III/12

Die exakte Berechnung des Streuwertes von Überlaufverkehr hinter Koppelanordnungen beliebiger Stufenzahl mit vollkommener bzw. unvollkommener Erreichbarkeit

von ULRICH HERZOG

Mitteilung aus dem Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Technischen Hochschule Stuttgart

(A.E.Ü. 20 [1966], Heft 3, 180–184; eingegangen am 28. Oktober 1965)

DK 621.395.1.011.1

Für den Streuwert bzw. die Varianz des Überlaufverkehrs bei vollkommenen Bündeln wird eine neue Herleitung angegeben und mit jener von J. RIORDAN verglichen. Ferner wird der Zusammenhang zwischen Gesamtüberlauf und Überlauf hinter einer Zubringerteilgruppe des vollkommenen Bündels untersucht.

Anschließend wird auch für den Gesamtstreuwert bei unvollkommenen Bündeln hinter Koppelanordnungen beliebiger Stufenzahl eine geschlossene Lösung hergeleitet.

A new derivation for the variance coefficient (or variance) of overflow-traffic behind fully available groups is presented and compared with that given by J. RIORDAN. Furthermore, the correlation between total overflow and overflow-traffic behind a single selectorgroup of a fully available group is investigated.

Subsequently a general solution is derived for the variance coefficient (or variance) of overflow-traffic behind unlimited groups with an arbitrary number of stages.

1. Einleitung

Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit werden in Netzknotenpunkten der Wählvermittlungstechnik Verbindungen in sehr vielen Fällen (z.B. Landesfernwahl) zunächst einem Querweg (Primärbündel) angeboten und nur bei Blockierung dieses „direkten" Weges über einen Letztweg (Sekundärbündel) — eventuell vorher über einen zweiten Querweg — abgewickelt (vgl. Bild 1).

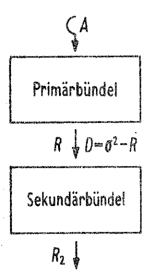

Bild 1. Prinzip einer Überlaufanordnung.

Bietet man einem Querweg Zufallsverkehr A an, so wird der auf den Letztweg oder Zweitweg überlaufende Restverkehr andere statistische Eigenschaften haben als Zufallsverkehr (Abhängigkeit der einfallenden Rufe, Häufungseffekt). Zu seiner hinreichend genauen Charakterisierung benützt man deshalb neben dem ersten gewöhnlichen Moment, dem Mittelwert R, auch noch das zweite zentrale Moment, die Varianz σ^2, bzw. den Streuwert $D = \sigma^2 - R$.

Der Streuwert hinter vollkommen erreichbaren Primärbündeln kann exakt nach G. BRETSCHNEIDER [1] bzw. J. RIORDAN [9] berechnet werden. Desgleichen können nach diesem Verfahren vollkommene Sekundärbündel bemessen werden, denen Restverkehr (R, D) angeboten wird (siehe [2], [9]). Für Verkehrsrest und Streuwert hinter *ein*-stufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit sowie für die Bemessung nachfolgender Sekundärbündel mit vollkommener oder unvollkommener Erreichbarkeit wird das sogenannte *RDA*-Verfahren von A. LOTZE [5], [6] benutzt.

In der vorliegenden Arbeit wird für Koppelanordnungen *beliebiger* Stufenzahl mit vollkommener oder unvollkommener Erreichbarkeit eine exakte Herleitung zur Berechnung des Streuwertes bzw. der Varianz überlaufender Restverkehre angegeben.

2. Bündel mit vollkommener Erreichbarkeit

Die Formel für den Gesamtstreuwert bzw. die Varianz hinter einem vollkommenen Bündel mit angebotenem Zufallsverkehr A wurde 1954 erstmals von G. BRETSCHNEIDER [1] in einem Beitrag an den CCI, jedoch ohne Herleitung, angegeben. Im Jahre 1955 wurde von R. I. WILKINSON dieselbe Lösung — zusammen mit einer Herleitung von J. RIORDAN — veröffentlicht [9].

Die hier gezeigte Herleitung ist einfacher und wesentlich kürzer als jene von RIORDAN. Sie ist gleichermaßen anwendbar für die Berechnung des Gesamtstreuwerts D hinter einem vollkommenen Bündel, für den Teilstreuwert D_T hinter nur einer Zubringerteilgruppe dieses vollkommenen Bündels bei gleichverteiltem oder schiefem Angebot, und schließlich für die Näherungsberechnung des Teilstreuwertes D'_T hinter einer Zubringerteilgruppe eines unvollkommenen Bündels, wie sie von A. LOTZE in [5] und [6] durchgeführt wurde.

2.1. *Koppelanordnung und statistisches Gleichgewicht*

Wie erwähnt, läßt sich neben einer geschlossenen Lösung für den Gesamtstreuwert D auch eine für den Teilstreuwert D_T hinter einer Zubringerteilgruppe des vollkommenen Bündels herleiten. Zunächst soll dieser Teilstreuwert D_T berechnet werden.

Das Primärbündel (vgl. Bild 2) habe g verschiedene Zubringerteilgruppen mit den einheit-

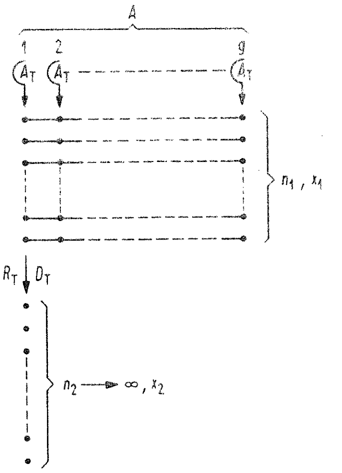

Bild 2. Überlaufanordnung zur Berechnung des Teilstreuwertes hinter vollkommen erreichbaren Bündeln.

lichen Teilangeboten A_{T} und den Überlaufverkehrsdaten (R_{T}, D_{T}). Die Leitungszahl sei im Primärbündel n_1 und im Sekundärbündel $n_2 \to \infty$. Mit x_1 bzw. x_2 wird die Anzahl der gleichzeitig belegten Leitungen im Primärbündel bzw. Sekundärbündel bezeichnet. $p(x_1, x_2)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß im Primärbündel x_1 und im Sekundärbündel x_2 Belegungen vorhanden sind.

Die Herleitung für den Teilstreuwert D_{T} ist die allgemeinere und geht für $g = 1$, d.h. $A_{\mathrm{T}} = A$, in jene für den Gesamtstreuwert über. Für schiefe Last, d.h. für nicht einheitliche Teilangebote A_{T}, ändert sich an der Herleitung nichts.

Nach dem Prinzip der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts — d.h. bei zeitinvarianten Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ — ergibt sich in bekannter Weise [3], [8], [9] für $x_1 < n_1$:

$$\begin{aligned} &(x_1 + 1)\, p(x_1 + 1, x_2) + \\ &+ (x_2 + 1)\, p(x_1, x_2 + 1) + \\ &+ A\, p(x_1 - 1, x_2) - \\ &- (x_1 + x_2 + A)\, p(x_1, x_2) = 0 . \end{aligned} \tag{1a}$$

Für $x_1 = n_1$, d.h. „sämtliche Leitungen des Primärbündels sind belegt“ erhält man

$$\begin{aligned} &A_{\mathrm{T}}\, p(n_1, x_2 - 1) + \\ &+ (x_2 + 1)\, p(n_1, x_2 + 1) + \\ &+ A\, p(n_1 - 1, x_2) - \\ &- (n_1 + x_2 + A_{\mathrm{T}})\, p(n_1, x_2) = 0. \end{aligned} \tag{1b}$$

2.2. Definitionen

Bekanntlich gilt für ein gewöhnliches Moment r-ter Ordnung

$$m_r(x_2) = \sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{\infty} x_2^r\, p(x_1, x_2) \tag{2}$$

und für ein faktorielles Moment r-ter Ordnung

$$M_r(x_2) = \sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{\infty} r! \binom{x_2}{r} p(x_1, x_2), \tag{3}$$

$$M_r(x_2) = \sum_{x_1=0}^{n_1} M_r(x_2/x_1). \tag{4}$$

$M_r(x_2/x_1)$ in Gl. (4) wird als bedingtes faktorielles Moment r-ter Ordnung bezeichnet.

Aus den Gl. (2) und (3) ergibt sich durch Vergleich

$$\begin{aligned} r = 0: &\quad m_0(x_2) = M_0(x_2) = 1, \\ r = 1: &\quad m_1(x_2) = M_1(x_2) = R_{\mathrm{T}}, \\ r = 2: &\quad m_2(x_2) = M_2(x_2) + M_1(x_2), \\ &\quad m_2(x_2) = M_2(x_2) + m_1(x_2). \end{aligned}$$

Das zweite zentrale Moment, die Varianz σ_{T}^2, ist definiert als

$$\sigma_{\mathrm{T}}^2 = m_2(x_2) - m_1(x_2)^2$$

und der Streuwert

$$D_{\mathrm{T}} = \sigma_{\mathrm{T}}^2 - m_1(x_2).$$

Durch Einsetzen ergibt sich schließlich für den gesuchten Streuwert

$$D_{\mathrm{T}} = M_2(x_2) - R_{\mathrm{T}}^2. \tag{5}$$

Ziel sämtlicher Berechnungen wird deshalb die Bestimmung des zweiten faktoriellen Moments sein.

Eine „erzeugende“ Funktion für bedingte faktorielle Momente ist definiert als

$$F(x_2/x_1, t) = \sum_{r=0}^{\infty} M_r(x_2/x_1) \frac{t^r}{r!}, \tag{6}$$

wobei t ein im Bereich $-1 \leq t \leq +1$ stetig variabler Parameter ist.

Mit den Gl. (3) und (4) ergibt sich

$$F(x_2/x_1, t) = \sum_{x_2=0}^{\infty} (1 + t)^{x_2}\, p(x_1, x_2), \tag{7}$$

die diskrete Variable $M_r(x_2/x_1)$ wird also in die im Intervall $|t| \leq 1$ stetige erzeugende Funktion $F(x_2/x_1, t)$ transformiert.

2.3. Berechnung des Streuwertes

Mit Hilfe der erzeugenden Funktion in Gl. (6) kann man jetzt die Gleichgewichtsbedingung (1a) in eine Gleichung für die bedingten faktoriellen Momente transformieren. Zu diesem Zweck wird Gl. (1a) mit dem Faktor $(1 + t)^{x_2}$ erweitert und anschließend über alle möglichen Zustände von x_2 ($0 \leq x_2 \leq \infty$) aufsummiert. Dabei zeigt sich, daß in den einzelnen Gliedern die Verteilungsfunktion $p(x_1, x_2)$ durch die erzeugende Funktion nach Gl. (7) bzw. durch deren Ableitung ersetzt werden kann. Schließlich erhält man wegen Gl. (6) für die bedingten faktoriellen Momente die Beziehung

$$\begin{aligned} &- A\, M_r(x_2/x_1 - 1) + \\ &+ (A + x_1 + r)\, M_r(x_2/x_1) - \\ &- (x_1 + 1)\, M_r(x_2/x_1 + 1) = 0 . \end{aligned} \tag{8a}$$

Entsprechend folgt aus Gl. (1b)

$$\begin{aligned} &- A\, M_r(x_2/n_1 - 1) + \\ &+ (n_1 + r)\, M_r(x_2/n_1) = A_{\mathrm{T}}\, r\, M_{r-1}(x_2/n_1). \end{aligned} \tag{8b}$$

Bis zu diesem Punkt ist die Herleitung analog zu jener von J. Riordan [9]. Dieser führt jedoch nun eine zweite und später eine dritte erzeugende Funktion ein, um dann nach einer sehr umfangreichen Rücktransformation das gesuchte zweite faktorielle Moment $M_2(x_2)$ zu erhalten.

Diese zusätzlichen Transformationen kann man durch folgende Lösung umgehen: Gl. (8a) wird über alle Zustände ($0 \leq x_1 \leq n_1 - 1$) aufsummiert und anschließend Gl. (8b) hinzuaddiert. Dadurch verschwinden verschiedene Glieder und man erhält die

Formel
$$\sum_{x_1=0}^{n_1} M_r(x_2/x_1) = A_\mathrm{T} M_{r-1}(x_2/n_1) \qquad (9)$$
und mit der Definitionsgleichung (4)
$$M_r(x_2) = A_\mathrm{T} M_{r-1}(x_2/n_1)\,. \qquad (10)$$
Speziell für $r = 2$ ergibt sich
$$M_2(x_2) = A_\mathrm{T} M_1(x_2/n_1)\,. \qquad (11)$$

Mit Hilfe dieser einfachen Beziehung (11) kann man jetzt das zweite faktorielle Moment durch das erste bedingte faktorielle Moment ausdrücken. Dieses erste bedingte faktorielle Moment liefert die Rekursionsformel (8a) mit der Randbedingung nach Gl. (4) für $r = 1$:
$$M_1(x_2) = R_\mathrm{T} = \sum_{x_1=0}^{n_1} M_1(x_2/x_1)\,. \qquad (4^*)$$

Aus Gl. (8a) folgt für $r = 1$
$$M_1(x_2/x_1+1) = \frac{1}{x_1+1} \times$$
$$\times \left[-A\,M_1(x_2/x_1-1) + (A + x_1 + 1)\,M_1(x_2/x_1)\right],$$
also für $x_1 = 0$
$$M_1(x_2/1) = \frac{1}{1}(A+1)\,M_1(x_2/0) = $$
$$= \left(1 + \frac{A^1}{1!}\right) M_1(x_2/0)\,,$$
ferner für $x_1 = 1$
$$M_1(x_2/2) = \frac{1}{2}\left[-A\,M_1(x_2/0) + (A+2)\,M_1(x_2/1)\right] =$$
$$= \left(1 + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!}\right) M_1(x_2/0)\,,$$
oder allgemein — wie leicht beweisbar ist —
$$M_1(x_2/x_1) = \sum_{\zeta=0}^{x_1} \frac{A^\zeta}{\zeta!}\, M_1(x_2/0)\,, \qquad (12)$$
wobei sich für $M_1(x_2/0)$ mit der Randbedingung (4*) die Beziehung
$$M_1(x_2/0) = \frac{R_\mathrm{T}}{\sum\limits_{x_1=0}^{n_1} \sum\limits_{\zeta=0}^{x_1} \frac{A^\zeta}{\zeta!}} \qquad (13)$$
ergibt.

Für das speziell gesuchte erste bedingte faktorielle Moment ergibt sich deshalb
$$M_1(x_2/n_1) = R_\mathrm{T} \frac{\sum\limits_{\zeta=0}^{n_1} \frac{A^\zeta}{\zeta!}}{\sum\limits_{x_1=0}^{n_1} \sum\limits_{\zeta=0}^{x_1} \frac{A^\zeta}{\zeta!}}\,. \qquad (14\,\mathrm{a})$$

Die Doppelsumme im Nenner ist identisch mit dem Ausdruck
$$(n_1 + 1 - A) \sum_{\zeta=0}^{n_1} \frac{A^\zeta}{\zeta!} + A\,\frac{A^{n_1}}{n_1!}\,. \qquad (14\,\mathrm{b})$$
Dies läßt sich einfach erkennen, wenn man beide Ausdrücke gliedweise anschreibt. Durch Einsetzen von (14b) in die Gl. (14a) und eine Umformung erhält man damit
$$M_1(x_2/n_1) = \frac{R_\mathrm{T}}{(n_1 + 1 - A) + A\,B}\,. \qquad (15)$$

Gl. (15) eingesetzt in Gl. (11) ergibt
$$M_2(x_2) = \frac{A_\mathrm{T} R_\mathrm{T}}{n_1 + 1 - A(1-B)}$$
oder wegen $A_\mathrm{T} = R_\mathrm{T} B$
$$M_2(x_2) = \frac{R_\mathrm{T}^2}{B[n_1 + 1 - A(1-B)]}\,. \qquad (16)$$

Die gesuchte Formel für den Teilstreuwert lautet deshalb mit der Definitionsgleichung (5)
$$D_\mathrm{T} = R_\mathrm{T}^2 \left\{\frac{1}{B[n_1 + 1 - A(1-B)]} - 1\right\}. \qquad (17)$$

2.4. *Vergleich mit dem Verfahren von Riordan*

Bei beiden Verfahren ergibt sich nach dem Prinzip der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts ein Gleichungssystem für die zweidimensionalen Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ (vgl. Bild 3). Die erzeugende Funktion F_a ermöglicht dann den Übergang zu der eindimensionalen Veränderlichen $M_r(x_2/x_1)$.

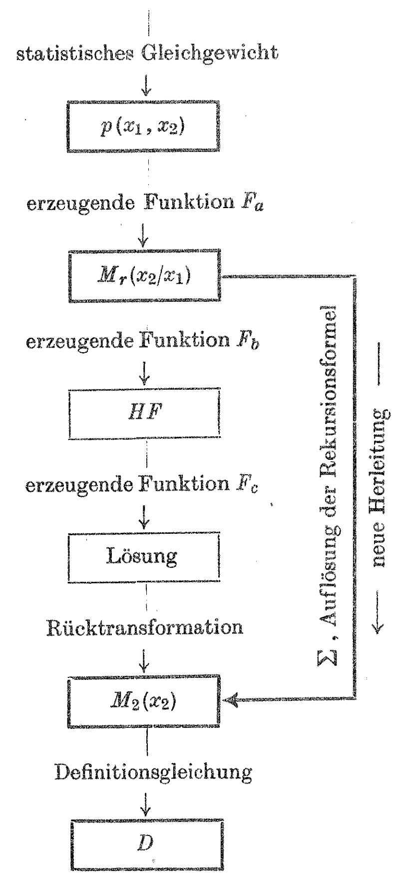

Bild 3. Schematische Darstellung der Lösungswege.

RIORDAN [9] führt jetzt eine zweite erzeugende Funktion F_b ein, die ihm ein Gleichungssystem für die Hilfsfunktion HF liefert. Eine weitere Transformation mit einer dritten erzeugenden Funktion F_c ergibt dann die Lösung auf der Ebene dieser dritten erzeugenden Funktion. Schließlich erhält RIORDAN nach einer recht umfangreichen Rücktransformation das gesuchte zweite faktorielle

Moment und nach der Definitionsgleichung (5) den Streuwert.

Durch eine einfache Summation und die Auflösung der Rekursionsformel (8a) kann man jedoch, wie gezeigt wurde, direkt das zweite faktorielle Moment und nach der Definitionsgleichung (5) den Streuwert erhalten.

Die Lösung für die Rekursionsformel (8a), d. h. Gl. (12), ergibt sich auch auf sehr elegante Weise mit Hilfe der Differenzenrechnung: Gl. (8a) stellt eine homogene lineare Differenzengleichung zweiter Ordnung dar, für die man sofort eine Partikularlösung angeben kann und dann zwangsläufig die allgemeine Lösung findet. Um die Einführung weiterer Begriffe zu vermeiden wurde jedoch hier auf diesen Lösungsweg verzichtet.

2.5. Zusammenhang zwischen Gesamt- und Teilstreuwert

2.5.1. Gesamtstreuwert

Wie schon im Abschnitt 2.1. erwähnt, ergibt sich die Formel für den Gesamtstreuwert D, indem man das Teilangebot A_{T} durch das Gesamtangebot A ersetzt. Wegen $R_{\mathrm{T}} = A_{\mathrm{T}} B$ und $R = A B$ folgt deshalb aus Gl. (17)

$$D = R^2 \left\{ \frac{1}{B[n_1 + 1 - A(1 - B)]} - 1 \right\} \tag{18}$$

und schließlich mit den Gl. (17) und (18)

$$\frac{D}{D_{\mathrm{T}}} = \left(\frac{R}{R_{\mathrm{T}}}\right)^2 = \left(\frac{A}{A_{\mathrm{T}}}\right)^2. \tag{19}$$

Für einheitliche Teilangebote A_{T} gilt $A = g A_{\mathrm{T}}$ und damit

$$D/D_{\mathrm{T}} = g^2 . \tag{20}$$

2.5.2. Kovarianz

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist für den Zusammenhang zwischen der Varianz σ^2 des Gesamtüberlaufverkehrs und der Varianz σ_{T}^2 des Überlaufverkehrs hinter nur einer Zubringerteilgruppe die Beziehung

$$\sigma^2 = g\,\sigma_{\mathrm{T}}^2 + 2\binom{g}{2}\sigma_{ij}^2$$

bekannt. Die Varianz des Summenverkehrs enthält außer der Summe der Einzelvarianzen σ_{T}^2 noch einen zweiten Anteil: σ_{ij}^2 ist die Kovarianz und gibt an, wie stark zwei Teilverkehre statistisch voneinander abhängig sind; $2\binom{g}{2}$ ist die Anzahl aller möglichen paarweise gegenseitigen Beeinflussungen von Zubringerteilgruppen. Deshalb gilt für die Varianz

$$\sigma^2 = R + D = g(R_{\mathrm{T}} + D_{\mathrm{T}}) + 2\binom{g}{2}\sigma_{ij}^2$$

bzw. für die Kovarianz

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{D - g D_{\mathrm{T}}}{2\binom{g}{2}} .$$

Schließlich erhält man mit Gl. (20)

$$\sigma_{ij}^2 = \frac{D}{g^2} = D_{\mathrm{T}} , \tag{21}$$

d. h. die Kovarianz bei vollkommenen Bündeln ist gleich dem Streuwert des Überlaufverkehrs hinter einer Zubringerteilgruppe.

3. Bündel mit unvollkommener Erreichbarkeit

Für unvollkommen erreichbare Bündel hinter Koppelanordnungen mit beliebig vielen Stufen kann der Streuwert D_{u} auf einem völlig gleichartigen Weg gefunden und als geschlossene Lösung angegeben werden. Die Schwierigkeit bei der praktischen Auswertung liegt nur darin, für die in der Lösung enthaltene Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu(x_1)$ bzw. für die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x_1) = 1 - \mu(x_1)$ durch kombinatorische oder andere Näherungsansätze genügend genaue Näherungswerte zu finden (siehe z. B. [3], [4], [7]).

3.1. Koppelanordnung und statistisches Gleichgewicht

Das Primärbündel (siehe Bild 4) habe die Leitungszahl n_1 und die Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu(x_1)$, das Gesamtangebot A und den Gesamtüberlaufverkehr (R_{u}, D_{u}).

Das vollkommene Sekundärbündel habe $n_2 \to \infty$ viele Abnehmerleitungen. Mit x_1 und x_2 als Anzahl der gleichzeitig belegten Leitungen im Primärbündel bzw. Sekundärbündel ergibt sich die Zustandsgleichung

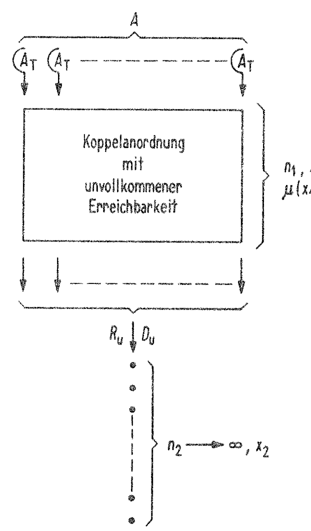

Bild 4. Überlaufanordnung zur Berechnung des Gesamtstreuwertes hinter Koppelanordnungen unvollkommener Erreichbarkeit.

$$\begin{aligned} &(A + x_1 + x_2)\,p(x_1, x_2) - \\ &- (x_2 + 1)\,p(x_1, x_2 + 1) - \\ &- (x_1 + 1)\,p(x_1 + 1, x_2) - \\ &- A\,\sigma(x_1)\,p(x_1, x_2 - 1) - \\ &- A\,\mu(x_1 - 1)\,p(x_1 - 1, x_2) = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

3.2. Definitionen

Analog zu Abschnitt 2.2 erhält man für den Zusammenhang zwischen gewöhnlichen und faktoriellen Momenten die Beziehungen

$$\begin{aligned} r = 0: &\quad m_0(x_2) = M_0(x_2) = 1 , \\ r = 1: &\quad m_1(x_2) = M_1(x_2) = R_{\mathrm{u}} , \\ r = 2: &\quad m_2(x_2) = M_2(x_2) + R_{\mathrm{u}} . \end{aligned}$$

Deshalb ergibt sich für den Streuwert

$$D_{\mathrm{u}} = M_2(x_2) - R_{\mathrm{u}}^2 . \tag{23}$$

Die Gl. (6) und (7) für die „erzeugende" Funktion $F(x_2/x_1, t)$ bleiben unverändert.

3.3. Berechnung des Streuwertes

Wie im Abschnitt 2.3 ergibt sich durch Erweitern von Gl. (20) mit dem Faktor $(1 + t)^{x_2}$ und die Summation über alle Zustände x_2 schließlich mit den Gl. (6) und (7) für die bedingten faktoriellen Momente die Beziehung

$$\begin{aligned} &-A\,\mu(x_1-1)\,M_r(x_2/x_1-1)\,+\\ &+(A\,\mu(x_1)+x_1+r)\,M_r(x_2/x_1)\,-\\ &-(x_1+1)\,M_r(x_2/x_1+1)=\\ &=A\,\sigma(x_1)\,r\,M_{r-1}(x_2/x_1)\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Durch Aufsummieren über sämtliche Zustände $0 \leqq x_1 \leqq n_1$ erhält man die Gleichung [8]

$$r\sum_{x_1=0}^{n_1} M_r(x_2/x_1) = A\,r\sum_{x_1=0}^{n_1}\sigma(x_1)\,M_{r-1}(x_2/x_1)$$

oder mit der Definitionsgleichung (4)

$$M_r(x_2) = A\sum_{x_1=0}^{n_1}\sigma(x_1)\,M_{r-1}(x_2/x_1)\,. \tag{25}$$

Die Berechnung des r-ten faktoriellen Moments ist damit wieder auf die Berechnung der bedingten faktoriellen Momente $(r-1)$-ter Ordnung zurückgeführt. Speziell für $r=2$ gilt deshalb

$$M_2(x_2) = A\sum_{x_1=0}^{n_1}\sigma(x_1)\,M_1(x_2/x_1)\,. \tag{26}$$

Die Auflösung der Rekursionsformel (24) — lineare inhomogene Differenzengleichung zweiter Ordnung — ist in diesem Fall wesentlich komplizierter. Eine Reduktion auf eine inhomogene Gleichung erster Ordnung ist jedoch mit Hilfe endlicher Kettenbrüche möglich. Man erhält (27)

$$K_{x_1}M_1(x_2/x_1) - (x_1+1)\,M_1(x_2/x_1+1) = h(x_1),$$

wobei

$$K_{x_1} = A\,\mu(x_1) + (x_1+1) - \frac{x_1 A\,\mu(x_1-1)}{K_{x_1-1}},$$

$$\begin{aligned} h(x_1) = {} & A\,\sigma(x_1)\,M_0(x_2/x_1)\,+\\ &+\sum_{i=0}^{x_1-1} A\,\sigma(i)\,M_0(x_2/i)\prod_{\eta=i}^{x_1-1}\frac{A\,\mu(\eta)}{K_\eta}\,, \end{aligned}$$

$$M_0(x_2/x_1) = p(x_1) = \frac{\dfrac{A^{x_1}}{x_1!}\displaystyle\prod_{i=0}^{x_1-1}\mu(i)}{\displaystyle\sum_{\zeta=0}^{n_1}\frac{A^\zeta}{\zeta!}\prod_{i=0}^{\zeta-1}\mu(i)}\,.$$

Die Rekursionsformel (27) hat dann die Lösung

$$\begin{aligned} M_1(x_2/x_1) = {} & M_1(x_2/0)\prod_{\delta=0}^{x_1-1}\frac{K_\delta}{\delta+1}\,-\\ &-\sum_{i=0}^{x_1-2}\frac{h(i)}{i+1}\prod_{\eta=i+1}^{x_1-1}\frac{K_\eta}{\eta+1} - \frac{h(x_1-1)}{x_1}\,. \end{aligned}$$

Schließlich erhält man mit der Randbedingung

$$\sum_{x_1=0}^{n_1} M_1(x_2/x_1) = M_1(x_2) = R_{\mathrm{u}}$$

sowie mit den Gl. (26) und (23)

$$M_1(x_2/0) =$$

$$= \frac{R_{\mathrm{u}} + \displaystyle\sum_{x_1=0}^{n_1}\sum_{i=0}^{x_1-2}\frac{h(i)}{i+1}\prod_{\eta=i+1}^{x_1-1}\frac{K_\eta}{\eta+1} + \sum_{x_1=0}^{n_1}\frac{h(x_1-1)}{x_1}}{\displaystyle\sum_{x_1=0}^{n_1}\prod_{\delta=0}^{x_1-1}\frac{K_\delta}{\delta+1}}\,;$$

Streuwert:

$$\begin{aligned} D_{\mathrm{u}} = A\sum_{x_1=0}^{n_1}\sigma(x_1)\Bigg[& M_1(x_2/0)\prod_{\delta=0}^{x_1-1}\frac{K_\delta}{\delta+1}\,-\\ &-\sum_{i=0}^{x_1-2}\frac{h(i)}{i+1}\prod_{\delta=i+1}^{x_1-1}\frac{K_\delta}{\delta+1} - \frac{h(x_1-1)}{x_1}\Bigg] - R_{\mathrm{u}}^2\,, \end{aligned} \tag{28}$$

Varianz: $$\sigma_{\mathrm{u}}^2 = D_{\mathrm{u}} + R_{\mathrm{u}}\,. \tag{29}$$

Diese geschlossene Lösung gilt für den Streuwert bzw. für die Varianz von Überlaufverkehr hinter Koppelanordnungen *beliebiger* Struktur und Stufenzahl. Für Anordnungen mit vollkommener Erreichbarkeit geht Gl. (28) in Gl. (18) über.

Schrifttum

[1] BRETSCHNEIDER, G. und GEIGENBERGER, H., Berechnung der Leitungszahlen von Überlaufbündeln. Bericht der Siemens & Halske AG, München, Oktober 1954.

[2] BRETSCHNEIDER, G., Die Berechnung von Leitungsgruppen für überfließenden Verkehr in Fernsprechwählanlagen. Nachrichtentech. Z. **9** [1956], 533–540.

[3] BROCKMEYER, E., HALSTRØM, H. L. und JENSEN, A., The life and works of A. K. ERLANG. Acta Polytech. Scandinavica, 1960.

[4] ELLDIN, A., On equations of state for a two stage linksystem. Ericsson Technics **12** [1956], 61–104.

[5] LOTZE, A., A traffic variance method for gradings of arbitrary type. ITC 1964, London, Doc. 8/80.

[6] LOTZE, A., Tabellen für Streuwert und Verlust von einstufigen Koppelanordnungen mit vollkommener und unvollkommener Erreichbarkeit. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Technischen Hochschule Stuttgart, 1964.

[7] ROHDE, K. und STÖRMER, H., Durchlaßwahrscheinlichkeit bei Vermittlungseinrichtungen von Fernsprechanlagen. Mitt. math. Statistik **5** [1953], 185–200.

[8] SMITH, N. M. H., More accurate calculation of overflow traffic from link trunked crossbar group selectors. Austral. Telecommun. Monographs No. 1.

[9] WILKINSON, R. I. und RIORDAN, J., Theories for toll traffic engineering in the U.S.A. ITC 1955 und Bell Syst. tech. J. **35** [1956], 421–514.