und die Einfall-Übergänge in den Zustand {x1,x2,...,xg1} für alle möglichen Nachbarzustände betrachtet werden. Diese Zustände kann man sich auf einen g1-dimensionalen Zustandsraum abgebildet denken.

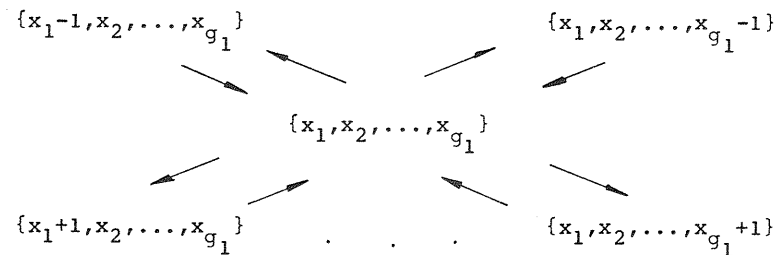


Bild 2.2 Der Zustand {x1,x2,...,xg1} und seine Nachbarzustände

Die Wahrscheinlichkeit, mit welcher der Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{g_1}\}$ auftritt, sei $p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$.

Im Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{g_1}\}$ sind $x = \sum_{i=1}^{g_1} x_i$ Abnehmerleitungen belegt.

A) Übergänge, bei denen der betrachtete Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ verschwindet.

a) Der Übergang vom Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ in den

Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}\}$.

Die Wahrscheinlichkeiten für das Bestehen des Zustandes $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$

und das Übergehen in den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}\}$

bei Enden einer der x_i Belegungen im Intervall $(t, t+\delta t)$ ist

$$p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) x_i \frac{\delta t}{t_m} + o(\delta t) \quad (2.1)$$

Der Faktor $1/t_m$ ist die Endedichte der Vert. $P(>t) = e^{-t/t_m}$. In Gleichung (2.1) sind in der Funktion $o(\delta t)$ alle Glieder höherer Ordnung von δt enthalten. Beim Grenzübergang $\delta t \rightarrow 0$ geht auch $o(\delta t) \rightarrow 0$.

b) Der Übergang vom Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ in

den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{g_1}\}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen des Zustandes $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ und das Übergehen in den Zustand

$\{x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{g_1}\}$ durch Einfall eines Rufes in das i -te

Koppelvielfach der ersten Stufe im Intervall $(t, t+\delta t)$ ist

(2.2)

$$p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot c_{A_i} \delta t + o(\delta t)$$

Dabei ist die Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1})$

jene Wahrscheinlichkeit, mit der ein in das Koppelvielfach i einfallender Ruf im Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ durchgeschaltet werden kann. Falls die Durchschaltung g_1 für diesen Belegungszustand möglich ist, hat μ_1 den Wert 1, sonst ist $\mu_1 = 0$.

B) Übergänge, bei denen der betrachtete Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ entsteht.

a) Der Übergang vom Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}\}$

in den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen des Zustandes $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}\}$ und das Übergehen in den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ bei Einfall eines Rufes in das i -te Koppelvielfach der ersten Stufe im Intervall $(t, t+\delta t)$ ist

(2.3)

$$p(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) c_{A_i} \delta t + o(\delta t)$$

b) Der Übergang vom Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{g_1}\}$

in den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen des Zustandes $\{x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{g_1}\}$ und das Übergehen in den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ durch Enden einer der (x_{i+1}) Belegungen

im Intervall $(t, t+\delta t)$ ist

$$p(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{g_1}) \cdot (x_i+1) \cdot \frac{\delta t}{t_m} + o(\delta t) \quad (2.4)$$

C) Das statistische Gleichgewicht

Für jeden Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{g_1}\}$ gilt im statistischen Gleichgewicht, daß die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten von diesem Zustand in alle Nachbarzustände gleich der Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten von den Nachbarzuständen in diesen Zustand ist. Bei den bisher betrachteten Übergängen wurde immer nur ein Koppelvielfach i betrachtet. Für das statistische Gleichgewicht muß über alle i summiert werden.

Aus den Gleichungen (2.1), (2.2) und (2.3), (2.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot x_i \cdot \frac{\delta t}{t_m} \quad (2.5) \\ & + \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) c_{A_i} \delta t + o(\delta t) \\ & = \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) c_{A_i} \delta t \\ & + \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{g_1}) \cdot (x_i+1) \cdot \frac{\delta t}{t_m} + o(\delta t) \end{aligned}$$

Wegen der Voraussetzung der Unabhängigkeit aller $p_i(x_i)$ gilt

$$p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \dots p_{g_1}(x_{g_1}) \quad (2.6)$$

Mit Gleichung (2.5) und (2.6) kann gezeigt werden, daß die Übergänge

$$\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\} \rightleftharpoons \{x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{g_1}\}$$

gleichwahrscheinlich sind (siehe Anhang 2).

Dasselbe gilt für die Übergänge

$$\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\} \rightleftharpoons \{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}\}$$

Die Gleichung (2.5) läßt sich damit wesentlich vereinfachen.

Benützt man noch die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot x_i = p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}) \cdot x \quad (2.7)$$

mit $x = \sum_{i=1}^{g_1} x_i$, $x \leq n$, so liefert (2.5) durch den Grenzübergang $\delta t \rightarrow 0$ die folgende Beziehung für die Zustandsgleichungen:

$$\begin{aligned} & p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot x = \quad (2.8) \\ & \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \cdot \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) A_i \end{aligned}$$

A_i ist das Angebot für die i -te Zubringerteilgruppe. Es ergibt sich aus $A_i = c_{A_i} t_m$.

Die Beziehung (2.8) ist ein lineares Gleichungssystem, das sich mit bekannten Methoden auf einem Digitalrechner lösen läßt. Man erhält als Lösung die Zustandswahrscheinlichkeit $p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$ und kann damit die interessierenden Verkehrsgrößen bestimmen.

Schon bei verhältnismäßig kleinen Systemen ist die Anzahl der zu betrachtenden Zustände so groß, daß man gezwungen ist,

Symmetrie-Eigenschaften auszunützen. Im folgenden wird beschrieben, wie der Grad des Gleichungssystems durch Ausnützen der Symmetrie-Eigenschaften erheblich reduziert werden kann.

D) Reduzierung der zu betrachtenden Zustände durch Symmetrie

Sind im Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ alle x_i gleich, so gibt es nur eine zugehörige Anordnung der x_i auf den g_1 Zubringerteilgruppen. Falls jedoch alle x_i verschieden sind, so gibt es insgesamt $g_1!$ solche Anordnungen $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$, die sich nur durch eine andere Permutation der x_i unterscheiden. Wegen des symmetrischen Aufbaues der Mischw.-St. und gleichem A_i nach Bild 2.1, sind jedoch alle $p_i(x_i)$ gleich, also

$$p_1(x_i) = p_2(x_i) = \dots = p_{g_1}(x_i) \quad (2.9)$$

Damit treten alle $g_1!$ Permutationen der Zustände $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Für alle $g_1!$ Belegungsmuster, welche dasselbe g_1 -Tupel aus unterschiedlichen Belegungen x_i enthalten, reduziert sich also die zu betrachtende Anzahl der Zustände von $g_1!$ auf 1.

Gibt es innerhalb der Zubringerteilgruppen a_j Klassen mit gleichem x_i , so treten

$$\frac{g_1!}{a_1! a_2! \dots a_j!}$$

verschiedene Zustände mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf, die sich nur durch die Anordnung der x_i unterscheiden.

Nützt man die angegebenen Symmetrie-Eigenschaften aus, so läßt sich die Anzahl der zu unterscheidenden Zustände und damit der Grad des zugehörigen linearen Gleichungssystems erheblich reduzieren.

In der folgenden Tabelle ist die noch verbleibende Anzahl von Zuständen einiger Systeme gegenübergestellt:

g_1	k_1	g_2	k_2	Zahl der Zustände nach der Reduzierung	Zahl der Zustände bei exakter Lösung (vgl. [11], [12])
10	3	3	2	15	33
6	3	3	2	15	33
4	2	2	3	10	17
3	2	2	2	8	9
6	3	3	5	76	$> 10^5$

Tabelle 2.1 Anzahl der Zustände für kleinere Systeme

Aus der Tabelle 2.1 erkennt man, daß bei größeren Systemen die Zahl der Unbekannten so stark ansteigen kann, daß trotz Ausnützung der Symmetrie-Eigenschaften die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems mittels Digitalrechnern infrage gestellt ist.

E) Die Verlustwahrscheinlichkeit

Aus dem linearen Gleichungssystem (2.8) erhält man durch Auflösen mittels Digitalrechner die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$. Die in dem Gleichungssystem (2.8) auftretenden Durchlasswahrscheinlichkeiten $\mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$ sind mittels eines speziellen Unterprogrammes bei der numerischen Auswertung verhältnismäßig einfach zu bestimmen, vgl. Abschnitt 2.1.2.

Mit der Durchlasswahrscheinlichkeit und den Zustandswahrscheinlichkeiten läßt sich die Verlustwahrscheinlichkeit B berechnen:

$$B = \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot (1 - \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1})) / g_1 \quad (2.9a)$$

mit $\sum_{i=1}^{g_1} x_i = x \leq n$

Das hier abgebildete Verfahren zur Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit von Linkssystemen mit zweistufiger Mischwahl sei mit ZBMV bezeichnet (Zustandsgleichungen zur Berechnung zweistufiger Mischwahl als Verlustsystem).

Im nächsten Abschnitt werden die nach ZBMV gewonnenen Verlustwahrscheinlichkeiten (vgl. Tabelle 2.1 und 2.2) von zwei kleineren Systemen den Ergebnissen der exakten Lösung nach G. Basharin [11] und der im nächsten Abschnitt abgeleiteten Iterationsmethode gegenübergestellt. Ein Vergleich beider Verfahren ergibt eine außerordentlich gute Übereinstimmung mit den exakten Werten.

2.1.2 Eine neue iterative Lösung (IBMV)

Im folgenden wird eine iterative Lösung zur Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten entwickelt. Das Verfahren führt bei n Abnehmerleitungen auf ein nichtlineares Gleichungssystem mit (n+1) Unbekannten. Es wird ein Algorithmus angegeben, nach dem dieses System iterativ gelöst werden kann.

Kennt man aus den Zustandsgleichungen (2.8) die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit "x Abnehmerleitungen belegt" aus folgender Summation:

$$p(x) = \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}) \quad (2.10)$$

und der einschränkenden Bedingung $x = \sum_{i=1}^{g_1} x_i, x \leq n$

Mit dieser Einschränkung werden in Gleichung (2.10) nur solche Muster zugelassen, die einen Beitrag zu p(x) leisten.

Führt man die Summation von Gleichung (2.10) auf beiden Seiten von (2.8) durch, so ergibt sich

$$p(x) \cdot x = \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \cdot \mu(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i \quad (2.11)$$

mit der einschränkenden Bedingung $x = \sum_{i=1}^{g_1} x_i$.

Erweitert man Gleichung (2.11) auf der rechten Seite mit $A \cdot p(x-1)$ und führt außerdem noch die pauschale Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x)$ ein, so erhält man

$$p(x) \cdot x = A p(x-1) \cdot \mu(x-1) \quad (2.12)$$

Die pauschale Durchlasswahrscheinlichkeit ergibt sich dabei zu

$$\mu(x) = \frac{\sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot \mu(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i}{A \cdot \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})} \quad (2.13)$$

mit der einschränkenden Bedingung $x = \sum_{i=1}^{g_1} x_i$. Wie in

Gleichung (2.9) kann mit der Unabhängigkeitsvoraussetzung für $p_i(x_i)$ die Zustandswahrscheinlichkeit $p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$ auch als Produkt von z.B. $p_i(x_i)$ geschrieben werden.

$$p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) = \prod_{i=1}^{g_1} p_i(x_i) \quad (2.13a)$$

Mit der in (2.13) definierten pauschalen Durchlasswahrscheinlichkeit nimmt Gleichung (2.12) die gleiche Form an wie bei einer einstufigen Koppelanordnung. Bei einer ein-

stufigen Koppelanordnung ermittelt man die Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x)$ als das Verhältnis der gesperrten Belegungsmuster zu allen möglichen Belegungsmustern (siehe Abschnitt 1.3, Seite 11).

Die hier definierte Beziehung für $\mu(x)$ kann man so interpretieren, daß die Musterwahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$ mit den zugehörigen Durchlasswahrscheinlichkeiten $\mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$ und den Teilangeboten A_i gewichtet sind.

Nach Voraussetzung sind alle $p_i(x_i)$ voneinander unabhängig. Wegen Symmetrie und gleichverteiltem Angebot $A_i = A/g_1$ sind alle $p_j(x_i)$ gleich ($1, 2, \dots, j, \dots, g_1$), siehe Gleichung (2.9), (2.13a). Die Zustandswahrscheinlichkeiten des Abnehmerbündels lassen sich deshalb als Funktion von $p_1(x_i)$ angeben.

$$p(0) = p_1(0)^{g_1}$$

$$p(1) = g_1 \cdot p_1(0)^{g_1-1} \cdot p_1(1)$$

$$p(2) = g_1 \cdot p_1(0)^{g_1-1} \cdot p_1(2) + \frac{g_1!}{(g_1-2)!2!} \cdot p_1(0)^{g_1-2} \cdot p_1(1)^2$$

⋮

Umgekehrt lassen sich alle $p_1(x_i)$ als Funktion von $p(x)$ angeben.

$$p_1(0) = \sqrt[g_1]{p(0)}$$

$$p_1(1) = \frac{1}{g_1 \cdot p_1(0)^{g_1-1}} \cdot p(1) \tag{2.14}$$

$$p_1(2) = \frac{1}{g_1 \cdot p_1(0)^{g_1-1}} \cdot \left\{ p(2) - \frac{g_1!}{(g_1-2)!2!} \cdot p_1(0)^{g_1-2} \cdot p_1(1)^2 \right\}$$

⋮

Bei bekannter Verteilung $p(x)$ lassen sich nacheinander alle $p_1(x_i)$ bestimmen. Damit läßt sich nun folgender Algorithmus angeben:

- (1) Die Verteilung $p(x)$ wird angenommen
z.B. Erlang-Verteilung
- (2) Mit Gleichung (2.14) wird $p_1(x_i)$ ermittelt
- (3) Bei bekannten $p_1(x_i)$ läßt sich $\mu(x)$ nach Gleichung (2.13) berechnen
- (4) Mit der Rekursionsformel (2.12) lassen sich alle neuen $p(x)$ bestimmen
- (5) Die Schritte (2) bis (4) werden so lange wiederholt, bis bei der v -ten Iteration eine vorgeschriebene Schranke ϵ für die Abweichung von z.B. $|p_v(0) - p_{v-1}(0)| < \epsilon$ unterschritten wird.

Der angegebene Algorithmus liefert eine Näherung für die Verteilung $p(x)$. Die Verlustwahrscheinlichkeit läßt sich aus der Verteilung $p(x)$ und den pauschalen Durchlasswahrscheinlichkeiten $\mu(x)$ (aus Gleichung (2.13)) mit folgender Gleichung bestimmen:

$$B = \sum_{x=k_1}^n p(x) \cdot (1-\mu(x)) \tag{2.14a}$$

Bemerkungen zur Berechnung der Durchlasswahrscheinlichkeiten

Die Ermittlung der Durchlasswahrscheinlichkeit führt auf folgendes Problem:

Gegeben sei eine Matrix a_{ij} mit g_1 Spalten und $g_2 = k_1$ Zeilen. Die Elemente a_{ij} können die Werte 0 oder 1 annehmen.

- (a) In jeder Spalte i ist x_i die Zahl der Einsen (Belegungen) im Koppelvielfach der ersten Stufe.
- (b) Bedingung: In keiner Zeile j dürfen mehr als k_2 Einsen sein.

Die Berechnung von $\mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1})$ für ein bestimmtes Muster ist einfach. Es muß anhand des gegebenen Musters von Einsen in a_{ij} geprüft werden, ob in Spalte i eine weitere Eins eingefügt werden kann, ohne daß die Bedingung (b) verletzt wird. Ist dies möglich, so wird $\mu_1 = 1$ für dieses Muster, andernfalls $\mu_1 = 0$.

Alle Belegungszustände, welche sich aus möglichen Permutationen der Einsen in den Spalten ergeben und die Bedingungen (a) und (b) erfüllen, treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1})$ auf. Aus programmtechnischen Gründen ist es zweckmäßig, alle diese Permutationen in einem Unterprogramm zu erzeugen und gleichzeitig jeweils das zugehörige μ_1 zu bestimmen.

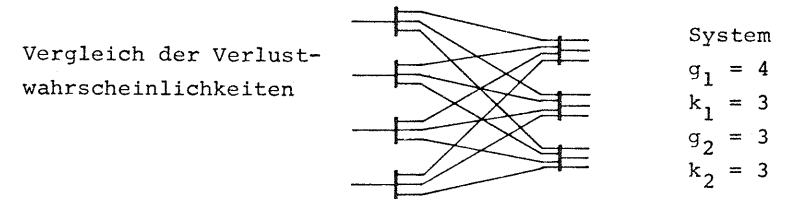
Das hier entwickelte Iterationsverfahren werde in Analogie zu ZBMV (Zustandsgleichungen zur Berechnung zweistufiger Mischwahl als Verlustsystem, Abschnitt 2.1.1) mit IBMV bezeichnet (Iterative Berechnung von zweistufiger Mischwahl als Verlustsystem).

Gegenüberstellung von numerischen Ergebnissen nach ZBMV, IBMV und exakten Werten

Als Beispiel sind für zwei kleinere Systeme in Tabelle 2.1 und 2.2 die Verlustwahrscheinlichkeiten nach dem Verfahren ZBMV und IBMV als Funktion des Verkehrsangebotes berechnet und den exakten Ergebnissen nach G. Basharin [11] gegenübergestellt.

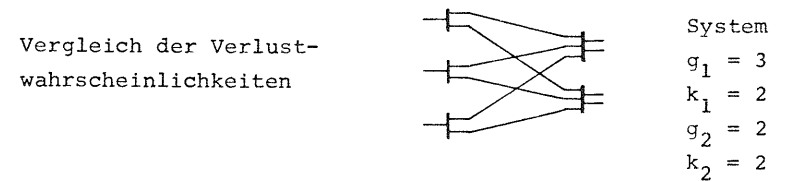
Angebot in Erlang	1.0	2.5	5	15
exakt	$2.0480_{10^{-3}}$	$2.3050_{10^{-2}}$	$1.1135_{10^{-1}}$	$5.0046_{10^{-1}}$
ZBMV	$2.0443_{10^{-3}}$	$2.2958_{10^{-2}}$	$1.1122_{10^{-1}}$	$5.0082_{10^{-1}}$
IBMV	$2.0444_{10^{-3}}$	$2.2963_{10^{-2}}$	$1.1125_{10^{-1}}$	$5.0083_{10^{-1}}$

Tabelle 2.1



Angebot in Erlang	0.30215	1.20429	2.09210	4.49770
exakt	$4.9094_{10^{-3}}$	$6.7409_{10^{-2}}$	$1.6405_{10^{-1}}$	$4.0075_{10^{-1}}$
ZBMV	$4.9111_{10^{-3}}$	$6.7516_{10^{-2}}$	$1.6432_{10^{-1}}$	$4.0109_{10^{-1}}$
IBMV	$4.9094_{10^{-3}}$	$6.7409_{10^{-2}}$	$1.6405_{10^{-1}}$	$4.0075_{10^{-1}}$

Tabelle 2.2



Beide Verfahren ZBMV und IBMV liefern exakte Werte für die Verlustwahrscheinlichkeit solcher Systeme, für welche die angenommene Unabhängigkeit der Verteilungen $p_1(x_1), p_2(x_2), \dots, p_{g_1}(x_{g_1})$ der Belegungen in den Zubringerteilgruppen $1, 2, \dots, g_1$ tatsächlich erfüllt ist. Solch ein System ist z.B. $g_1=3, k_1=2, g_2=2, k_2=3$ bei dem Blockierung nur in der ersten Stufe auftritt.

Wegen des verhältnismäßig hohen Rechenzeitaufwandes für die exakte Lösung beschränkt sich die numerische Gegenüberstellung der Ergebnisse auf zwei kleinere Systeme. Für beide Systeme ergeben sich erstaunlich genaue Ergebnisse aus den Näherungsverfahren. Das Iterationsverfahren IBMV nach Abschnitt 2.1.2 hat jedoch den Vorteil, daß bei der Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten wesentlich weniger Zustände berücksichtigt werden müssen (vgl. Tabelle 2.1, Seite 32).

Für ein etwas größeres System mit 15 Abnehmerleitungen wurden Simulationsergebnisse zum Vergleich der Ergebnisse nach ZBMV und IBMV herangezogen. Die exakte Berechnung nach G. Basharin [11] scheitert an der großen Anzahl der auftretenden Unbekannten ($>10^5$).

Eine ausführliche Beschreibung der Simulation von Vermittlungssystemen und eines vorgegebenen Fernsprechverkehrs mittels Digitalrechner findet man in der Literatur [7], [8], [9], [10].

Für die Ermittlung des Vertrauensintervalls der Simulationsergebnisse wurde die t-Verteilung nach "Student" verwendet. Dies gilt für alle in dieser Arbeit durchgeführten Simulationstests. Für das System $g_1=6, k_1=3, g_2=3, k_2=5$ sind auf Seite 34, Diagramm 2.1, die Simulationsergebnisse für den Verlust B mit einem Vertrauensintervall von 95 % Sicherheit zu den errechneten Werten eingezeichnet. Die errechneten Werte des Verlustes nach ZBMV und nach dem Iterationsverfahren IBMV ergaben so geringe numerische Abweichungen, daß sie in Diagramm 2.1 nicht zu unterscheiden sind.

Zum Vergleich ist in Diagramm 2.1 die Wartewahrscheinlichkeit für das sonst gleiche System, jedoch mit einer unbegrenzten Anzahl von Wartepätzen, eingezeichnet.

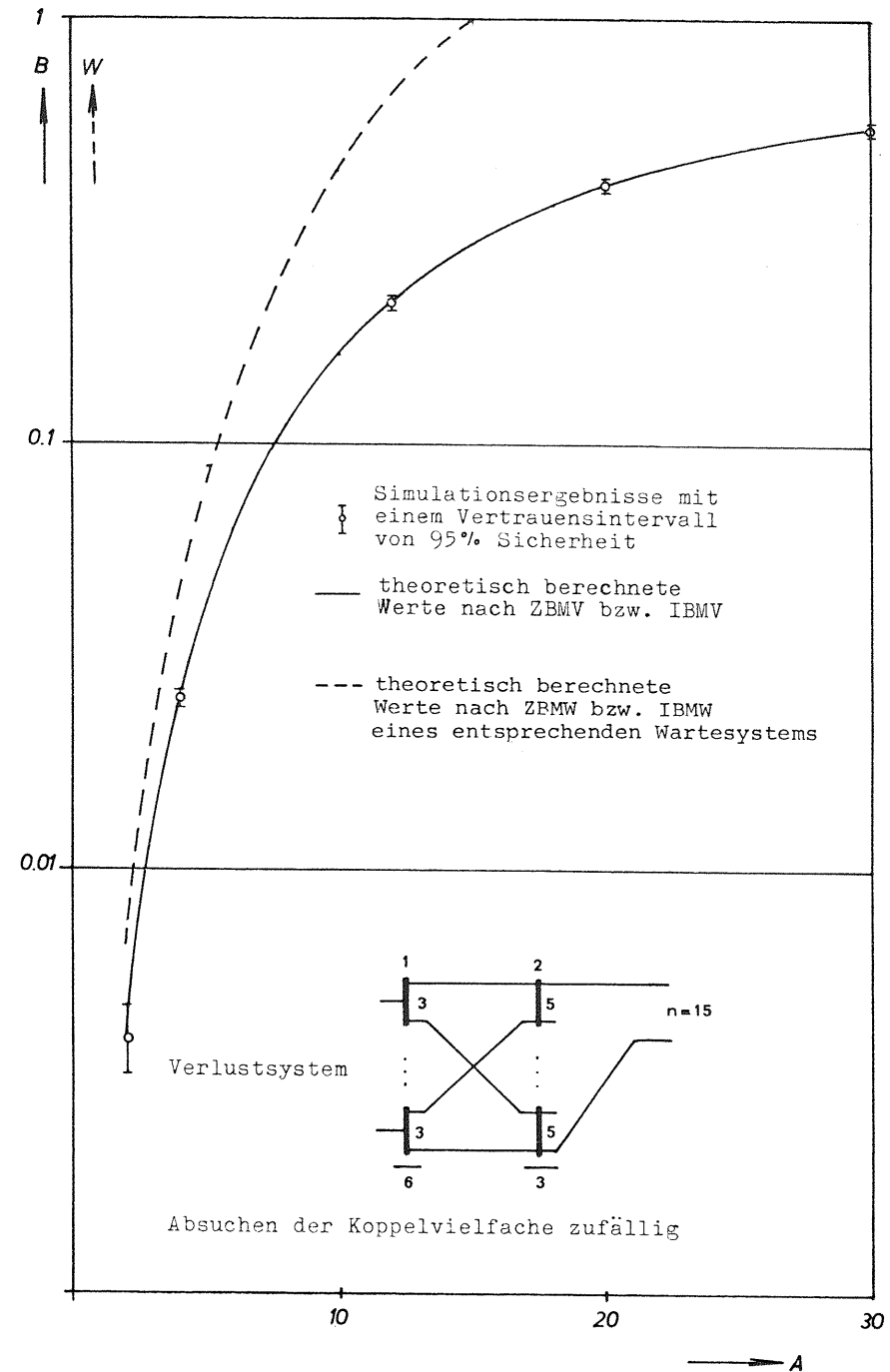


Diagramm 2.1

Der Verlust B über dem Angebot A

2.2 Zweistufige Mischwahanordnung im Betrieb als Wartesystem

2.2.1 Ein neues Verfahren mit Zustandsgleichungen (ZBMW)

Im vorigen Abschnitt 2.1 wurde ein Verlustsystem betrachtet, ein System also, bei dem keine Warteplätze vorhanden sind. Nun werden die Zustandsgleichungen aufgestellt für den Fall, daß vor jeder Zubringerteilgruppe eine praktisch unbegrenzte Anzahl von Warteplätzen zur Verfügung steht. Es wird von derselben Voraussetzung ausgegangen, nämlich, daß die Verteilungen in den Zubringerteilgruppen voneinander unabhängig sind.

Für das Aufstellen der Zustandsgleichungen muß man von dem Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{g_1}, z\}$ ausgehen, daß nämlich x_1, x_2, \dots, x_{g_1} Leitungen in den Zubringerteilgruppen belegt sind und außerdem noch z Wartende im System sind. Bei den z Wartenden wird nicht unterschieden, vor welcher Zubringerteilgruppe ein Ruf wartet (vgl. Thierer [4]). In systematischer Weise sind dann alle Nachbarzustände in dem nun (g_1+1) -dimensionalen Zustandsraum zu betrachten. In Bild 2.2 muß also eine weitere Dimension z , die Anzahl der Wartenden, berücksichtigt werden (s.S.20). Nach obiger Voraussetzung kann zur Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}, z)$ im folgenden davon ausgegangen werden, daß im statistischen Gleichgewicht das Entstehen des Zustandes $\{x_1, \dots, x_{g_1}, z\}$ infolge Eintreffens eines neuen Rufes die gleiche Wahrscheinlichkeit hat wie das Verschwinden dieses Zustandes durch Enden einer Belegung (vgl. M. Thierer [4]).

Bei Rufeinfall wird zur Beschreibung der Übergänge die Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$ benötigt. Diese ist bereits im Abschnitt 2.1, in Gleichung (2.2) definiert worden. Außerdem wird die Sperrwahrscheinlichkeit

$$\sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}) = 1 - \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$$

verwendet.

Endet eine Belegung, so bedeutet im folgenden

$\rho_1(x_1, x_2, \dots, x_1, \dots, x_{g_1}, z)$ die Wahrscheinlichkeit, mit der im Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_1, \dots, x_{g_1}, z\}$ keiner der wartenden

den z Rufe die freigewordene Leitung erreichen kann. In diesem Fall sind alle z wartenden Rufe in Warteschlangen vor solchen Zubringerteilgruppen, die trotz Endigens einer Belegung weiterhin gesperrt bleiben.

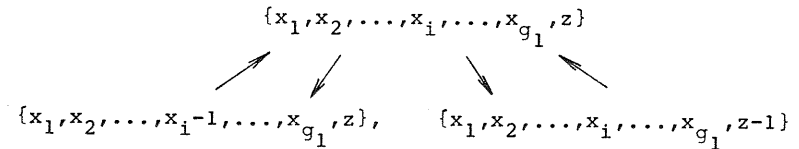


Bild 2.3 Darstellung der gleichwahrscheinlichen Übergänge

a) Rufeinfall

Beim Eintreffen eines Rufes entsteht der Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z\}$ entweder aus dem Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}, z\}$ falls der eingetroffene Ruf durchgeschaltet werden kann, oder aus dem Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z-1\}$ falls keine freie Abnehmerleitung erreicht werden kann.

Die Wahrscheinlichkeit für das Entstehen des Zustandes $\{x_1, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z\}$ durch Rufeinfall ist also:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z-1) \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) c_{A_i} \cdot \delta t + p(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}, z) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) c_{A_i} \delta t + o(\delta t) \tag{2.15}$$

b) Enden einer Belegung

Das Verschwinden des Zustandes $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z\}$ durch Enden einer Belegung im Abnehmerbündel ergibt entweder den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}, z\}$ falls keiner der z Wartenden die frei gewordene Leitung er-

reicht oder den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z-1\}$, wenn die frei gewordene Leitung durch einen wartenden Ruf belegt werden kann.

Die Wahrscheinlichkeit für das Verschwinden des Zustandes $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z\}$ durch Enden einer Belegung ist damit

$$\begin{aligned}
 & p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z) \cdot \rho_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z) \cdot \frac{x_i}{t_m} \cdot \delta t \\
 & + p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z) (1 - \rho_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z)) \frac{x_i}{t_m} \delta t + o(\delta t) \\
 & = p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot \frac{x_i}{t_m} \cdot \delta t + o(\delta t) \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten nach Gleichung (2.15) für das Entstehen des Zustandes $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z\}$ werden nun gleichgesetzt den Wahrscheinlichkeiten (2.16) für das Verschwinden dieses Zustandes. Dabei muß über alle Ereignisse in den g_1 Koppelvielfachen der ersten Stufe aufsummiert werden. Führt man den Grenzübergang $\delta t \rightarrow 0$ durch und setzt $A_i = c_{A_i} \cdot t_m$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z) \cdot x_i \quad (2.17) \\
 & = \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z-1) \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) A_i \\
 & + \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}, z) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) A_i
 \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung kann man eine Rekursionsformel für die Wahrscheinlichkeiten der Zustände $\{x_1, x_2, \dots, x_{g_1}, z\}$ ableiten. Dazu müssen die Randbedingungen des Systems beachtet werden. Es existieren nur Zustände und deren zugehörige Wahrscheinlichkeiten, für die gilt:

$$\begin{aligned}
 x_i & = 0, 1, \dots, k_1, \quad \sum_{i=1}^{g_1} x_i \leq n \\
 z & = 0, 1, \dots \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Andererseits muß die Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten gleich 1 sein

$$\sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} \sum_{z=0}^{\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}, z) = 1 \quad (2.19)$$

Aus der Zustandswahrscheinlichkeit $p(x_1, \dots, x_{g_1}, z)$ kann z eliminiert werden durch Aufsummieren über alle z .

$$p(x_1, \dots, x_{g_1}) = \sum_{z=0}^{\infty} p(x_1, \dots, x_{g_1}, z) \quad (2.20)$$

Summiert man die Gleichung (2.17) über alle z auf und beachtet dabei die Randbedingungen (2.18) sowie Gleichung (2.20), so ergibt sich folgende Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{g_1} x_i p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \quad (2.21) \\
 & = \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i \\
 & + \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i
 \end{aligned}$$

Aus der Beziehung (2.21) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntenen Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, \dots, x_{g_1})$. Die Zahl der in (2.21) zu unterscheidenden Zustände kann eingeschränkt werden, wenn wie beim Verlustsystem (vgl. Abschnitt 2.1) die Symmetrie-Eigenschaften ausgenutzt werden.

A) Die Berechnung der Wartewahrscheinlichkeit W

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein ankommender Ruf im System warten muß, wird Wartewahrscheinlichkeit W genannt. Ein eintreffender Ruf in der Zubringerteilgruppe i findet mit der Wahrscheinlichkeit $p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1})$ den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ vor.

Die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Ruf nicht durchgeschaltet werden kann, daß er also warten muß, ist $\sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1})$.

Bei gleichverteiltem Angebot $A_i = A/g_1$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß der eintreffende Ruf einer bestimmten Zubringerteilgruppe i angehört gleich $1/g_1$.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf in ein bestimmtes Koppelvielfach i der ersten Stufe einfällt und sowohl den Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}\}$ antrifft als auch warten muß ist

$$p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) / g_1$$

Die Wartewahrscheinlichkeit des gesamten Systems erhält man durch Summation über alle möglichen Rufeinfälle in einer der g_1 Zubringerteilgruppen und über alle möglichen Zustände:

$$W = \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) / g_1 \quad (2.22)$$

Dazu müssen die Randbedingungen nach (2.18) beachtet werden.

B) Die Berechnung der mittleren Wartezeit

Die mittlere Wartezeit t_W einer der wartenden Rufe ist gleich der mittleren Anzahl Ω der gleichzeitig Wartenden, bezogen

auf die mittlere Anzahl $c_A \cdot W$ der in der Zeiteinheit eintreffenden Rufe, die warten müssen.

$$t_W = \frac{\Omega}{c_A \cdot W} \quad (2.23)$$

Die Anzahl der im Mittel gleichzeitig wartenden Rufe wird auch Wartebelastung Ω genannt. Ω kann als Erwartungswert aus den Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$ berechnet werden.

$$\Omega = \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} \sum_{z=1}^{\infty} z \cdot p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}, z) \quad (2.24)$$

Zunächst wird jener Beitrag zu Ω berechnet, der im Zustand $\{x_1, x_2, \dots, x_{g_1}, z\}$ entsteht. Er ergibt sich aus

$$\omega(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}) = \sum_{z=1}^{\infty} z \cdot p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}, z) \quad (2.25)$$

Dazu wird die Rekursionsformel für die Zustandswahrscheinlichkeiten (2.17) mit z durchmultipliziert:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{g_1} z \cdot x_i p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z) \quad (2.26) \\ &= \sum_{i=1}^{g_1} z \cdot p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}, z-1) \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i \\ &+ \sum_{i=1}^{g_1} z \cdot p(x_1, x_2, \dots, x_i-1, \dots, x_{g_1}, z) \cdot \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i-1, \dots, x_{g_1}) A_i \end{aligned}$$

Mit der Abkürzung (2.25) ergibt sich aus Gleichung (2.26) durch Aufsummieren über alle z:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{g_1} x_i \omega(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \\ &= \sum_{i=1}^{g_1} \omega(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) A_i \\ &+ \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \sigma_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) A_i \quad (2.27) \\ &+ \sum_{i=1}^{g_1} \omega(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) A_i \end{aligned}$$

Die Größen $\omega(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1})$ und $p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1})$ hängen nicht vom Summationsindex i ab, so daß aus (2.27) folgt

$$\begin{aligned} & \omega(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}) \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{g_1} (x_i - \alpha_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) A_i)} \left\{ \sum_{i=1}^{g_1} \omega(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) A_i \right. \\ & \quad \left. + p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}) \sum_{i=1}^{g_1} \alpha_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) A_i \right\} \quad (2.28) \end{aligned}$$

Die gesamte Wartebelastung erhält man durch Einsetzen von Gleichung (2.28) in (2.24):

$$\Omega = \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} \omega(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}) \quad (2.29)$$

Dazu müssen die Randbedingungen nach Gleichung (2.18) beachtet werden.

Mit bekanntem Ω läßt sich mit Gleichung (2.23) die mittlere Wartezeit t_W bestimmen. Die mittlere Wartezeit t_W bezogen auf die mittlere Belegungsdauer t_m wird mit τ_W bezeichnet. Benützt man $A = c_A \cdot t_m$ so erhält man aus Gleichung (2.23) und mit (2.22)

$$\tau_W = \frac{\Omega}{A \cdot W} \quad (2.29a)$$

In Anlehnung an die Bezeichnung ZBMV (Zustandsgleichungen für die Berechnung von zweistufiger Mischwahl als Verlustsystem) soll die hier abgeleitete Methode zur Berechnung der Verkehrsgrößen des Wartesystems ZBMV genannt werden (Zustandsgleichungen für die Berechnung von zweistufiger Mischwahl als Wartesystem).

In den Diagrammen 2.2 bis 2.5 sind die durchgezogenen Kurven für die Wartewahrscheinlichkeit und die mittlere Wartezeit nach ZBMV berechnet. Die Simulationstests bestätigen, daß bei den untersuchten Systemen die Annahme der gegenseitigen Unabhängigkeit der Verteilungen in den Zubringerteilgruppen weitgehend erfüllt ist (s. Seite 50, 51, 54, 55).

c) Eine Umformung der Zustandsgleichungen

Die Rekursionsformel (2.21) wird nun mit Hilfe der pauschalen Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x)$ (vgl. Gleichung (2.13))

$$\mu(x) = \frac{\sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) A_i}{A \cdot \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \dots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})}$$

und der pauschalen Sperrwahrscheinlichkeit

$$\sigma(x) = 1 - \mu(x) \quad (2.30)$$

so umgeformt, daß sie dieselbe Form erhält wie die entsprechende Beziehung (A.1) der einstufigen, unvollkommenen erreichbaren Koppelanordnung.

Zunächst ergibt sich mit der Wahrscheinlichkeit "x Abnehmerleitungen belegt"

$$p(x) = \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1})$$

und der einschränkenden Bedingung

$$x = \sum_{i=1}^{g_1} x_i, \quad x \leq n$$

aus der Gleichung (2.21) durch Summation auf beiden Seiten (vgl. Abschnitt 2.1.2)

$$x \cdot p(x) = \sum_{x_1=0}^{k_1} \sum_{x_2=0}^{k_1} \cdots \sum_{x_{g_1}=0}^{k_1} \sum_{i=1}^{g_1} (p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot G_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i + p(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \cdot \mu_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i) \quad (2.31)$$

Erweitert man beide Terme der rechten Seite mit $A \cdot p(x-1)$ und führt $\mu(x)$ bzw. $\sigma(x)$ ein, so ergibt sich

$$p(x) \{x - \sigma(x) A\} = A \cdot p(x-1) \cdot \mu(x-1) \quad (2.32)$$

Die Rekursionsformel (2.32) hat damit dieselbe Form wie jene bei einer einstufigen Koppelanordnung. Die Durchlasswahrscheinlichkeit ist nach Gleichung (2.13) bzw. (2.30) einzusetzen.

2.2.2 Eine neue iterative Lösung (IBMW)

Ohne den "Umweg" über die Zustandsgleichungen läßt sich das Iterationsverfahren in Abschnitt 2.1.2 auch unmittelbar für das Wartesystem verallgemeinern. Man kann davon ausgehen, daß bei

der Ableitung für die iterative Lösung des Wartesystems formal genau so verfahren wird wie für das Verlustsystem unter 2.1. Der einzige Unterschied ergibt sich in der Rekursionsformel für die Zustandswahrscheinlichkeiten des Abnehmerbündels. Anstelle von Gleichung (2.12) muß die Rekursionsformel für die einstufige Koppelanordnung mit Warte n eingeführt werden (siehe Anhang 1, Gleichung (A.O)).

$$p(x) \{x - \sigma(x) A\} = A \cdot p(x-1) \cdot \mu(x-1) \quad (2.33)$$

(Vergleiche (2.33) mit der Ableitung von Gleichung (2.32))

An die Stelle der Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x)$ für die einstufige Koppelanordnung tritt die in Abschnitt 2.1 abgeleitete pauschale Durchlasswahrscheinlichkeit nach Gleichung (2.12). Gegenüber dem Verlustsystem nimmt $\mu(x)$ andere Werte an, weil im Wartesystem auch die in (2.13) auftretenden Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1})$ andere Werte annehmen.

Ähnlich wie in Abschnitt 2.1.2 läßt sich damit folgender Algorithmus für das Iterationsverfahren angeben:

- (1) Die Verteilung $p(x)$ wird angenommen, z.B. die Verteilung des vollkommen erreichbaren Bündels im Wartebetrieb.
- (2) Mit Gleichung (2.14) wird $p_1(x_i)$ ermittelt.
- (3) Bei bekannten $p_1(x_i)$ läßt sich $\mu(x)$ nach Gleichung (2.13) berechnen.
- (4) Mit der Rekursionsformel (2.33) lassen sich alle neuen $p(x)$ bestimmen.
- (5) Die Schritte (2) bis (4) werden so lange wiederholt, bis bei der v-ten Iteration eine vorgeschriebene Schranke ϵ für die Abweichung von z.B. $|p_v(0) - p_{v-1}(0)| < \epsilon$ unterschritten wird.

Nach dem Abbruch der Iteration hat man eine Näherung für die Verteilung $p(x)$.

Aus der Verteilung $p(x)$ läßt sich über die Gleichung (2.14) und (2.13) die pauschale Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x)$ berechnen.

Durch die Umformung der Zustandsgleichungen (2.21) der zweistufigen Koppelanordnung mit Hilfe der eingeführten pauschalen Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x)$ konnte Gleichung (2.32) bzw. (2.33) abgeleitet werden. Die Gleichung (2.32) bzw. (2.33) hat den gleichen Aufbau wie die rekursive Form der Zustandsgleichungen für eine e i n stufige Koppelanordnung (vgl. Anhang 1, Gleichung (A.0)).

Bei der Ableitung der Wartewahrscheinlichkeit W und der mittleren Wartezeit τ_W kann deshalb ein formal gleicher Weg wie bei Thierer [4] verwendet werden. Als Ergebnis erhält man für die Wartewahrscheinlichkeit

$$W = \frac{\sum_{x=1}^n A^x \cdot \frac{\prod_{i=0}^{x-1} \mu(i)}{\prod_{i=1}^x (i - \sigma(i) \cdot A)}}{1 + \sum_{x=1}^n A^x \cdot \frac{\prod_{i=0}^{x-1} \mu(i)}{\prod_{i=1}^x (i - \sigma(i) \cdot A)}} \cdot \sigma(x) \quad (2.34)$$

(Vergleiche Anhang 1, Gleichung (A.3)). Die Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x)$ muß dabei nach Gleichung (2.13) eingesetzt werden.

Mit der durch die Iteration gewonnenen Verteilung $p(x)$ und $\mu(x)$ nach (2.13) läßt sich die Wartewahrscheinlichkeit auch als Erwartungswert direkt anschreiben:

$$W = \sum_{x=1}^n p(x) \cdot (1 - \mu(x))$$

Für die mittlere Wartezeit, bezogen auf die mittlere Belegungsdauer t_m , ergibt sich (vgl. (A.4), Anhang 1)

$$\tau_W = \frac{\sum_{x=k}^n \{p(x) \cdot \sum_{i=k}^n \frac{\sigma(i) \cdot A}{i - \sigma(i) \cdot A}\}}{A \cdot \sum_{x=k}^n p(x) \cdot \sigma(x)} \quad (2.35)$$

Auch hier ist die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x) = 1 - \mu(x)$ gemäß Gleichung (2.13) einzusetzen.

Zur Unterscheidung gegenüber der Methode ZBMW werde das hier angegebene Verfahren zur Berechnung der Wartewahrscheinlichkeit und der mittleren Wartezeit nach Gleichung (2.34) bzw. (2.35) IBMW genannt (Iterative Berechnung von zweistufiger Mischwahl als Wartesystem).

Im Diagramm 2.2 und 2.3 sind für zwei Koppelanordnungen mit zweistufiger Mischwahl Ergebnisse einer Verkehrssimulation für die Wartewahrscheinlichkeit aufgetragen. Die ausgezogene Kurve ist die Wartewahrscheinlichkeit W , berechnet nach IBMW. In der Zeichnung fallen die Werte für W gemäß ZBMW mit derselben Kurve zusammen (s. Seite 50,51).

In analoger Weise sind in Diagramm 2.4 und 2.5 Ergebnisse aus Verkehrstests und theoretisch berechnete Werte nach ZBMW und IBMW für die mittlere Wartezeit eingetragen. Auch hier ergeben ZBMW und IBMW eine Kurve, da beide Verfahren Ergebnisse liefern, die meist erst in der dritten signifikanten Stelle voneinander abweichen (s. Seite 54,55).

Für Systeme mit zweistufiger Mischwahl, für welche die Annahme der Unabhängigkeit der Verteilungen der Belegungen in den Zubringerteilgruppen tatsächlich erfüllt ist, ergeben beide Verfahren ZBMW und IBMW exakte Werte für die Wartewahrscheinlichkeit. Dasselbe trifft zu für die mittlere Wartezeit nach ZBMW. Die Methode IBMW liefert hierfür eine Näherung.

Die Ursache liegt darin, daß bei IBMW nur die pauschalen Zustandswahrscheinlichkeiten $p(0), p(1), \dots, p(n)$ des Abnehmerbündels berechnet werden. Daraus können nicht alle Wahrscheinlichkeiten der gesperrten Muster bestimmt werden, vgl. ZBMW. Die Wartebelastung Ω kann mit den $(n-1)$ Zustandswahrscheinlichkeiten nur näherungsweise bestimmt werden und damit auch die mittlere Wartezeit. Zur Berechnung der Wartewahrscheinlichkeit genügt jedoch die Betrachtung der $(n-1)$ Zustände.

2.2.3 Neues Verfahren CIRBW für zweistufige Mischwahl

Im Abschnitt 2.2.2 wurde gezeigt, wie man von einem Verfahren zur Berechnung von Verkehrsgrößen für Verlustsysteme übergehen kann zur Berechnung von Wartewahrscheinlichkeit und mittlerer Wartezeit für Wartesysteme. Hier wird, ausgehend von dem Verfahren CIRB von A. Lotze [2], [3] (Combined Input Route Blocking) für Verlustsysteme eine Lösung für Wartesysteme hergeleitet. Dieses Näherungsverfahren kann außer für zweistufige Systeme auch für beliebige mehrstufige Koppelanordnungen mit Richtungswahl verwendet werden (vgl. Abschnitt 4).

(a) Die Wartewahrscheinlichkeit W

Der Grundgedanke des Verfahrens ist die Aufspaltung der Wartewahrscheinlichkeit in zwei voneinander unabhängige Teile, die Eingangsblockierung und die Abnehmerblockierung: Fällt ein Ruf in eine bestimmte Zubringerteilgruppe ein, so wird berechnet, mit welcher Wahrscheinlichkeit alle k_1 Ausgänge dieses Koppelvielfaches belegt sind, die Koppelanordnung also schon am Eingang blockiert ist. Unabhängig davon wird berechnet, mit welcher Wahrscheinlichkeit die im Mittel erreichbaren Ausgänge der zweiten Stufe blockiert sind. Diese Hypothese der statistischen Unabhängigkeit ergibt für die Eingangsstufe eine Verteilungsfunktion gleich jener eines Wartesystems mit vollkommener Erreichbarkeit der k_1 Zwischenleitungen je Koppelvielfach. Damit läßt sich die Eingangsblockierung nach der Erlang-Formel $E_{2,k_1}(A)$ für die Wartewahrscheinlichkeit vollkommen erreichbarer Koppelanordnungen berechnen.

Sind in dem betrachteten Koppelvielfach der ersten Stufe Y_1 Leitungen belegt, so können $(k_1 - Y_1)k_2$ der Abnehmerleitungen über die freien $(k_1 - Y_1)$ Zwischenleitungen erreicht werden. Durch die Y_1 belegten Leitungen des betrachteten Koppelvielfaches sind aber Y_1 der n Abnehmerleitungen belegt. Für einen in der ersten (nicht blockierten) Stufe eintreffenden Ruf können diese Y_1 Abnehmerleitungen auf "besetzt" geprüft werden. Hinter der zweiten Stufe können weitere $(k_1 - Y_1)k_2$ belegte oder noch freie, also insgesamt $(k_1 - Y_1)k_2 + Y_1 \leq n$ Leitungen, auf frei oder belegt geprüft werden.

Sind im Mittel Y_1 Leitungen eines Koppelvielfaches der ersten Stufe belegt, so nennt man

$$m_r = (k_1 - Y_1)k_2 + Y_1 \tag{2.36}$$

die mittlere Prüfbarkeit auf freie oder besetzte Abnehmerleitungen. Die Abnehmerblockierung bei Wartebetrieb wird nun berechnet aus dem Verkehr $A = Y$ der n Abnehmerleitungen und aus der mittleren Prüfbarkeit m_r . Bezüglich dieser Abnehmerblockierung verläuft nun der Rechnungsgang wie bei einer entsprechenden einstufigen Koppelanordnung mit n Leitungen und der (konstanten) unvollkommenen Erreichbarkeit m_r .

Verwendet man die Interconnections Delay Formula nach (A.3), so erhält man die Wahrscheinlichkeit nach $W_{IDF}(n, m_r, A)$ für die Abnehmerblockierung des Linksystems (vgl. Seite 98).

Die Berechnung einer für alle Koppelvielfache der ersten Stufe einheitlichen mittleren Prüfbarkeit m_r setzt voraus, daß der Verkehr gleichmäßig auf alle Zwischenleitungsbündel verteilt ist. Den einzelnen Zubringerteilgruppen müssen also gleich große Verkehrsanteile angeboten werden.

Die Wartewahrscheinlichkeit der gesamten Mischwahanordnung ergibt sich nun durch Summation der möglichen Blockierungszustände. Folgende Zustände sind möglich:

Eingang und Ausgang blockiert: $E_{2,k_1}(Y_1)W_{IDF}(n, m_r, A)$

Eingang nicht blockiert,
Ausgang blockiert: $(1 - E_{2,k_1}(Y_1)) W_{IDF}(n, m_r, A)$

Eingang blockiert,
Ausgang nicht blockiert: $(1 - W_{IDF}(n, m_r, A)) E_{2,k_1}(Y_1)$

Damit ergibt sich die Wartewahrscheinlichkeit zu

$$W = E_{2,k_1}(Y_1) + \{1 - E_{2,k_1}(Y_1)\} W_{IDF}(n, m_r, A) \quad (2.37)$$

In den folgenden Diagrammen 2.2 und 2.3 ist zusätzlich zu den Ergebnissen gemäß ZBMW bzw. IBMW die Wartewahrscheinlichkeit nach Gleichung (2.37) gestrichelt eingezeichnet. Dabei zeigt sich, daß die Wartewahrscheinlichkeit nach (2.37) für große Verkehrsbelastung Werte liefert, die über den Resultaten der Verkehrssimulation liegen. Bei schwachen Belastungen ist eine Tendenz zur Unterschätzung der Wartewahrscheinlichkeit zu erkennen. Auf die Ursachen dieser Abweichungen wird im Abschnitt 4 näher eingegangen. Hier sei nur erwähnt, daß eine ähnliche Tendenz des CIRB-Verfahrens für Verlustsysteme bei der Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit auftritt (vgl. [18]).

In Anlehnung an die Abkürzung CIRB soll das hier angegebene Verfahren mit CIRBW (Combined Input Route Blocking with Waiting) bezeichnet werden.

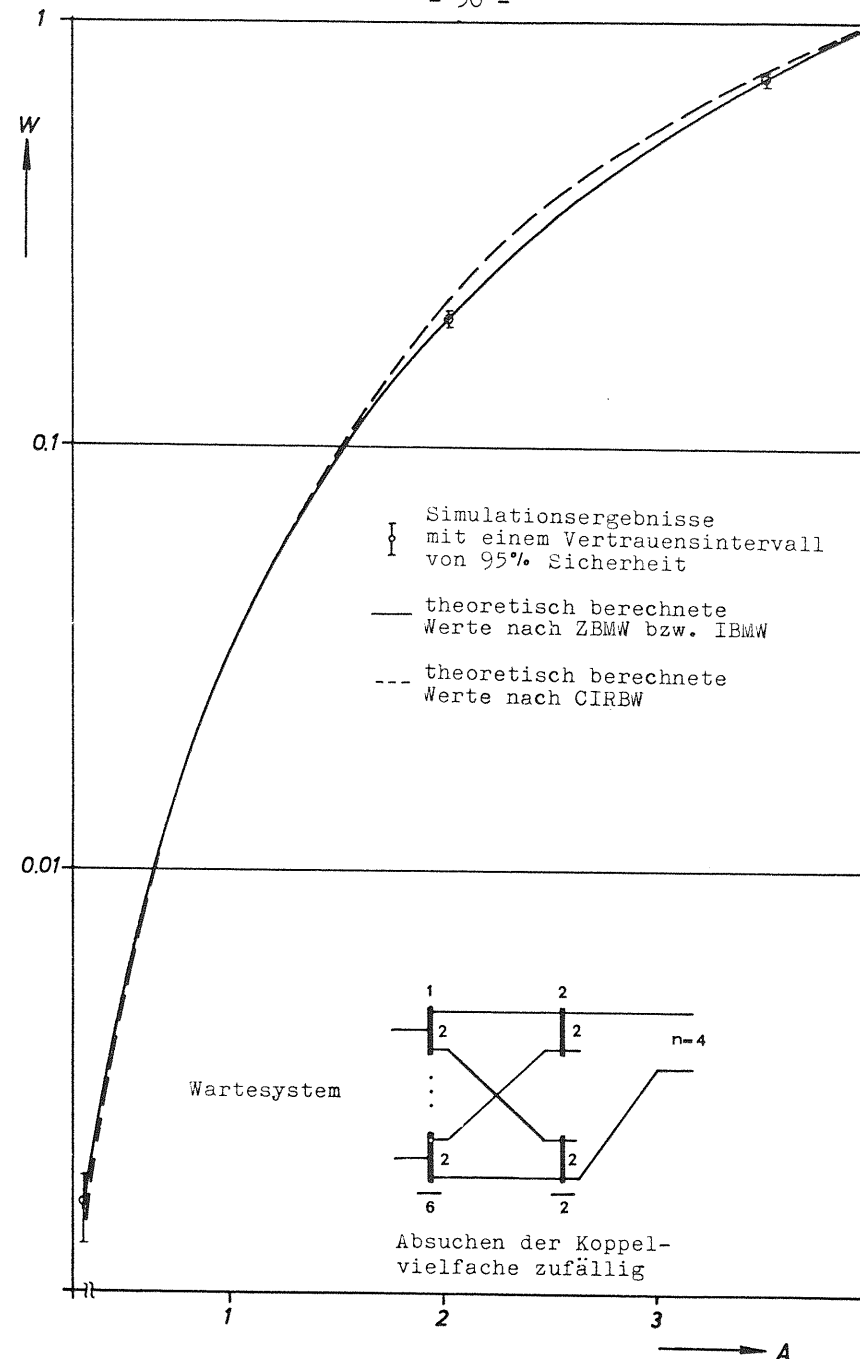


Diagramm 2.2

Die Wartewahrscheinlichkeit W über dem Angebot A

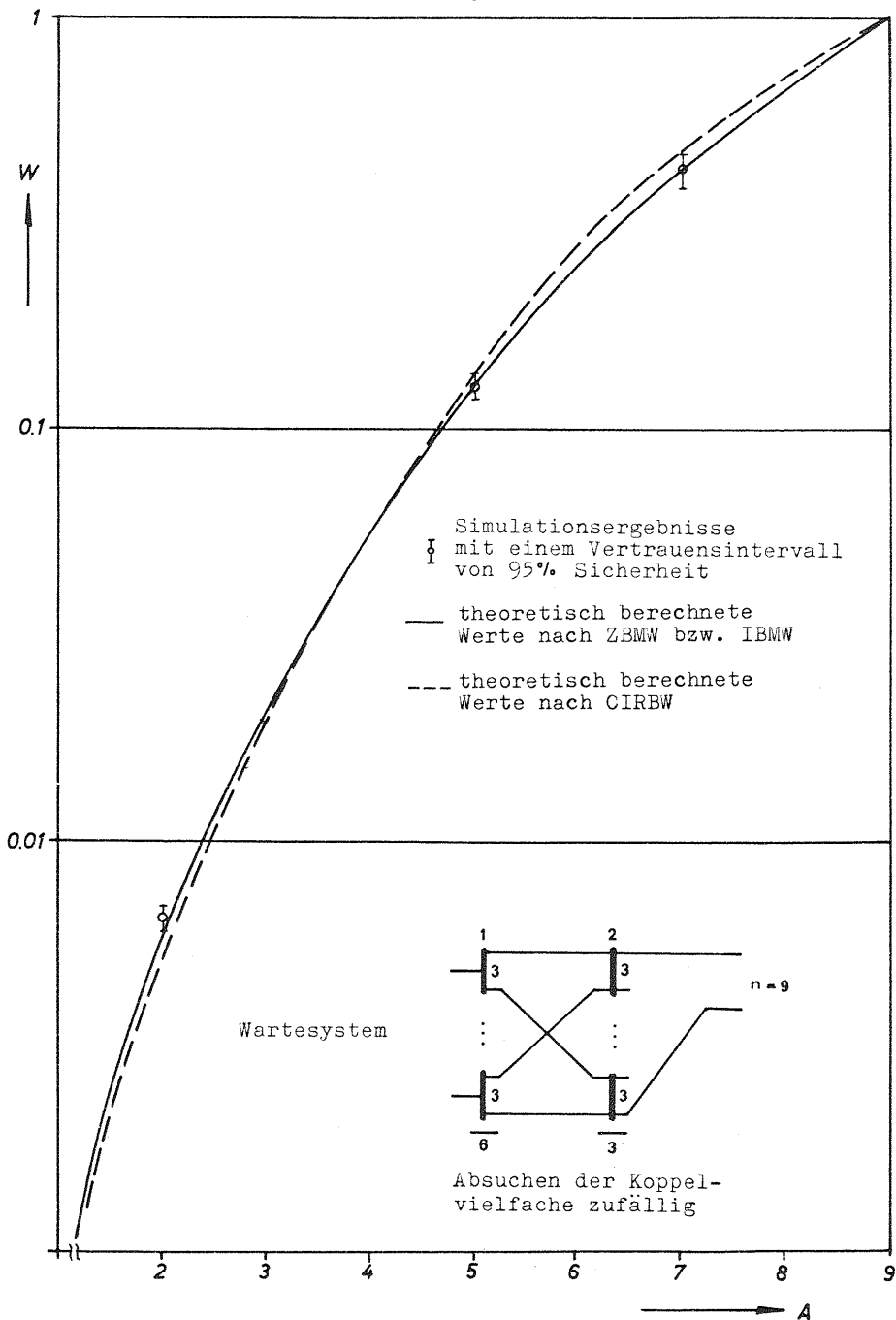


Diagramm 2.3

Die Wartewahrscheinlichkeit W über dem Angebot A

(b) Die mittlere Wartezeit τ_W

Die mittlere Gleichzeitigkeit wartender Rufe in der Warteschlange, die Wartebelastung Ω , ergibt sich aus den im Mittel je Zeiteinheit einfallenden c_W Rufen, die zu warten haben und der mittleren Wartezeit t_W .

Eintreffende Rufe müssen mit der Wahrscheinlichkeit W warten.

$$c_W = c_A \cdot W \quad (2.38)$$

$$\Omega = c_W \cdot t_W \quad (2.39)$$

Die Wartebelastung kann auch als Erwartungswert $E(z)$ der Anzahl z der Wartenden angegeben werden.

$$\Omega = E(z) = \sum_{x=k}^n \sum_{z=1}^{\infty} z p(x, z) \quad (2.40)$$

Dabei ist k die Erreichbarkeit des Bündels mit n Leitungen.

Die relative mittlere Wartezeit der Wartenden, auf die mittlere Wartezeit t_m bezogen, erhält man aus:

$$\tau_W = \frac{t_W}{t_m} \quad (2.41)$$

Die relative mittlere Wartezeit aller Rufe bezogen auf t_m ergibt sich zu:

$$\tau_W^* = \frac{t_W \cdot W}{t_m} = \tau_W \cdot W \quad (2.42)$$

Für unvollkommene und vollkommene einstufige Koppelanordnungen werden im Anhang 1, Gleichung (A.4) und (A.10), Beziehungen für τ_W angegeben.

Diese Beziehungen werden nun benutzt, um die mittlere Wartezeit zu berechnen für jene einstufigen Ersatzanordnungen, auf die das Linksystem mit Hilfe der mittleren Erreichbarkeit m_r abgebildet werden kann.

Mit Gleichung (A.10) ergibt sich für die erste Stufe (Eingangsblockierung):

$$\tau_{W1}^* = \frac{1}{k_1 - Y_1} \cdot E_{2,k_1}(Y_1) \quad (2.43)$$

Aus Gleichung (A.4) folgt für die zweite Stufe (Abnehmerblockierung) mit n Leitungen und der Erreichbarkeit m_r (mittlere Prüfbarkeit).

$$\tau_{W2}^* = \tau_{W_{IDF}}^*(n, m_r, A) \cdot W_{IDF}(n, m_r, A) \quad (2.44)$$

Nach Voraussetzung sollen beide Stufen der Ersatzanordnung voneinander unabhängig sein. Die mittleren Wartezeiten bezogen auf alle Rufe können addiert werden. Für die gesamte Anordnung ergibt sich

$$\tau_W^* = \tau_{W1}^* + \tau_{W2}^* \quad (2.45)$$

Damit erhält man die mittlere Wartezeit

$$\tau_W = \frac{\tau_W^*}{W} = \frac{\frac{1}{k_1 - Y_1} \cdot E_{2,k_1}(Y_1) + \tau_{W_{IDF}}^*(n, m_r, A) \cdot W_{IDF}(n, m_r, A)}{E_{2,k_1}(Y_1) + \{1 - E_{2,k_1}(Y_1)\} \cdot W_{IDF}(n, m_r, A)} \quad (2.46)$$

Für zwei Koppelanordnungen mit zweistufiger Mischwahl sind die Ergebnisse aus der Gleichung (2.29a) in Diagramm 2.4 und 2.5 gestrichelt eingetragen. Es zeigt sich, daß die hier abgeleitete Beziehung für die mittlere Wartezeit ähnliche Werte liefert wie das Iterationsverfahren IBMW bzw. ZBMW. Die durchgeführten Verkehrstests bestätigen, daß die verwendeten Näherungsannahmen das Verkehrsverhalten genügend genau beschreiben.

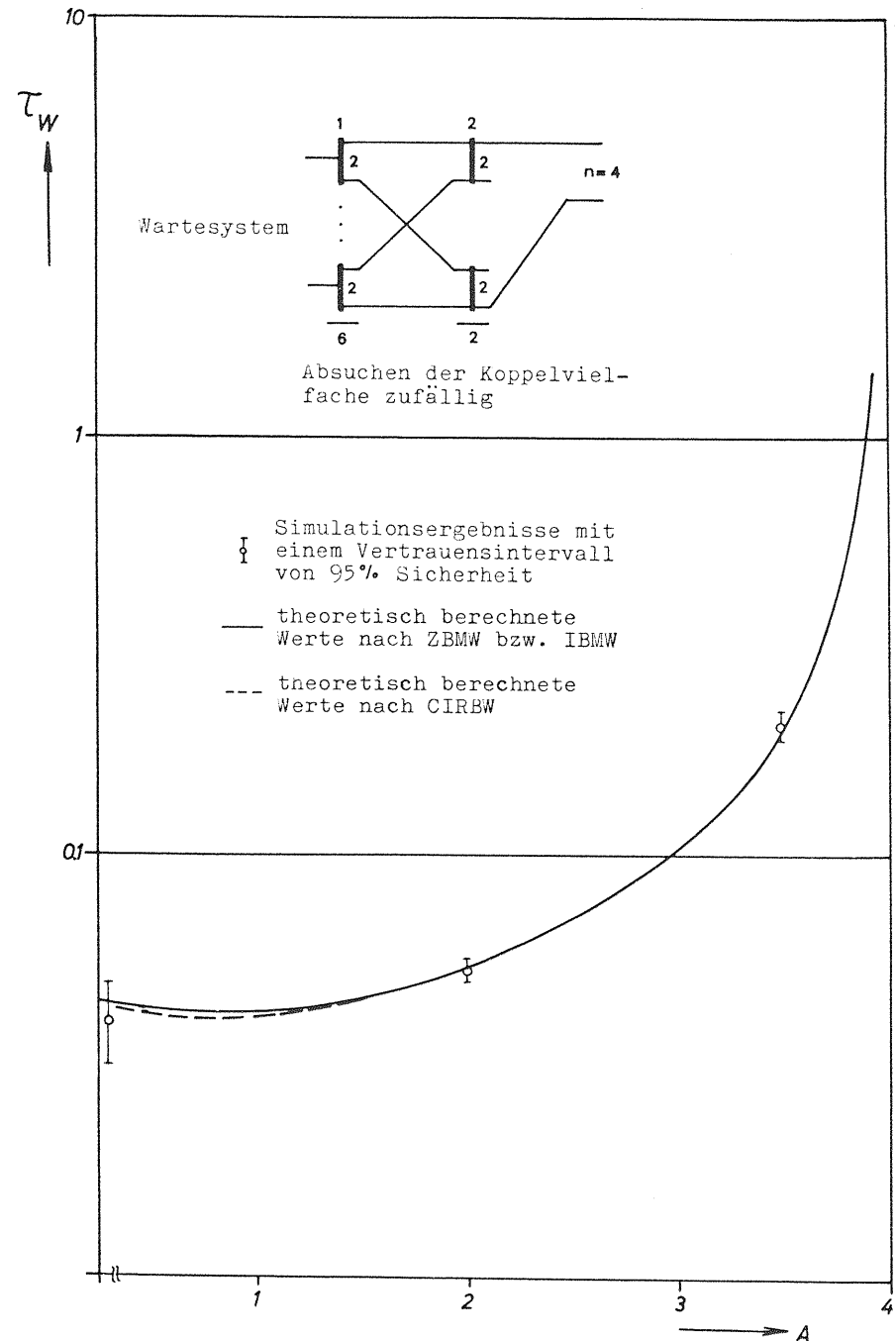


Diagramm 2.4

Die mittlere Wartezeit τ_W der Wartenden über dem Angebot A

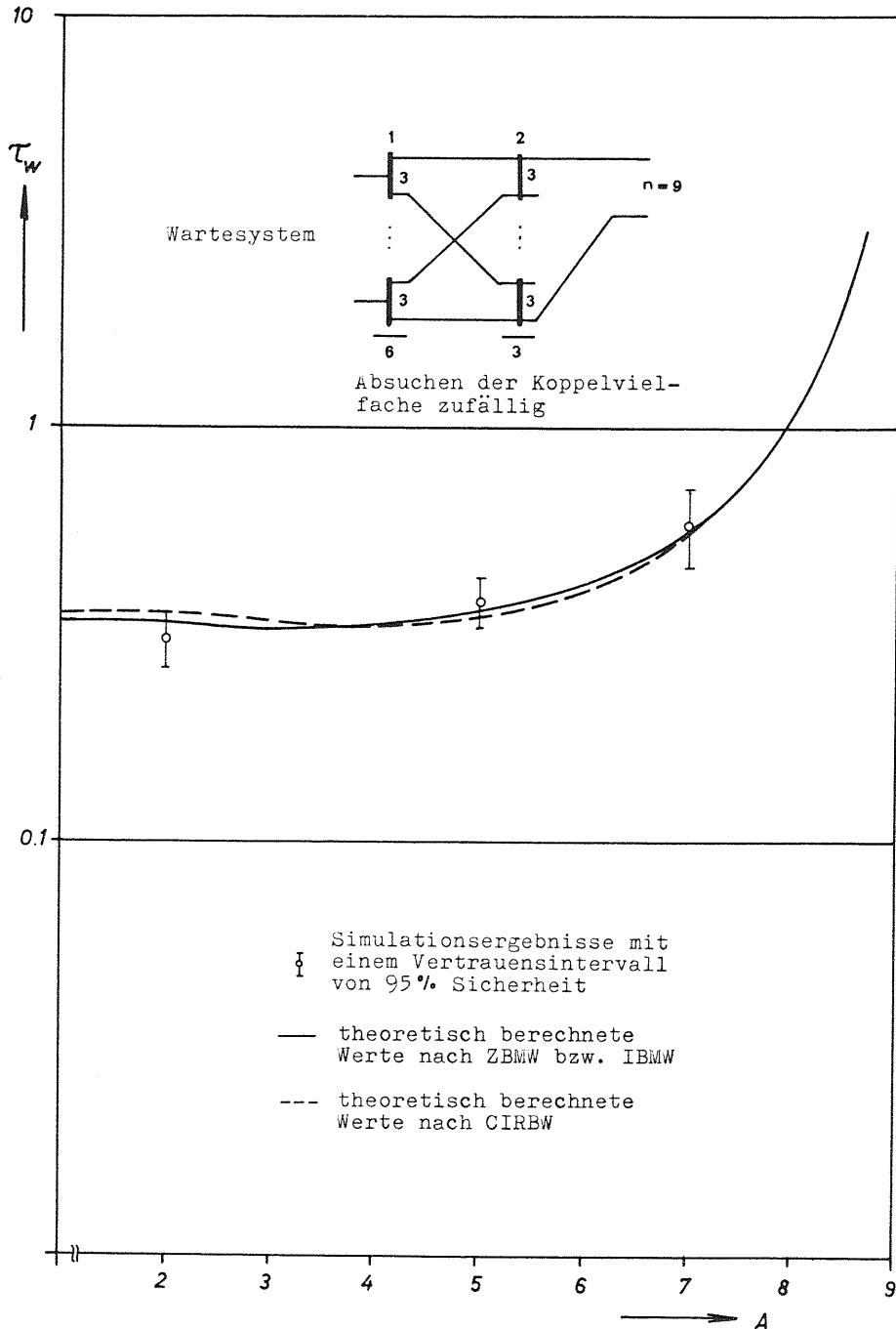


Diagramm 2.5 Die mittlere Wartezeit τ_W der Wartenden über dem Angebot A

3. Zweistufige Richtungswahl mit Linkssystem besonders symmetrischer Struktur im Wartesystem

Wie in Abschnitt 2 besteht die Koppelanordnung aus 2 Stufen. Die Ausgänge der zweiten Stufe sind jedoch in Richtungsbündel aufgeteilt. Von einem Koppelvielfach der zweiten Stufe können eine oder mehrere Leitungen in eine bestimmte Richtung führen. In diesem Abschnitt werden jedoch nur solche Koppelanordnungen betrachtet, bei denen genauso viele Richtungen wie Ausgänge eines Koppelvielfaches der zweiten Stufe vorhanden sind. Jeder Ausgang eines solchen Koppelvielfaches gehört zu einem anderen Richtungsbündel, also $k_{2r}=1$. Solche Systeme besitzen einen hohen Grad an Symmetrie und ermöglichen Annahmen über den Verkehr, aus denen Näherungsverfahren abgeleitet werden können, welche besonders gute Ergebnisse liefern (vgl. Bild 3.1). In Abschnitt 4 wird dann ein Verfahren für den allgemeinen Fall angegeben. Das dort angegebene Verfahren kann ebenfalls auf den Sonderfall zweistufiger Richtungswahl mit $k_{2r}=1$ angewendet werden.

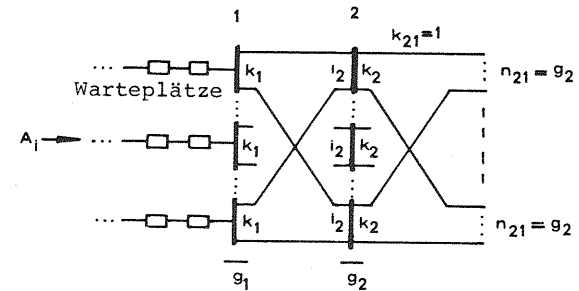


Bild 3.1 Zweistufige Richtungswahl

3.1 Herleitung eines neuen Iterationsverfahrens für Wartesysteme mit Richtungswahl (IBRW)*

Für die hier einzuführenden Näherungen und für die Ableitung der Zustandswahrscheinlichkeiten ist es zweckmäßig, folgende Bezeichnungen einzuführen:

*) Die iterative Berechnung von zweistufigen Systemen mit Richtungswahl und Warten.

x_{1i} , $i=1,2,\dots,g_1$ Anzahl der momentanen Belegungen im Koppelvielfach i der Stufe 1

x_{2r} , $r=1,2,\dots,R$ Anzahl der momentanen belegten Abnehmerleitungen im Bündel r

Ausgehend von einem Verfahren von A. Elldin [13] für Verlustsysteme in der von K. Kümmerle [18] verbesserten Form wird für die näherungsweise Berechnung der Wartewahrscheinlichkeit und der mittleren Wartezeit von $z w e i$ - stufigen Linksystemen mit Richtungswahl angenommen, daß die Belegungszustände der Zwischenleitungen und der Abnehmerleitungen voneinander unabhängig auftreten. Diese statistische Unabhängigkeit der Belegungszustände bedeutet also, daß die Zustände " x_{1i} Zwischenleitungen" belegt und " x_{2r} Abnehmerleitungen" belegt als voneinander statistisch unabhängig behandelt werden dürfen.

Die Durchlasswahrscheinlichkeit des Gesamtsystems bezüglich der Rufe, die an einem Eingang der ersten Stufe eintreffen, bedingt jedoch eine funktionelle Abhängigkeit der Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_{1i})$ und $p(x_{2r})$.

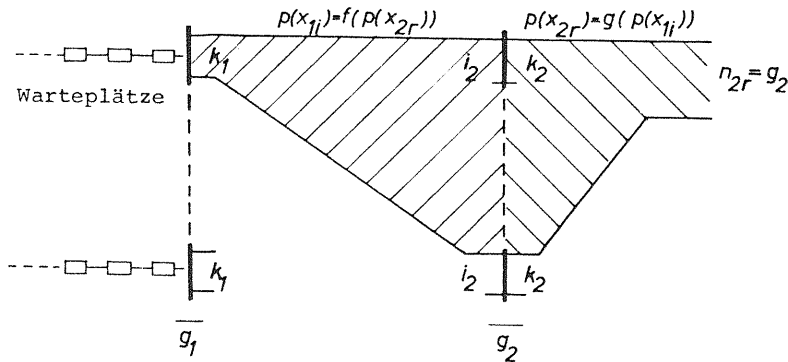


Bild 3.2 Linkeinheit

Diese funktionelle Abhängigkeit, die nachstehend berücksichtigt werden soll, besteht nicht nur zwischen $p(x_{1i})$ und $p(x_{2r})$, also $p(x_{1i}) = f(p(x_{2r}))$, sondern auch umgekehrt, $p(x_{2r})$ ist von $p(x_{1i})$ abhängig. Die gegenseitige Abhängigkeit führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem, das iterativ gelöst werden kann.

3.1.1 Die Zustandsgleichungen für das Verfahren IBRW

Voraussetzungen

Zufallsverkehr 1. Art wird gleichmäßig verteilt auf die Zubringerteilgruppen $A_i = A/g_i$. Alle Abnehmerbündel haben die gleiche Verkehrsbelastung. Das Absuchen der Leitungen in beiden Stufen erfolgt in zufälliger Reihenfolge. Vor jeder Zubringerteilgruppe bildet sich bei Verkehrsblockierung eine Warteschlange.

Symmetrische Struktur: $k_1 = g_2$, $k_{2r} = 1$

(a) Die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_{1i})$ im Zwischenleitungsbündel

Zur Ableitung der Zustandswahrscheinlichkeiten wird nicht das gesamte Linksystem, sondern zwischen Stufe 1 und 2 nur eine sogenannte "Linkeinheit" betrachtet.

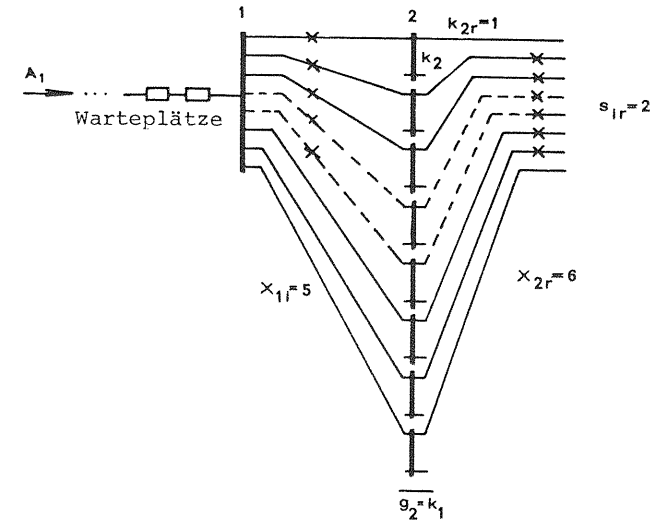


Bild 3.3 Belegungsbeispiel einer Linkeinheit

Weil die Struktur des Systemes völlig symmetrisch ist und außerdem das Angebot gleichmäßig auf alle Zubringerteilgruppen und auf alle Richtungen verteilt ist, ergibt sich für jede der g_1 Linkeinheiten der betrachteten Koppelanordnung die gleiche Verteilung auf deren Zwischenleitungen.

Nach dem zugrunde gelegten Modell der statistischen (aber nicht funktionellen!) Unabhängigkeit der Belegungszustände in beiden Stufen kann man die Beziehung für das statistische Gleichgewicht des Verkehrs für jede Stufe gesondert formulieren. Die funktionelle Abhängigkeit der Verteilungen auf den Zwischenleitungsbündeln und dem Abnehmerbündel einer Richtung wird dadurch berücksichtigt, daß in Zustand $\{x_{1i}\}$ der Erfolg eines Anrufs, also auch die Belegung einer weiteren Zwischenleitung von der Durchlasswahrscheinlichkeit der zweiten Stufe ebenfalls abhängt.

Zunächst wird das Gleichungssystem angegeben, welches aus der Annahme stationären Verkehrs als "statistisches Gleichgewicht" in der ersten Stufe folgt. Da eine praktisch unbegrenzte Zahl von Warteplätzen angenommen wird handelt es sich um ein reines Wartesystem. Deshalb kann auf die Gleichung (A.O) im Anhang 1 zurückgegriffen werden.

$$p(x_{1i}) (x_{1i} - \sigma(x_{1i}) A_i) = A_i \cdot p(x_{1i} - 1) \mu(x_{1i} - 1) \quad (3.1)$$

$$0 \leq x_{1i} < k_1$$

Dabei bedeutet die Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x_{1i})$ jene Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein in das Koppelvielfach i einfallender Ruf zum gewünschten Abnehmerbündel r ($r=1,2,\dots,R$) durchgeschaltet werden kann. Die zugehörige Sperrwahrscheinlichkeit ist das Einerkomplement der Durchlasswahrscheinlichkeit $\sigma(x_{1i}) = 1 - \mu(x_{1i})$.

Aus dem Gleichungssystem (3.1) läßt sich durch Anschreiben von aufeinanderfolgenden Zustandswahrscheinlichkeiten folgende geschlossene Lösung herleiten:

$$p(x_{1i}) = \frac{A_i^{x_{1i}} \prod_{z=0}^{x_{1i}-1} \mu(z)}{\prod_{z=1}^{x_{1i}} \{z - A_i \cdot \sigma(z)\}} \cdot p(0) \quad (3.2)$$

Mit der normierenden Bedingung $\sum_{x_{1i}=0}^{k_1} p(x_{1i}) = 1$

läßt sich $p(0)$ bestimmen.

$$p(0) = 1 / \left\{ 1 + \sum_{x_{1i}=0}^{k_1} A_i^{x_{1i}} \frac{\prod_{z=0}^{x_{1i}-1} \mu(z)}{\prod_{z=1}^{x_{1i}} \{z - A_i \cdot \sigma(z)\}} \right\} \quad (3.3)$$

Die Funktion $\mu(x_{1i})$ für die Durchlasswahrscheinlichkeit

In der betrachteten Linkeinheit sind im Belegungszustand x_{1i} genau $(k_1 - x_{1i})$ Zwischenleitungen frei.

Für die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_{1i})$ kann folgender Ansatz gemacht werden (vgl. Elldin [13], Kümmerle [18]):

$$\sigma(x_{1i}) = \sum_{s_{ir}=0}^{x_{1i}} p(x_{1i}, s_{ir}) \cdot p((k_1 - x_{1i}) | s_{ir}) \quad (3.4)$$

$$\mu(x_{1i}) = 1 - \sigma(x_{1i}) \quad (3.5)$$

Dabei ist:

$p(x_{1i}, s_{ir})$ Die Wahrscheinlichkeit, daß s_{ir} der belegten x_{1i} Zwischenleitungen des betrachteten Koppelvielfaches i der ersten Stufe in Richtung r durchgeschaltet sind.

$p((k_1 - x_{1i}) | s_{ir})$ Die Wahrscheinlichkeit, daß im Abnehmerbündel r mindestens bestimmte $(k_1 - x_{1i})$ Abnehmerleitungen (also jene die von den $(k_1 - x_{1i})$ freien Zwischenleitungen erreicht werden) nicht mehr frei sind, wenn s_{ir} Belegungen von Koppelvielfach i nach Richtung r bereits bestehen.

Gemäß den Voraussetzungen auf Seite 58 kann für $p(x_{1i}, s_{ir})$ eine Binomial-Verteilung angenommen werden. Bei dem Modell wird also vorausgesetzt, daß alle möglichen Belegungsmuster mit x_{1i} belegten und $(k_1 - x_{1i})$ freien Leitungen gleich wahrscheinlich auftreten. Dasselbe gilt auch für die möglichen Anordnungen der s_{ir} direkt durchgeschalteten Belegungen in Richtung r .

Daraus ergibt sich:

$$p(x_{1i}, s_{ir}) = \binom{x_{1i}}{s_{ir}} \left(\frac{1}{k_2}\right)^{s_{ir}} \left(1 - \frac{1}{k_2}\right)^{(x_{1i} - s_{ir})} \quad (3.6)$$

Zur Herleitung von $p((k_1 - x_{1i}) | s_{ir})$ wird von Bild 3.3 ausgegangen. Es bestehen x_{1i} Belegungen in Koppelvielfach i und x_{2r} Belegungen im Ausgangsbündel r . Darin enthalten sind s_{ir} direkte Durchschaltungen aus Koppelvielfach i nach Richtung r . Damit Blockierung überhaupt auftreten kann, muß $(x_{2r} - s_{ir}) \geq (k_1 - x_{1i})$ sein. Zur Berechnung aller sperrenden Anordnungen werden von den $(x_{2r} - s_{ir})$ Belegungen des Abnehmerbündels $(k_1 - x_{1i})$ Belegungen "festgehalten" gedacht. Damit sind die noch freien Leitungen des Zwischenleitungsbündels des betrachteten Koppelvielfachs i gesperrt.

Nun werden die restlichen $(x_{2r} - s_{ir}) - (k_1 - x_{1i})$ Belegungen des Abnehmerbündels betrachtet. Diese $(x_{2r} - s_{ir}) - (k_1 - x_{1i})$ Leitungen können auf den $(x_{1i} - s_{ir})$ Belegungen des betrachteten Koppelvielfachs i beliebig angeordnet werden. Die Anzahl dieser Anordnungen ist:

$$\binom{x_{1i} - s_{ir}}{(x_{2r} - s_{ir}) - (k_1 - x_{1i})}$$

Alle diese Anordnungen sind sperrende Belegungsmuster.

Die Gesamtzahl der überhaupt möglichen Belegungsmuster bei x_{2r} Belegungen im Abnehmerbündel und bei s_{ir} direkt durchgeschalteten Leitungen ist

$$\binom{n_{2r} - s_{ir}}{x_{2r} - s_{ir}}$$

Unter der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit der Muster ist das Verhältnis von gesperrten Mustern zu den überhaupt möglichen Mustern die momentane Sperrwahrscheinlichkeit bei x_{2r} Belegungen im Abnehmerbündel.

$$\sigma(x_{1i}, s_{ir} | x_{2r}) = \frac{\binom{x_{1i} - s_{ir}}{(x_{2r} - s_{ir}) - (k_1 - x_{1i})}}{\binom{n_{2r} - s_{ir}}{x_{2r} - s_{ir}}} = \frac{\binom{x_{1i} - s_{ir}}{k_1 - x_{2r}}}{\binom{n_{2r} - s_{ir}}{x_{2r} - s_{ir}}} \quad (3.7)$$

Zur Berechnung von $p((k_1 - x_{1i}) | s_{ir})$ müssen die momentanen Sperrwahrscheinlichkeiten $\sigma(x_{1i}, s_{ir} | x_{2r})$ mit der relativen Wahrscheinlichkeit

$$p(x_{2r} | s_{ir}) = \frac{p(x_{2r})}{P(x_{2r} \geq s_{ir})} = \frac{p(x_{2r})}{\sum_{x_{2r}=s_{ir}}^{n_{2r}} p(x_{2r})} \quad (3.7a)$$

gewichtet werden. Damit ergibt sich mit Hilfe von (3.7) und (3.7a):

$$p((k_1 - x_{1i}) | s_{ir}) = \sum_{x_{2r}=(k_1 - x_{1i} + s_{ir})}^{n_{2r}} p(x_{2r} | s_{ir}) \cdot \frac{\binom{x_{1i} - s_{ir}}{k_1 - x_{2r}}}{\binom{n_{2r} - s_{ir}}{x_{2r} - s_{ir}}} \quad (3.8)$$

Die Funktion für die Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x_{1i})$ nach Gleichung (3.5) ist damit durch (3.4) bzw. (3.7), (3.7a), (3.8) definiert. In der Funktion $\mu(x_{1i})$ tritt die Zustandswahrscheinlichkeit $p(x_{2r})$ auf. Durch Einsetzen von $\mu(x_{1i})$ in die Beziehung (3.2) für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_{1i})$ erhält man die funktionelle Abhängigkeit $p(x_{1i}) = f(p(x_{2r}))$.

(b) Die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_{2r})$ im Abnehmerbündel

Zur Ableitung der Funktion für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_{2r})$ im Abnehmerbündel der Richtung r kann in ähnlicher Weise wie in (a) vorgegangen werden. Zunächst wird die Beziehung für das statische Gleichgewicht des Abnehmerbündels für den Fall des Wartesystemes angegeben.

$$p(x_{2r})(x_{2r} - \sigma^*(x_{2r})A_{2r}) = A_{2r}p(x_{2r}-1)\mu^*(x_{2r}-1) \quad (3.9)$$

Als Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma^*(x_{2r})$ ist jene Wahrscheinlichkeit definiert, mit welcher Rufe mangels geeigneter freier Zwischenleitungen in die betrachtete Richtung r nicht durchgeschaltet werden können, wenn im Abnehmerbündel x_{2r} Leitungen belegt sind. Die Durchlasswahrscheinlichkeit ist

$$\mu^*(x_{2r}) = 1 - \sigma^*(x_{2r}).$$

Mit der Bedingung $\sum_{x_{2r}=0}^{g_2} p(x_{2r}) = 1$ folgt aus (3.9)

$$p(x_{2r}) = p(0) \cdot A_{2r}^{x_{2r}} \frac{\prod_{z=0}^{x_{2r}-1} \mu^*(z)}{\prod_{z=1}^{x_{2r}} \{z - A_{2r} \cdot \sigma^*(z)\}} \quad (3.10)$$

und

$$p(0) = 1 / \left\{ \sum_{x_{2r}=0}^{n_{2r}} A_{2r}^{x_{2r}} \frac{\prod_{z=0}^{x_{2r}-1} \mu^*(z)}{\prod_{z=1}^{x_{2r}} \{z - A_{2r} \cdot \sigma^*(z)\}} + 1 \right\} \quad (3.11)$$

In (3.10) und (3.11) ist $A_{2r} = Y_{2r}$ das tatsächlich auftretende Angebot für das Abnehmerbündel r des Linksystems mit unbegrenzter Wartemöglichkeit. Im Gegensatz zu dem Verfahren von Elldin bzw. Kümmerle für Verlustsysteme entfällt deshalb bei dem nachstehend in Abschnitt 3.1.2 beschriebenen Algorithmus die iterative Bestimmung von A_{2r} aus der Bedingung für die Verkehrsbilanz $g_1 \cdot Y_1 = k_2 \cdot Y_{2r}$.

Die Ermittlung der Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu^*(x_{2r})$

Im Zustand $\{x_{2r}\}$ sind im Abnehmerbündel der Richtung r genau $(n_{2r} - x_{2r})$ Leitungen frei. Ähnlich wie in Abschnitt 3.1.1 wird die dazugehörige Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma^*(x_{2r})$ abgeleitet.

$$\mu^*(x_{2r}) = 1 - \sigma^*(x_{2r}) \quad (3.13)$$

Folgender Ansatz gilt:

$$\sigma(x_{2r}) = \sum_{s_{ir}=0}^{x_{2r}} p(x_{2r}, s_{ir}) \cdot p((n_{2r} - x_{2r}) | s_{ir}) \quad (3.14)$$

Dabei ist:

$p(x_{2r}, s_{ir})$ Die Wahrscheinlichkeit, daß s_{ir} der belegten x_{2r} Abnehmerleitungen in Richtung r aus dem betrachteten Kopplervielfach i der ersten Stufe kommen.

$p((n_{2r}-x_{2r}) | s_{ir})$ Die Wahrscheinlichkeit, daß bei s_{ir} direkten Belegungen mindestens bestimmte $(n_{2r}-x_{2r})$ Zwischenleitungen der betrachteten Linkeinheit belegt sind und zwar diejenigen, die den noch freien $(n_{2r}-x_{2r})$ Abnehmerleitungen zugeordnet sind.

Für $p(x_{2r}, s_{ir})$ kann analog zu (3.6) eine Binomial-Verteilung angenommen werden.

$$p(x_{2r}, s_{ir}) = \binom{x_{2r}}{s_{ir}} \cdot \left(\frac{1}{g_1}\right)^{s_{ir}} \left(1 - \frac{1}{g_1}\right)^{(x_{2r}-s_{ir})} \quad (3.15)$$

Für die Wahrscheinlichkeit $p((n_{2r}-x_{2r}) | s_{ir})$ erhält man ähnlich wie in Gleichung (3.8)

$$p((n_{2r}-x_{2r}) | s_{ir}) = \sum_{x_{1i}=(n_{2r}-x_{2r}+s_{ir})}^{k_1} p(x_{1i} | s_{ir}) \cdot \frac{\binom{x_{2r}-s_{ir}}{k_1-x_{1i}}}{\binom{k_1-s_{ir}}{x_{1i}-s_{ir}}} \quad (3.16)$$

mit

$$p(x_{1i} | s_{ir}) = \frac{p(x_{1i})}{p(x_{1i} \geq s_{ir})} = \frac{p(x_{1i})}{\sum_{x_{1i}=s_{ir}}^{k_1} p(x_{1i})} \quad (3.17)$$

Setzt man (3.16) und (3.15) in die Beziehung (3.14) ein, so ist die Funktion der Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu^*(x_{2r})$ gemäß Gleichung (3.13) bestimmt. Durch Einsetzen von $\mu^*(x_{2r})$ in die Gleichung (3.10) für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_{2r})$ bekommt man die funktionelle Abhängigkeit $p(x_{2r})=g(p(x_{1r}))$.

3.1.2 Der Algorithmus für das Iterationsverfahren

Im vorigen Abschnitt wurde die gegenseitige Abhängigkeit der Zustandswahrscheinlichkeiten im Zwischenleitungsbündel und im Abnehmerbündel abgeleitet, siehe Gleichung (3.2) und (3.10).

$$p(x_{1i}) = f(p(x_{ir})) , p(x_{2r}) = g(p(x_{1i})) \quad (3.18)$$

Für die numerische Berechnung von $p(x_{1i})$ und $p(x_{2r})$ wird nun so vorgegangen, daß zunächst für das Angebot A_1 eine Anfangsverteilung $p_0(x_{1i})$ vorgegeben wird, z.B. die Verteilung für eine einstufige vollkommen erreichbare Koppelanordnung mit k_1 Leitungen und unbegrenzter Speicherzahl. Mit dieser Ausgangsverteilung wird ein Iterationsprozeß begonnen, welcher gemäß folgendem Algorithmus durchgeführt wird:

- Die Anfangsverteilung in der Linkeinheit $p_0(x_{1i})$ wird gemäß $E_{2,k_1}(A_1)$ nach A.K. Erlang berechnet.
- Nach Gleichung (3.10), (3.11) wird nun mit A_{2r}, n_{2r} und $\sigma^*(x_{2r}) = f(x_{2r}, p(x_{1i}), k_1)$ die Verteilung $p(x_{2r})$ ermittelt.
- Mit der so errechneten Verteilung $p(x_{2r})$ wird eine verbesserte Verteilung $p(x_{1i})$ mit A_1, k_1 und $\sigma(x_{1i}) = g(x_{1i}, p(x_{2r}), n_{2r})$, nach Gleichung (3.2), (3.3) bestimmt.
- Die Schritte (b) und (c) werden so lange wiederholt, bis bei der v -ten Iteration die Bedingung

$$|p_v(x_{1i}) - p_{v-1}(x_{1i})| < \epsilon_1 \text{ für } x_{1i} = 0, 1, \dots, k_1$$

erfüllt ist.

Der Algorithmus liefert eine Näherung für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_{1i})$ und $p(x_{2r})$.

Anstelle der Bedingung in (d) kann auch

$$|p_v(x_{2r}) - p_{v-1}(x_{2r})| < \varepsilon_2 \text{ für } x_{2r} = 0, 1, \dots, n_{2r}$$

verwendet werden.

3.1.3 Wartewahrscheinlichkeit

Mit den Näherungen für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_{1i})$ kann nach Gleichung (3.4) die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_{1i})$ berechnet werden. Die Wartewahrscheinlichkeit ergibt sich als Erwartungswert der Blockierung für eintreffende Rufe zu:

$$W = \sum_{x_{1i}=0}^{k_1} p(x_{1i}) \cdot \sigma(x_{1i}) \quad (3.19)$$

Entsprechend (3.19) kann auch $p(x_{2r})$ und $\sigma^*(x_{2r})$ zur Berechnung von W verwendet werden:

$$W = \sum_{x_{2r}=0}^{n_{2r}} p(x_{2r}) \cdot \sigma^*(x_{2r}) \quad (3.20)$$

In den Diagrammen 3.1 und 3.2 ist die Wartewahrscheinlichkeit für zwei Systeme mit Hilfe von Gleichung (3.19) über dem Angebot aufgetragen (ausgezogene Kurve). Für das System $g_1=10, k_1=10, g_2=10, k_2=10$ (Diagramm 3.2) ist eine auffallende Übereinstimmung mit den Verkehrstests festzustellen. Für das System $g_1=25, k_1=6, g_2=6, k_2=10$, dessen Struktur weniger symmetrisch ist als jenes nach Diagramm 3.2, ergaben sich bei kleinen Angebotswerten geringe Abweichungen von den Ergebnissen der Verkehrstests (s. Seite 74,75).

3.1.4 Die mittlere Wartezeit τ_W

Es liegt nahe, die mittlere Wartezeit in ähnlicher Weise zu bestimmen, wie in Abschnitt 2.2.2. Der dort angegebene Iterationsalgorithmus liefert eine Näherung für $p(x)$ und damit auch $\sigma(x)$ bzw. $\mu(x)$. Mit der so errechneten Durchlasswahrscheinlichkeit $\mu(x)$, $p(x)$, der Leitungszahl n und dem Angebot A wurde die mittlere Wartezeit dann formal so bestimmt wie mit der Interconnections-Delay-Formula (IDF) nach M. Thierer [5], vgl. Gleichung (2.34).

Auch der hier im Abschnitt 3.1.2 angegebene Algorithmus liefert eine Näherung für $p(x_{1i})$ bzw. $p(x_{2r})$. Daraus lassen sich mit Gleichung (3.4) die Durchlasswahrscheinlichkeiten $\mu(x_{1i})$ bestimmen. Die Berechnung der mittleren Wartezeit τ_W gemäß IDF führt jedoch auf Werte, die stark von den Ergebnissen der Verkehrstests abweichen. Die Gründe hierfür sind wohl im folgenden zu finden:

Bei der Ermittlung von $p(x_{1i})$ und $\sigma(x_{1i})$, bzw. $p(x_{2r})$ und $\sigma(x_{2r})$, im Iterationsprozess ist die Belastung $Y_{2r} = A_{2r}$ vorgeschrieben. Die Abweichungen der Werte $p(x_{1i})$ und $\sigma(x_{1i})$, bzw. $p(x_{2r})$ und $\sigma(x_{2r})$, von den tatsächlichen Werten ist offensichtlich so, daß sich zwar eine verhältnismäßig genaue Wartewahrscheinlichkeit

$$W = \sum_{i=1}^{k_1} p(x_{1i}) \sigma(x_{1i}) \text{ durch Aufsummieren der Produkte}$$

$p(x_{1i}) \cdot \sigma(x_{1i})$, bzw. $p(x_{2r}) \cdot \sigma^*(x_{2r})$ ergibt, daß sich aber andererseits die ungenauen Werte von $p(x_{1i})$ und $\sigma(x_{1i})$ bei der Berechnung der Wartebelastung Ω sehr stark auswirken (vgl. Formel (A.4), Anhang 1).

Die mittlere Wartezeit τ_W läßt sich jedoch auch auf dem nachstehend beschriebenen Weg bestimmen: Man geht davon aus, daß die Wartewahrscheinlichkeit W bekannt ist (aus Gleichung (3.19)) für das Linkssystem bezüglich des Bündels r mit n_{2r} Leitungen und einem Verkehr $A_{2r} = Y_{2r}$ (keine Warteverluste), so kann man für dieses Wertetripel (W, n_{2r}, A_{2r}) die zugehörige Erreichbarkeit k_{eff} für ein Wartesystem, bestehend

aus einer einstufigen Koppelanordnung mit unvollkommener Erreichbarkeit und dem gleichen Wertetripel (W, n_{2r}, A_{2r}) ermitteln. Mit dem so gewonnenen k_{eff} läßt sich τ_W nach der Interconnections-Delay-Formel berechnen (vgl. A.4, Anhang 1).

$$\tau_W = \tau_{WIDF}(n, k_{eff}, A_r) \quad (3.22)$$

Dieses Vorgehen entspricht einer Abbildung der betrachteten zweistufigen Koppelanordnung auf eine äquivalente einstufige mit unvollkommener Erreichbarkeit. Die so berechnete effektive Erreichbarkeit k_{eff} gilt für einen Wert der zugehörigen Wartewahrscheinlichkeit. Soll τ_W für mehrere Angebotswerte berechnet werden, so ist jedesmal zunächst die zugehörige Wartewahrscheinlichkeit und danach die effektive Erreichbarkeit zu ermitteln. Die Erreichbarkeit kann bei der einstufigen Ersatzanordnung aus technischen Gründen nur ganzzahlige Werte annehmen. Für den Fall, daß die Wartewahrscheinlichkeit W zwischen zwei Werten von k_{eff} liegt, wird der Wert für τ_W linear interpoliert.

In den Diagrammen 3.3 und 3.4 sind die Werte der mittleren Wartezeit über dem Angebot aufgetragen (ausgezogene Kurven). Die dazu eingetragenen Ergebnisse aus Simulationstests zeigen für das

System $g_1=25, k_1=6, g_2=6, k_2=10$ (vgl. Diagramm 3.3, Seite 76)

eine gute Übereinstimmung mit den Resultaten aus Gleichung (3.23). Für ein System ohne

Konzentration $g_1=10, k_1=10, g_2=10, k_2=10$ (vgl. Diagramm 3.4, Seite 77)

liegen die Werte aus Gleichung (3.23) im ganzen Bereich über den Ergebnissen der Verkehrssimulation. Eine anschauliche Erklärung dafür ist, daß in einem solchen System mit $k_1 \cdot g_1 = k_2 \cdot g_2$ der mittlere "Abfertigungstakt" wesentlichen Einfluß auf die mittlere Wartezeit hat. Durch die pauschal angesetzte effektive Erreichbarkeit wird offensichtlich dieser Einfluß nicht vollständig erfaßt.

Beim Linksystem hat in Wirklichkeit je nach dem momentanen Belegungszustand entweder die Enderate von k_1 belegten Zwischenleitungen, mit welcher wartende Rufe in das Wartebündel gelangen, oder jene von $(k_1 - x_{1i})$ Abnehmerleitungen der Richtung r auf den Zeitpunkt Einfluß, bei dem ein wartender Ruf in Richtung r durchgeschaltet werden kann.

3.2 Herleitung eines neuen Verfahrens mit Zustandsgleichungen für Wartesysteme mit Richtungswahl (ZBRW)*

Für Verlustsysteme erfordert das Verfahren von C. Jacobaeus [20] einen wesentlich geringeren Rechenaufwand als das Verfahren nach A. Elldin [13]. Bei dem hier betrachteten Verfahren wird die Verteilungsfunktion als $f(Y_1, k_1)$ auf dem Zwischenleitungsbündel und auf dem betrachteten Abnehmerbündel als $f(Y, n_{2r})$ vorgegeben. Damit erübrigt sich eine iterative Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten. Wie in Abschnitt 3.1 wird auch hier wieder das gesamte Abnehmerbündel, aber nur eine Linkeinheit betrachtet. Die Anzahl der momentan belegten Leitungen in dem betrachteten Koppelvielfach der ersten Stufe sei x_1 , die belegten Abnehmerleitungen in Richtung r werde mit x_{2r} bezeichnet.

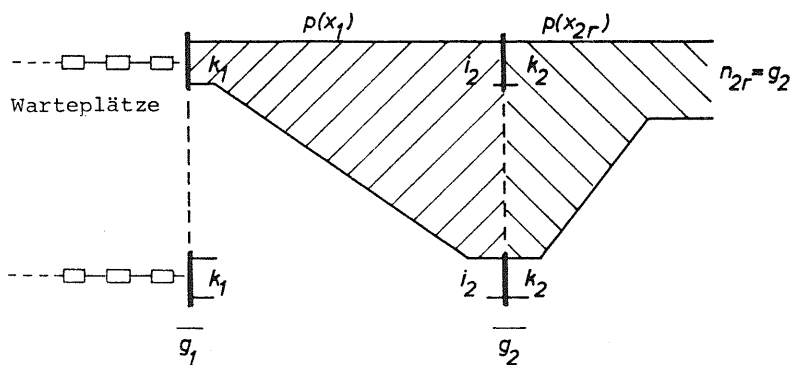


Bild 3.4 Die vorgegebenen Verteilungen

Die Erweiterung auf Wartesysteme führt auf das folgenden Verfahren: Es werden dieselben Voraussetzungen gemacht wie unter Abschnitt 3.1.

Für die Verteilung $p(x_1)$ wird angenommen, daß die Verteilung der belegten Leitungen einer als Wartesystem betriebenen einstufigen Koppelanordnung mit vollkommener Erreichbarkeit

*) Zustandsgleichungen zur Berechnung von zweistufigen Systemen mit Richtungswahl und Warten.

eine gute Näherung darstellt. Mit Gleichung (A.7) und (A.8), Anhang 1, ergibt sich für die Zustandswahrscheinlichkeit folgende Beziehung:

$$p(x_1) = \frac{A^{x_1}}{\prod_{i=1}^{x_1} (i - A \cdot \sigma(i))} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{k_1} \frac{A^j}{\prod_{i=1}^j (i - A \sigma(i))}} \quad (3.23)$$

Dabei ist $\sigma(k_1) = 1$ und $\sigma(i) = 0$ für $i = 1, 2, \dots, k_1 - 1$.

Mit der momentan belegten Anzahl von Zwischenleitungen kann eine momentane Erreichbarkeit in Richtung r bestimmt werden.

$$k_{m_r}(x_1) = (k_1 - x_1) k_r \quad (3.24)$$

Für diese "momentane Erreichbarkeit" des Abnehmerbündels läßt sich eine "momentane Wartewahrscheinlichkeit" berechnen. Dabei wird als Näherung für das Abnehmerbündel die Verteilung für eine einstufige Koppelanordnung als Wartesystem mit der Erreichbarkeit $k_r = k_{m_r}$ benutzt. Die momentane Wartewahrscheinlichkeit kann mit der Interconnections-Delay-Formula nach Gleichung (A.3) Anhang 1 bestimmt werden.

$$W_m = W_{IDF}(k_{m_r}, n_{2r}, A_{2r}) \quad (3.25)$$

Den Erwartungswert W der Wartewahrscheinlichkeit erhält man durch Aufsummieren der momentanen Wartewahrscheinlichkeiten. Wegen der Bedingung für das Auftreten von k_{m_r} müssen alle W_m mit der Wahrscheinlichkeit $p(x_1)$ gewichtet werden.

$$W = \sum_{x_1=0}^{k_1} W_{IDF}(k_{m_r}, n_{2r}, A_{2r}) \cdot p(x_1) \quad (3.26)$$

Die mittlere Wartezeit τ_W wird wie in Abschnitt 3.1 ermittelt: Aus der berechneten Wartewahrscheinlichkeit W nach Gleichung (2.26) wird mit n_{2r} und A_{2r} zunächst die effektive Erreichbarkeit k_{eff} einer äquivalenten einstufigen Koppelanordnung mit gleichen Wertetripel (W, n_{2r}, A_{2r}) bestimmt. Dann kann mit der Interconnections-Delay-Formel τ_W bestimmt werden, Anhang 1 Gleichung (A.4).

$$\tau_W = \tau_{W_{IDF}}(n_r, k_{eff}, A_r) \quad (3.27)$$

Für die Wartewahrscheinlichkeit ergibt ein Vergleich mit Simulationsergebnissen, siehe Diagramm 3.1 und 3.2, überraschend gute Ergebnisse für das hier verallgemeinerte Verfahren von Jacobaeus.

Für die mittlere Wartezeit liefert die Gleichung (3.27) ebenfalls gute Ergebnisse, wenn es sich um ein System mit Konzentration des Verkehrs nach der zweiten Stufe handelt (vgl. Diagramm 3.4 und 3.3). Die Ergebnisse aus Gleichung (2.27) sind gestrichelt eingezeichnet.

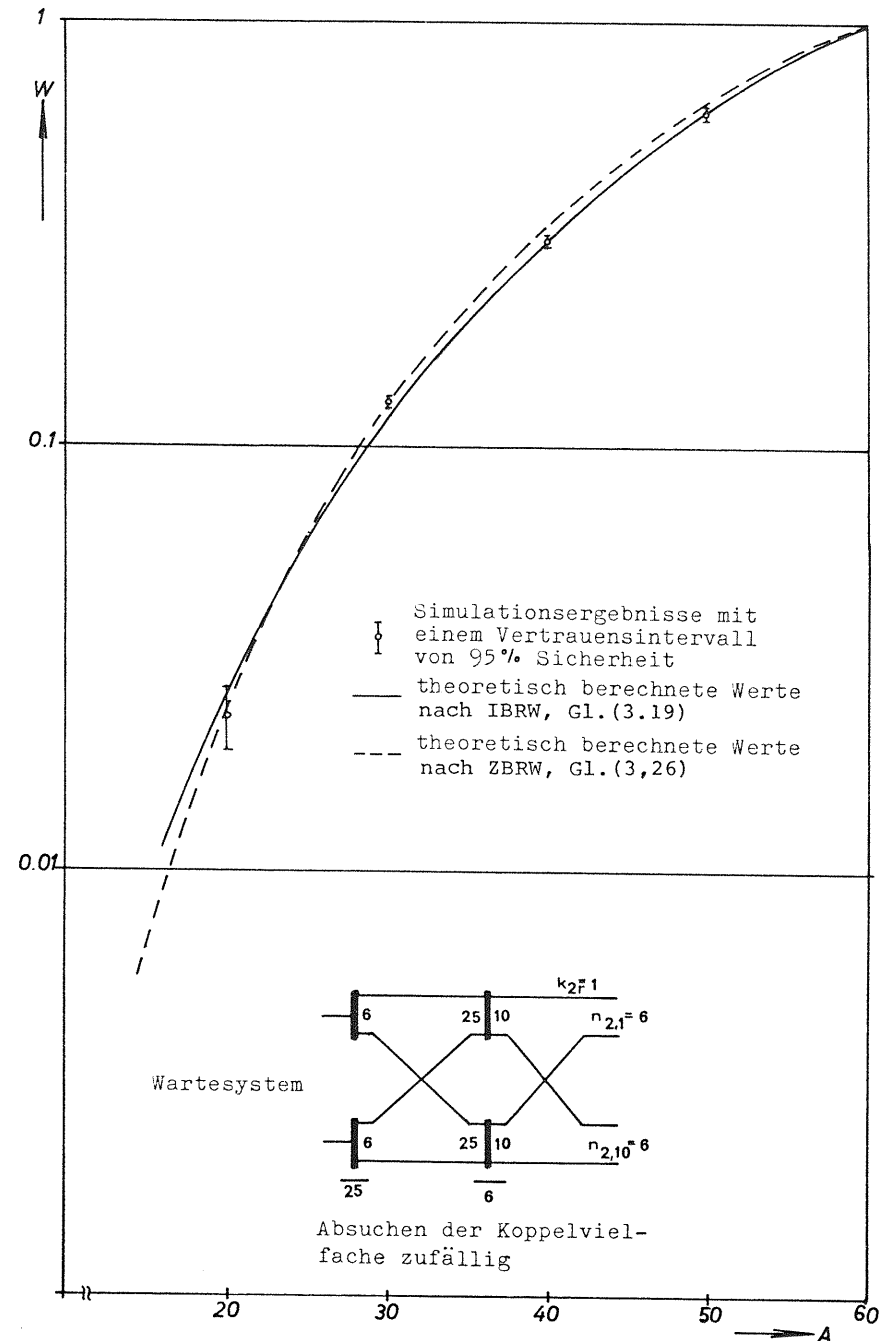


Diagramm 3.1

Die Wartewahrscheinlichkeit W über dem Angebot A

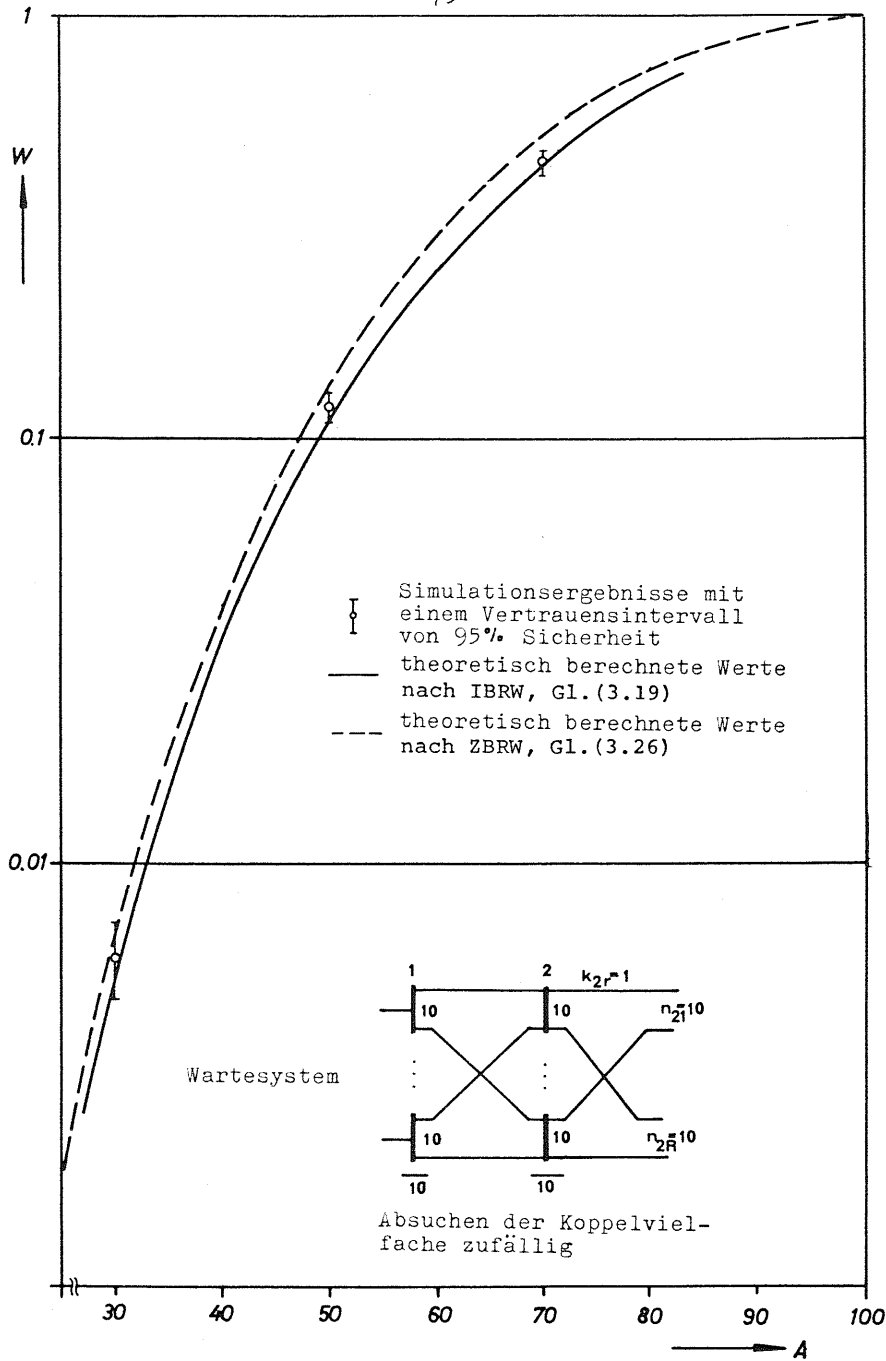


Diagramm 3.2

Die Wartewahrscheinlichkeit W über dem Angebot A

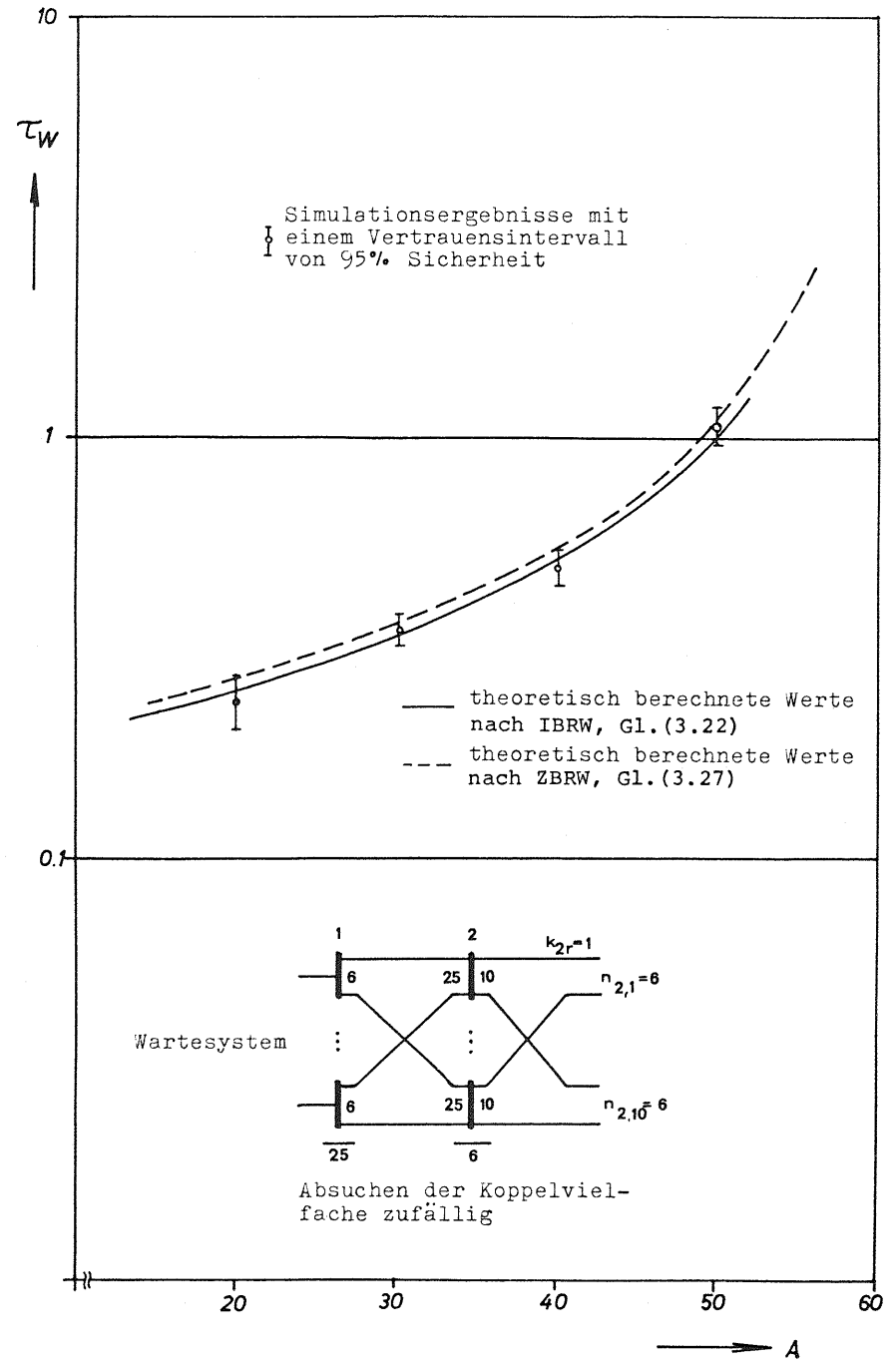


Diagramm 3.3

Die mittlere Wartezeit τ_W über dem Angebot A

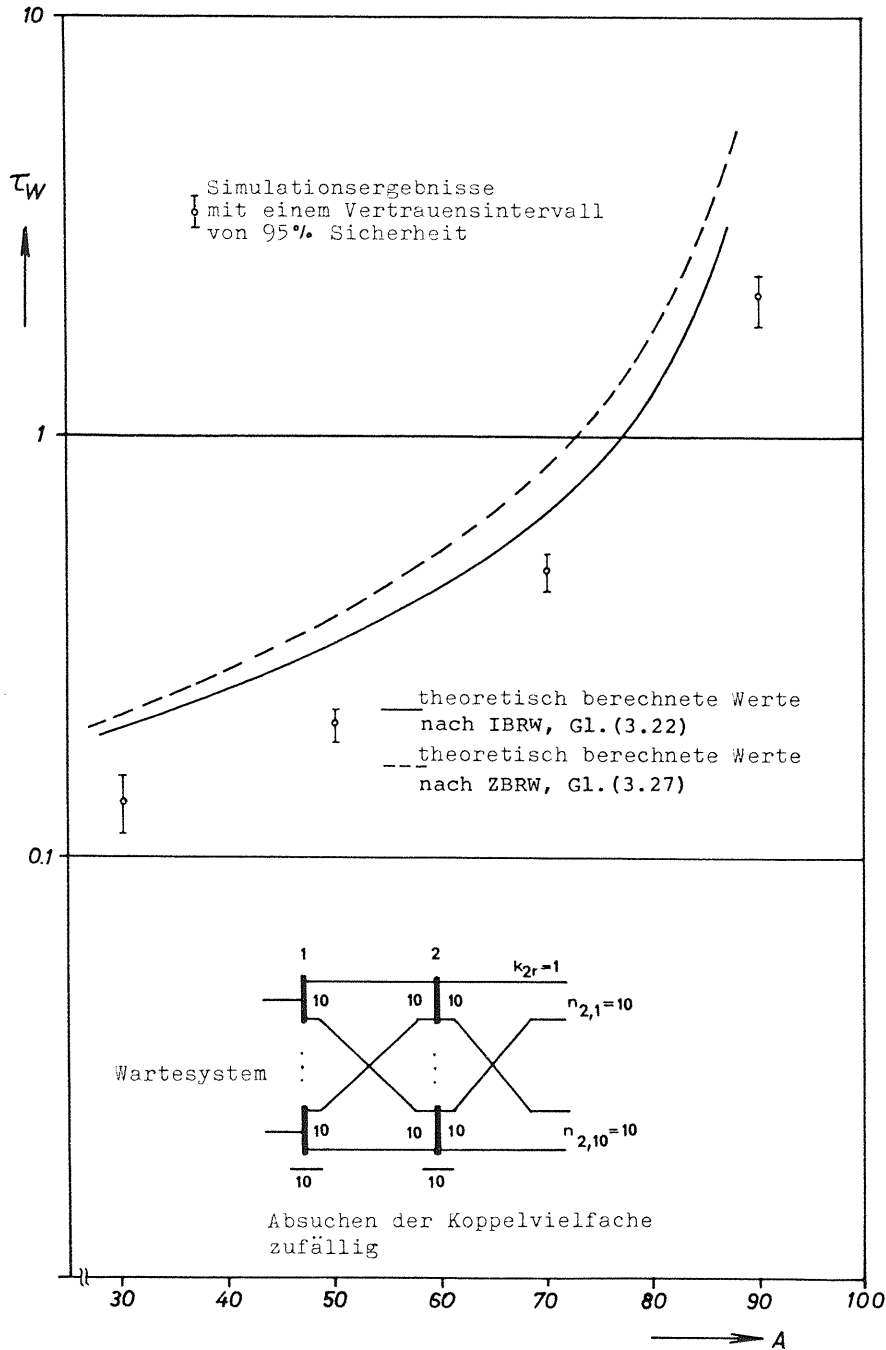


Diagramm 3.4

Die mittlere Wartezeit τ_w
über dem Angebot A

4. Mehrstufige Linksyste me mit Warten

4.1 Der allgemeine Fall

Das Linksyste m bestehe aus s Stufen. Nach jeder Stufe kann eine Mischung eingefügt sein. Die Abnehmerleitungen können alle in eine Richtung führen oder in mehrere Richtungs bündel aufgeteilt sein. Anders als in Abschnitt 2 kann jedes Koppelvielfach einer Stufe mehr als einen Ausgang $l_{j,j+1} \geq 1$ zu jedem Koppelvielfach der nächsten Stufe haben.

Das Bild 4.1 zeigt ein solches Linksyste m. Die Mischungen sind gestrichelt angedeutet.

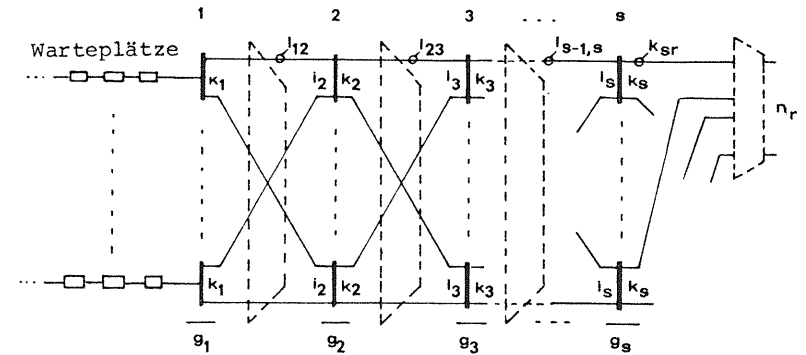


Bild 4.1 Linksyste m mit Mischungen

Für die Ableitung der interessierenden Verkehrsgrößen werden folgende Bezeichnungen verwendet (vgl. Bild 4.1).

- s Zahl der Stufen
- g_j Zahl der Koppelvielfache in Stufe j
 $j = 1, 2, \dots, s$
- k_j Zahl der Ausgänge je Koppelvielfach
der Stufe j: $j = 1, 2, \dots, s$

$l_{j,j+1}$	Zahl der Leitungen von einem Koppelvielfach der Stufe j zu jedem Koppelvielfach der Stufe $j + 1$, $j = 1, 2, \dots, s - 1$
i_j	Eingänge jedes Koppelvielfaches der Stufe j . $j = 2, 3, \dots, s$
k_{sr}	Anzahl der Leitungen pro Koppelvielfach der letzten Stufe s in die Richtung r . $r = 1, 2, \dots, R$
m_r	Mittlere Prüfbarkeit der Leitungen des Abnehmerbündels r
n_r	Anzahl der Leitungen (in Stufe s) im Abnehmerbündel r . $r = 1, 2, \dots, R$
H_j	Mischungsverhältnis der Mischung nach Stufe j
Y	Verkehrsbelastung
η_r	Die Wahrscheinlichkeit, daß ein belegter Ausgang eines Koppelvielfaches der ersten Stufe eine Leitung im Abnehmerbündel der Richtung r belegt. Falls keine Richtungs- aufteilung erfolgt ist $\eta_r = 1$.

4.2 Verallgemeinerung des Verfahrens für Verlustsysteme mit Aufteilung in Eingangs- und Abnehmerblockierung (CIRBW)*

Der Grundgedanke des Verfahrens ist bereits am Beispiel eines Systemes für zweistufige Mischwahl erläutert worden (vgl. Abschnitt 2.2.3). Zur Ermittlung der Wartewahrscheinlichkeit W und der mittleren Wartezeit τ_w wird die Berechnung unterteilt in Eingangsblockierung und Abnehmerblockierung.

Es wird dabei von einem möglichst gleichmäßig verteilten Verkehr auf den Zwischenleitungen in allen Stufen ausgegangen und als Näherung der Verteilungstyp der Belegungen der Zwischenleitungen nach der ersten Stufe sowie der Verteilungstyp

im Abnehmerbündel vorgeschrieben. Außerdem wird angenommen, daß beide Verteilungen voneinander unabhängig sind. Mit diesen Näherungsannahmen kann das n -stufige System auf eine Ersatzanordnung aus zwei Stufen reduziert werden, deren Blockierungswahrscheinlichkeiten unabhängig voneinander berechnet werden können. Für die erste Ersatzstufe wird die Eingangsblockierung berechnet, für die zweite die Abnehmerblockierung (vgl. Bild 4.2).

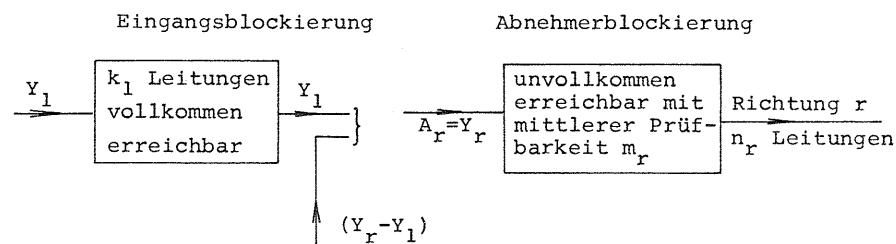


Bild 4.2 Ersatzanordnung für ein Linksystem mit s Stufen.

Wie schon erwähnt, wird für die Belegung der Zwischenleitungen nach der ersten Stufe die Verteilung eines vollkommen erreichbaren Bündels (Wartesystem) mit k_1 Leitungen angenommen. Der Anteil der Wartewahrscheinlichkeit durch Eingangsblockierung kann also mit $E_{2,k_1}(Y_1)$ berechnet werden.

Zur Berechnung der Abnehmerblockierung wird eine Verteilungsfunktion gleich jener eines Wartesystemes mit unvollkommener Erreichbarkeit der n_r Leitungen des Abnehmerbündels r bei der Belastung $Y_r = \eta_r Y$ vorausgesetzt. Die Abnehmerblockierung ergibt damit eine Wartewahrscheinlichkeit nach Gleichung (A.3) mit $W_{IDF}(n_r, m_r, Y_r)$. Dabei ist für die Erreichbarkeit die mittlere Prüfbarkeit m_r einzusetzen.

Für die Berechnung der mittleren Prüfbarkeit werden zunächst Systeme ohne Mischung betrachtet, bei denen $l_{j,j+1} = 1$, also jeweils nur eine Zwischenleitung von einem Koppelvielfach der

*) Combined Input Route Blocking with Waiting.

Stufe j zu jedem Koppelvielfach der Stufe $j + 1$ vorhanden ist. Die Anzahl der im Mittel direkt durchgeschalteten Leitungen von einem betrachteten Koppelvielfach der ersten Stufe in die betrachtete Richtung r ist der Anteil $Y_1 \cdot \eta_r$ des Verkehrs. Vom Ausgang der ersten Stufe können im Mittel $(k_1 - Y_1)$ Koppelvielfache der zweiten Stufe erreicht werden. Von jedem dieser Koppelvielfache sind jeweils $(k_2 - Y_2)$ Koppelvielfache der dritten Stufe zu erreichen usw. Für die Stufen $1, \dots, (s-1)$ ergibt sich dafür

$$\prod_{j=1}^{s-1} (k_j - Y_j)$$

Von den erreichbaren Koppelvielfachen der letzten Stufe s kommen dazu noch jeweils k_{sr} Abnehmerleitungen in die gewünschte Richtung r .

Somit ergibt sich eine mittlere Prüfbarkeit m_r über alle Stufen, ohne Mischungen und mit $1_{j,j+1} = 1$

$$m_r = \prod_{j=1}^{s-1} (k_j - Y_j) \cdot k_{sr} + \eta_r \cdot Y_1 \quad (4.1)$$

Ist eine Mischung zwischen Stufe 1 und 2 eingeschaltet, so reduziert sich die Anzahl der freien Zwischenleitungen auf $(k_1 - H_1 \cdot Y_1)$, die Mischung reduziert also die Erreichbarkeit im Verhältnis $H_1 = (g_1 \cdot k_1) / (i_2 \cdot k_2)$. Falls Mischungen zwischen anderen Stufen vorkommen, muß der entsprechende Term durch $(k_j - H_j \cdot Y_j)$ ersetzt werden. Für das Mischungsverhältnis $H_j = 1$ entfällt die Mischung, so daß allgemein gilt:

$$m_r = \prod_{j=1}^{s-1} (k_j - H_j \cdot Y_j) \cdot k_{sr} + \eta_r \cdot H_1 \cdot Y_1 \quad (4.2)$$

Es kann bei der numerischen Auswertung von (4.2) vorkommen, daß das Produkt

$$\prod_{j=1}^b (k_j - H_j \cdot Y_j) > g_b \quad \text{wird.}$$

Dies muß man ausschließen. Daher ist in Verbindung mit der Gleichung (4.2) die folgende Begrenzungs-Vorschrift zu beachten:

$$\prod_{j=1}^b (k_j - H_j \cdot Y_j) \leq g_{b+1} \quad \text{für } b = 1, 2, \dots, s-1 \quad (4.3)$$

Ergeben sich trotz (4.3) für m_r Werte, die größer als n_r Leitungen in Richtung r sind, so ist $m_r = n_r$ zu setzen.

Als Beispiel wird für ein System mit 2-stufiger Richtungs-wahl (vgl. Bild 3.1, Seite 56) die mittlere Prüfbarkeit anhand von Bild 4.3 angegeben. Im Mittel sind Y_1 Zwischenleitungen des betrachteten Koppelvielfaches der ersten Stufe belegt. Damit können über die im Mittel $(k_1 - Y_1)$ freien Zwischenleitungen $(k_1 - Y_1)k_{2r}$ Abnehmerleitungen erreicht werden. Weitere $\eta_r \cdot Y_1$ Abnehmerleitungen können auf besetzt geprüft werden. Somit ergibt sich die mittlere Prüfbarkeit zu $m_r = (k_1 - Y_1)k_{2r} + \eta_r \cdot Y_1$. Zur Erläuterung sind in Bild 4.3 die entsprechenden Größen eingetragen.

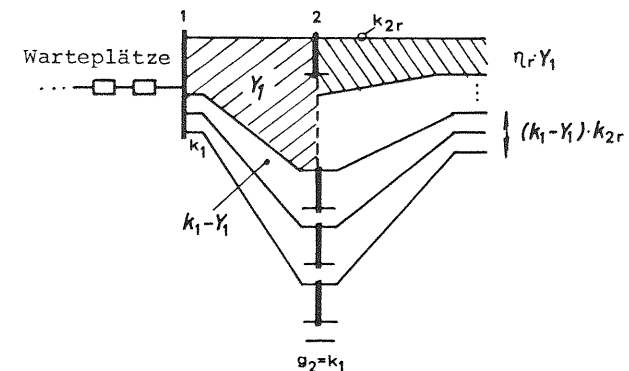


Bild 4.3 Beispiel für die Berechnung der mittleren Prüfbarkeit.

Für den Fall $l_{j,j+1} > 1$, $j = 1, 2, \dots, s-1$ kann für die mittlere Prüfbarkeit eine ähnliche Formel wie (4.2) angegeben werden. Sie liefert obere Grenzwerte für die Abnehmerblockierung.

$$m_r = \prod_{j=1}^{s-1} (k_j^{-H_j} \cdot Y_j) \frac{1}{l_{j,j+1}} k_{sr} + \eta_r \cdot H_1 \cdot Y_1 \quad (4.4)$$

Ähnlich wie in Gleichung (4.3) gelten Einschränkungen, die beachtet werden müssen. Wird die Absuchreihenfolge der Zwischenleitungen so gewählt, daß zunächst je eine Zwischenleitung von einem Koppelvielfach j zu jedem Koppelvielfach der nächsten Stufe ($j + 1$) abgesucht wird, liefert die Gleichung (4.4) zu große Werte. Dabei dürfen erst dann, wenn die zuerst abgesuchten m_{j+1} Zwischenleitungen belegt sind, jeweils die zweiten Zwischenleitungen zu jedem Koppelvielfach der Stufe ($j+1$) abgesucht werden, usw. Für dieses "günstigste Absuchverfahren" läßt sich für Gleichung (4.4) so modifizieren, daß sie eine untere Schranke liefert, (vgl. [2](c)).

Mit der mittleren Prüfbarkeit m_r aus (4.4) kann die Wartewahrscheinlichkeit W und die mittlere Wartezeit τ_W ähnlich wie im Abschnitt 2.2 (vgl. Gleichung (2.27), (2.29)) berechnet werden. Die Werte von $W_{IDF}(n_r, m_r, Y_r)$ und $\tau_{W_{IDF}}(n_r, m_r, Y_r)$ sind nach Gleichung (A.3) und (A.4) zu berechnen.

$$W = E_{2, k_1}(Y_1) + \{1 - E_{2, k_1}(Y_1)\} \cdot W_{IDF}(n_r, m_r, Y_r) \quad (4.5)$$

$$\tau_W = \frac{\frac{1}{k_1 - Y_1} \cdot E_{2, k_1}(Y_1) + \tau_{W_{IDF}}(n_r, m_r, Y_r) \cdot W_{IDF}(n_r, m_r, Y_r)}{E_{2, k_1}(Y_1) + \{1 - E_{2, k_1}(Y_1)\} \cdot W_{IDF}(n_r, m_r, Y_r)} \quad (4.6)$$

Dabei ist der Anteil des Verkehrs in die Richtung r mit $Y_r = \eta_r Y$ bezeichnet.

Bisher wurde die Berechnung der Wartewahrscheinlichkeit W und der mittleren Wartezeit τ_W auf die Beziehungen der einstufigen Koppelanordnung mit Warten nach der Interconnection Delay Formula (IDF) zurückgeführt. Von M. Thierer [5] wurde ein weiteres Verfahren für die Berechnung von W bzw. τ_W angegeben. Dieses Verfahren läßt sich ebenfalls auf einstufige Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit anwenden. Dabei wird W bzw. τ_W nach der sogenannten Grading Delay Formula (GDF) berechnet, vgl. Anhang 1, Gleichung (A.5) bzw. (A.6). Ersetzt man in Gleichung (4.5) bzw. (4.6) die Beziehung $W_{IDF}(n_r, m_r, Y_r)$ und $\tau_{W_{IDF}}(n_r, m_r, Y_r)$ durch die Beziehung (A.5) und (A.6), also $W_{GDF}(n_r, m_r, Y_r)$ und $\tau_{W_{GDF}}(n_r, m_r, Y_r)$ so erhält man:

$$W = E_{2, k_1}(Y_1) + \{1 - E_{2, k_1}(Y_1)\} \cdot W_{GDF}(n_r, m_r, Y_r) \quad (4.7)$$

$$\tau_W = \frac{\frac{1}{k_1 - Y_1} \cdot E_{2, k_1}(Y_1) + \tau_{W_{GDF}}(n_r, m_r, Y_r) \cdot W_{GDF}(n_r, m_r, Y_r)}{E_{2, k_1}(Y_1) + \{1 - E_{2, k_1}(Y_1)\} \cdot W_{GDF}(n_r, m_r, Y_r)} \quad (4.8)$$

Vergleich der Ergebnisse mit Verkehrssimulation

In den folgenden Diagrammen wird an einigen Beispielen gezeigt, wie weit die Ergebnisse des Verfahrens der kombinierten Eingangs- und Abnehmer-Blockierung für Wartesysteme von den Werten aus der Verkehrssimulation abweichen (vgl. auch Diagramme 2.2 bis 2.5 in Abschnitt 2, Seite 50 - 55). Bei der numerischen Auswertung der Gleichung (4.5) und (4.7) bzw. (4.6) und (4.8) ergaben sich bei den untersuchten Systemen so geringe Unterschiede, daß auf eine zeichnerische Darstellung in den Diagrammen verzichtet werden mußte. Zunächst erkennt man, daß die Genauigkeit der Ergebnisse nicht über den gesamten Bereich des angebotenen Verkehrs gleich ist. Bei der Wartewahrscheinlichkeit sind offensicht-

lich die Näherungsannahmen bei extrem kleinen und bei größeren Angebotswerten unterschiedlich zutreffend. Die Ergebnisse zeigen jedoch im ganzen Bereich eine für die Praxis ausreichende Übereinstimmung mit den Resultaten aus den Verkehrstests.

Die Tendenz zur Unterschätzung der Wartewahrscheinlichkeit (Diagr. 2.2, S. 50, $W < 1 \%$) bei kleinen Angebotswerten läßt sich durch die Verwendung der mittleren Prüfbarkeit erklären. Die Schwankungen des Verkehrs wirken sich bei kleinen Belastungen stärker auf die momentane Erreichbarkeit aus als bei mittleren und größeren Belastungen. Der nichtlineare Einfluß dieser Schwankungen wird durch die mittlere Zahl der Belegungen in der Berechnung der Wartewahrscheinlichkeit unterbewertet.

Die Ergebnisse für große Belastungen zeigen eine Tendenz zur Überschätzung der Wartewahrscheinlichkeit gegenüber der Verkehrssimulation (Diagr. 4.7, S. 93). Die Ursache liegt vor allem in der Annahme der statistischen Unabhängigkeit von Eingangsblockierung und Abnehmerblockierung. Tatsächlich ist die Unabhängigkeit der Belegungszustände der Eingangsstufe und der Abnehmerstufe bei größer werdender Belastung immer weniger gewährleistet.

Für die mittleren Wartezeiten τ_w können die Einflüsse der Näherungsannahmen in ähnlicher Weise interpretiert werden. Von der Wirklichkeit abweichende Annahmen ergeben bei der mittleren Wartezeit meist größere relative Abweichungen, als dies bei der Ermittlung der Wartewahrscheinlichkeit der Fall ist.

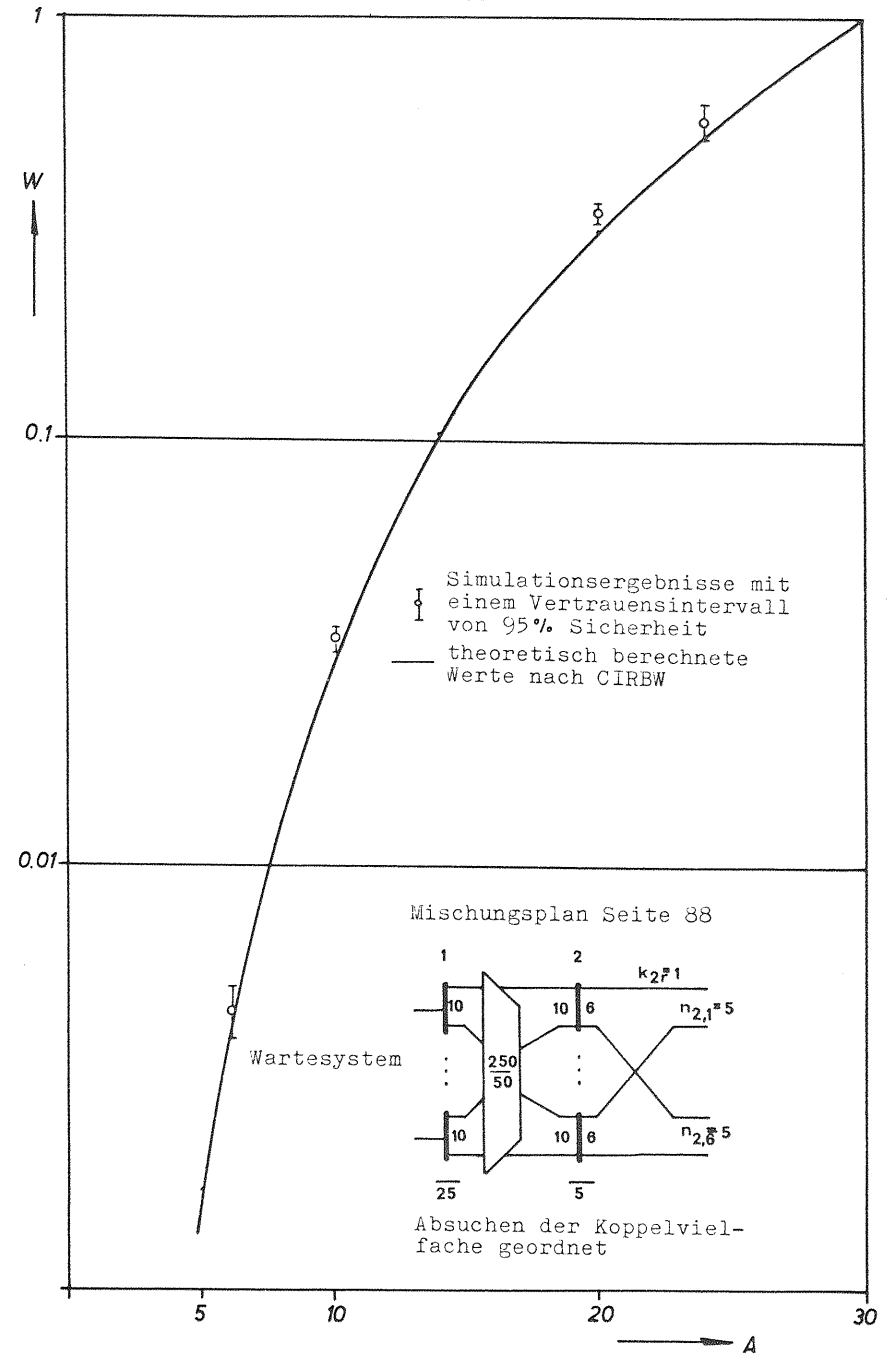


Diagramm 4.1

Die Wartewahrscheinlichkeit W über dem Angebot A

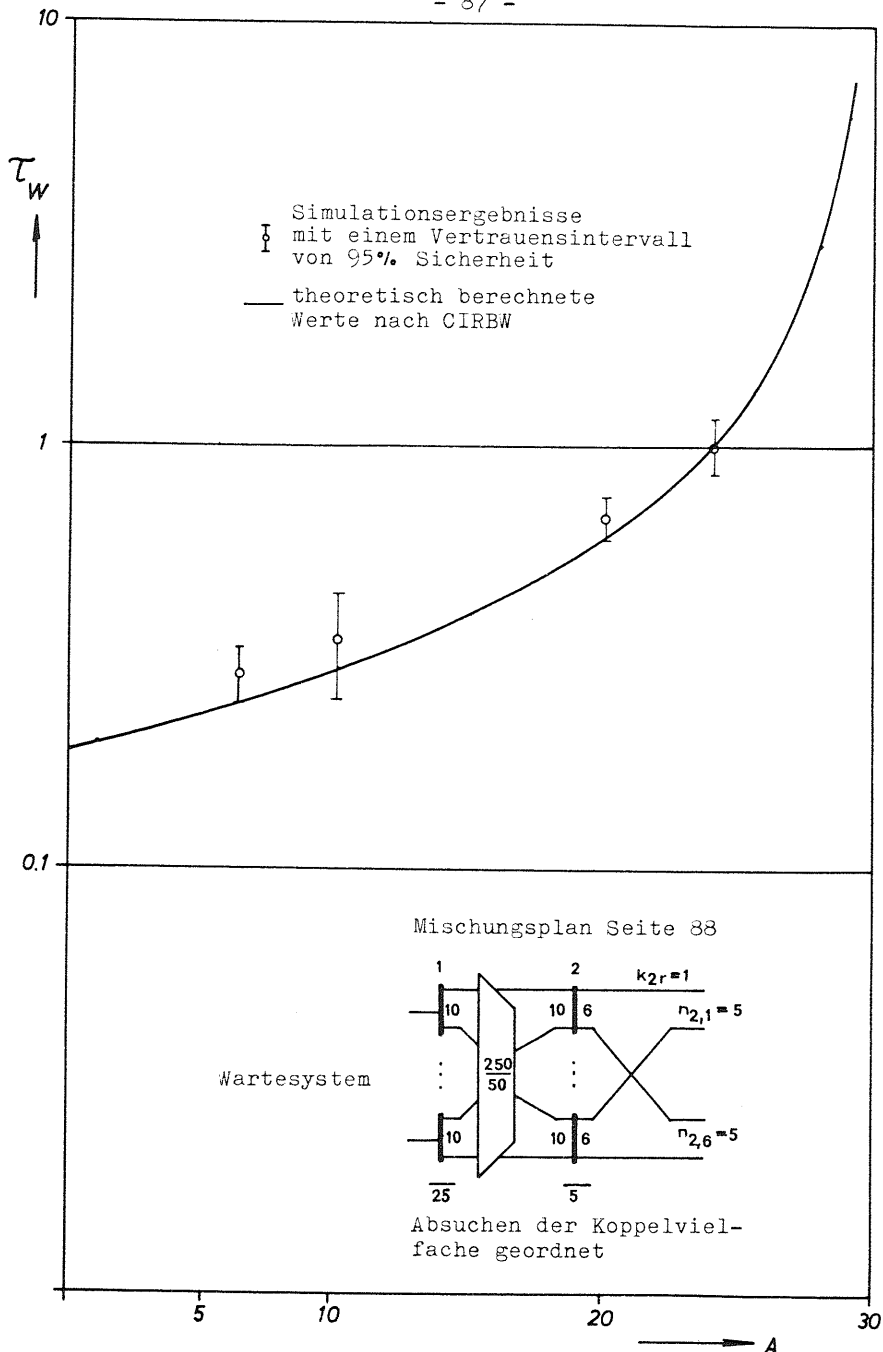


Diagramm 4.2

Die mittlere Wartezeit τ_W der Wartenden über dem Angebot A

Erläuterungen zur Mischungstabelle

Als Beispiel wird eine Mischung zwischen Stufe 1 und Stufe 2 betrachtet. Die Ausgangsleitungen der Mischung sind numeriert mit

$$1, 2, \dots, i_2 \cdot g_2$$

Die Leitungen mit den Nummern $1, 2, \dots, i_2$ führen auf das erste Koppelvielfach der Stufe 2, die Leitungen

$$i_2+1, i_2+2, \dots, 2 \cdot i_2$$

auf das zweite Koppelvielfach, usw.

In der Mischungstabelle sind die Nummern der Ausgangsleitungen der Mischung eingetragen. Die Spalten der Tabelle entsprechen den Koppelvielfachen der ersten Stufe, die Zeilen tragen die Nummern des i -ten Ausgangs aus dem entsprechenden Koppelvielfach.

Beispiel aus nebenstehender Mischungstabelle:

Die 5. Leitung aus $g_{1,9}$ hat die Nummer 34. Die Ausgangsleitung 34 führt vom 9. Koppelvielfach der ersten Stufe auf den 4. Eingang des 3. Koppelvielfaches der Stufe 2.

G1 = 25	MISCHUNG	K1 = 10	G2 = 5	K2 = 6
1	17	20	4	6
2	18	21	5	7
3	19	22	6	8
4	20	23	7	9
5	21	24	8	10
6	22	25	9	11
7	23	26	10	12
8	24	27	11	13
9	25	28	12	14
10	26	29	13	15
11	27	30	14	16
12	28	31	15	17
13	29	32	16	18
14	30	33	17	19
15	31	34	18	20
16	32	35	19	21
17	33	36	20	22
18	34	37	21	23
19	35	38	22	24
20	36	39	23	25
21	37	40	24	26
22	38	41	25	27
23	39	42	26	28
24	40	43	27	29
25	41	44	28	30

Mischungstabelle zu Diagramm 4.1 und 4.2

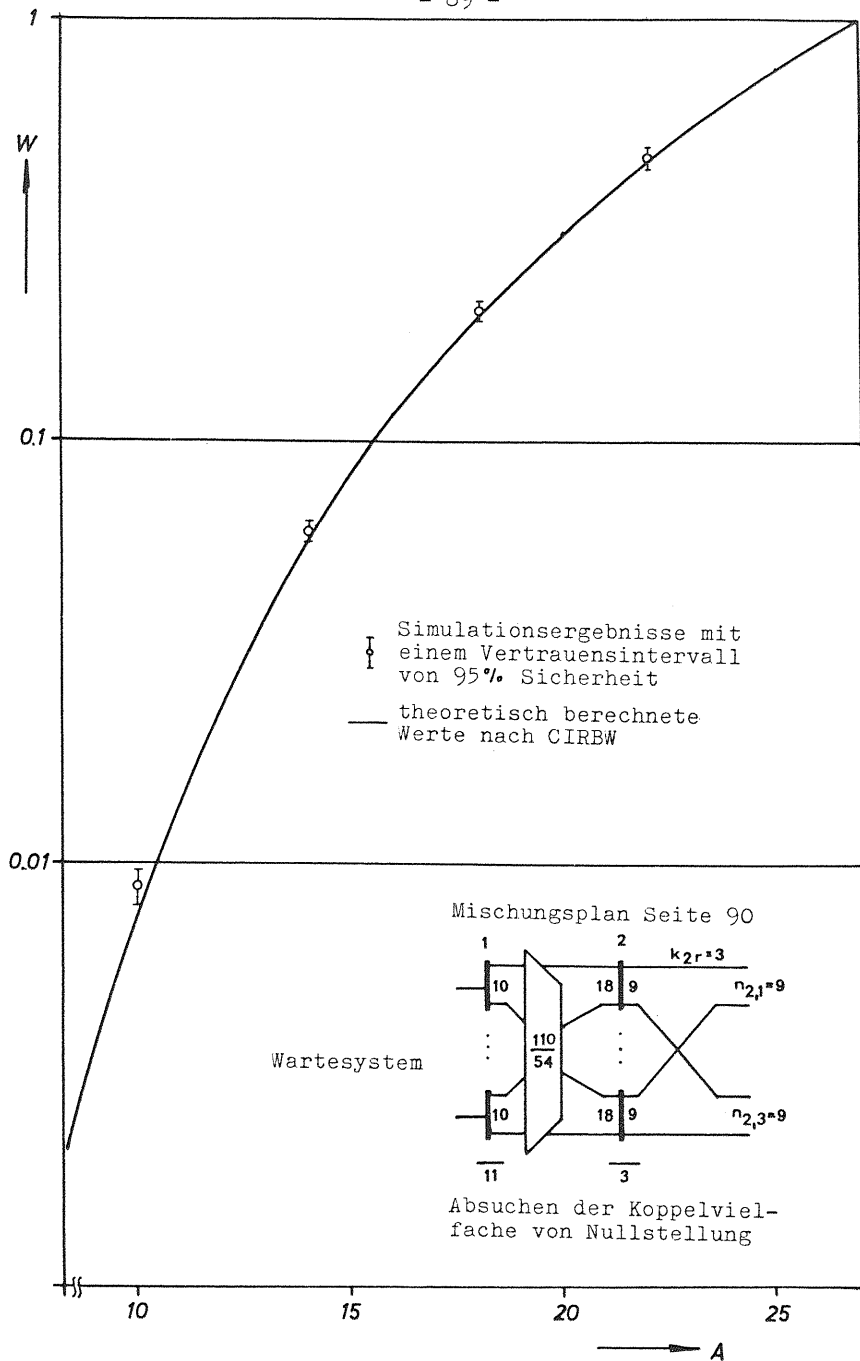


Diagramm 4.3 Die Wartewahrscheinlichkeit W über dem Angebot A

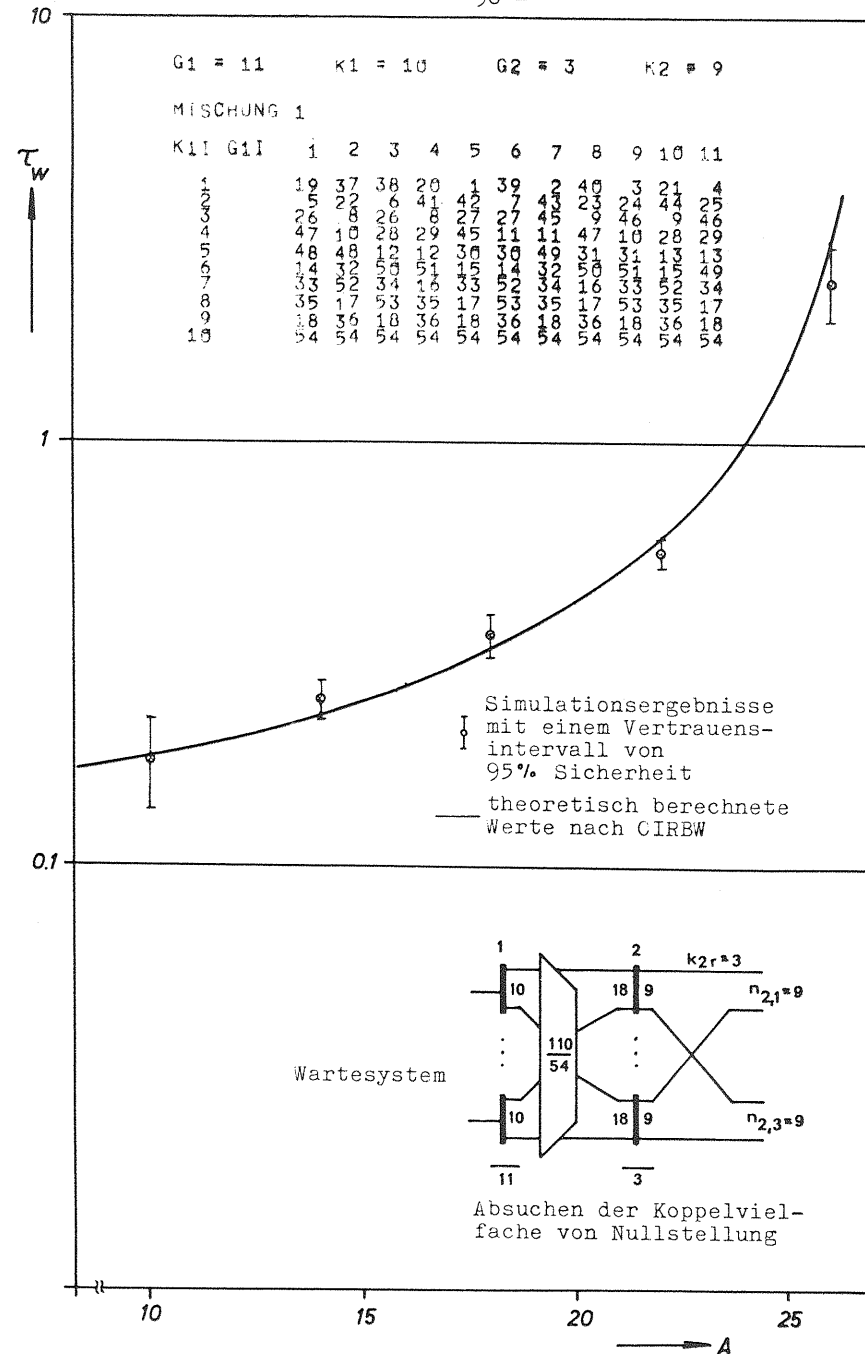


Diagramm 4.4 Die mittlere Wartezeit τ_w der Wartenden über dem Angebot A

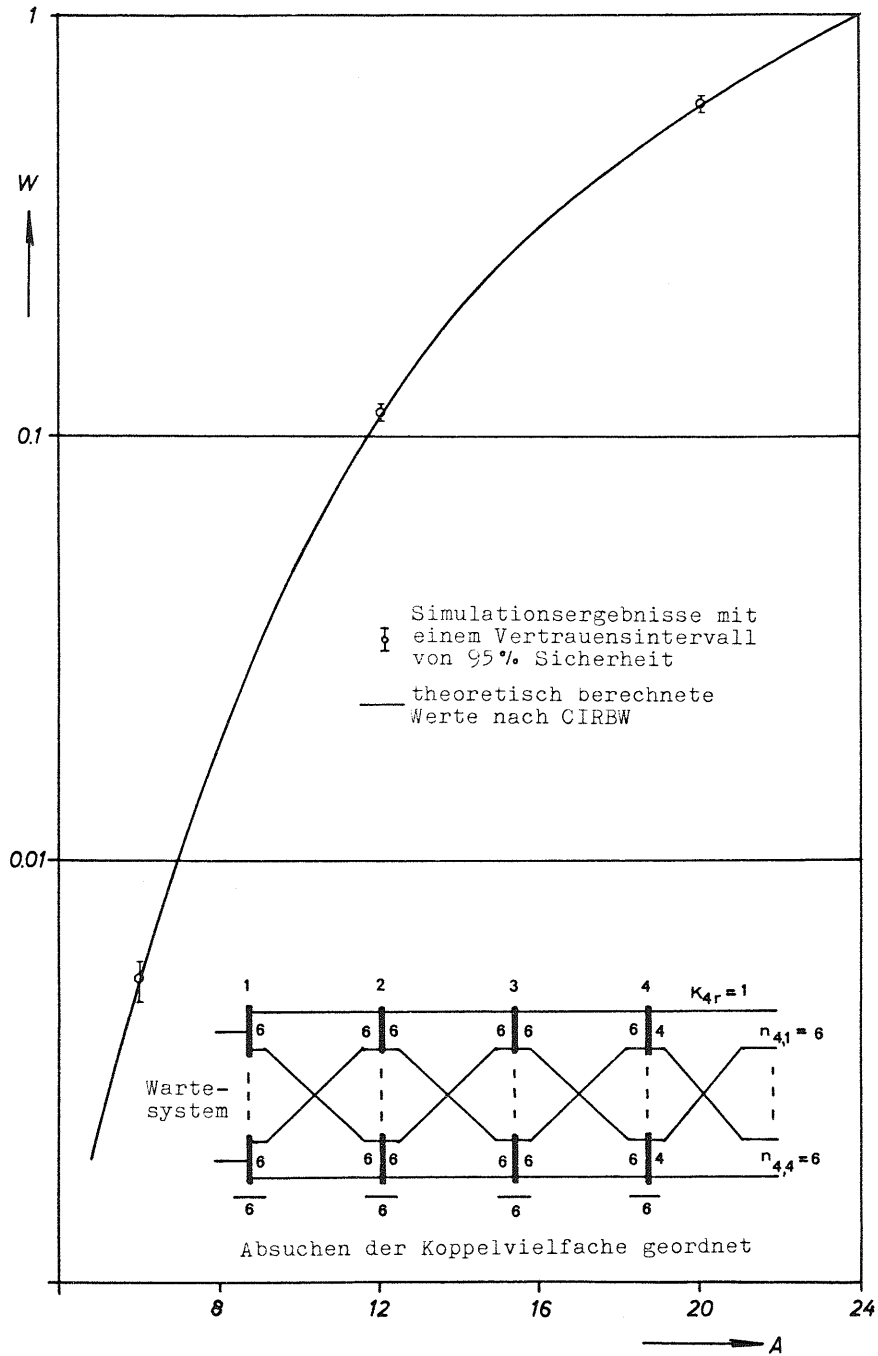


Diagramm 4.5

Die Wartewahrscheinlichkeit W über dem Angebot A

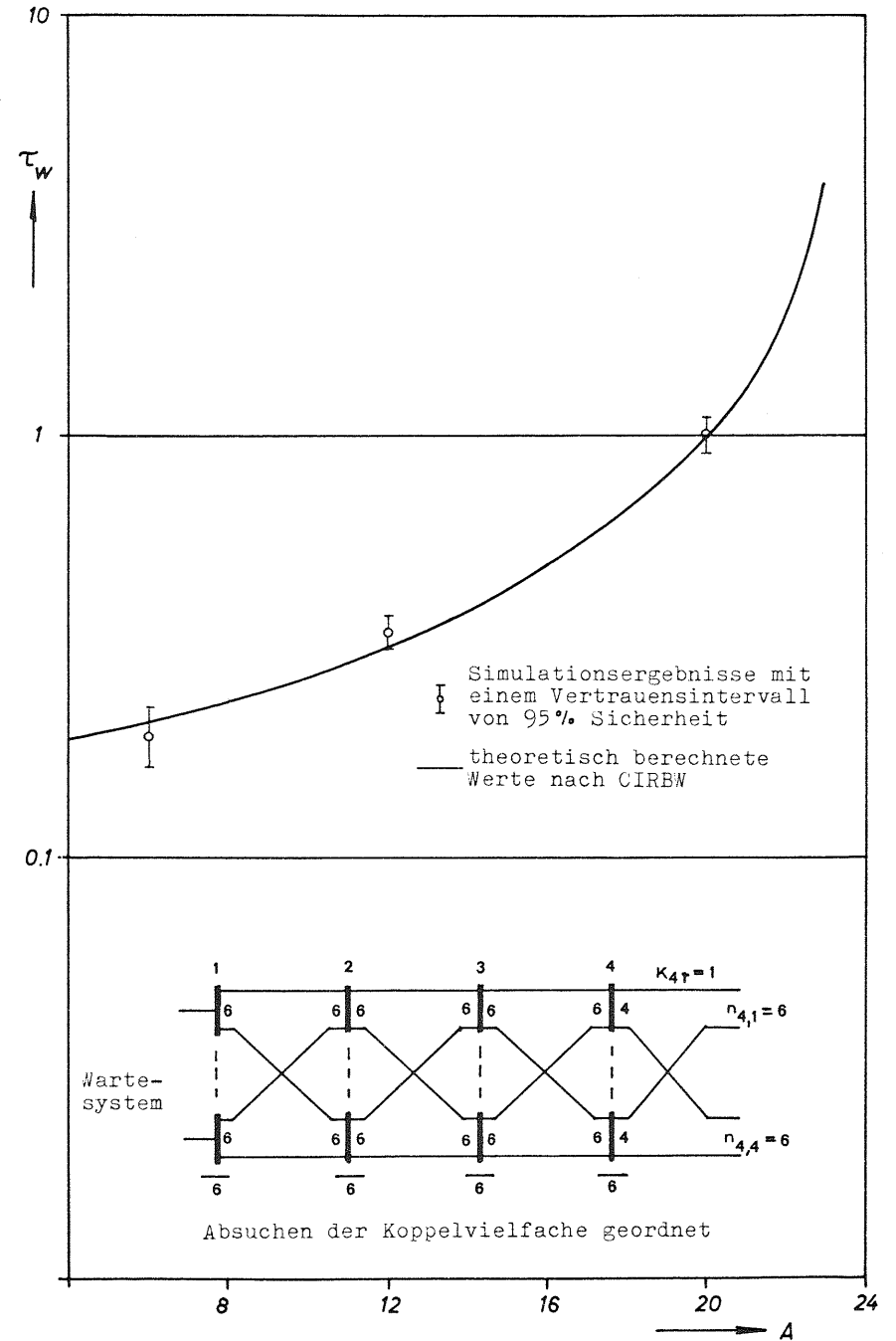


Diagramm 4.6

Die mittlere Wartezeit τ_W der Wartenden über dem Angebot A

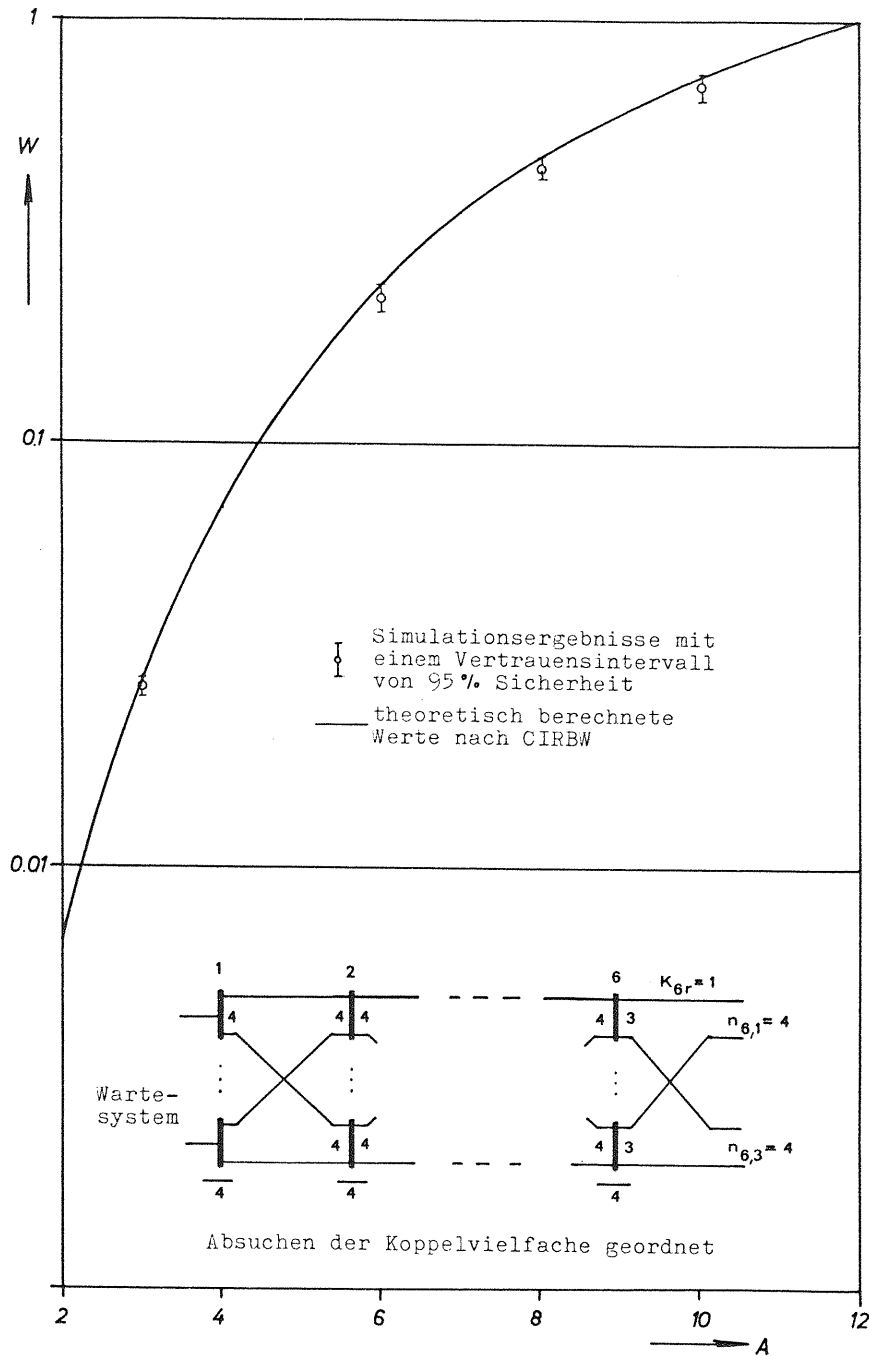


Diagramm 4.7

Die Wartewahrscheinlichkeit W über dem Angebot A

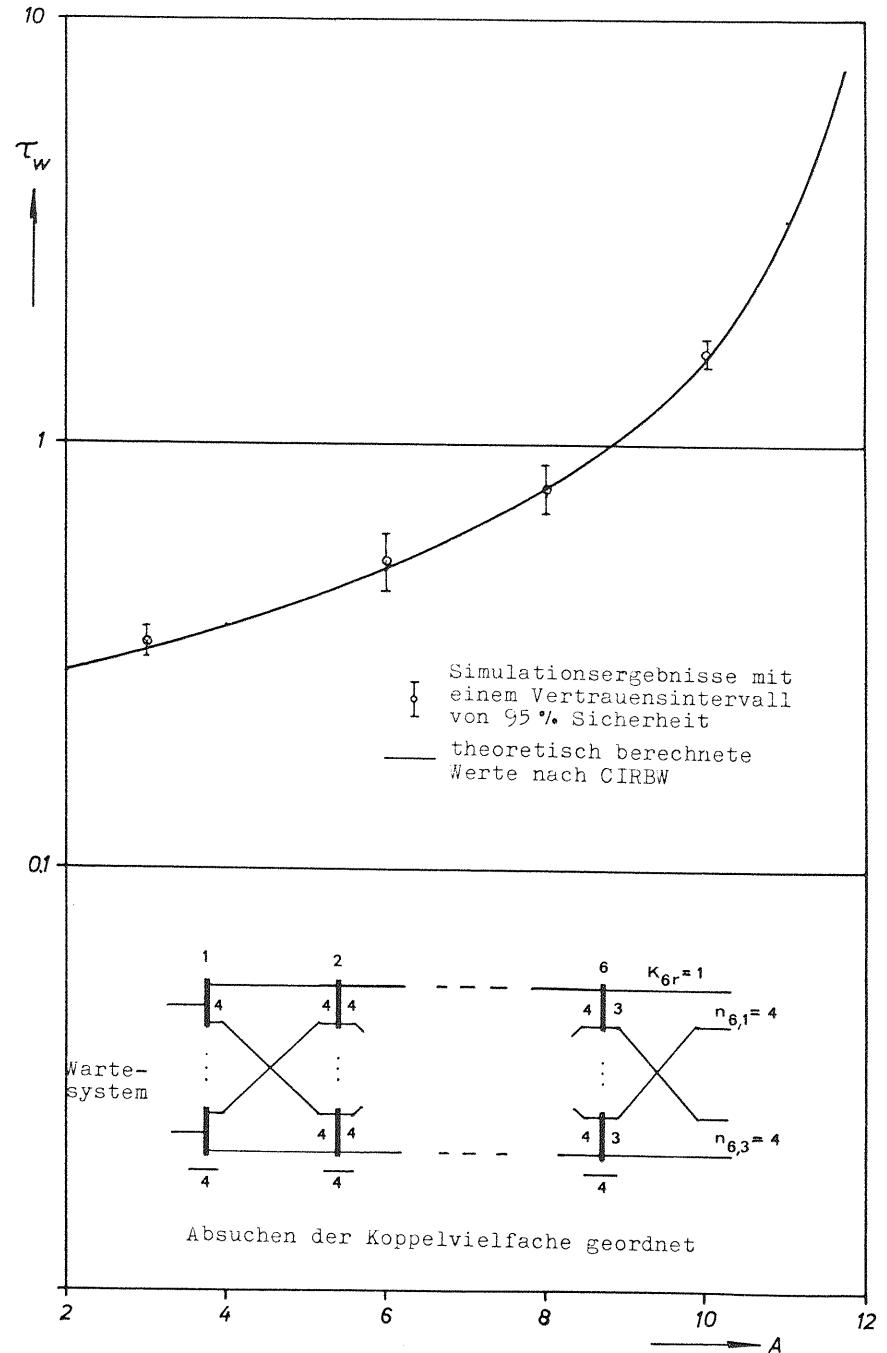


Diagramm 4.8

Die mittlere Wartezeit τ_W der Wartenden über dem Angebot A .

Bemerkung

In dieser Arbeit wurden nur reine Wartesysteme betrachtet, also solche mehrstufige Koppelanordnungen, bei denen kein Ruf wegen Mangel an Warteplätzen abgewiesen werden muß.

Die hier angegebenen Verfahren zur Berechnung der Verkehrsgrößen solcher Systeme lassen sich zur Berechnung von mehrstufigen Koppelanordnungen mit begrenzter Speicherzahl erweitern, insbesondere gilt dies für die Verfahren ZBMW und IBMW. Mit der gleichen Annahme, daß nämlich die Verteilungen in den Zubringerteilgruppen voneinander unabhängig sind, lassen sich die Zustandsgleichungen für Linkssysteme mit begrenztem Speicher ableiten.

Für die Anwendung der Methode CIRBW zur Berechnung von Linkssystemen mit begrenztem Speicher kann auf die Arbeit von P. Kühn [1] zurückgegriffen werden. Dort werden einstufige Koppelanordnungen mit begrenztem Speicher behandelt. Bei der Methode CIRBW müssten dann anstelle der Beziehungen für die einstufige Koppelanordnung mit unbegrenztem Speicher die entsprechenden Beziehungen für begrenzte Speicherzahl verwendet werden.

5. Zusammenfassung von Ergebnissen

Über die Berechnung der Verkehrsgrößen von Linkssystemen mit Warten gibt es außer jener von E. Gambe [6] keine Veröffentlichungen. E. Gambe [6] behandelt nur Näherungsverfahren für solche zweistufige Linkssysteme ohne Mischung, die als gemischte Warte-Verlustsysteme mit einer speziellen Abfertigungsdisziplin arbeiten.

In der vorliegenden Arbeit wird unter der Annahme einer praktisch unbegrenzten Zahl von Warteplätzen neben zweistufigen Linkssystemen mit Misch- oder Richtungswahl auch der allgemeine Fall mehrstufiger Linkssysteme mit Mischungen hinter beliebigen Stufen betrachtet.

Zunächst werden im Abschnitt 2 für Systeme mit zweistufiger Mischung 3 neue Verfahren für Wartesysteme abgeleitet. Zwei dieser Verfahren liefern auch neue Lösungen für Verlustsysteme. Die einzige Voraussetzung, die diesen letztgenannten 2 Verfahren zugrunde liegt, ist die Unabhängigkeit der Verteilungen der belegten Leitungen in den einzelnen Zubringerteilgruppen. Diese Voraussetzung ist bei bestimmten Systemen sogar exakt erfüllt. Es werden die Zustandsgleichungen abgeleitet und daraus die interessierenden Verkehrsgrößen berechnet. Außerdem wird anhand dieser Verfahren gezeigt, wie man von bekannten Berechnungsverfahren für Verlustsysteme auch Verfahren für die Berechnung von Warte-wahrscheinlichkeit und mittlere Wartezeit von Linkssystemen mit Warten ableiten kann.

Danach werden in Abschnitt 3 zwei Lösungen hergeleitet für Systeme mit zweistufiger Richtungswahl.

Schließlich wird ein Verfahren angegeben, das auch für 3- und mehrstufige Wartesysteme mit Mischwahl oder Richtungswahl sowie mit Mischungen hinter beliebigen Stufen anwendbar ist. Die Anregung dazu gab das Verfahren CIRB von A. Lotze [2].

Es zeigt sich, daß man das neue CIRBW Verfahren für alle vorkommenden Strukturen eines Linksystems mit einer für die Praxis gut ausreichenden Genauigkeit anwenden kann. Die numerische Auswertung ist sogar ohne Digitalrechner möglich, da die Berechnung

der hier interessierenden Größen auf entsprechende Größen einstufiger Koppelanordnungen zurückgeführt werden kann. Diese liegen aber bereits in tabellierter Form vor (M. Thierer [5]).

Alle entwickelten Verfahren wurden anhand zahlreicher Simulations-Ergebnisse auf ihre Genauigkeit hin untersucht.

Anhang 1

Kurzfassung der Theorie von M. Thierer für einstufige Koppelanordnungen mit unbegrenztem Speicher

Mit den Voraussetzungen des Abschnitts 1.6 (Seite 14) und der Annahme, daß im "statistischen Gleichgewicht" die Wahrscheinlichkeit für das Verschwinden des Zustandes {x,z} durch Enden einer Belegung gleich der Wahrscheinlichkeit für das Entstehen dieses Zustandes {x,z} infolge eines neuen Rufes ist, hat M. Thierer [4], [5] die nachstehend angegebenen Beziehungen für W und τ_w abgeleitet.

Von n Leitungen können k erreicht werden. Im System befinden sich x Belegungen des Bündels.

Für die ideale Erlangmischung und für solche nichtidealen Mischungen, deren Durchlasswahrscheinlichkeit in guter Näherung gleich jener einer idealen Mischung ist, gilt folgende Beziehung für das "statistische Gleichgewicht":

$$p(x) (x-\sigma(x) \cdot A) = A p(x-1) \cdot \mu(x-1) \tag{A.0}$$

Aus dieser Beziehung läßt sich folgende Gleichung ableiten:

$$p(x) = p(0) \cdot \frac{A^x \prod_{i=0}^{x-1} \mu(i)}{x \prod_{i=1}^x \{i-\sigma(i) \cdot A\}} \tag{A.1}$$

Mit der Bedingung $\sum_{x=0}^n p(x) = 1$ ergibt sich somit

$$\frac{1}{p(0)} = 1 + \sum_{x=1}^n A^x \frac{\prod_{i=0}^{x-1} \mu(i)}{\prod_{i=1}^x (i-\sigma(i) \cdot A)} \tag{A.2}$$

Dabei ist $\sigma(x) = 1 - \mu(x) = \frac{\binom{x}{k}}{\binom{n}{k}}$ die Sperrwahrscheinlichkeit.

Die Wartewahrscheinlichkeit W ergibt sich als Erwartungswert nach der IDF (Interconnections-Delay-Formula)

$$W_{IDF}(n, k, A) = \frac{\sum_{x=k}^n A^x \frac{\prod_{i=0}^{x-1} \mu(i)}{\prod_{i=1}^{x-1} (i - \sigma(i) \cdot A)} \cdot \sigma(x)}{1 + \sum_{x=1}^n A^x \frac{\prod_{i=0}^{x-1} \mu(i)}{\prod_{i=1}^{x-1} (i - \sigma(i) \cdot A)}} \quad (A.3)$$

Die mittlere Wartezeit der Wartenden bezogen auf die mittlere Belegungsdauer t_m ist:

$$\tau_{W_{IDF}}(n, k, A) = \frac{\sum_{x=k}^n \{p(x) \sum_{i=k}^n \frac{\sigma(i)A}{i - \sigma(i)A}\}}{A \sum_{x=k}^n p(x) \sigma(x)} \quad (A.4)$$

Für übliche Mischungen der Praxis kann außerdem die GDF (Grading Delay Formula) verwendet werden.

$$W_{GDF}(n, k, A) = E_{2,n}(A) \cdot \frac{n - A + A \cdot E_{1,n-k}(A)}{n \cdot E_{1,n-k}(A)} \quad (A.5)$$

$$\tau_{W_{IDF}}(n, k, A) = \frac{\sum_{x=k}^n p(x) \sum_{i=k}^x \frac{\sigma(i)}{i - \sigma(i)A}}{A \cdot W_{GDF}(n, k, A)} \quad (A.6)$$

In Gleichung (A.5) sind die bekannten Beziehungen $E_{1,n}(A)$ und $E_{2,n}(A)$ nach A.K. Erlang verwendet. Die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(i)$ in Gleichung (A.6) ist gemäß der verwendeten Mischung einzusetzen, $p(x)$ ist die Zustandswahrscheinlichkeit des vollkommen erreichbaren Abnehmerbündels.

Das vollkommen erreichbare Bündel

Wird in den Formeln (A.1) bis (A.4) der Grenzübergang $k \rightarrow n$ durchgeführt, so ergeben sich folgende bekannte Beziehungen:

Zustandswahrscheinlichkeit x Leitungen in Bündel

$$p(x) = p(0) \frac{A^x}{\prod_{i=1}^x (i - A \cdot \sigma(i))} \quad (A.7)$$

mit

$$\frac{1}{p(0)} = 1 + \sum_{x=0}^n \frac{A^x}{x \prod_{i=1}^x (i - A \sigma(i))} \quad (A.8)$$

Dabei ist $\sigma(i) = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n-1$ und $\sigma(n) = 1$. Wartewahrscheinlichkeit, alle n Leitungen belegt:

$$W = p(0) \frac{A^n}{n!} \cdot \frac{n}{n-A} = E_{2,n}(A) \quad (A.9)$$

Mittlere Wartezeit der Wartenden bezogen auf t_m :

$$\tau_W = \frac{t_w}{t_m} = \frac{1}{n-A} \quad (A.10)$$

Anhang 2

Zustandsgleichungen für zweistufige symmetrische Mischwahl

In Abschnitt 2 wurden die Zustandsgleichungen für ein System mit zweistufiger symmetrischer Richtungswahl abgeleitet (vgl. Gleichung (2.5)). Führt man in Gleichung (2.5) den Grenzübergang $\delta t \rightarrow 0$ durch und führt noch $A_i = c_{A_i} \cdot t_m$ ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot x_i \\ + & \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i \\ = & \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) A_i \\ + & \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}, \dots, x_{g_1}) \cdot (x+1) \end{aligned} \quad (A.11)$$

Zur Ableitung der Gleichung (2.5) und (A.11) wurde vorausgesetzt, daß die Zustandswahrscheinlichkeiten $p_i(x_i)$ voneinander unabhängig sind. Damit gilt (vgl. Gleichung (2.6)):

$$p(x_1, x_2, \dots, x_{g_1}) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \dots p_{g_1}(x_{g_1}) \quad (A.12)$$

Die Gleichung (A.11) läßt sich mit (A.12) umschreiben:

$$\sum_{i=1}^{g_1} \prod_{j=1}^{g_1} p_j(x_j) x_i \quad (A.13)$$

$$- \sum_{i=1}^{g_1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{g_1} p_j(x_j) p_i(x_i-1) \cdot \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i$$

$$= \sum_{i=1}^{g_1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{g_1} p_j(x_j) \cdot p_i(x_i+1) \cdot (x_i+1)$$

$$- \sum_{i=1}^{g_1} \prod_{j=1}^{g_1} p_j(x_j) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) A_i$$

Es ist nun zu zeigen (vgl. Gleichung (2.8)), daß jeweils die beiden Terme einer Seite von Gleichung (A.13) einander gleich sind.

Ausgehend von $x=0 = \sum_{i=1}^{g_1} x_i$ bis zu $x=n = \sum_{i=1}^{g_1} x_i$ kann

dies durch systematisches Anschreiben aller möglichen Zustände nach Gleichung (A.13) nachgewiesen werden.

Wegen $p(x_i)=0$ für $x_i < 0$ wird für alle $x_i=0$, also $0 = \sum_{i=1}^{g_1} x_i$:

$$0 = \sum_{i=1}^{g_1} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{g_1} p_j(0) \cdot p_i(1) \cdot 1 - \prod_{j=1}^{g_1} p_j(0) \cdot \mu_1(0, 0, \dots, 0, \dots, 0) \cdot A_i \right\} \quad (A.14)$$

Für $1 = \sum_{i=1}^{g_1} x_i$ ergibt die linke Seite von Gleichung (A.13)

genau den Ausdruck (A.14), also

$$0 = \sum_{i=1}^{g_1} \left\{ \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{g_1} p_j(0) p_i(2) \cdot 2 - \prod_{j=1}^{g_1} p_j(x_j) \cdot \mu_1(0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \cdot A_i \right\} \quad (\text{A.15})$$

Dies läßt sich für alle Belegungen $x = \sum_{i=1}^{g_1} x_i$ fortsetzen.

Es gibt jedoch nur solche Zustände für die $x \leq n$ und außerdem $x_i \leq k_1$ gilt.

$$0 = \sum_{i=1}^{g_1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{g_1} p_j(x_j) \cdot p_i(x_i+1) \cdot (x_i+1) - \prod_{j=1}^{g_1} p_j(x_j) \cdot \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i \right) \quad (\text{A.16})$$

Mit Gleichung (A.13) folgt daher:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot x_i \\ & = \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i-1, \dots, x_{g_1}) \cdot \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i-1, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

und außerdem

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i+1, \dots, x_{g_1}) (x_i+1) \\ & = \sum_{i=1}^{g_1} p(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \mu_1(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{g_1}) \cdot A_i \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$