

Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung

Universität Stuttgart

Prof. Dr. Ing. A. Lotze

5. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten

Die Bemessung ein- und mehrstufiger Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik
für angebotenen Überlaufverkehr

von ULRICH HERZOG

März 1968

<u>INHALTSVERZEICHNIS</u>	Seite
SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS	4
ABKÜRZUNGEN	11
I. EINLEITUNG	13
II. EINSTUFIGE KOPPELANORDNUNGEN MIT VOLLKOMMENER ERREICHBARKEIT	19
II.1. Neue Herleitung für den Streuwert	19
II.2. Die Berechnung von Sekundärbündeln	30
III. EINSTUFIGE KOPPELANORDNUNGEN MIT UNVOLLKOMMENER ERREICHBARKEIT	32
III.1. Exakte Herleitung für den Streuwert	32
III.2. Die Berechnung des Streuwerts einstufig unvollkommener Koppelanordnungen nach dem RDA-Verfahren	37
III.3. Die Berechnung von einstufigen Sekundärbündeln mit unvollkommener Erreichbarkeit nach dem RDA-Verfahren	40
IV. MEHRSTUFIGE KOPPELANORDNUNGEN	42
IV.1. Exakte Herleitung für den Streuwert bei Mischwahl	42
IV.2. Exakte Berechnung des Überlaufverkehrs (R,D) bei Richtungswahl	42
IV.3. Näherungsweise Berechnung des Streuwerts hinter mehrstufigen, beliebig aufgebauten Linksystemen mit Misch- oder Richtungswahl	48
IV.4. Bemessung von Linksystemen, denen streuwertbehalteter Verkehr (R,D) angeboten wird	64
IV.5. Berechnung von Linksystemen mit Richtungswahl und systeminternem Überlauf	69

	Seite
V. SONDERFÄLLE	74
V.1. Die Berechnung der Momente des Überlaufverkehrs bei Koppelanordnungen mit gemischtem Extern- und Internverkehr	74
V.2. Beziehung zwischen der Ableitung der Belastung y und dem Streuwert D bei vollkommenen Bündeln	80
VI. ZUSAMMENFASSUNG	81

SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

Zu Kapitel II: VOLLKOMMENE BÜNDEL

/1/ Bech, N.I.: Statistical Equilibrium Equations for Overflow Systems. Teletechnik 1 (1957) und ITC Den Haag (1955)

/2/ Bretschneider, G., Geigenberger, H.: Berechnung der Leitungszahlen von Überlaufbündeln. Unveröffentlicher Bericht der Siemens und Halske AG., Oktober 1954

/3/ Bretschneider, G.: Die Berechnung von Leitungsgruppen für überfließenden Verkehr in Fernsprechwählanlagen. NTZ 9(1956), S.533-540

/4/ Brockmeyer, E.: The simple Overflow Problem in the Theory of Telephone Traffic. Teletechnik 5(1954), S.361-374

/5/ Chastang, J.: Ein Beitrag zur Untersuchung von Überlaufverkehr. El.Nachr.-wesen 38(1963), S.88-95

/6/ Descloux, A.: On Overflow Process of Trunking Groups with Poisson Input and Exponential Service Times. BSTJ 42(1963), S.383-397

/7/ Harmston, A.T.: The Distribution of Overflow Calls when Pure Chance Traffic is offered to a Single Trunk. ITC London (1964), Dok.71

* /8/ Herzog, U. : Die exakte Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr hinter Koppelanordnungen beliebiger Stufenzahl mit vollkommener bzw. unvollkommener Erreichbarkeit. AEÜ 20(1966), S.180-184

/9/ Jung, M.M.: Optimum size of Overflow Traffic Groups Philips Telecom. Rev. 21(1959), s.32-42

/10/ Karlsson, R.A.: Rational Dimensioning of Telephone Routes. ITC London (1964), Dok.93

/11/ Le Gall, P.: Le traffic de debordement. Ann. Telecomm. 16(1961)

/12/ Palm, C.: Table of the Erlang Loss Formula. Kunigl. Telestyrelsen, Stockholm (1954)

- /13/ Wahl, H.: Die Anwendung des Streuwertverfahrens bei der Planung von Fernsprechanlagen. Siemens und Halske Zeitschrift 33(1959) S.17-25
- /14/ Wilkinson, R.I., (Riordan, J.): Theories for Toll Traffic Engineering in the USA. BSTJ 35(1956), S.421-514 und ITC Paris (1955), Dok.43
- /15/ Wilkinson, R.I.: Simplified Engineering of single stage Alternate Routing Systems. ITC London (1964), Dok.75
- sowie Lit. /54/-/56/, /65/, /66/, /68/-/71/.

Zu Kapitel III:UNVOLLKOMMENE BÜNDEL

- /16/ Bächle, A.: Die Berechnung einstufiger Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit bei angebotenen Zufallsverkehr zweiter Art. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der TH Stuttgart (1966)
- /17/ Bretschneider, G.: Berechnung von Leitungsgruppen für überfließenden Verkehr mit programmgesteuerten Rechenautomaten. NTZ 13(1960), S.23-28
- /18/ Bretschneider, G.: Die exakte Bestimmung der Verkehrsleistung kleiner unvollkommener Fernsprechbündel. NTZ 16(1963), S.199-205
- /19/ Bretschneider, G.: Ein verallgemeinertes Verfahren zur Näherungsberechnung der Leistungsfähigkeit von Überlaufanordnungen. NTZ 15(1962), S.639-643
- /20/ Elldin, A.: On the Congestion in Gradings with Random Hunting. Ericsson Technics (1955), Nr.1
- /21/ Elldin, A.: Further Studies on Gradings with Random Hunting. Ericsson Technics (1957), Nr.2
- /22/ Herzog, U.: Näherungsverfahren zur Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr hinter Mischungen. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der TH Stuttgart (1964)

- /23/ Herzog, U., Lotze, A.: Das RDA-Verfahren, ein Streuwertverfahren für unvollkommene Bündel. NTZ 19(1966), S.640-646
- /24/ Herzog, U., Kirsch, R.: Sperrwahrscheinlichkeitsuntersuchungen an ein- und mehrstufigen Koppelanordnungen. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1966)
- /25/ Kosten, L.: Über Sperrwahrscheinlichkeiten bei Staffelschaltungen. ENT 14(1937), S.5-12
- /26/ Lotze, A.: Loss Formula, Artificial Traffic Checks and Quality Standards for Characterizing One Stage Gradings. ITC Paris (1961), Dok.28
- /27/ Lotze, A.: Verluste und Güteermerekmale einstufiger Mischungen. NTZ 14(1961), S.449-453
- /28/ Lotze, A.; Wagner, W.: Table of the Modified Palm-Jacobaeus-Loss-Formula. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1962)
- /29/ Lotze, A.: A Traffic Variance Method for Gradings of Arbitrary Type. ITC London (1964), Dok.80
- /30/ Lotze, A.: Tabellen für Streuwert und Verlust von einstufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener und vollkommener Erreichbarkeit. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1964) (2.Auflage 1966)
- /31/ Lotze, A.: Tafeln für Streuwert D und Überlaufverkehr R von einstufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit. Berechnung von Sekundärbündeln für angebotenen Überlaufverkehr (R,D). Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1965)
- /32/ Lotze, A.: Verkehrstheoretische Fragen bei der Gestaltung internationaler Fernwählnetze Vortrag bei der NTG-Tagung (Sept. 1965) in München und NTZ 19(1966), S.633-639
- /33/ Lotze, A., Schehrer, R.: Die streuwertgerechte Bemessung von Leitungsbündeln in Wählnetzen mit Leitweglenkung. NTZ 19(1966)? S.719-
- /34/ Palm, C.: Calcul exact de la perte dans les groupes de circuits echelonnés. Ericsson Technics (1963), Nr.3

- /35/ Rohde, K., Störmer, H.: Durchlaßwahrscheinlichkeit bei Vermittlungseinrichtungen von Fernsprechanlagen. Mitt.math.Statistik 5(1953), S.185-200
- /36/ Schehrer, R.: Die Berücksichtigung des Streuwerts bei der Bemessung von Querwegen und Kennzahlwegen in der Landesfernwahl. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1964)
- /37/ Schehrer, R.: Ein Verfahren zur wirtschaftlich optimalen Bemessung von Wählnetzen mit Leitweglenkung. Vortrag beim 3.Kolloquium über Verkehrstheorie des Instituts für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stgt (1965)
- /38/ Stell, K.: Berechnungsverfahren zur Bestimmung der Belastbarkeit unvollkommener Bündel. Wiss. Z. der Hochschule für Verkehrswesen Dresden, 11(1964), S.497-511
- /39/ Stürner, L.: Berechnung von Bündeln mit doppelt gerichtetem Verkehr. Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1963)
- /40/ Wendt, A.: Die effektive Erreichbarkeit, eine Größe zur Beurteilung der Güte von Mischungen. Entwicklungsbericht der Siemens und Halske AG, 24(1961), S.417-420

sowie Lit. /8/, /42/, /49/, /50/, /54/-/56/, /57/-/64/.

Zu Kapitel IV: MEHRSTUFIGE KOPPELANORDNUNGEN

- /41/ Bininda, N., Wendt, A.: Die effektive Erreichbarkeit für Abnehmerbündel hinter Zwischenleitungsanordnungen. NTZ 12(1959), S.579-585
- /42/ Bridgford, J.N.: The Geometric Group Concept and its Application to the Dimensioning of Link Access Systems. ITC London (1964), Dok.13
- /43/ Elldin, A.: On equations of state for a two stage link system. Ericsson Technics 12(1956), S.61-104
- /44/ Elldin, A.: On the Dependence between the Two Stages in a Link System. Ericsson Technics (1961), Nr.2

- /45/ Jacobaeus, C.: Blocking Computations in Link Systems. Ericsson Review (1947), Nr.3
- /46/ Jacobaeus, C.: A Study on Congestion in Link Systems. Ericsson Technics (1950), Nr.48
- /47/ Lotze, A.: Berechnung der Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit zwei- und mehrstufiger Linksysteme für Mischwahl oder Gruppenwahl nach dem Näherungsverfahren der "kombinierten Eingangs- und Abnehmerblockierung. 3. Bericht über verkehrstheoretische Untersuchungen des Instituts für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1963)
- /48/ Lotze, A.: Optimierung von Linksystemen. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1966) und ITC New York (1967)
- /49/ Smith, N.M.H.: More accurate Calculation of Overflow Traffic from Link Trunked Crossbar Group Selectors. Austral. Telecom. Monographs, Nr.1
- /50/ Wallström, B.: Artificial Traffic Trials on a Two Stage Link System. Congestion Theory and Simulated Traffic Studies. Ericsson Technics (1961), Nr.2
- Sowie Lit. /8/, /12/, /24/, /28/-/33/, /35/, /40/, /54/-/56/, /57/-/64/ /57/-/64/.

Zu Kapitel V: SONDERFÄLLE

- /51/ Botsch, D.: Die Verlustwahrscheinlichkeit einstufiger Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik mit Extern- und Internverkehr. Dissertation an der TH Stuttgart (1966)
- /52/ Fortet, R., Grandjean, Ch.: Study of the Congestion in a Loss System. ITC London (1964), Dok.20
- /53/ Rönnblom, N.: Traffic loss of a circuit group consisting of both-way circuits, which is accessible for the internal and external traffic of a subscriber group. Tele (1959), Nr.2

ALLGEMEINE FERNSPRECHVERKEHRSTHEORIE

- /54/ Brockmeyer, E., Halstrøm, H., Jensen, A.: The Life and Works of A. K. Erlang. Acta Polytechnica Scandinavica (1960), Nr.287
- /55/ Lotze, A.: Theorie des Fernsprechverkehrs. Vorlesung an der TH Stuttgart (1962-66)
- /56/ Syski, R.: Introduction to Congestion Theory in Telephone Systems. Oliver and Boyd, Edinburgh and London (1959)

FERNSPRECHVERKEHRSSIMULATION

- /57/ Bretschneider, G., Wendt, A.: Datenverarbeitungsanlagen als Hilfsmittel für die Fernsprech- und Fernschreibverkehrsplanung. NTZ 14(1961), S.487-492
- /58/ Dietrich, G., Wagner, H.: Simulation von Fernsprechverkehr mit elektronischen Rechenautomaten. Elektr. Nachrichtenwesen 38(1963), S.538-548
- /59/ Kümmerle, K.: Simulationsprogramm für Verkehrstests an mehrstufigen Koppelanordnungen (Linksysteme). Diplomarbeit am Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1963)
- /60/ Lotze, A.: Über die statistische Sicherheit von Verkehrsmessungen. NTZ 11(1958), S.5-7
- /61/ Neovius, G.: Artificial Traffic Trials Using Digital Computers. Ericsson Technics 11(1955), S.279-291
- /62/ Scheerer, R.: Simulationsprogramm für einstufige Koppelanordnungen mit Leitweglenkung. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1963)
- /63/ Schneider, D.: Simulationsprogramm für mehrstufige Koppelanordnungen mit Leitweglenkung. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, TH Stuttgart (1965)
- /64/ Wagner, W.: Simulierung von Fernsprechverkehr auf Rechenautomaten. Diplomarbeit am Institut für Fernmeldeanlagen, TH Stuttgart (1960)

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND MATH. STATISTIK

- /65/ Fisz, M.: Wahrscheinlichkeit und Mathematische Statistik. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1958)
- /66/ Henze, E.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Vorlesung an der TH Stuttgart (1963/64)
- /67/ Knödel, W.: Mathematische Statistik. Vorlesung an der TH Stuttgart (1963/64)

DIFFERENZENRECHNUNG

- /68/ Bleich, F., Melan, E.: Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik. Springer Verlag, Berlin und Wien(1927)
- /69/ Funk, L.: Lineare Differenzgleichungen und ihre Anwendungen in der Theorie der Baukonstruktion. Springer Verlag, Berlin (1920)
- /70/ Gelfond, A.: Differenzenrechnung. Dt. Verlag der Wiss., Berlin (1958)
- /71/ Pflanz, E.: Differenzgleichungen. Vorlesung an der TH Stuttgart (1965)

ABKÜRZUNGEN

A) Gebräuchliche Symbole der Fernsprecherkehrstheorie

- N Anzahl der Leitungen eines Abnehmerbündels
- G Anzahl der Koppelvielfache (Zubringerteilgruppen)
- i Anzahl der Eingänge eines Koppelvielfachs
- k Erreichbarkeit
- x Anzahl gleichzeitig belegter Leitungen
- $\mu(x)$ Durchlaßwahrscheinlichkeit
- $\sigma(x)$ Sperrwahrscheinlichkeit
- A Verkehrsangebot (kurz Angebot genannt) in Erlang
- y Verkehrsbelastung (Belastung) in Erlang
- p(x) Belegungswahrscheinlichkeit
- E Blockierungswahrscheinlichkeit
- B Verlust- oder Überlaufwahrscheinlichkeit
- R Mittelwert von Überlaufverkehr
- σ^2 Varianz eines Überlaufverkehrs (vgl. S.14,21)
- D Streuwert eines Überlaufverkehrs (vgl. S.14,21)
- p Spitzigkeitskoeffizient eines Überlaufverkehrs
- Index 1 Primärbündel
- Index 2 Sekundärbündel
- Index * Fiktive Größe

B) Zusätzliche Abkürzungen zu Kapitel II

- $m_r(x)$ Gewöhnliches Moment r-ter Ordnung
- $M_r(x)$ Faktorielles Moment r-ter Ordnung
- $F(x_2/x_1, t)$ Erzeugende Funktion für bedingte fakt. Momente
- $\Delta^r y_x$ Differenz r-ter Ordnung
- K_x Kettenbruch
- Index T Teil-...
- Index Ges Gesamt-...
- Index S Verkehrsgröße im endlich großen Sekundärbündel
- Index ∞ Verkehrsgröße im unendlich großen Sekundärbündel

C) Zusätzliche Abkürzungen zu Kapitel III

- Index v Vollkommen
- Index k Unvollkommen
- Index o Größe im Falle angebotenen Zufallsverkehrs

D) Zusätzliche Abkürzungen zu Kapitel IV

- k_{eff} Effektive Erreichbarkeit
- \bar{k} Mittlere Erreichbarkeit
- x, y, z Anzahl gleichzeitig belegter Leitungen in den Bündeln X, Y und Z
- $[k_A]$ Eingangsblockierung
- $[k]$ Abnehmerblockierung
- Index A, B, .. Strukturparameter oder Verkehrsgröße, zur A-, B- ,.. Stufe einer mehrstufigen Koppelanordnung gehörend
- Index QW Querwegbündel
- Index LW Letztwegbündel (Kennzahlwegbündel)
- Index EIN Eingangsblockierung
- Index AB Abnehmerblockierung
- Index i Strukturparameter oder Verkehrsgröße für Richtung i (i = I, II, ..) bei Richtungswahl

E) Zusätzliche Abkürzungen zu Kapitel V

- f(x) Aufteilungswahrscheinlichkeit
- $\left[\frac{x}{2}\right]$ Nur in diesem Kapitel = entier($\frac{x}{2}$)
- Index e Extern
- Index i Intern
- Index g Gehend
- Index k Kommend

F) Definition für Zufallsverkehr erster Art (ZV1).

Die Wahrscheinlichkeitsdichten für den Einfall eines Rufes bzw. für das Enden einer Belegung sind konstant, d.h. Einfalls- und Endeprozess sind unabhängig von der Vorgeschichte. Die Einfallsabstände wie auch die Belegungsdauern sind deshalb negativ exponentiell verteilt. Angebotener ZV1 wird häufig auch als "reiner Zufallsverkehr" oder als "Poisson-Angebot" bezeichnet.

I. EINLEITUNG

Moderne Fernsprechvermittlungssysteme besitzen neben der bekannten, in der Regel hierarchischen Gliederung ihrer Netzebenen auch die Möglichkeit der alternativen Leitweglenkung: Der Verkehr wird zunächst einem hochbelasteten "Primärbündel" -dem sog. ersten Querweg- angeboten und erst bei Blockierung dieses direkten Weges einem "Sekundärbündel" -dem Letztweg oder evtl. zuvor einem zweiten

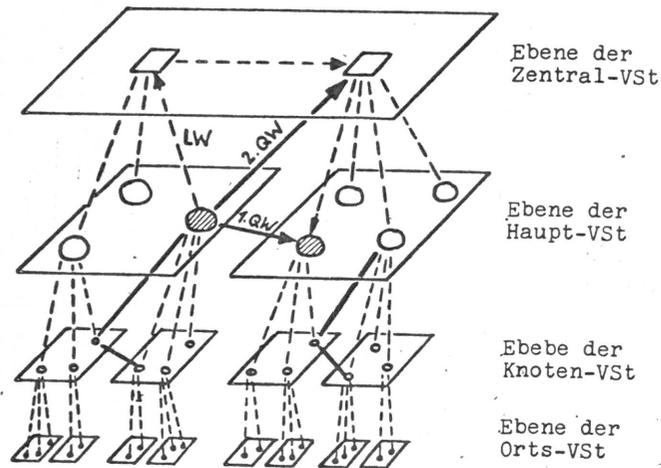


Abb.1: Schematische Darstellung eines Vermittlungssystems mit alternativer Leitweglenkung

Querweg- zugeführt (vgl. Abb.1). Derartige Fernsprechnetze sind aus Gründen der Wirtschaftlichkeit, ferner bei Überlastung und Bündelausfällen aus Gründen der Sicherheit Vermittlungssystemen ohne alternative Leitweglenkung überlegen. Als Beispiel sei das Netz der deutschen Landesfernwahl erwähnt, jedoch werden auch internationale und interkontinentale Systeme nach diesem Prinzip geplant und aufgebaut.

Der dem Primärbündel (ersten Querweg) angebotene Verkehr kann in der Regel in sehr guter Näherung als "Zufallsverkehr erster Art" (Definition siehe Seite 12) betrachtet werden. Die Berechnung der notwendigen Abnehmerleitungen bzw. der Verlustwahrscheinlichkeit solcher Primärbündel ist in vielen Arbeiten untersucht und gelöst worden.

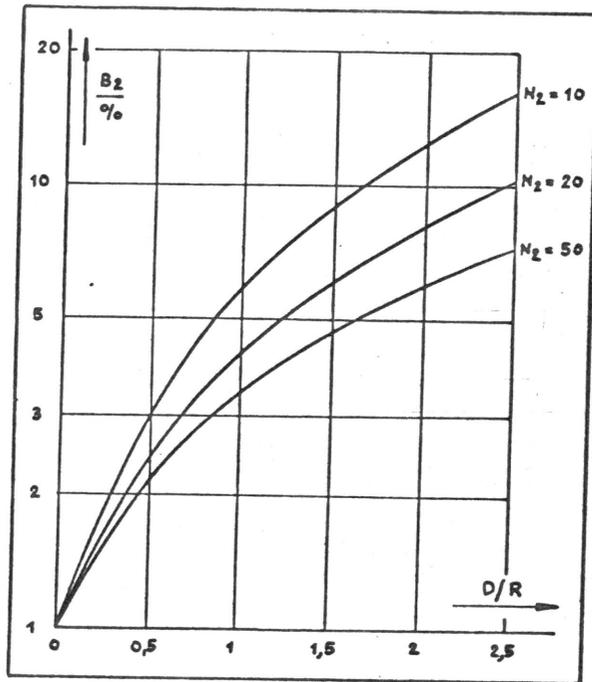
Überlaufverkehr, d.h. Fernsprechverkehr, der von einem oder mehreren Primärbündeln nicht mehr aufgenommen werden kann und deshalb auf ein Sekundärbündel überläuft, hat jedoch andere statistische Eigenschaften als Zufallsverkehr. Die Berechnung seiner genauen, vom Zufallsverkehr abweichenden Verteilung der Anrufabstände ist mit tragbarem Aufwand nur in einigen Sonderfällen möglich. Die hinreichend genaue Charakterisierung von Überlaufverkehr und die Berechnung von Sekundärbündeln ist aber dennoch möglich, wenn man neben dem ersten gewöhnlichen Moment der Verteilungsfunktion, dem Mittelwert R , noch das zweite zentrale Moment, die Varianz σ^2 (bzw. den Streuwert $D = \sigma^2 - R$) benutzt (Für Zufallsverkehr erster Art ist der Mittelwert A , die Varianz $\sigma^2 = A$ und deshalb der Streuwert stets $D = 0$).

Bisher wurde jedoch die Dimensionierung von Sekundärbündeln fast ausschließlich ohne jede Berücksichtigung des Streuwerts, d.h. gleich wie für direkt angebotenen Zufallsverkehr erster Art durchgeführt. Zu welchen Fehlplanungen diese Vernachlässigung des Streuwerts führen kann, veranschaulicht Diagramm 1: Bei gleichem Verkehrsmittelwert R steigt die Verlustwahrscheinlichkeit B_2 mit wachsendem relativem Streuwert D/R stark an ($D/R = 0$ für Zufallsverkehr).

Häufig kommt in der Praxis ein relativer Streuwert von $D/R = 1$ bis 2 vor (siehe auch /32/). Ein für Zufallsverkehr erster Art dimensioniertes vollkommenes Sekundärbündel mit $N_2 = 20$ Abnehmerleitungen wird deshalb bei $D/R = 1,5$ anstelle der gewünschten Verlustwahrscheinlichkeit $B_2(\text{plan}) = 1\%$ einen tatsächlichen Verlust von $B_2(\text{ist}) = 6,2\%$ (relativer Fehler 520%!) verursachen. Für kleinere Planwerte $B_2(\text{plan}) < 1\%$ sowie bei Sekundärbündeln mit

unvollkommener Erreichbarkeit kann der relative Fehler noch beträchtlich größer werden.

Bereits dieses Beispiel zeigt deutlich, daß bei der Planung von Fernsprechnetzen mit alternativer Leitweglenkung die besonderen statistischen Eigenschaften der Überlaufverkehre unter allen Umständen berücksichtigt werden müssen.



Diagr.1: Verlustanstieg bei vollkommen erreichbaren Sekundärbündeln für gleichen Verkehrsmittelwert R je Bündel und wachsenden relativen Streuwert D/R.

Im folgenden werden exakte Verfahren und -sofern eine exakte Rechnung nicht mehr möglich ist- Näherungsverfahren angegeben und untersucht:

a) Zur Berechnung der Varianz bzw. des Streuwerts von Überlaufverkehr.

b) Zur Bemessung von Sekundärbündeln, denen Überlaufverkehr angeboten wird.

In Kapitel II werden zunächst einstufige Koppelanordnungen mit vollkommener Erreichbarkeit - einstufige vollkommene Bündel - behandelt. Hier wird eine neue Herleitung für die Berechnung des Streuwerts (bzw. Varianz) von Überlaufverkehr angegeben und das bekannteste Verfahren (Wilkinson-Bretschneider) zur Bemessung vollkommener Sekundärbündel mit Hilfe eines "Ersatzbündels" beschrieben.

Die neue Herleitung für den Streuwert (bzw. Varianz) ist einfacher und kürzer als die bereits bekannten Lösungen von Riordan bzw. Chastang. Das Wesentliche ist jedoch, daß mit diesem neuen Lösungsweg auch eine allgemeinere, geschlossene Formel für den Streuwert des Überlaufverkehrs hinter ein- und mehrstufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit abgeleitet werden kann (vgl. Abschnitt III.1, IV.1 und IV.2).

In Kapitel III werden Berechnungsverfahren für einstufige Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit - Mischungen - behandelt. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird wieder der Streuwert von Überlaufverkehr nach dem Prinzip von der "Erhaltung des statistischen Gleichgewichts" exakt hergeleitet. Daran anschließend (Abschnitt III.2 und III.3) wird das RDA-Verfahren von Lotze kurz beschrieben. Dieses Verfahren erlaubt eine sehr genaue Berechnung des Streuwerts und die Bemessung von einstufigen Sekundärbündeln mit unvollkommener Erreichbarkeit.

Mehrstufige Koppelanordnungen mit konjugierter Durchschaltung - Linkssysteme - werden in Kapitel IV untersucht. Die exakte Ableitung der Streuwertformeln für Misch- und Richtungswahl (Abschnitt IV.1 und IV.2) nach dem Prinzip von der "Erhaltung des statistischen Gleichgewichts" führt auf den gleichen Typ von Rekursionsformeln wie bei ein-

stufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit (Abschnitt III.1).

Diese Art der Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr nach dem Prinzip von der "Erhaltung des statistischen Gleichgewichts" müsste in jedem Einzelfall mit Hilfe elektronischer Datenverarbeitungsanlagen durchgeführt werden, da infolge der großen Anzahl von Parametern eine Tabellierung nicht zweckmäßig ist (Der Streuwert ist abhängig vom Verkehrsangebot, von der Größe des Abnehmerbündels und von allen Größen, welche die Struktur eines Linksystems definieren).

Die Berechnung von Sekundärbündeln -d.h. von Bündeln, denen "Streuwertverkehr" angeboten wird- ist nach diesem Verfahren nicht mehr möglich (vgl. Abschnitt III.1).

In den Abschnitten IV.3, IV.4 und IV.5 wird jedoch gezeigt, daß die Verallgemeinerung des RDA-Verfahren (Abschnitt III.2 und III.3) möglich ist und auf diese Weise auch die Leistung mehrstufiger Koppelanordnungen im Falle eines angebotenen Streuwertverkehrs sehr genau berechnet werden kann:

In Abschnitt IV.3 wird die Erweiterung des RDA-Verfahrens hergeleitet, mit welcher der Streuwert des Überlaufverkehrs hinter Linksystemen mit angebotenen Zufallsverkehr berechenbar ist. Daran anschließend wird in Abschnitt IV.4 gezeigt, wie die Leistung mehrstufiger Koppelanordnungen bestimmt werden kann, wenn Streuwertverkehr -der von primären Koppelanordnungen überfließt- angeboten wird. Schließlich wird in Abschnitt IV.5 ein Verfahren angegeben, welches die Bemessung von Linksystemen mit Richtungswahl und systeminternem Überlauf erlaubt. Derartige Koppelanordnungen sind von besonderem Interesse für moderne Vermittlungsanlagen mit weitspannender Markierung und zentraler Logik.

Für sämtliche Fälle wurden auf einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage Verkehrstests mit künstlich erzeugtem Fernsprechverkehr durchgeführt. Der Vergleich von Simulationsergebnissen und Rechnung bestätigt die Ge-

nauigkeit der angegebenen Berechnungsverfahren. Tabellen und Diagramme erlauben auch eine einfache und genaue manuelle Auswertung der Formeln.

Im fünften Teil dieser Arbeit werden noch zwei Sonderfälle kurz behandelt und gelöst. In Abschnitt V.1 wird gezeigt, daß auch die exakte Berechnung des Streuwerts bei Koppelanordnungen möglich ist, denen eine Mischung von Extern- und Internverkehr angeboten wird. Schließlich wird noch in Abschnitt V.2 eine Beziehung für den Zusammenhang zwischen dem Streuwert D und der Ableitung der Belastung (dy/dR) für vollkommen erreichbare Bündel angegeben.

II. EINSTUFIGE KOPPELANORDNUNGEN MIT VOLLKOMMENER ERREICHBARKEIT.

II.1. Neue Herleitung für den Streuwert.

Die Formel für den Gesamtstreuwert D bzw. die Varianz $\sigma^2 = D + R$ hinter einem vollkommenen Bündel mit angebot-nem Zufallsverkehr A wurde 1954 erstmals von G. Bretschneider /2/ in einem Beitrag an den CCITT, jedoch ohne Herleitung, angegeben. Im Jahre 1955 wurde von R.I. Wilkinson dieselbe Lösung -zusammen mit einer Herleitung von J. Riordan- veröffentlicht /14/. Schließlich erweiterte J. Chastang /5/ 1963 die Methode von Riordan und berechnete die Momente des Verkehrs in einem endlich großen Überlaufbündel.

1966 wurde in /8/ vom Verfasser eine einfachere und wesentlich kürzere Herleitung als von Riordan für ein un-endlich großes Überlaufbündel veröffentlicht. Nachstehend wird gezeigt, daß sich dieses Verfahren noch verallgemeinern läßt und auch die Berechnung der Momente bei einem endlich großen, vollkommen erreichbaren Sekundärbündel der Leitungszahl N_2 erlaubt. Durch einen Grenzübergang ($N_2 \rightarrow \infty$) ergibt sich sofort die Varianz bzw. der Streuwert wie in /8/.

1.1. Koppelanordnung und statistisches Gleichgewicht.

Das Primärbündel (vgl. Abb.2) habe g Zubringerteilgruppen mit den einheitlichen Teilangeboten A_T (Zufallsverkehre erster Art) und den Überlaufverkehrsdaten (R_T, D_T). Die Leitungszahl sei im Primärbündel N_1 und im Sekundärbündel N_2 . Mit x_1 bzw. x_2 wird die Anzahl der gleichzeitig belegten Leitungen im Primär- bzw. Sekundärbündel bezeichnet. $p(x_1, x_2)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß im Primärbündel x_1 und im Sekundärbündel x_2 Belegungen vorhanden sind.

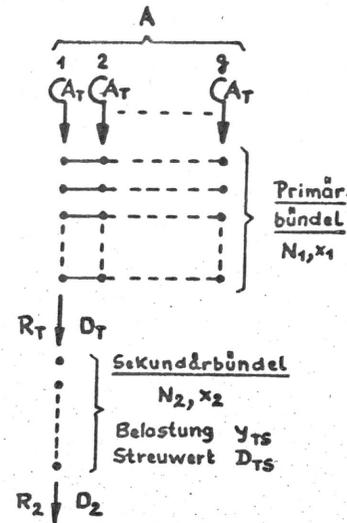


Abb.2: Überlaufanordnung zur Berechnung der Teilstreuwerte D_T bzw. D_{TS}

Die allgemeinste Lösung ergibt sich, wenn man die Momente der Verteilung in einem Überlaufbündel hinter nur einer Zubringerteilgruppe von insgesamt g des Primärbündels berechnet. Diese Lösung geht für $g = 1$, d.h. für $A_T = A$, in jene für den Gesamtüberlaufverkehr über. Für sog. "Schiefe Last", d.h. für nicht einheitliche Teilangebote A_T ändert sich an der Herleitung von D_T bzw. D_{TS} nichts.

Nach dem "Prinzip von der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts" -d.h. für stationären Verkehr

oder mit anderen Worten: bei zeitinvarianten Wahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ - ergibt sich in bekannter Weise /1,5, 8,14,49,50/:

für $0 \leq x_1 < N_1$ mit $p(x_1 = -1, x_2) = 0$:

$$(1A) \quad (x_1 + 1) \cdot p(x_1 + 1, x_2) + (x_2 + 1) \cdot p(x_1, x_2 + 1) + A \cdot p(x_1 - 1, x_2) = (x_1 + x_2 + A) \cdot p(x_1, x_2)$$

für $x_1 = N_1$ und $0 \leq x_2 < N_2$ mit $p(N_1, x_2 = -1) = 0$:

$$(1B) \quad A_T \cdot p(N_1, x_2 - 1) + (x_2 + 1) \cdot p(N_1, x_2 + 1) + A \cdot p(N_1 - 1, x_2) = (N_1 + x_2 + A_T) \cdot p(N_1, x_2)$$

für $x_1 = N_1$ und $x_2 = N_2$:

$$(1C) \quad A_T \cdot p(N_1, N_2 - 1) + A \cdot p(N_1 - 1, N_2) = (N_1 + N_2) \cdot p(N_1, N_2)$$

1.2. Definitionen.

Bekanntlich gilt für ein gewöhnliches Moment r-ter Ordnung:

$$(2) \quad m_r(x_2) = \sum_{x_1=0}^{N_1} \sum_{x_2=0}^{N_2} x_2^r \cdot p(x_1, x_2)$$

und für ein faktorielles Moment r-ter Ordnung:

$$(3) \quad M_r(x_2) = \sum_{x_1=0}^{N_1} \sum_{x_2=0}^{N_2} \tau! \binom{x_2}{r} \cdot p(x_1, x_2)$$

$$(4) \quad M_r(x_2) = \sum_{x_1=0}^{N_1} M_r(x_2/x_1)$$

$M_r(x_2/x_1)$ in Gleichung (4) wird als "Bedingtes faktorielles Moment r-ter Ordnung" bezeichnet.

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergibt sich durch Vergleich:

$$r=0: \quad m_0(x_2) = M_0(x_2) = 1$$

$$r=1: \quad m_1(x_2) = M_1(x_2) = \mu_{TS} = \bar{x}_2$$

$$r=2: \quad m_2(x_2) = M_2(x_2) + M_1(x_2)$$

$$m_2(x_2) = M_2(x_2) + m_1(x_2)$$

Das zweite zentrale Moment, die Varianz σ_{TS}^2 , ist definiert als:

$$\sigma_{TS}^2 = m_2(x_2) - m_1(x_2)^2$$

und der Streuwert im Sekundärbündel

$$D_{TS} = \sigma_{TS}^2 - m_1(x_2)$$

Durch Einsetzen ergibt sich schließlich folgende Gleichung für den gesuchten Streuwert:

$$(5) \quad D_{TS} = M_2(x_2) - \mu_{TS}^2$$

Ziel der nachfolgenden Berechnungen wird deshalb die Bestimmung des zweiten faktoriellen Moments $M_2(x_2)$ sein.

Eine "erzeugende" Funktion für bedingte faktorielle Momente ist definiert als:

$$(6) \quad F(x_2/x_1, t) = \sum_{r=0}^{\infty} M_r(x_2/x_1) \cdot \frac{t^r}{r!}$$

wo t ein im Bereich $-1 \leq t \leq +1$ stetig variabler Parameter ist.

Mit den Gleichungen (3) und (4) ergibt sich:

$$(7) \quad F(x_2/x_1, t) = \sum_{x_2=0}^{N_2} (1+t)^{x_2} \cdot p(x_1, x_2)$$

die diskrete Variable $M_r(x_2/x_1)$ wird also in die im Intervall $|t| \leq 1$ stetige erzeugende Funktion $F(x_2/x_1, t)$ transformiert.

1.3. Berechnung der Momente.

Mit Hilfe der erzeugenden Funktion in Gleichung (6) kann man jetzt die Gleichgewichtsbedingung (1A) in eine Gleichung für die bedingten faktoriellen Momente transformieren. Zu diesem Zweck wird Gleichung (1A) mit dem Faktor $(1+t)^{x_2}$ erweitert und anschließend über alle möglichen Zustände von $x_2 (0 \leq x_2 \leq N_2)$ aufsummiert. Dabei zeigt sich, daß in den einzelnen Gliedern die Verteilungsfunktion $p(x_1, x_2)$ durch die erzeugende Funktion nach Gleichung (7) bzw. durch deren Ableitung ersetzt werden kann. Schließlich erhält man wegen Gleichung (6) folgende Beziehung für die bedingten faktoriellen Momente:

$$(8A) \quad -A \cdot M_r(x_2/x_{1-1}) + (A+x_1+r) \cdot M_r(x_2/x_1) - (x_1+1) \cdot M_r(x_2/x_{1+1}) = 0$$

Erweitert man Gleichung (1B) ebenfalls mit $(1+t)^{x_2}$, summiert über die Zustände $0 \leq x_2 \leq N_2-1$ auf und addiert die mit dem Faktor $(1+t)^{N_2}$ multiplizierte Gleichung (1C) hinzu, so erhält man mit den Gleichungen (7) und (6) die Beziehung (wo $\binom{N_2}{r-1} = 0$ für $r = 0, N_2+1, N_2+2, \dots$):

$$(8B) \quad -A \cdot M_r(x_2/N_{1-1}) + (N_1+r) \cdot M_r(x_2/N_1) = r \cdot A_r \cdot M_{r-1}(x_2/N_1) - A_T \cdot \binom{N_2}{r-1} \cdot p(N_1, N_2)$$

Bis zu diesem Punkt ist die Herleitung völlig analog zu jener von Chastang /5/. Chastang führt jedoch nun eine zweite und später eine dritte erzeugende Funktion ein, um dann nach einer sehr umfangreichen Rücktransformation das gesuchte zweite faktorielle Moment $M_2(x_2)$ zu erhalten. Diese zusätzlichen Transformationen kann man durch folgende Lösung umgehen: Gleichung (8A) wird über alle Zustände $(0 \leq x_1 \leq N_1-1)$ aufsummiert und anschließend Gleichung

chung (8B) hinzuaddiert. Dadurch verschwinden verschiedene Glieder und man erhält die Formel:

$$(9) \sum_{x_1=0}^{N_1} M_r(x_2/x_1) = A_T \cdot M_{r-1}(x_2/N_1) - A_T \cdot (r-1)! \binom{N_2}{r-1} \cdot p(N_1, N_2)$$

und mit der Definitionsgleichung (4):

$$M_r(x_2) = A_T \cdot M_{r-1}(x_2/N_1) - A_T \cdot (r-1)! \binom{N_2}{r-1} \cdot p(N_1, N_2)$$

Speziell für $r = 2$ ergibt sich:

$$(11) M_2(x_2) = A_T \cdot M_1(x_2/N_1) - A_T \cdot N_2 \cdot p(N_1, N_2)$$

Mit Hilfe dieser einfachen Beziehung (11) kann man jetzt das zweite faktorielle Moment durch das erste bedingte faktorielle Moment ausdrücken. Dieses erste bedingte faktorielle Moment liefert die Rekursionsformel (8A) mit der Randbedingung nach Gleichung (4) für $r = 1$:

$$(4^*) M_1(x_2) = y_{TS} = \sum_{x_1=0}^{N_1} M_1(x_2/x_1)$$

Aus Gleichung (8A) folgt für $r = 1$:

$$M_1(x_2/x_1+1) = \frac{1}{x_1+1} \cdot [-A \cdot M_1(x_2/x_1) + (A+x_1+1) \cdot M_1(x_2/x_1)]$$

also für $x_1 = 0$:

$$M_1(x_2/1) = \frac{1}{1} \cdot [A+1] \cdot M_1(x_2/0) = \left[1 + \frac{A^1}{1!}\right] \cdot M_1(x_2/0)$$

ferner für $x_1 = 2$:

$$M_1(x_2/2) = \frac{1}{2} [-A \cdot M_1(x_2/0) + (A+2) \cdot M_1(x_2/1)] = \left[1 + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!}\right] \cdot M_1(x_2/0)$$

oder allgemein -wie leicht beweisbar ist-:

$$(12) M_1(x_2/x_1) = \sum_{\xi=0}^{x_1} \frac{A^\xi}{\xi!} \cdot M_1(x_2/0)$$

wo sich für $M_1(x_2/0)$ mit der Randbedingung (4*) folgende Beziehung ergibt:

$$(13) M_1(x_2/0) = \frac{y_{TS}}{\sum_{x_1=0}^{N_1} \sum_{\xi=0}^{x_1} \frac{A^\xi}{\xi!}}$$

Für das speziell gesuchte erste bedingte faktorielle Moment ergibt sich deshalb:

$$(14) M_1(x_2/N_1) = y_{TS} \cdot \frac{\sum_{\xi=0}^{N_1} \frac{A^\xi}{\xi!}}{\sum_{x_1=0}^{N_1} \sum_{\xi=0}^{x_1} \frac{A^\xi}{\xi!}}$$

Die Doppelsumme im Nenner ist identisch mit dem Ausdruck:

$$(14B) (N_1+1-A) \cdot \sum_{\xi=0}^{N_1} \frac{A^\xi}{\xi!} + A \cdot \frac{A^{N_1}}{N_1!}$$

(Beweis siehe Anhang 1, Seite 27). Durch Einsetzen von Gleichung (14B) in (14) und eine Umformung erhält man:

$$(15) M_1(x_2/N_1) = \frac{y_{TS}}{N_1+1-A+A \cdot B}$$

wo $B = R_T/A_T$

Gleichung (15) eingesetzt in Gleichung (11) ergibt:

$$M_2(x_2) = \frac{A_T \cdot y_{TS}}{N_1+1-A(1-B)} - A_T \cdot N_2 \cdot p(N_1, N_2)$$

Die gesuchte Formel für den Streuwert D_{TS} des Verkehrs y_{TS} im Sekundärbündel hinter einer Zubringerteilgruppe des Primärbündels lautet deshalb mit Definitionsgleichung (5):

$$(16) D_{TS} = y_{TS} \cdot \left[\frac{A_T}{N_1+1-A(1-B)} - y_{TS} \right] - A_T \cdot N_2 \cdot p(N_1, N_2)$$

1.4. Gesamtstreuwert.

Wie bereits in Abschnitt II.1. erwähnt, ergibt sich die Formel für den Streuwert D_S des Gesamtüberlaufverkehrs in einem vollkommen erreichbaren Sekundärbündel mit N_2 Abnehmerleitungen, wenn man die Anzahl der Zubringerteilgruppen $g = 1$ setzt. Wegen $A_T = A$ und $y_{TS} = y_S$ folgt deshalb aus Gleichung (16):

$$(17) \quad D_S = y_S \cdot \left[\frac{A}{N_1 + 1 - A(1-B)} - y_S \right] - A \cdot N_2 \cdot p(N_1, N_2)$$

1.5. Grenzübergang für ein unbegrenzt großes Sekundärbündel.

Für den ersten Ausdruck in Gleichung (17) ergibt sich:

$$(18) \quad \lim_{N_2 \rightarrow \infty} y_S \left\{ \frac{A}{N_1 + 1 - A(1-B)} - y_S \right\} = R \left\{ \frac{A}{N_1 + 1 - A(1-B)} - R \right\}$$

wegen $\lim_{N_2 \rightarrow \infty} B_2 = 0 \rightsquigarrow \lim_{N_2 \rightarrow \infty} y_S = R$

und für den zweiten Ausdruck:

$$(19) \quad \lim_{N_2 \rightarrow \infty} A \cdot N_2 \cdot p(N_1, N_2) = 0$$

Beweis für Gleichung (19):

Betrachtet man den Ausdruck $A \cdot N_2 \cdot p(N_1, N_2) = S_{N_2}$ als ein Glied der Reihe $S_1 + S_2 + \dots + S_{N_2}$, dann gilt:

1. Satz: Ist $\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \frac{S_{N_2+1}}{S_{N_2}} < 1$, so konvergiert die Reihe

$S_1 + S_2 + \dots + S_{N_2}$ absolut (Quotientenregel).

2. Satz: Konvergiert eine Reihe, so müssen die Glieder eine Nullfolge bilden.

Aus Gleichung (19) folgt mit

$$\lim_{N_2 \rightarrow \infty} p(N_1, N_2) = e^{-A} \cdot \frac{A^{N_1+N_2}}{(N_1+N_2)!}$$

$$\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \frac{S_{N_2+1}}{S_{N_2}} = \frac{N_2+1}{N_2} \cdot \frac{A}{N_1+N_2+1} < 1$$

Damit gilt für den Gesamtstreuwert bei einem unendlich großen Überlaufbündel:

$$D_\infty = R \left\{ \frac{A}{N_1+1-A(1-B)} - R \right\}$$

und wegen $A = R/B$:

$$(20) \quad D_\infty = R^2 \left\{ \frac{1}{B[N_1+1-A(1-B)]} - 1 \right\}$$

1.6. Vergleich mit dem Verfahren von Chastang.

Bei beiden Verfahren (Chastang bzw. Abschnitt 1.1. bis 1.6.) ergibt sich nach dem Prinzip der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts ein Gleichungssystem für die zweidimensionalen Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x_1, x_2)$ (vgl. Bild 3). Die erzeugende Funktion F_a ermöglicht dann

den Übergang zu der eindimensionalen Veränderlichen $M_r(x_2/x_1)$. Chastang /5/ führt jetzt eine zweite erzeugende Funktion F_b ein, die ihm ein Gleichungssystem für die Hilfsfunktion HF liefert. Eine weitere Transformation mit einer dritten erzeugenden Funktion F_c ergibt dann die Lösung auf der Ebene dieser dritten erzeugenden Funktion. Schließlich erhält Chastang nach einer recht umfangreichen Rücktransformation das gesuchte zweite faktorielle Moment. Der Streuwert ergibt sich aus der Definitionsgleichung (5).

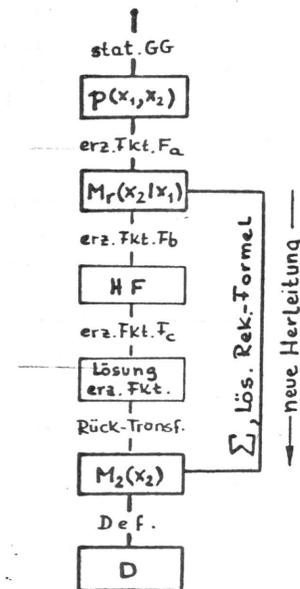


Abb. 3: Schematische Darstellung der zwei Lösungswege.

Durch eine einfache Summation und die Auflösung der Rekursionsformel (8A)

kann man jedoch, wie gezeigt wurde, direkt das zweite faktorielle Moment und nach der Definitionsgleichung (5) den Streuwert erhalten.

Die Lösung für die Rekursionsformel (8A), d.h. die Gleichung (12), ergibt sich auch auf sehr elegante Weise mit Hilfe der Differenzenrechnung: Gleichung (8A) stellt eine homogene lineare Differenzgleichung zweiter Ordnung dar, für die man sofort eine Partikularlösung angeben kann und dann zwangsläufig die allgemeine Lösung findet (s. Anhang 2).

1.7. Anhang 1

Im folgenden wird die in Abschnitt 1.3. verwendete Formel (Nenner von Gleichung (14) bzw. Gleichung (14B))

$$(21) \quad \sum_{x_1=0}^{N_1} \sum_{\xi=0}^{x_1} \frac{A^\xi}{\xi!} = (N_1+1-A) \cdot \sum_{\xi=0}^{N_1} \frac{A^\xi}{\xi!} + A \cdot \frac{A^{N_1}}{N_1!}$$

bewiesen. Schreibt man die linke Seite von Gleichung (21) gliedweise an, so gilt:

$$\begin{aligned} \text{für } x_1 = 0 &: \frac{A^0}{0!} \\ x_1 = 1 &: \frac{A^0}{0!} + \frac{A^1}{1!} \\ x_1 = 2 &: \frac{A^0}{0!} + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} \\ &\vdots \\ x_1 = N_1 &: \frac{A^0}{0!} + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{N_1}}{N_1!} \end{aligned}$$

Addiert man die Einzelglieder spaltenweise, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{x_1=0}^{N_1} \sum_{\xi=0}^{x_1} \frac{A^\xi}{\xi!} &= (N_1+1) \frac{A^0}{0!} + N_1 \cdot \frac{A^1}{1!} + (N_1-1) \cdot \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{N_1}}{N_1!} \\ &= \sum_{\xi=0}^{N_1} (N_1+1-\xi) \cdot \frac{A^\xi}{\xi!} \\ &= (N_1+1) \cdot \sum_{\xi=0}^{N_1} \frac{A^\xi}{\xi!} - \sum_{\xi=1}^{N_1} \frac{A^\xi}{(\xi-1)!} \\ &= (N_1+1) \sum_{\xi=0}^{N_1} \frac{A^\xi}{\xi!} - A \cdot \sum_{\xi=0}^{N_1-1} \frac{A^\xi}{\xi!} \end{aligned}$$

$$= (N_1+1) \cdot \sum_{\xi=0}^{N_1} \frac{A^\xi}{\xi!} - A \cdot \sum_{\xi=0}^{N_1} \frac{A^\xi}{\xi!} + A \cdot \frac{A^{N_1}}{N_1!}$$

$$\sum_{x_1=0}^{N_1} \sum_{\xi=0}^{x_1} \frac{A^\xi}{\xi!} = (N_1+1-A) \cdot \sum_{\xi=0}^{N_1} \frac{A^\xi}{\xi!} + A \cdot \frac{A^{N_1}}{N_1!}$$

1.8. Anhang 2.

Wie bereits in Abschnitt 1.6. erwähnt, lässt sich die Rekursionsformel (8A):

$$\begin{aligned} &-A \cdot M_r(x_2/x_1-1) + \\ &+(A+x_1+r) \cdot M_r(x_2/x_1) - \\ &-(x_1+1) \cdot M_r(x_2/x_1+1) = 0 \end{aligned}$$

für den Fall der 1. faktoriellen Momente, d.h. für $r=1$ mit Hilfe der Differenzenrechnung /68 - 71/ leicht auflösen.

Die Normalform einer linearen homogenen Differenzgleichung 2. Ordnung erhält man durch die Substitution $x_1 = z + 1$. Mit $M_1(x_2/z) = y_z$ gilt dann:

$$(22) \quad -A \cdot y_z + (A+z+2) \cdot y_{z+1} - (z+2) \cdot y_{z+2} = 0$$

Da die Gleichung (22) die Partikularlösung $y'(1) = c$ besitzt, kann man diese Differenzgleichung 2. Ordnung durch Einführen der Differenzen (Definitionen siehe /68,71/) reduzieren auf eine lineare homogene Differenzgleichung 1. Ordnung.

Es gilt:

$$\begin{aligned} y_{z+1} &= y_z + \Delta y_z \\ y_{z+2} &= y_z + 2\Delta y_z + \Delta^2 y_z \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (22) erhält man:

$$(23) \quad (A-z-2) \cdot \Delta y_z - (z+2) \cdot \Delta^2 y_z = 0$$

$$(24) \quad \text{Substitution: } \Delta y_z = u_z$$

$$\Delta^2 y_z = \Delta \mu_z$$

$$\Delta^2 y_z = \mu_{z+1} - \mu_z$$

Damit folgt aus (23) die Rekursionsformel:

$$(25) \quad (z+2) \cdot \mu_{z+1} = A \cdot \mu_z$$

Die Auflösung der Gleichung (25) ist trivial. Man erhält:

$$\mu_z = \mu_{-1} \cdot \frac{A^{z+1}}{(z+1)!}$$

und wegen der Substitution (24):

$$\Delta y_z = \mu_z$$

$$\begin{aligned} y_z &= \sum_{\eta=-1}^{z-1} \Delta y_\eta \\ &= \mu_{-1} \cdot \sum_{\eta=-1}^{z-1} \frac{A^{\eta+1}}{(\eta+1)!} \\ &= \mu_{-1} \cdot \sum_{\xi=0}^z \frac{A^\xi}{\xi!} \end{aligned}$$

Mit $z = x_1 - 1$ und $y_z = M_1(x_2/z)$ ergibt sich schließlich:

$$M_1(x_2/x_{1-1}) = \mu_{-1} \cdot \sum_{\xi=0}^{x_1-1} \frac{A^\xi}{\xi!}$$

$$(26) \quad M_1(x_2/x_1) = \mu_{-1} \cdot \sum_{\xi=0}^{x_1} \frac{A^\xi}{\xi!}$$

Die Konstante μ_{-1} ergibt sich aus Gleichung (26) für $x_1 = 0$ zu $M_1(x_2/0)$. Damit ist die gesuchte Lösung:

$$(27) \quad \boxed{M_1(x_2/x_1) = M_1(x_2/0) \cdot \sum_{\xi=0}^{x_1} \frac{A^\xi}{\xi!}} \quad \text{q.e.d.}$$

II.2. Die Berechnung von Sekundärbündeln.

Die beiden bekanntesten, mathematisch äquivalenten Verfahren zur Berechnung vollkommener Sekundärbündel wurden von Bretschneider /2,3/ und Wilkinson /14/ vorgeschlagen. Beide Verfahren unterscheiden sich nur in der Wahl der Parameter: Wilkinson wählte den Mittelwert R_1 und die Varianz σ_1^2 , während Bretschneider den Mittelwert R_1 und den Streuwert $D_1 = \sigma_1^2 - R_1$ des angebotenen Überlaufverkehrs als Parameter benützt. Für beide Verfahren sind Tabellen und Diagramme vorhanden, die eine leichte Auswertung erlauben.

Ein weiteres Verfahren von Chastang /5/ ist wesentlich aufwendiger und nur mit Hilfe einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage auswertbar.

2.1. Das Streuwertverfahren von Bretschneider /2,3/.

Bietet man einem vollkommenen Sekundärbündel den Überlaufverkehr (R_1, D_1) an, so erlaubt das Verfahren

- bei bekannter Leitungszahl N_2 die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit $B_2 = R_2/R_1$ bzw.
- bei vorgeschriebener Verlustwahrscheinlichkeit B_2 die Bestimmung der erforderlichen Leitungszahl N_2 .

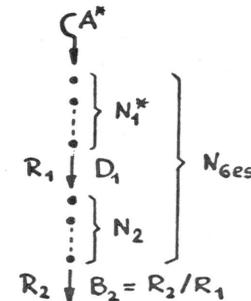


Abb.4: Ersatzanordnung.

In beiden Fällen (siehe Abb. 4) wird ein fiktives Primärbündel mit der Leitungszahl N_1^* und dem Zufallsangebot A^* so bestimmt, daß es gerade den tatsächlichen Überlaufverkehr (R_1, D_1) erzeugt. Durch Zusammenschalten des Ersatzbündels mit dem Sekundärbündel ist die Berechnung

dieses Sekundärbündels auf die eines Primärbündels mit $N_{Ges} = N_1^* + N_2$ Leitungen und dem Zufallsangebot A^* zurückgeführt.

a) Für die gesuchte Verlustwahrscheinlichkeit gilt:

$$(28) \quad B_2 = \frac{R_2}{R_1} = \frac{A^*}{R_1} \cdot \frac{A^* N_{Ges}}{N_{Ges}!} = \frac{A^*}{R_1} \cdot E_{1, N_{Ges}}(A^*)$$

b) Die Gesamtverlustwahrscheinlichkeit erhält man nach der Formel:

$$(29) \quad B_{Ges} = E_{1, N_{Ges}}(A^*) = \frac{R_2}{A^*} = \frac{R_1}{A^*} \cdot B_2$$

Für den Verlust B_{Ges} und das Angebot A^* kann man aus Tabellen /12/ sofort die Leitungszahl N_{Ges} ablesen. Die gesuchte Abnehmerleitungszahl N_2 des Sekundärbündels ist damit

$$N_2 = N_{Ges} - N_1^*$$

III. EINSTUFIGE KOPPELANORDNUNGEN MIT UNVOLLKOMMENER ERREICHBARKEIT.

III.1. Exakte Herleitung für den Streuwert.

Für unvollkommen erreichbare Primärbündel wird der Streuwert D_k bzw. die Varianz σ_k^2 des Überlaufverkehrs in einem unendlich großen, vollkommen erreichbaren Sekundärbündel auf einem entsprechenden Weg wie in Abschnitt II.1 gefunden und als geschlossene Lösung angegeben.

Die Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr, der hinter einer primären Koppelanordnung mit unvollkommener Erreichbarkeit in einem endlich großen, ebenfalls unvollkommenen Sekundärbündel fließt, ist nicht möglich. Die dazu notwendigen Transformationen gemäß Abschnitt 1.3 dieses Kapitels mit Hilfe erzeugender Funktionen können nicht mehr durchgeführt werden.

Dieselbe Berechnung für ein endlich großes, vollkommen erreichbares Sekundärbündel ist dagegen möglich, jedoch nicht von praktischem Interesse.

Da die Berechnung des Streuwerts in einem unendlich großen, unvollkommen erreichbaren Sekundärbündel für die praktische Anwendung ebenfalls uninteressant ist, wird deshalb im folgenden der Streuwert D_k bzw. die Varianz σ_k^2 des Gesamtüberlaufverkehrs, also für ein unendlich großes, vollkommen erreichbares Sekundärbündel, hergeleitet.

Lösungen für die in der Streuwertgleichung enthaltenen Durchlaßwahrscheinlichkeiten $\mu(x_1)$ bzw. Sperrwahrscheinlichkeiten $\sigma(x_1) = 1 - \mu(x_1)$ werden für verschiedene Mischungstypen in /24, 26, 27, 35, 38, 42, 54-56/ angegeben.

1.1. Koppelanordnung und statistisches Gleichgewicht.

Das unvollkommen erreichbare Primärbündel (s. Abb.5) habe die Leitungszahl N_1 , die Erreichbarkeit k_1 und die

Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu(x_1)$. Bei einem angebotenen Gesamtverkehr A sei der Gesamtüberlaufverkehr (R_k, D_k) . Das vollkommen erreichbare Sekundärbündel habe $N_2 \rightarrow \infty$

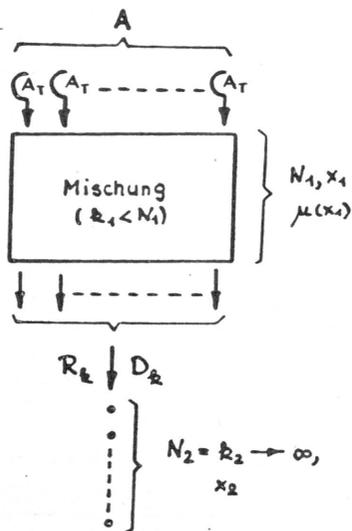


Abb.5: Überlaufanordnung zur Berechnung des Gesamtstreuwerths hinter unvollkommenen Bündeln.

viele Abnehmerleitungen. Bezeichnet man mit x_1 bzw. x_2 die Anzahl gleichzeitig belegter Leitungen im Primär- bzw. Sekundärbündel, so ergibt sich folgende Zustandsgleichung ($0 \leq x_1 \leq N_1$, $0 \leq x_2 \leq \infty$):

$$(30) \quad \begin{aligned} & (A + x_1 + x_2) \cdot p(x_1, x_2) - \\ & - (x_2 + 1) \cdot p(x_1, x_2 + 1) - \\ & - (x_1 + 1) \cdot p(x_1 + 1, x_2) - \\ & - A \cdot \sigma(x_1) \cdot p(x_1, x_2 - 1) - \\ & - A \cdot \mu(x_1 - 1) \cdot p(x_1 - 1, x_2) = 0 \end{aligned}$$

mit $p(-1, x_2) = 0$
 $p(x_1, -1) = 0$

1.2. Definitionen.

Analog zu Abschnitt II.1.2. erhält man für den Zusammenhang zwischen gewöhnlichen und faktoriellen Momenten die Beziehungen:

$r = 0$: $m_0(x_2) = M_0(x_2) = 1$
 $r = 1$: $m_1(x_2) = M_1(x_2) = R_k$
 $r = 2$: $m_2(x_2) = M_2(x_2) + R_k^2$

Deshalb ergibt sich für den Streuwert:

(31) $D_k = M_2(x_2) - R_k^2$

Die Gleichungen (6) und (7) für die erzeugende Funktion $F(x_2/x_1, t)$ bleiben unverändert, jedoch gilt $N_2 \rightarrow \infty$.

1.3. Berechnung des Streuwerts.

Wie in Abschnitt II.1.3. ergibt sich durch Erweitern von Gleichung (30) mit dem Faktor $(1 + t)^{x_2}$ und die Summation über alle Zustände x_2 schließlich mit den Gleichungen (6) und (7) folgende Beziehung für die bedingten faktoriellen Momente:

$$(32) \quad \begin{aligned} & -A \cdot \mu(x_1 - 1) \cdot M_r(x_2/x_1 - 1) + \\ & + (A \cdot \mu(x_1) + x_1 + r) \cdot M_r(x_2/x_1) - \\ & - (x_1 + 1) \cdot M_r(x_2/x_1 + 1) = A \cdot \sigma(x_1) \cdot r \cdot M_{r-1}(x_2/x_1) \end{aligned}$$

Durch Aufsummieren über sämtliche Zustände $0 \leq x_1 \leq N_1$ erhält man die Gleichung /49, 50/:

$$r \cdot \sum_{x_1=0}^{N_1} M_r(x_2/x_1) = A \cdot r \cdot \sum_{x_1=0}^{N_1} \sigma(x_1) \cdot M_{r-1}(x_2/x_1)$$

oder mit der Definitionsgleichung (4)

$$(33) \quad M_r(x_2) = A \cdot \sum_{x_1=0}^{N_1} \sigma(x_1) \cdot M_{r-1}(x_2/x_1)$$

Die Berechnung des r-ten faktoriellen Moments ist damit wieder auf die Berechnung der bedingten faktoriellen Momente (r-1)-ter Ordnung zurückgeführt. Speziell für $r = 2$ gilt deshalb:

$$(34) \quad M_2(x_2) = A \cdot \sum_{x_1=0}^{N_1} \sigma(x_1) \cdot M_1(x_2/x_1)$$

Die Auflösung der Rekursionsformel (32) -lineare inhomogene Differenzgleichung zweiter Ordnung- ist in diesem Fall wesentlich komplizierter als beim vollkommenen Primärbündel. Eine Reduktion auf eine inhomogene Differenzgleichung erster Ordnung ist jedoch mit Hilfe endlicher Kettenbrüche möglich. Man erhält:

$$(35) \quad K_{x_1} \cdot M_1(x_2/x_1) - (x_1+1) \cdot M_1(x_2/x_{1+1}) = f(x_1)$$

$$\text{wo: } K_{x_1} = A \cdot \mu(x_1) + (x_1+1) - \frac{x_1 \cdot A \cdot \mu(x_1-1)}{K_{x_1-1}}$$

$$K_0 = A + 1$$

$$f(x_1) = A \cdot \sigma(x_1) \cdot M_0(x_2/x_1) + \sum_{i=0}^{x_1-1} A \cdot \sigma(i) \cdot M_0(x_2/i) \prod_{\eta=i}^{x_1-1} \frac{A \cdot \mu(\eta)}{K_\eta}$$

$$M_0(x_2/x_1) = p(x_1) = \frac{\frac{A^{x_1}}{x_1!} \prod_{i=0}^{x_1-1} \mu(i)}{1 + \sum_{\xi=1}^{N_1} \frac{A^\xi}{\xi!} \prod_{i=0}^{\xi-1} \mu(i)}$$

Die Rekursionsformel (35) hat dann folgende Lösung:

$$M_1(x_2/x_1) = M_1(x_2/0) \prod_{\delta=0}^{x_1-1} \frac{K_\delta}{\delta+1} - \sum_{i=0}^{x_1-2} \frac{f(i)}{i+1} \prod_{\eta=i+1}^{x_1-1} \frac{K_\eta}{\eta+1} - \frac{f(x_1-1)}{x_1}$$

Schließlich erhält man mit der Randbedingung

$$\sum_{x_1=0}^{N_1} M_1(x_2/x_1) = M_1(x_2) = R_E$$

sowie mit den Gleichungen (34) und (31):

$$M_1(x_2/0) = \frac{R_E + \sum_{x_1=1}^{N_1} \sum_{i=0}^{x_1-2} \frac{f(i)}{i+1} \prod_{\eta=i+1}^{x_1-1} \frac{K_\eta}{\eta+1} + \sum_{x_1=1}^{N_1} \frac{f(x_1-1)}{x_1}}{1 + \sum_{x_1=1}^{N_1} \prod_{\delta=0}^{x_1-1} \frac{K_\delta}{\delta+1}}$$

Streuwert:

$$(36) \quad D_E = A \cdot \sum_{x_1=0}^{N_1} \sigma(x_1) \left[M_1(x_2/0) \prod_{\delta=0}^{x_1-1} \frac{K_\delta}{\delta+1} - \sum_{i=0}^{x_1-2} \frac{f(i)}{i+1} \prod_{\eta=i+1}^{x_1-1} \frac{K_\eta}{\eta+1} - \frac{f(x_1-1)}{x_1} \right] - R_E^2$$

Varianz:

$$(37) \quad \sigma_E^2 = D_E + R_E$$

Die Lösungen in den Gleichungen (36) bzw. (37) gelten auch für den Streuwert bzw. die Varianz von Überlaufverkehr hinter Koppelanordnungen beliebiger Struktur und Stufenzahl (vgl. Abschnitt IV.1 und IV.2.). Bei der numerischen Auswertung dieser Gleichungen können Schwierigkeiten dort auftreten, wo eine exakte Lösung oder eine hinreichend genaue Näherung für die Durchlaufwahrscheinlichkeiten $\mu(x_1)$ nicht gefunden werden kann. Diese Schwierigkeit wird durch das im folgenden Abschnitt III.2. behandelte Näherungsverfahren für einstufige Koppelanordnungen und das in Abschnitt IV.3. hergeleitete Verfahren für mehrstufige Koppelanordnungen umgangen. Beide Verfahren erlauben außerdem die Bemessung von ein- bzw mehrstufigen Koppelanordnungen, denen Überlaufverkehr angeboten wird.

III.2. Die Berechnung des Streuwerts einstufig unvollkommener Koppelanordnungen nach dem RDA-Verfahren /29-31,22,23,33/.

Der Überlaufverkehr eines exakt berechenbaren vollkommenen "Vergleichsbündels" wird am genauesten dem des zu berechnenden unvollkommenen Bündels entsprechen, wenn beide "Überlaufcharakteristiken", d.h. das Aufeinanderfolgen der Zustände "Überlauf" und "kein Überlauf", möglichst gut übereinstimmen /29,22/: Vergleicht man das unvollkommene

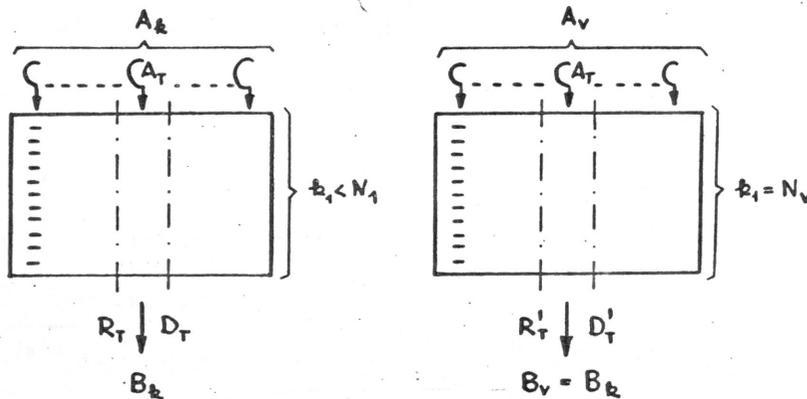


Abb.6:
Unvollkommenes Bündel mit $g_k = A_k/A_T$ Zubringerteilgruppen.

Abb.7:
Vollkommenes Bündel mit $g_v = A_v/A_T$ Zubringerteilgruppen.

Bündel in Abb.6 mit dem vollkommen erreichbaren Bündel in Abb.7, so erkennt man, daß in beiden Fällen für eine betrachtete Zubringerteilgruppe die Wahrscheinlichkeit für Blockierung und Nichtblockierung sowie die Mittelwerte ($R_T = R'_T$) gleichgroß sind. Auch die mittlere Länge $1/k_1$ der Blockierungszeitabschnitte, deren Anzahl je Zeiteinheit und deren Verteilung sind gleich. Außerdem sind Anzahl und Mittelwert der Zeitabschnitte "Nichtblockierung" in beiden Fällen identisch; lediglich die Verteilung der Nichtblockiert-Abschnitte wird nicht genau dieselbe sein,

da die Beeinflussung durch die übrigen (g_k-1) bzw. (g_v-1) Zubringerteilgruppen beim unvollkommenen und vollkommenen Bündel verschieden ist.

Vernachlässigt man diese einzige Ungenauigkeit, so kann man auch die Streuwerte der Teilüberlaufverkehre gleichsetzen. Dann gilt aber nach der aus Abschnitt II.1. bekannten Formel:

$$D_T = D'_T = R_T^2 \left\{ \frac{1}{B_k(k_1 + 1 - A_v(1 - B_k))} - 1 \right\}$$

$$D_T = D'_T = p \cdot R_T^2$$

Der "Spitzigkeitskoeffizient" p ist in Diagramm 2, abhängig von B_k und k_1 dargestellt.

Für den Zusammenhang zwischen Gesamt- und Teilstreuwert bei vollkommenen Bündeln ergibt sich /29,8/:

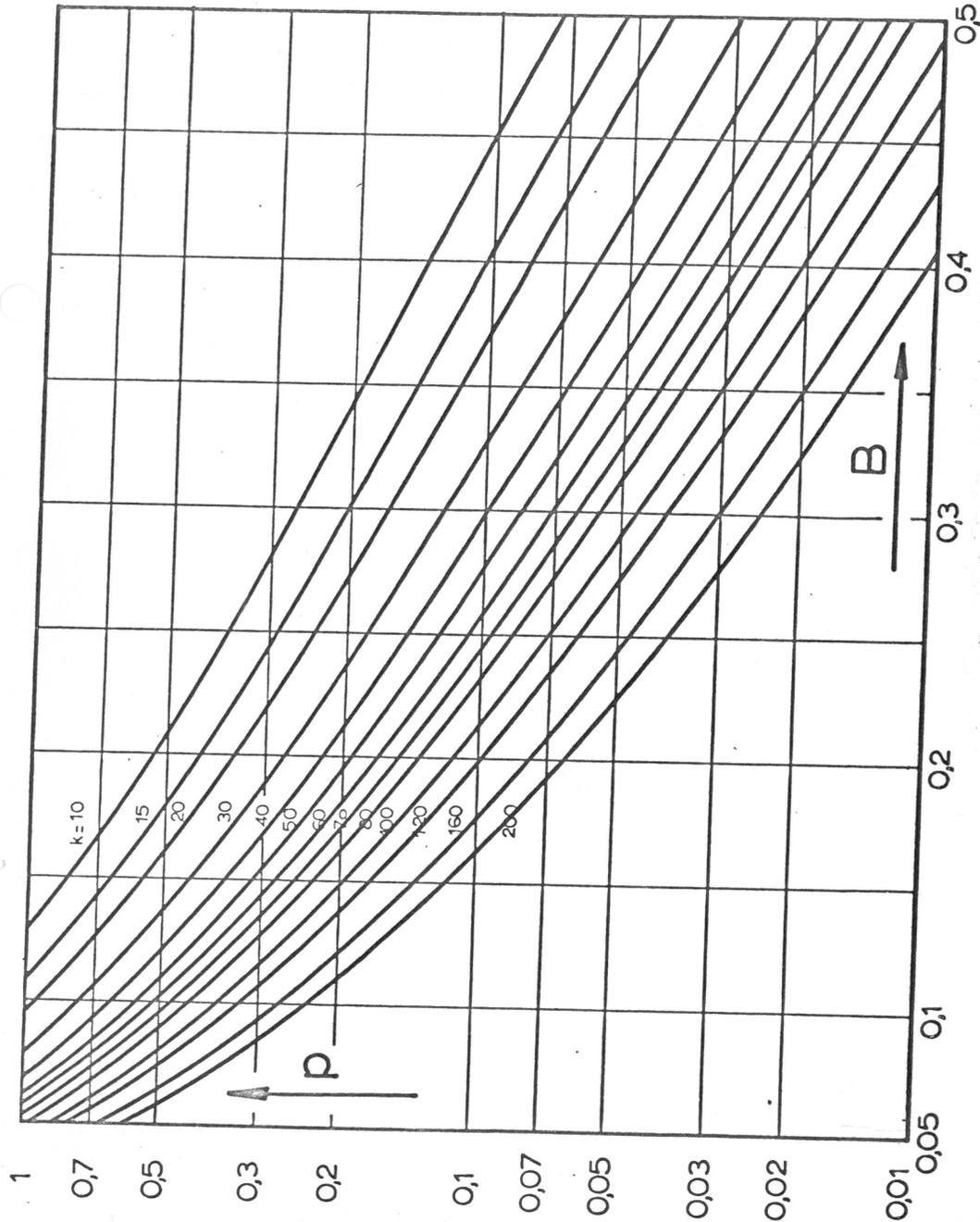
$$D'_{Ges} = g_v^2 \cdot D'_T$$

Durch Berücksichtigung der Korrelation zwischen verschiedenen Zubringerteilgruppen erhält man den Zusammenhang zwischen Gesamt- und Teilstreuwert bei unvollkommenen Bündeln. Die in /29,22/ ausführlich beschriebene Theorie liefert:

$$(38) \quad D_I = p \cdot R^2 \cdot \frac{k_1}{N_1}$$

$$(39) \quad D_{II} = D_I \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{g_k} \left(\frac{N_1}{k_1} - 1 \right) \right\}$$

D_I ist ein unterer Grenzwert, D_{II} eine obere Grenze, die durch Mischungen mit sehr gutem Besetzttausgleich erreicht wird. Im allgemeinen genügt für die praktische Berechnung des Streuwerts von Mischungen der arithmetische Mittelwert aus D_I und D_{II} .



Diagr.2: Spitzigkeitskoeffizient p in Abhängigkeit von der Verlustwahrscheinlichkeit B und der Erreichbarkeit k.

III.3. Die Berechnung von einstufigen Sekundärbündeln mit unvollkommener Erreichbarkeit nach dem RDA-Verfahren /29-31,22,23,33/.

Der Grundgedanke des RDA-Verfahrens ist derselbe wie bei Bündeln mit vollkommener Erreichbarkeit (Abschnitt II): Es wird ein fiktives, in diesem Fall unvollkommen erreichbares Ersatzprimärbündel (A_k^*, N_1^*, k_1^*) bestimmt, welches den dem Sekundärbündel (N_2, k_2) angebotenen Überlaufverkehr (R_1, D_1) erzeugt (vgl. Abb.8). Außerdem muß dieses Ersatzprimärbündel die Bedingung erfüllen, daß die Staffelung N_1^*/k_1^*

dem zuerst abgesuchten Teil einer Gesamt Mischung mit den Daten ($N_1^*+N_2, k_1^*+k_2$) entspricht. Diese Gesamtanordnung mit dem Zufallsangebot A_k kann nach der MPJ-Formel bemessen werden. Es gilt nach /26-28/:

$$(40) \quad B_{Ges} = R_2 / A_k^* \\ B_{Ges} = \frac{E_{N_1^*+N_2}(A_0)}{E_{N_1^*+N_2-k_1^*-k_2}(A_0)}$$

wo

$$E_N(A_0) = \frac{A_0^N}{N!} \sum_{s=0}^N \frac{A_0^s}{s!}$$

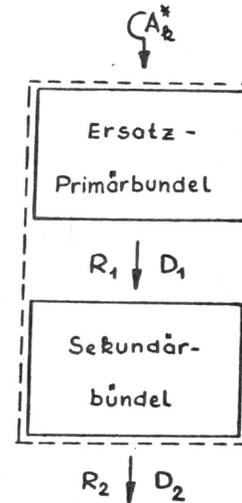


Abb.8: Ersatzbündel-anordnung.

Bei vorgeschriebener Leitungszahl N_2 ergibt sich dann für den Verlust des Sekundärbündels

$$(41) \quad B_2 = \frac{R_2}{R_1} = \frac{A_k^*}{R_1} \cdot B_{Ges}$$

Soll für vorgeschriebene Verlustwahrscheinlichkeit B_2 die erforderliche Leitungszahl bestimmt werden, so wird N_2 iterativ aus den Gleichungen (40) und (41) berechnet.

Für den gesamten interessierenden Bereich von B_2 und

k_2 wurde von Schehrer mit einem Algol-Programm der Leitungsbedarf N_2 bzw. der Leitungsmehrbedarf ΔN_2 (im Vergleich zu angebotenen Zufallsverkehr erster Art) untersucht. Dieser Leitungsmehrbedarf wird durch folgende Beziehung sehr genau approximiert:

$$(42) \quad \Delta N_2 = \frac{D_1}{R_1} [C_1(R_1 - 20) + C_2]$$

Die Koeffizienten C_1 und C_2 sind in Diagrammen -abhängig von B_2 und k_2 - dargestellt. Für die erforderliche Leitungszahl eines Sekundärbündels ergibt sich dann:

$$(43) \quad N_2 = N_{2,0} + \Delta N_2$$

$N_{2,0}$ kann aus den üblichen Tabellen (z.B. /28,30/) für angebotenen Zufallsverkehr abgelesen werden.

IV. MEHRSTUFIGE KOPPELANORDNUNGEN.

IV.1. Exakte Herleitung für den Streuwert bei Mischwahl.

Bei der Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr hinter unvollkommen erreichbaren, mehrstufigen Koppelanordnungen erhält man eine Rekursionsformel, die genau derjenigen von einstufigen Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit entspricht (vgl. Kapitel III). Für den Streuwert ergibt sich deshalb eine Formel, die mit Gleichung (36) formal identisch ist. Die Schwierigkeit liegt nur darin, für die in der Formel enthaltene Sperrwahrscheinlichkeiten $\sigma(x_1)$ bzw. Durchlaßwahrscheinlichkeiten $\mu(x_1)$ Näherungsfunktionen zu finden, welche möglichst wirklichkeitstreu sind /24,35,42/.

IV.2. Die exakte Berechnung des Überlaufverkehrs (R,D) bei Richtungswahl.

Im folgenden werden Mittelwert R und Streuwert D des Überlaufverkehrs je Richtung am Beispiel eines beliebigstufigen Linksystems mit zwei Richtungen bestimmt. Das Verfahren läßt sich jederzeit für Linksysteme mit mehr als zwei Richtungen erweitern. Für die in der exakten Formel enthaltenen Durchlaß- bzw. Sperrwahrscheinlichkeiten werden in /24/ einfache Näherungslösungen angegeben.

2.1. Koppelanordnung.

Die beiden Zufallsverkehre erster Art A_x und A_y werden zunächst den Abnehmerbündeln mit N_x bzw. N_y Leitungen ange-

boten (vgl. Abb. 9). Bei Blockierung des Richtungsbündels X wird der Verkehr in diese Richtung auf das -unendlich groß gedachte- Überlaufbündel Z umgesteuert. Für den Verkehr der Richtung Y ist keine Überlaufmöglichkeit vorgesehen, da der Streuwert D_y durch Vertauschen von Richtung X und Y aus der Streuwertgleichung (56) bestimmt werden kann.

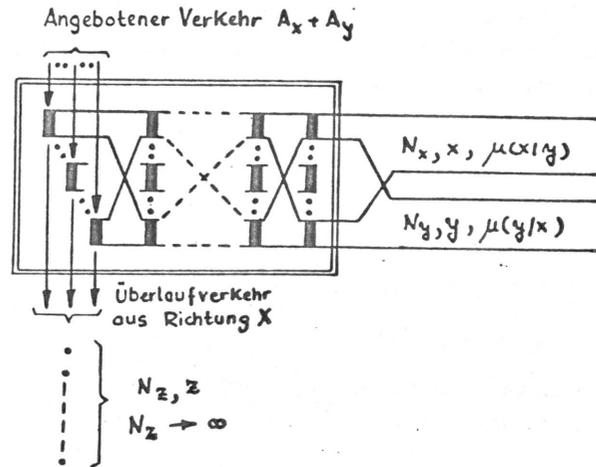


Abb.9: Überlaufanordnung zur Berechnung des Überlaufverkehrs (R_x, D_x) in Richtung X bei einem Linksystem mit zwei Richtungsbündeln.

2.2. Berechnung der Belegungswahrscheinlichkeiten $p(x)$ und $p(y)$ der Richtungsbündel X und Y.

Für angebotenen Zufallsverkehr erster Art ist der Rufprozess vom momentanen Belegungszustand aller Abnehmerbündel unabhängig. Die Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten $p(x)$ und $p(y)$ kann deshalb ohne Berücksichtigung der Belegungen im Überlaufbündel durchgeführt werden.

Bezeichnet man mit $\mu(x/y)$ bzw. $\mu(y/x)$ die Durchlaufwahrscheinlichkeiten in Richtung X und Y, wenn gleichzeitig x Belegungen in Richtung X und y Belegungen in Richtung Y durchgeschaltet sind, so ergibt sich der Erwartungswert der Durchlaufwahrscheinlichkeiten aus den Beziehungen:

$$(44) \quad \mu(x) = \sum_{y=0}^{N_y} \mu(x/y) \cdot p(y)$$

$$(45) \quad \mu(y) = \sum_{x=0}^{N_x} \mu(y/x) \cdot p(x)$$

Da sowohl der Verkehr in Richtung X als auch jener in Richtung Y für sich allein stationär sein muß, erhält man nach dem "Prinzip der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts" zwei Rekursionsformeln. Es gilt für Richtung X.

$$(46) \quad A_x \cdot \mu(x) \cdot p(x) - (x+1) \cdot p(x+1) = 0$$

und mit Gleichung (44)

$$(47) \quad p(x+1) = p(x) \cdot \frac{A_x}{(x+1)} \cdot \sum_{y=0}^{N_y} \mu(x/y) \cdot p(y)$$

Entsprechend gilt für Richtung Y:

$$(48) \quad p(y+1) = p(y) \cdot \frac{A_y}{(y+1)} \cdot \sum_{x=0}^{N_x} \mu(y/x) \cdot p(x)$$

Die Auflösung der Rekursionsformeln (47) und (48) liefert:

$$(49) \quad p(x) = \frac{\frac{A_x^x}{x!} \prod_{\xi=0}^{x-1} \sum_{y=0}^{N_y} \mu(\xi/y) \cdot p(y)}{\sum_{x=0}^{N_x} \frac{A_x^x}{x!} \prod_{\xi=0}^{x-1} \sum_{y=0}^{N_y} \mu(\xi/y) \cdot p(y)}$$

$$(50) \quad p(y) = \frac{\frac{A_y}{y!} \prod_{\xi=0}^{y-1} \sum_{x=0}^{N_x} \mu(\xi/x) \cdot p(x)}{\sum_{y=0}^{N_y} \frac{A_y}{y!} \prod_{\xi=0}^{y-1} \sum_{x=0}^{N_x} \mu(\xi/x) \cdot p(x)}$$

Die Berechnung der Belegungswahrscheinlichkeiten $p(x)$ und $p(y)$ aus den Gleichungen (49) und (50) ist nur iterativ möglich.

2.3. Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten B_x und B_y .

Allgemein gilt für die Verlustwahrscheinlichkeit bei unvollkommen erreichbaren Koppelanordnungen und Zufallsverkehr erster Art:

$$(51) \quad B = \sum_{\eta=0}^{N_\eta} p(\eta) \cdot \sigma(\eta)$$

wo

$$(52) \quad \sigma(\eta) = 1 - \mu(\eta)$$

und deshalb für die Verlustwahrscheinlichkeiten

$$(53) \quad B_x = \sum_{x=0}^{N_x} p(x) \cdot \left\{ 1 - \sum_{y=0}^{N_y} \mu(x/y) \cdot p(y) \right\}$$

$$(54) \quad B_y = \sum_{y=0}^{N_y} p(y) \cdot \left\{ 1 - \sum_{x=0}^{N_x} \mu(y/x) \cdot p(x) \right\}$$

2.4. Mittelwert des Überlaufverkehrs.

Es gilt

$$(55) \quad R_x = A_x \cdot B_x$$

2.5. Bestimmung des Streuwerts.

Da sowohl die Belegungswahrscheinlichkeit $p(x)$ nach Gleichung (49) als auch die Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu(x)$ bzw. die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)$ nach Abschnitt 2.2. bekannt sind, ist das Überlaufproblem bei Richtungswahl formal identisch mit jenem bei Mischwahl. Für den Streuwert des Überlaufverkehrs ergibt sich deshalb (vgl. Abschn. III.1.):

$$(56) \quad D_x = A_x \sum_{x=0}^{N_x} \sigma(x) \left\{ M_1(z/0) \prod_{\delta=0}^{x-1} \frac{K_\delta}{\delta+1} - \sum_{i=0}^{x-2} \frac{h(i)}{i+1} \prod_{\delta=i+1}^{x-1} \frac{K_\delta}{\delta+1} - \frac{h(x-1)}{x} \right\} - R_x^2$$

wo

$$M_1(z/0) = \frac{R_x + \sum_{x=1}^{N_x} \sum_{i=0}^{x-2} \frac{h(i)}{i+1} \prod_{\eta=i+1}^{x-1} \frac{K_\eta}{\eta+1} + \sum_{x=1}^{N_x} \frac{h(x-1)}{x}}{1 + \sum_{x=1}^{N_x} \prod_{\delta=0}^{x-1} \frac{K_\delta}{\delta+1}}$$

$$h(x) = A_x \cdot \sigma(x) \cdot M_0(z/x) + \sum_{i=0}^{x-1} A_x \cdot \sigma(i) \cdot M_0(z/i) \prod_{\eta=i}^{x-1} \frac{A \cdot \mu(\eta)}{K_\eta}$$

$$K_x = A_x \cdot \mu(x) + (x+1) - \frac{x \cdot A_x \cdot \mu(x-1)}{K_{x-1}}$$

$$M_0(z/x) = p(x) \text{ nach Gleichung (49)}$$

Bei der numerischen Auswertung der Streuwertformel für mehrstufige Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit treten folgende Schwierigkeiten auf:

- a) Für Linkssysteme mit Richtungswahl wird das zu lösende Gleichungssystem bei drei und mehr verschiedenen Richtungen sehr komplex. Durch mehrfach ineinandergeschachtelte Iterationsprozesse erhöht sich die erforderliche Rechenzeit bei der Auswertung auf einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage beträchtlich.
- b) Exakte Lösungen oder hinreichend genaue Näherungsformeln für die Durchlaß- bzw. Sperrwahrscheinlichkeiten erfordern sehr genaue Untersuchungen des vorliegenden Linksystemtyps /24/.
- c) Die Berechnung von Linkssystemen mit angebotenen Überlaufverkehr ist nicht mehr möglich (vgl. auch Abschnitt III.1).

Aus diesen Gründen eignet sich das Verfahren weniger für eine Anwendung in der Praxis, sondern vor allem für theoretische Grundsatzuntersuchungen. Das in den folgenden Abschnitten IV.3. bis IV.5. beschrieben "verallgemeinerte RDA-Verfahren" vermeidet diese Schwierigkeiten und ist zur Lösung der bei alternativer Leitweglenkung auftretenden Probleme geeignet.

IV.3. Näherungsweise Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr hinter mehrstufigen, beliebig aufgebauten Linksystemen mit Misch- oder Richtungswahl.

Die Erreichbarkeit mehrstufiger Koppelanordnungen ist nicht konstant, sondern vom momentanen Belegungszustand abhängig. Berechnet man die "effektive" oder "mittlere" Erreichbarkeit (Definitionen siehe Abschnitt IV.3.1 bzw. IV.4.1), so kann man jedoch die Eigenschaften der mehrstufigen Koppelanordnung sehr genau durch diejenige einer einstufigen Vergleichsanordnung mit derselben Erreichbarkeit beschreiben.

Es wird im folgenden gezeigt, daß sich das RDA-Verfahren von Lotze /29-31,22,23,33/ auf diese Weise erweitern läßt und somit auch zur Bemessung mehrstufiger Koppelanordnungen geeignet ist. Der Aufbau dieser Anordnungen darf beliebig sein, d.h. mit Misch- oder Richtungswahl und mit oder ohne Mischung der Link- bzw. Abnehmerleitungen.

Das Verfahren liefert für den bei Überlaufbündeln interessierenden Verlustbereich $-B > 5\%$ sehr genaue Ergebnisse (vgl. Abschnitt IV.3.2). Für die Anwendung des Verfahrens in der Praxis sind Tabellen und Diagramme vorhanden, die eine einfache und genaue manuelle Auswertung erlauben (vgl. Abschnitt IV.3.3).

3.1. Streuwertberechnung für ein Richtungsbündel.

Die effektive Erreichbarkeit $/40,41/ k_{\text{eff}}$ eines von mehreren Abnehmerbündeln eines Linksystems entspricht der Erreichbarkeit k eines unvollkommenen einstufigen Vergleichsbündels, welches bei gleicher Abnehmerleistungszahl N und gleicher Verlustwahrscheinlichkeit B denselben Verkehr y verarbeiten kann.

Sind bei einem Linksystem mit angebotenen Zufallsverkehr die Belastung y und die Verlustwahrscheinlichkeit B des betrachteten Abnehmerbündels -aus Rechnung oder Verkehrsmessung- bekannt, so kann man mit Hilfe der effektiven Erreichbarkeit $k_{eff} = f(B, y, N)$ direkt den Streuwert des Überlaufverkehrs angeben. Analog zu Abschnitt III.2. gilt:

$$(57) \quad D = p \{B, k_{eff}\} \cdot R^2 \cdot \frac{k_{eff}}{N}$$

wo $R = B \cdot y / (1 - B)$

Der Spitzigkeitskoeffizient p (siehe auch Abschnitt III.2.) charakterisiert die Spitzigkeit des Überlaufverkehrs. Er kann aus Diagramm 2 als Funktion der effektiven Erreichbarkeit k_{eff} und der Verlustwahrscheinlichkeit B entnommen werden.

Für hochwertige einstufige Koppelanordnungen mit unvollkommener Erreichbarkeit -d.h. für Mischungen mit Staffeln, Übergreifen und gutem Besetzttausgleich- liefert die Streuwertberechnung nach Gleichung (57) einen unteren Grenzwert. Mehrstufige Koppelanordnungen entsprechen in ihrem Verkehrsverhalten jedoch weniger hochwertigen Mischungen, bei denen der Verkehrsausgleich nicht immer optimal ist; Gleichung (57) erlaubt deshalb hier -wie in Abschnitt IV.3.3 anhand von Verkehrstests gezeigt wird- eine sehr genaue Bestimmung des tatsächlichen Streuwerts.

3.2. Gesamtüberlaufverkehr.

Werden r beliebige Überlaufverkehre ($R_i, D_i; i=I, II, \dots, r$) eines Richtungswählers einem gemeinsamen Überlaufbündel angeboten, so gilt für den Mittelwert dieses Gesamtüberlaufverkehrs immer

$$(58) \quad R_{Ges} = \sum_{i=I}^r R_i$$

d.h., die Mittelwerte werden linear addiert. Für die Berechnung des Gesamtstreuwerths muß jedoch berücksichtigt werden, daß die verschiedenen Richtungsverkehre korreliert sein können.

Eine Näherungsformel für den Zusammenhang zwischen Gesamtstreuwert D_{Ges} und Richtungsstreuwert D_i ergibt sich auf einfache Weise, wenn man die Richtungsstreuwerte in zwei Anteile aufspaltet: $D_{i,EIN}$ sei der Anteil, der durch Eingangsblockierung $[k_A]$ entsteht und $D_{i,AB}$ derjenige Teil, welcher durch Abnehmerblockierung $[k_i]$ hervorgerufen wird.

In den Zeitabschnitten mit Eingangsblockierung $[k_A]$ ist die mehrstufige Koppelanordnung für alle Richtungen gesperrt. Ein eintreffender Ruf beliebiger Richtung kann deshalb nicht das Abnehmerbündel in der betreffenden Richtung, sondern nur k_A von insgesamt $g_B \cdot i_B$ Zwischenleitungen zur B-Stufe (erfolglos) absuchen. Für den durch Eingangsblockierung hervorgerufenen Anteil des Gesamtüberlaufverkehrs gilt deshalb:

$$(59) \quad D_{Ges,EIN} = p \{[k_A], k_A\} \cdot R_{Ges,EIN} \cdot \frac{k_A}{g_B \cdot i_B}$$

wo $R_{Ges,EIN} = \sum_{i=I}^r R_{i,EIN}$

$$R_{i,EIN} = A_i \cdot [k_A] = \frac{y_i}{1 - B_i} \cdot [k_A]$$

Da die Streuwerte $D_{i,EIN}$ aller r Richtungen voll korreliert sind, gilt ferner /8/:

$$(59A) \quad D_{i,EIN} = \left(\frac{R_{i,EIN}}{R_{Ges,EIN}} \right)^2 \cdot D_{Ges,EIN}$$

Die durch Abnehmerblockierung entstehenden Anteile der Überlaufverkehre können in guter Näherung als statistisch unabhängig angenommen werden. Damit erhält man:

$$(60) \quad D_{Ges,AB} = \sum_{i=I}^r D_{i,AB}$$

wo $D_{i,AB} = D_i - D_{i,EIN}$

Für den Gesamtstreuwert des einem gemeinsamen Überlaufbündel angebotenen Verkehrs (R_{Ges}, D_{Ges}) ergibt sich deshalb mit den Gleichungen (59), (59A) und (60) die Beziehung:

$$(61) \quad D_{Ges} = \left(\frac{R_{Ges,EIN}}{R_{i,EIN}} \right)^2 \cdot D_{i,EIN} + \sum_{i=1}^r D_{i,AB}$$

Aus Gleichung (61) folgt weiter für Richtungswähler mit r gleichgroßen Abnehmerbündeln und gleichen Verkehrsangeboten je Richtung:

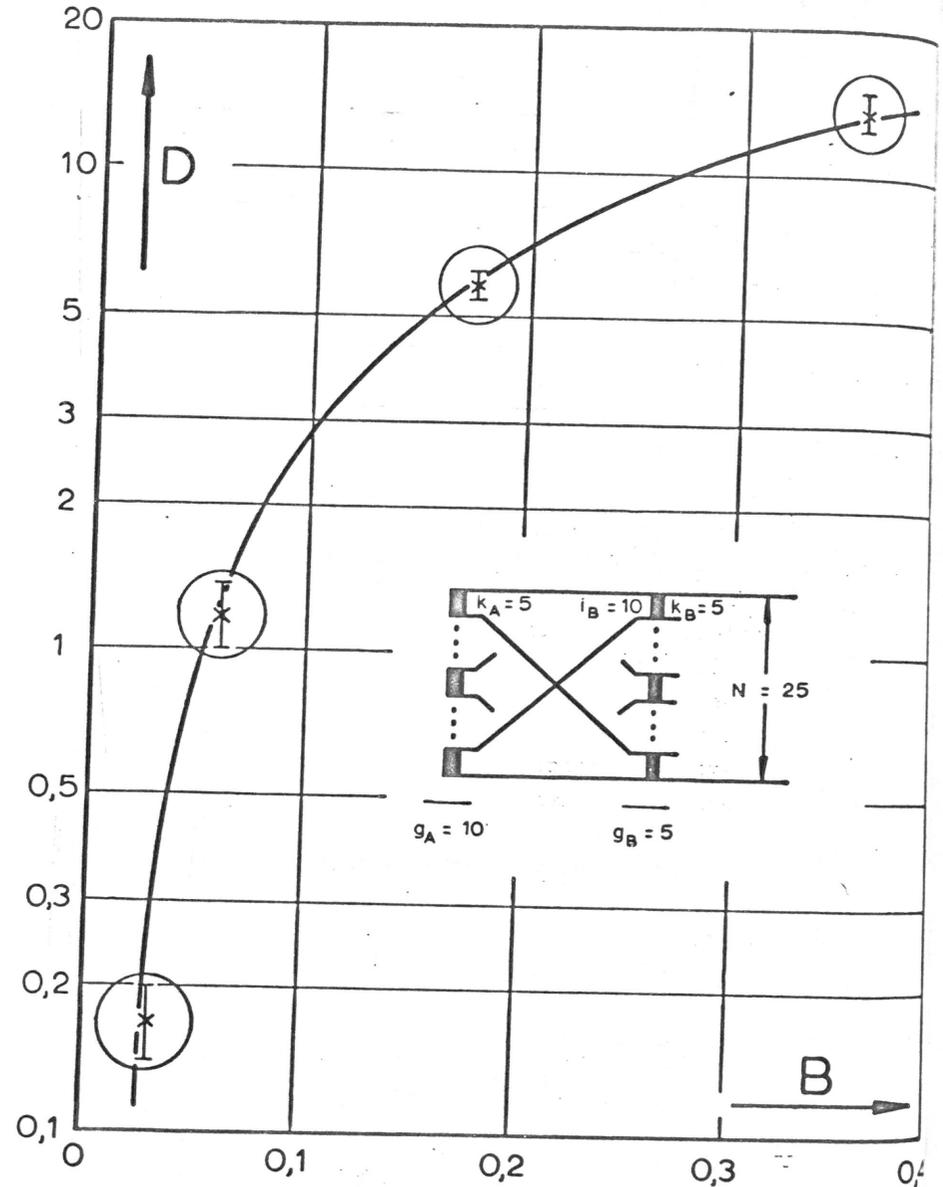
$$(62) \quad D_{Ges} = \tau^2 \cdot D_{i,EIN} + \tau \cdot D_{i,AB}$$

3.3. Vergleich mit Simulationsergebnissen.

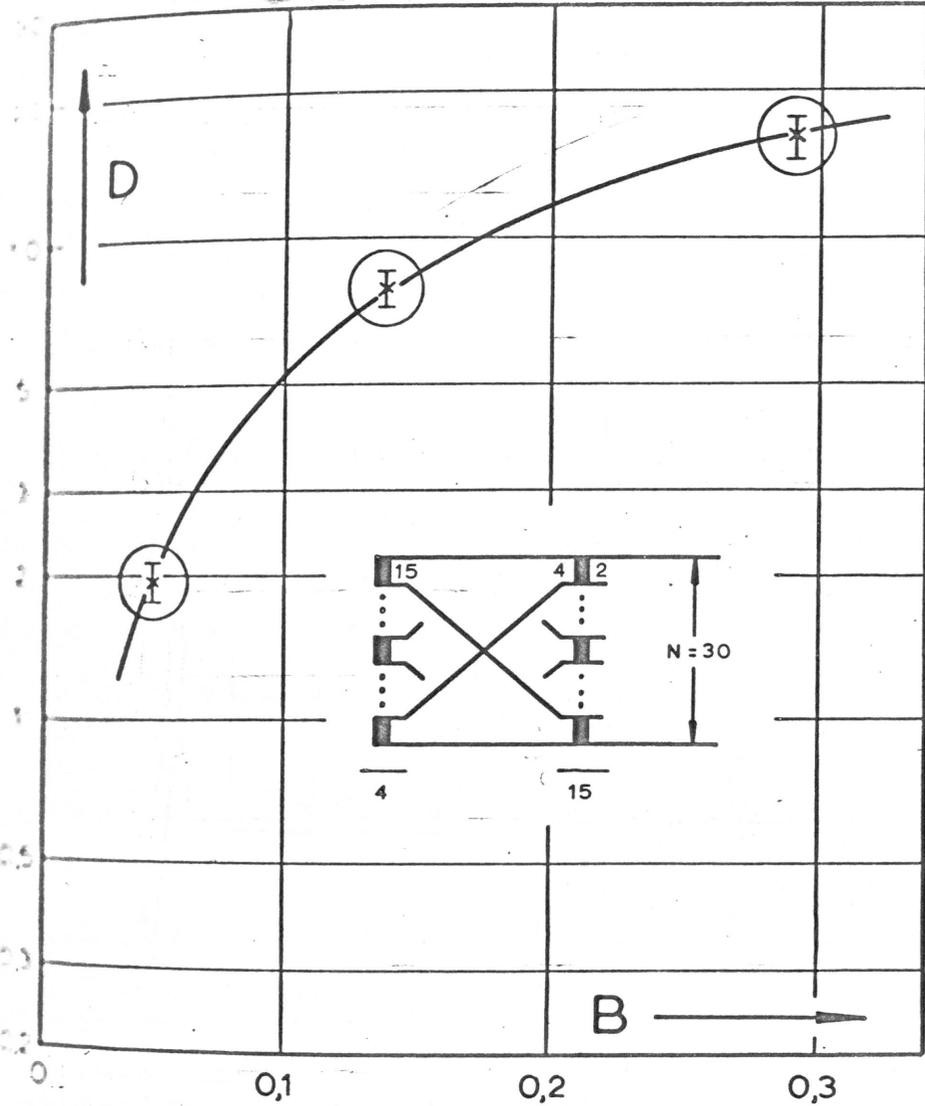
Für zwei- und vierstufige Linksyste mit Misch- bzw. Richtungswahl wurden auf dem Digitalrechner TR 4 zahlreiche Verkehrstests mit künstlich erzeugtem Fernspreverkehr durchgeführt. Verschiedenartigste Systemtypen wurden geprüft, d.h. Systeme mit Mischung der Link- oder Abnehmerleitungen, Systeme ohne Mischungen mit geordnet oder zyklisch aufgelegten Zwischenleitungen, ferner Systeme mit hoher Eingangs- oder hoher Abnehmerblockierung. In den Diagrammen 3 bis 12 sind sowohl die Simulationsergebnisse als auch die Rechenergebnisse eingetragen. In den Diagrammen 10, 11 und 12 werden neben dem Streuwert je Richtung auch die Werte für den Gesamtstreuwert angegeben.

Der Vergleich von Verkehrstest und Rechnung nach dem "erweiterten RDA-Verfahren" zeigt die Genauigkeit der neuen Berechnungsmethode.

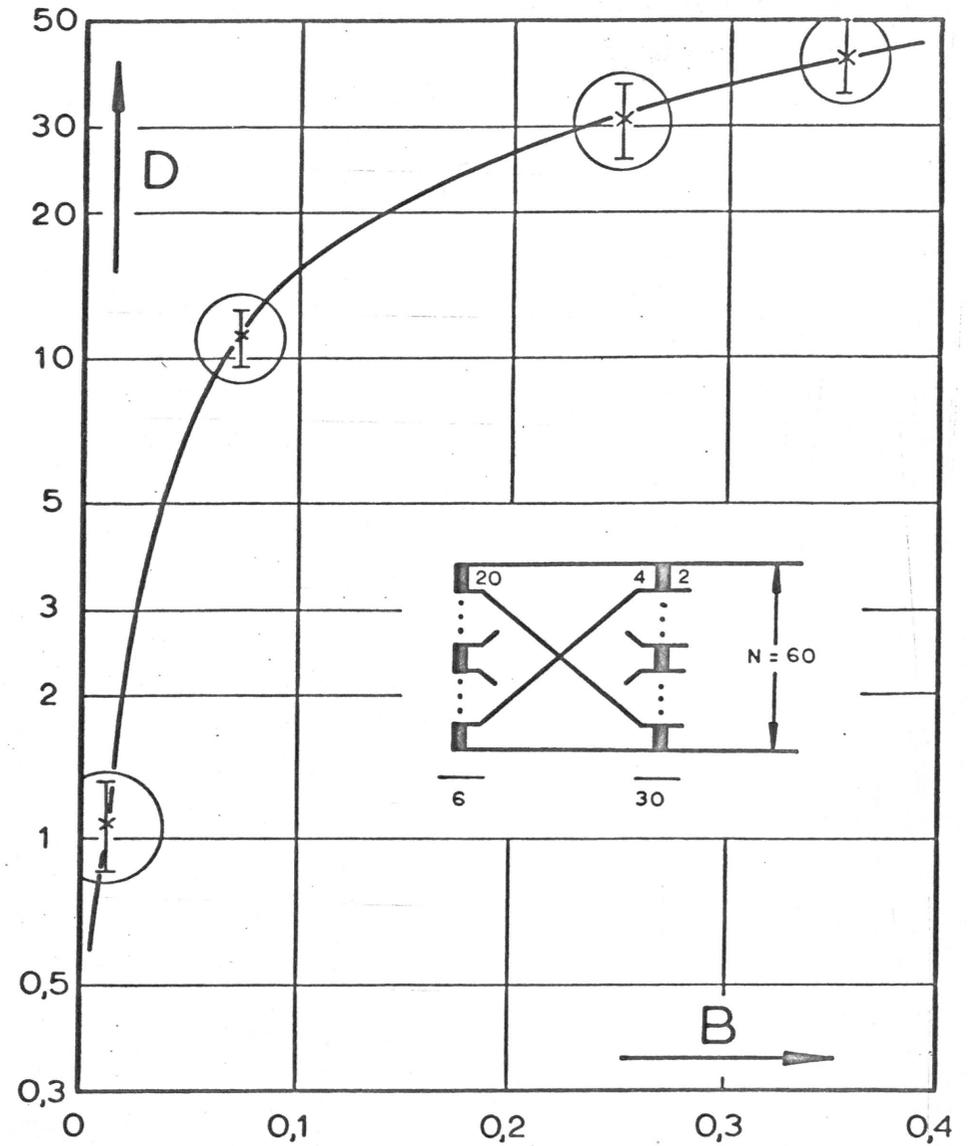
Die für die Verkehrstests benutzten Simulationsprogramme werden in /62,63/ beschrieben.



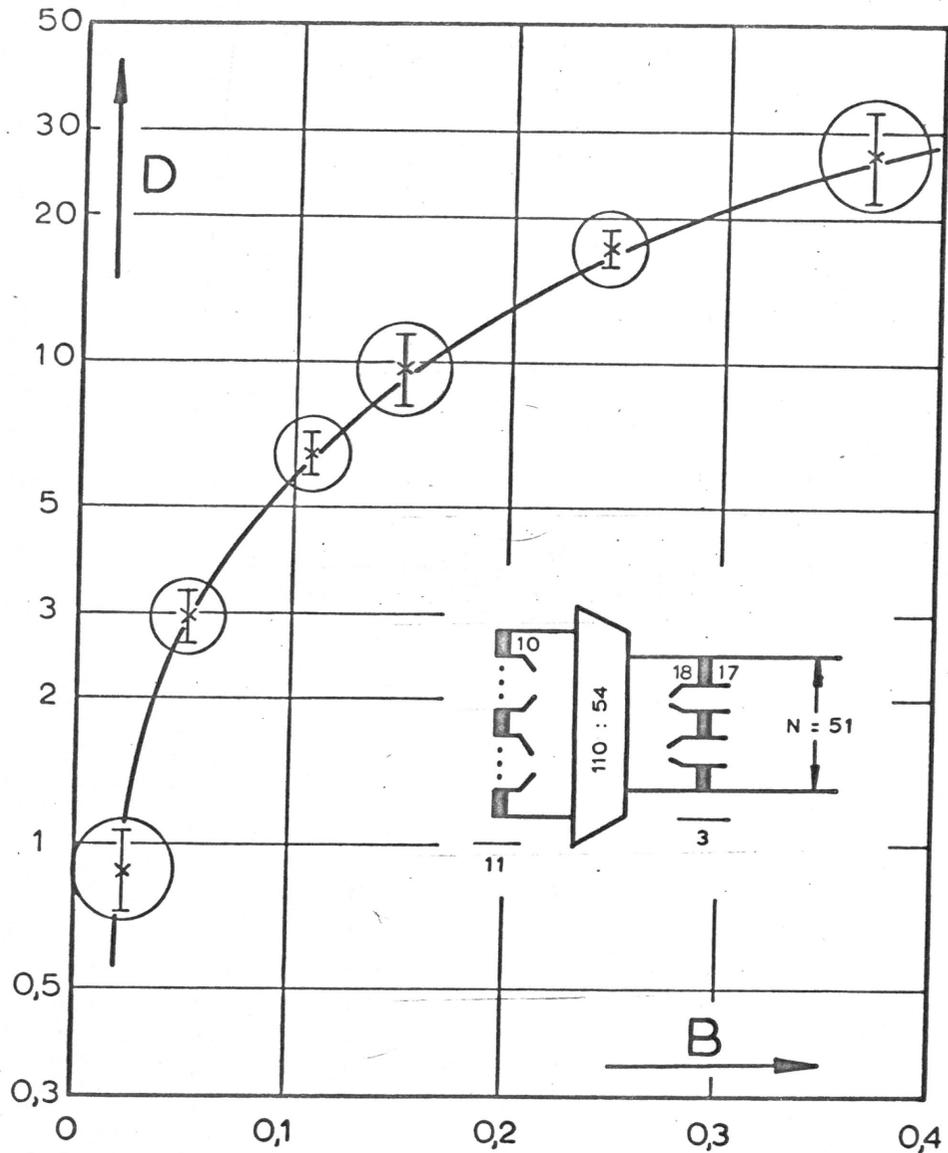
Diagr.3: Streuwert D für eine zweistufige Koppelanordnung mit Mischwahl (✓ Rechnung; \bar{x} Test mit Vertrauensintervall. Statistische Sicherheit $S = 95\%$ bei allen Simulationsergebnissen).



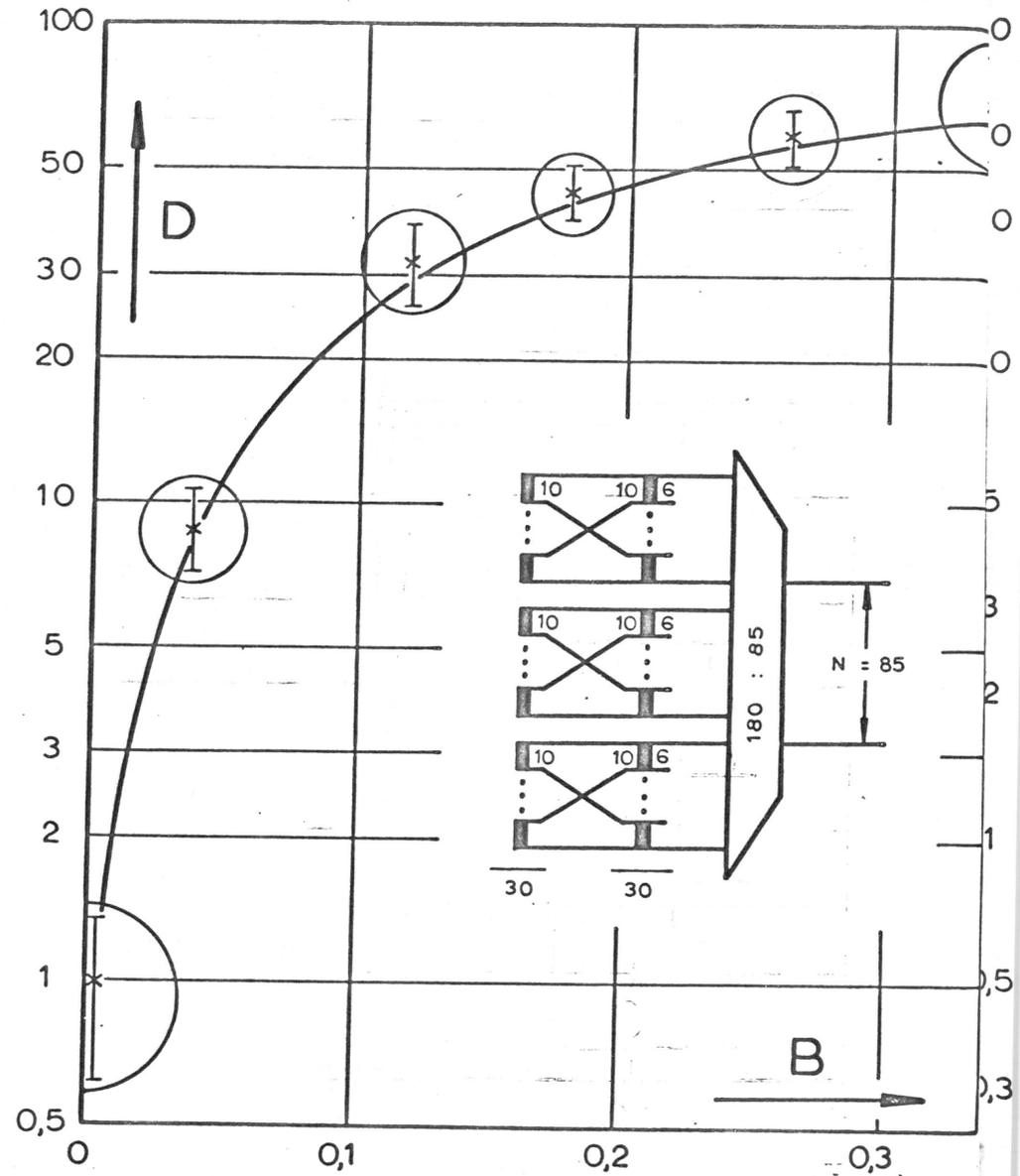
Diagr.4: Streuwert D für eine zweistufige Koppelanordnung mit Mischwahl (/ Rechnung; \bar{x} Test).



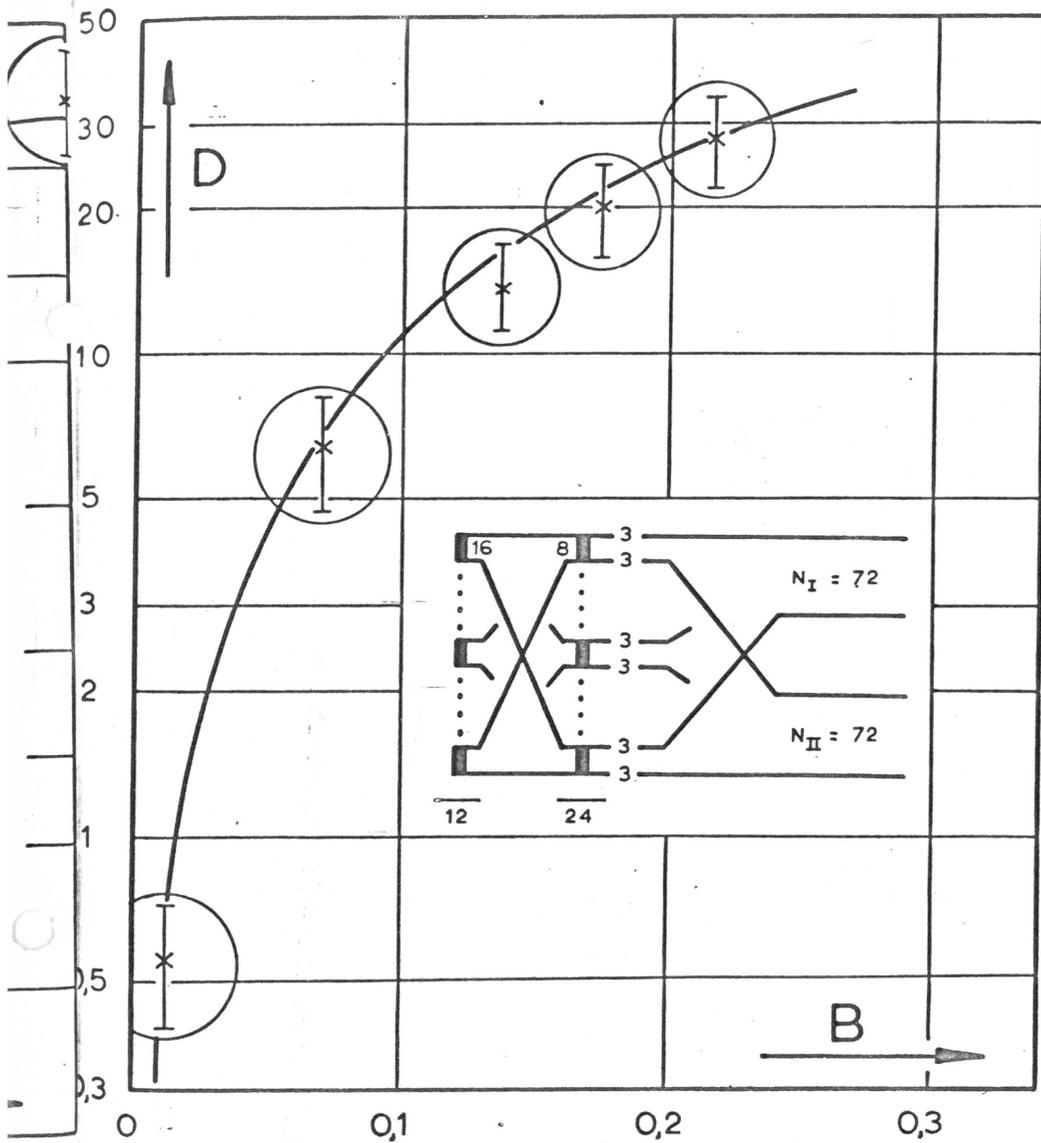
Diagr.5: Streuwert D für eine zweistufige Koppelanordnung mit Mischwahl (/ Rechnung; \bar{x} Test).



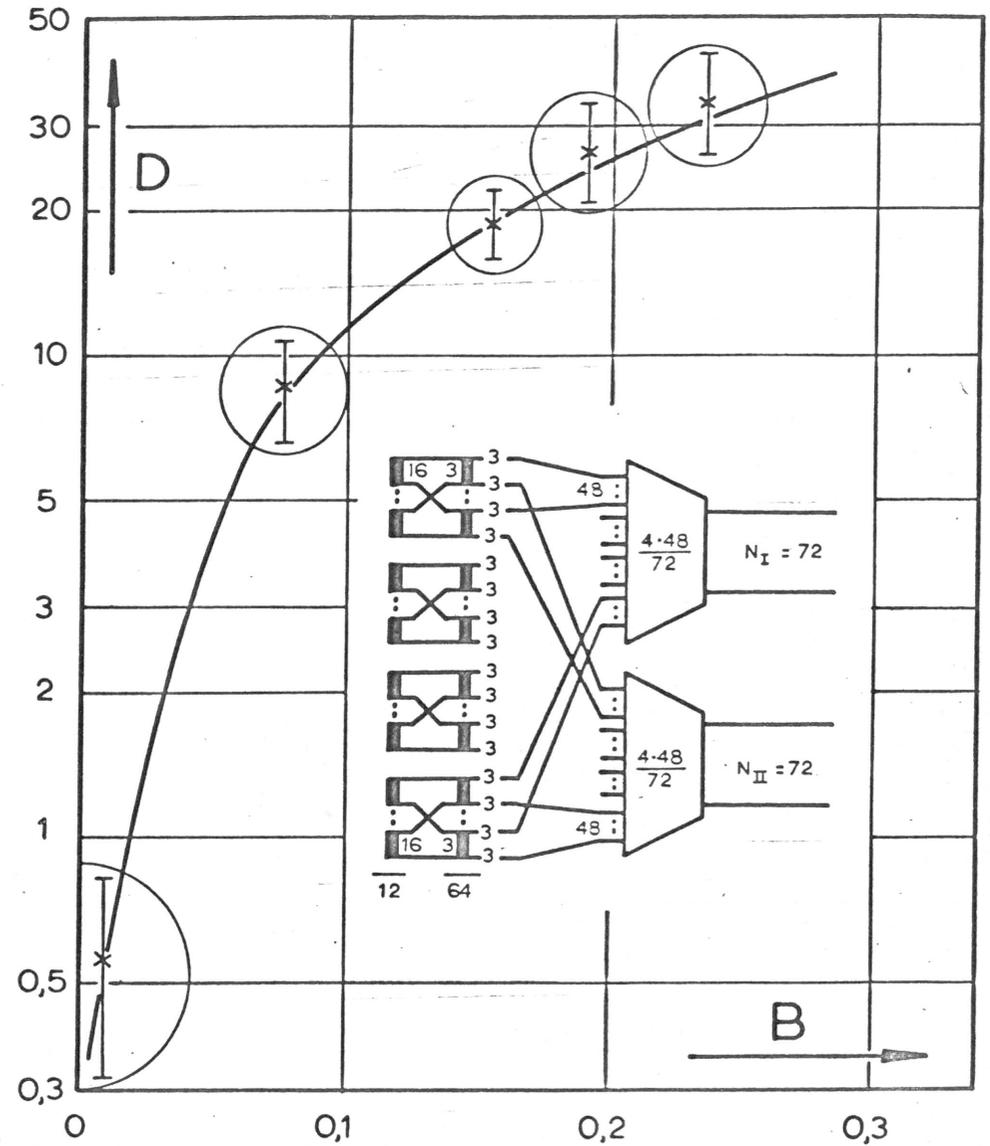
Diagr.6: Streuwert D für eine zweistufige Koppelanordnung mit Mischung zwischen A- und B-Stufe (— Rechnung; \bar{x} Test).



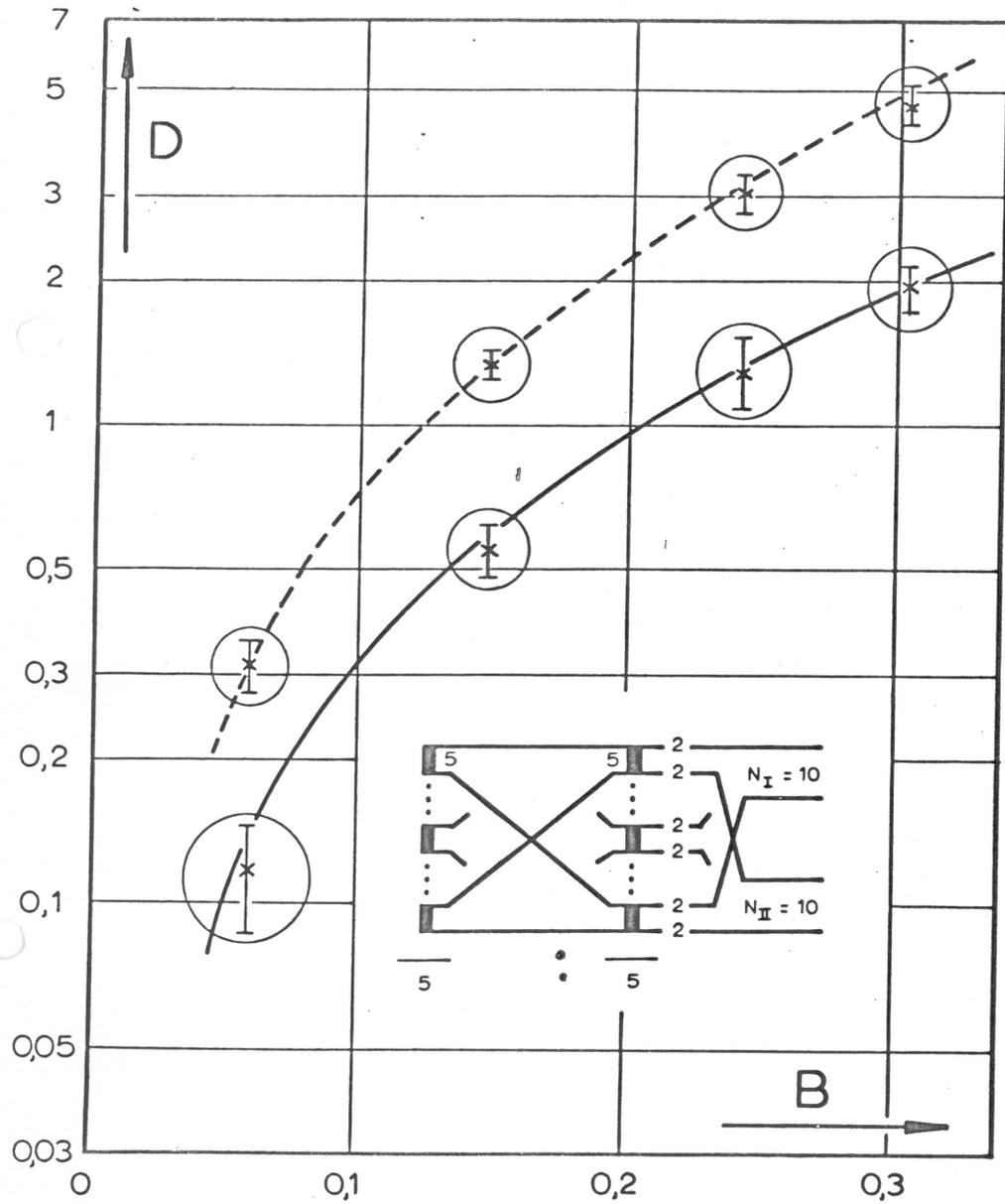
Diagr.7: Streuwert D für eine zweistufige Koppelanordnung mit gemischten Ausgängen hinter der B-Stufe (— Rechnung; \bar{x} Test).



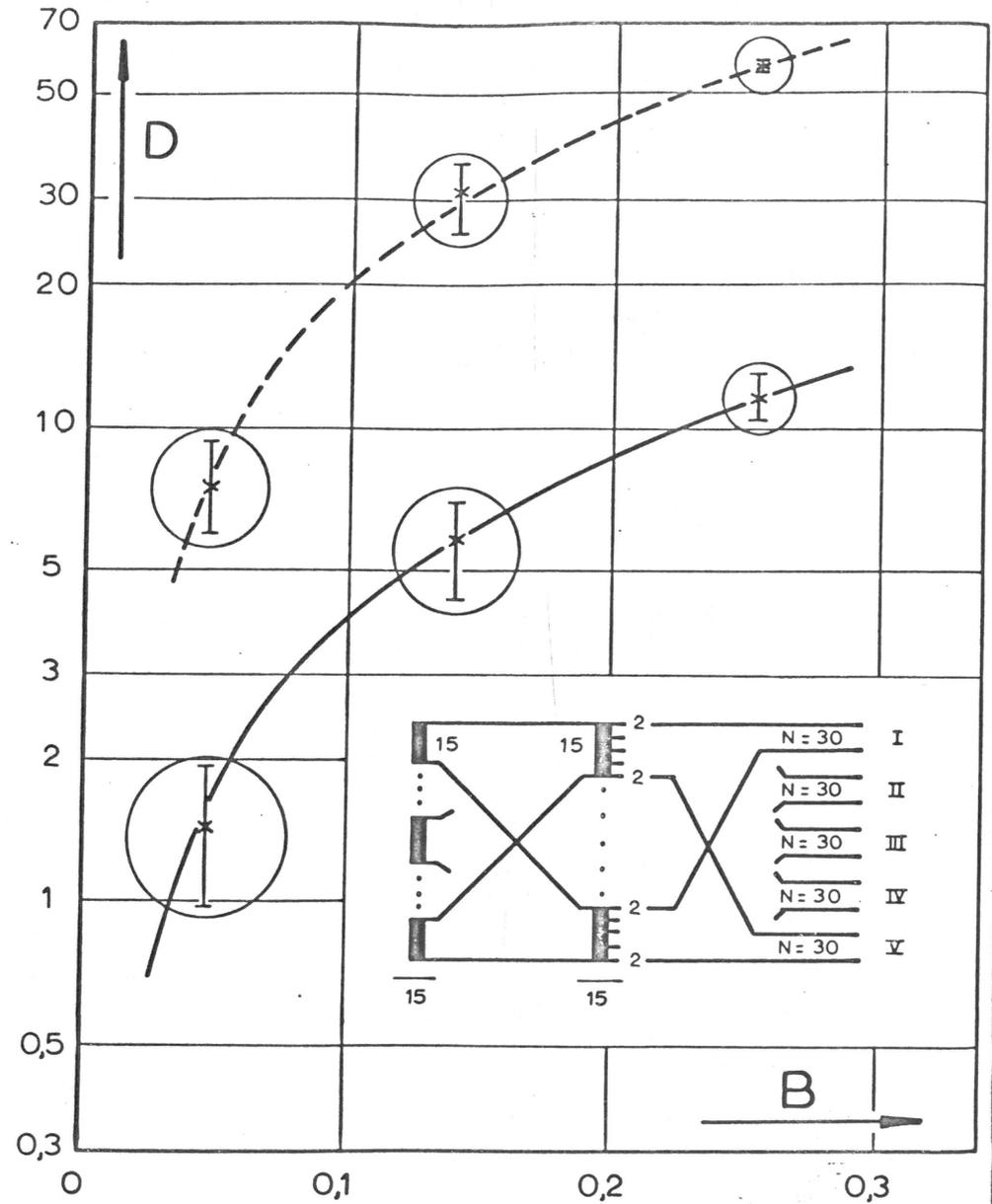
Diagr.8: Streuwert D für Richtung I einer zweistufigen Koppelanordnung mit Richtungswahl ohne Mischung hinter der letzten Stufe (✓ Rechnung; ⌘ Test).



Diagr.9: Streuwert D für Richtung I einer zweistufigen Koppelanordnung mit Richtungswahl und Mischung hinter der letzten Stufe (✓ Rechnung; ⌘ Test).



Diagr.10: Streuwert D für Richtung I (—) und Gesamtstreuwert (---) einer zweistufigen Koppelanordnung mit Richtungswahl (* Testergebnisse).



Diagr.11: Streuwert D für Richtung I (—) und Gesamtstreuwert (---) einer zweistufigen Koppelanordnung mit Richtungswahl (* Testergebnisse).

b) Der Mittelwert R wird nach folgender Beziehung bestimmt:

$$(68) \quad R = \gamma \cdot B / \{1 - B\}$$

c) Schließlich wird der gesuchte Streuwert des Überlaufverkehrs nach Gleichung (57) berechnet. Es gilt:

$$(69) \quad D = p\{B, k_{eff}\} \cdot R^2 \cdot k_{eff} / N$$

IV.4. Bemessung von Linksyste men, denen streuwertbehafteter Verkehr (R,D) angeboten wird.

Bei der Deutschen Bundespost werden häufig sogenannte teilweise (inhomogene) zweistufige Koppelanordnungen eingesetzt (vgl. Abb.10): Um eine gute Bündelausnutzung zu erhalten wird zunächst ein hochbelastetes Querwegbündel mit N_1 Abnehmerleitungen abgesucht. Erst bei Blockierung dieses direkten Weges wird das Letztwegbündel hinter einer zweistufigen Koppelanordnung auf "frei" oder "besetzt" geprüft.

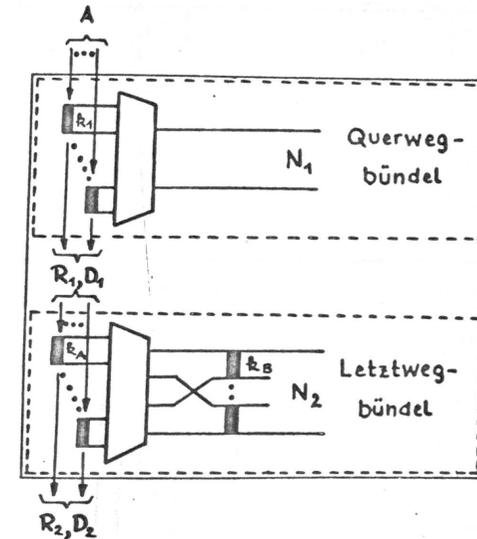


Abb.10: Schematische Darstellung einer teilweise (inhomogenen) zweistufigen Koppelanordnung.

Die Berechnung des Querwegbündels erfolgt nach dem bekannten Verfahren für unvollkommene Bündel mit Zufallsverkehr erster Art /26-28/. Der Streuwert D des Überlaufverkehrs wird mit dem in Abschnitt III.2. beschriebenen RDA-Verfahren für unvollkommene Bündel bestimmt.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß auch die zweistufige Koppelanordnung, welcher Überlaufverkehr angeboten wird, streuwertgerecht -d.h. mit Berücksichtigung der besonderen statistischen Eigenschaften des angebotenen Überlaufverkehrs- bemessen werden kann.

4.1. Bemessung der zweistufigen Koppelanordnung bei angebotenen Überlaufverkehr.

Bekannt seien die Daten (R_1, D_1) des angebotenen Überlaufverkehrs, die Erreichbarkeiten k_A und k_B sowie die Anzahl der Koppelvielfache g_A der A-Stufe des Linksystems (vgl. Abb. 10 und 11). Zu bestimmen ist die Anzahl N_2 der Abnehmerleitungen für eine vorgeschriebene Verlustwahrscheinlichkeit

$$(70) \quad B_2 = R_2 / R_1$$

Da die Belastung y_2 des betrachteten Sekundärbündels nach der Gleichung

$$(71) \quad y_2 = R_1 (1 - B_2)$$

festliegt, kann auch die mittlere Erreichbarkeit $\bar{k}/47/$ berechnet werden. Es gilt:

$$(72) \quad \bar{k} = (k_A - y_2/g_A) \cdot k_B + y_2/g_A$$

Für Linksysteme mit angebotenen Überlaufverkehr kann die effektive Erreichbarkeit in sehr guter Näherung durch die mittlere ersetzt werden, wenn die Eingangsblockierung $[k_A]$ gegenüber der Abnehmerblockierung $[\bar{k}]$ vernachlässigbar klein gehalten wird (siehe auch Anmerkung am Schluß dieses Abschnitts).

Damit sind aber wieder alle Voraussetzungen -D₁, R₁, k_{eff}- für die Anwendung des in Abschnitt III.3. beschriebenen RDA-Verfahrens gegeben. Die maschinelle bzw. manuelle Berechnung der erforderlichen Leitungszahl N₂ wird deshalb in folgenden Einzelschritten durchgeführt:

a) Bei vorgeschriebenem Verlust B₂ und Angebot R₁ wird

aus Gleichung (71) die Belastung y₂ und nach Gleichung (72) die mittlere Erreichbarkeit \bar{k} bestimmt.

b) Für das Wertepaar (B_2, \bar{k}) entnimmt man aus den C-Diagrammen in /30/ oder /31/ die Koeffizienten C₁ und C₂ (vgl. Gl. (42), S. 41). Für den erforderlichen Leitungsmehrbedarf -im Vergleich zu angebotenen Zufallsverkehr- ergibt sich deshalb

$$(73) \quad \Delta N_2 = \frac{D_1}{R_1} \cdot \{ C_1 (R_1 - 20) + C_2 \}$$

c) Den Leitungsbedarf N_{2,0} für angebotenen Zufallsverkehr (R₁, D₁=0) entnimmt man den Tabellen in /28/ bzw. /30/, als N_{2,0} = f(R₁, \bar{k} , B₂).

d) Die für den tatsächlich angebotenen Überlaufverkehr (R₁, D₁) erforderliche Anzahl von Abnehmerleitungen des Linksystems ist deshalb

(74)

$$N_2 = N_{2,0} + \Delta N_2$$

Die Bemessung von drei- und mehrstufigen Linksystemen für angebotenen Überlaufverkehr (R, D) erfolgt völlig analog. Zur Berechnung der mittleren Erreichbarkeit sind die Formeln in /47/ angegeben.

Anmerkung:

Es ist zweckmäßig, bei Linksystemen mit angebotenen Überlaufverkehr und ($i_A > k_A$) die Erreichbarkeit k_A der A-Stufe groß zu wählen. Wird dies nicht berücksichtigt, so sinkt infolge der hohen Eingangsblockierung $[k_A]$ die Erreichbarkeit sowie die Bündelausnutzung (vgl. auch /32/ für unvollkommene Bündel).

4.2. Anwendungsbeispiel und Vergleich mit Simulationsergebnissen.

Einer zweistufigen Koppelanordnung für Mischwahl werde ein Überlaufverkehr (R_1, D_1) angeboten. Gesucht sei die Anzahl der notwendigen Abnehmerleitungen N_2 und die Anzahl der Koppelvielfache g_B der B-Stufe bei vorgeschriebener Verlustwahrscheinlichkeit B_2 (vgl. Abb.11).

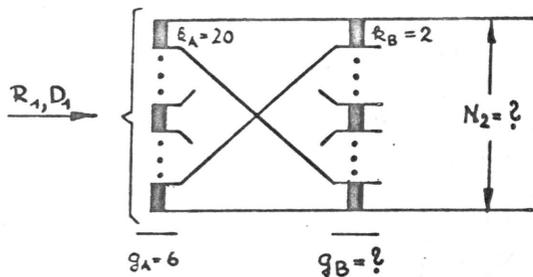


Abb.11: Zweistufige Koppelanordnung mit angebotenem Überlaufverkehr (R_1, D_1).

Vorgegeben: $R_1 = 29,8$ Erl.; $D_1 = 29,4$; $B_2 = 4,35\%$;
 $k_A = 20$; $k_B = 2$; $g_A = 6$;

Berechnung:

a) Belastung: $y_2 = R_1(1-B_2) = 28,5$ Erlang

b) Mittlere Erreichbarkeit:

$$\bar{k} = (k_A - y_2/g_A) \cdot k_B + y_2/g_A = 35,25$$

c) Abnehmerleitungszahl:

Aus den C-Diagrammen in /30/ oder /31/ entnimmt man für das Wertepaar ($\bar{k} = 35,25$; $B_2 = 4,35\%$) die Koeffizienten:

$$C_1 = 0,043 \quad C_2 = 4,15$$

Leitungsmehrbedarf:

$$\Delta N_2 = D_1/R_1 \{ C_1(R_1 - 20) + C_2 \} \approx 4,5$$

Die für angebotenen Zufallsverkehr benötigte Leitungszahl wäre nach /28/ bzw. /30/:

$$N_{2,0} = f(A=R_1; k=\bar{k}; B=B_2) = f(29,8; 35,25; 4,35) \approx 35,7$$

Damit ist die tatsächlich benötigte Leitungszahl

$$N_2 = N_{2,0} + \Delta N_2 = 40,2 \rightsquigarrow 40 \text{ Leitungen}$$

d) Anzahl der Koppelvielfache in der B-Stufe.

$$g_B = N_2/k_B = 20 \text{ Koppelvielfache}$$

Anmerkung:

In den meisten Fällen wird das Verhältnis N_2/k_B nicht ganzzahlig werden. Durch Runden der Anzahl g_B der Koppelvielfache verschiebt sich jedoch k_B nur unwesentlich. Eine Nachrechnung der mittleren Erreichbarkeit \bar{k} wird deshalb im allgemeinen nicht erforderlich sein.

Vergleich mit Verkehrstest:

Die oben berechnete Koppelanordnung wurde auf einem Digitalrechner mit künstlich erzeugtem Fernsprechverkehr geprüft. Dabei ergab sich bei einem angebotenen Streuwertverkehr ($R=29,8$; $D=29,4$) und $N_2=40$ Abnehmerleitungen die Verlustwahrscheinlichkeit

$$B_2 = 0,0435 \pm 0,0055.$$

IV.5. Berechnung von Linksystemen mit Richtungswahl und systeminternem Überlauf.

In den modernsten Fernsprechvermittlungsanlagen werden mehrstufige Richtungswähler mit systeminternem Überlauf verwendet. Abb. 12 zeigt den prinzipiellen Aufbau und die Wirkungsweise einer derartigen Wahlstufe:

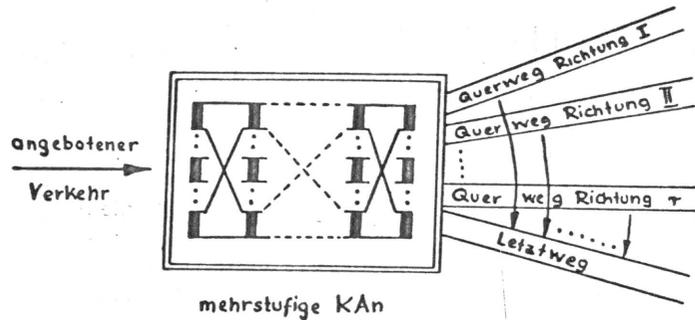


Abb. 12: Schematische Darstellung einer mehrstufigen Kopplanordnung mit Richtungswahl und systeminternem Überlauf.

Zunächst wird ein freier Weg zum Querleitungsbündel der gewünschten Richtung gesucht. Ist dieser direkte Weg blockiert, wird der Verkehr auf den systeminternen Letztweg (evtl. zuvor auf einen zweiten oder dritten Querweg) umgesteuert. Dieser dem Letztweg (oder zweiten bzw. dritten Querweg) angebotene Verkehr hat wieder Überlaufcharakter. Sollen Fehlplanungen vermieden werden, so ist auch hier wieder die Berücksichtigung des Streuwerts notwendig.

Vorgeschrieben sind je Querleitungsbündel (i) die gewünschte Belastung $y_i(QW)$ sowie die zulässige Überlaufwahrscheinlichkeit $B_i(QW)$ und für den Letztweg die Verlustwahrscheinlichkeit $B(LW)$. Zu berechnen sind die erforderlichen Abnehmerleitungen für Quer- und Letztwegbündel.

5.1. Die Berechnung der Querwegbündel und der Überlaufverkehrsdaten (R_i, D_i) je Richtung i.

Die Bemessung der Querwegbündel wird nach dem in /47,48/ veröffentlichten "Verfahren der kombinierten Eingangs- und Abnehmerblockierung" von A. Lotze durchgeführt. Die Berechnung der Streuwerte je Richtung erfolgt analog zu Abschnitt IV.3.

5.2. Berechnung des Gesamtüberlaufverkehrs.

Für den dem Kennzahlwegbündel angebotenen Gesamtverkehr (R_{Ges}, D_{Ges}) gelten die bereits in Abschnitt 3.2. abgeleiteten Formeln (58) und (61).

Da bei Richtungswählern im allgemeinen bereits die Eingangsleitungen hochbelastet sind, ist eine Konzentration des Verkehrs in der A-Stufe ($i_A > k_A$) nicht mehr erforderlich. Für $i_A < k_A$ verschwindet die Eingangsblockierung ($[k_A]=0$). Für den Gesamtstreuwert des Überlaufverkehrs gilt deshalb mit den Gleichungen (59) bis (61):

(75)

$$D_{Ges} = \sum_{i=1}^r D_i$$

und bei gleicher Verkehrsaufteilung nach Gleichung (62)

(76)

$$D_{Ges} = r \cdot D_i$$

5.3. Berechnung des Kennzahlwegbündels.

Nachdem gemäß Abschnitt 5.2. Mittelwert und Streuwert des Gesamtüberlaufverkehrs (R_{Ges}, D_{Ges}) bekannt sind,

erfolgt die Berechnung des Kennzahlwegbündels analog zu Abschnitt IV.4.

Anmerkung:

Das Verfahren eignet sich nicht nur für den hier beschriebenen Fall eines gemeinsamen Letztweges aller Querleitungsbündel, vielmehr können für bestimmte Richtungen verschiedene Letztwege vorgesehen werden. Weiter kann der Überlaufverkehr eines ersten Querwegbündels zunächst einem zweiten und dritten Querwegbündel angeboten werden. Erst bei Elockierung all dieser vorgeordneten Bündel wird der Verkehr dem Letztweg zugeführt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde jedoch auf eine allgemeine, diese Sonderfälle einschließende Darstellung verzichtet.

5.4. Berechnungsbeispiele und Vergleich mit Simulationsergebnissen.

5.4.1. Zweistufiges Linksystem mit einem Querleitungsbündel und Kennzahlweg.

Vorgegeben ist die Struktur des Linksystems, die Belastung $y(QW)$ und die Überlaufwahrscheinlichkeit $B(QW)$ des Querwegbündels sowie die Verlustwahrscheinlichkeit $B(LW)$ des Kennzahlwegbündels (Letztweg):

$$k_A = 15 \quad \bar{\epsilon}_A = 15 \quad k_B(QW) = 4 \quad k_B(LW) = 2$$

$$y(QW) = 56 \text{ Erlang}; B(QW) = 0,19; B(LW) = 0,02$$

Berechnet wird die Anzahl der notwendigen Abnehmerleitungen für das Querweg- und Letztwegbündel.

a) Mittelwert des Überlaufverkehrs:

$$R(QW) = y(QW) \cdot B(QW) / \{1 - B(QW)\} \approx 13,1 \text{ Erlang}$$

b) Belastung des Letztweges:

$$y(LW) = R(QW) \cdot \{1 - B(LW)\} \approx 12,9 \text{ Erlang}$$

c) Gesamtbelastung:

$$y = y(QW) + y(LW) = 68,9 \text{ Erlang}$$

d) Mittlere Erreichbarkeit des Querwegbündels:

$$\bar{k}(QW) = (k_A - y/g_A) \cdot k_B(QW) + y(QW)/g_A \approx 45,3$$

e) Mittlere Erreichbarkeit des Letztwegbündels:

$$\bar{k}(LW) = (k_A - y/g_A) \cdot k_B(LW) + y(LW)/g_A \approx 21,7$$

f) Berechnung des Querwegbündels /47/:

$$N(QW) = f\{B(QW), \bar{k}(QW), y(QW)\} \approx 60,3 \rightsquigarrow 60 \text{ Leitungen}$$

g) Streuwert des Überlaufverkehrs:

$$D(QW) = p \cdot R(QW)^2 \cdot \bar{k}(QW) / N(QW) \approx 29,9 \text{ mit } p=0,23$$

h) Berechnung des Letztwegbündels:

Für das Wertepaar $k(LW)$ und $B(LW)$ entnimmt man aus den C-Diagrammen in /30/ oder /31/:

$$C_1 = 0,055 \text{ und } C_2 = 5,15$$

Leitungsmehrbedarf:

$$\Delta N(LW) = D(QW) / R(QW) \{C_1 \cdot (R(QW) - 20) + C_2\} \approx 10,9 \text{ Leitungen}$$

Die für angebotenen Zufallsverkehr benötigte Leitungszahl wäre nach /28/ bzw. /30/:

$$N_0(LW) = f\{B(LW), \bar{k}(LW), R(QW)\} \approx 19,5 \text{ Leitungen}$$

Damit

$$N(LW) = \Delta N(LW) + N_0(LW) = 30,4 \rightsquigarrow 30 \text{ Leitungen}$$

Vergleich mit Simulationsergebnissen:

Das obenberechnete zweistufige Linksystem mit systeminternem Überlauf wurde auf einem Digitalrechner mit künstlich erzeugtem Fernspreverkehr geprüft. Simulationsergebnisse:

$$y(QW) = 56,180 \pm 0,009 \text{ Erlang}$$

$$B(QW) = 0,1929 \pm 0,0062$$

$$y(LW) = 13,164 \pm 0,403 \text{ Erlang}$$

$$B(LW) = 0,0208 \pm 0,0058$$

5.4.2. Vierstufiges Linksystem mit vier Querleitungs-
bündeln und gemeinsamem Letztwegbündel.

Vorgegeben ist die Struktur des Linksystems, die
Belastung $y_i(QW)$ und die Überlaufwahrscheinlichkeit
 $B_i(QW)$ für jedes Querwegbündel ($i = I, II, III, IV$) sowie
der Verlust $B(LW)$ für das Letztwegbündel:

$$k_A = 5 \quad k_B = 4 \quad k_C = 7 \quad k_{D1}(QW) = 1$$

$$g_A = 80 \quad g_B = 40 \quad g_C = 16 \quad k_D(LW) = 2$$

$$y_i(QW) = 12 \text{ Erlang}; \quad B_i(QW) = 0,255; \quad B(LW) = 0,03$$

Die Berechnung nach dem in Abschnitt 5.1. bis 5.3. be-
schriebenen Verfahren ergibt folgende Leitungszahlen:

$$n_i(QW) = 14 \quad i = I, II, III, IV$$

$$n(LW) = 28$$

Simulationsergebnisse:

Verkehrsbelastung und Überlaufwahrscheinlichkeit
der Querwegbündel:

$$y_I(QW) = 12,02 \text{ Erlang} \quad B_I(QW) = 0,261 \pm 0,010$$

$$y_{II}(QW) = 11,98 \text{ Erlang} \quad B_{II}(QW) = 0,258 \pm 0,009$$

$$y_{III}(QW) = 11,91 \text{ Erlang} \quad B_{III}(QW) = 0,251 \pm 0,009$$

$$y_{IV}(QW) = 11,92 \text{ Erlang} \quad B_{IV}(QW) = 0,257 \pm 0,011$$

Verkehrsbelastung und Verlustwahrscheinlichkeit des
gemeinsamen Letztwegbündels:

$$y(LW) = 15,93 \text{ Erlang} \quad B(LW) = 0,0293 \pm 0,005$$

V. SONDERFÄLLE

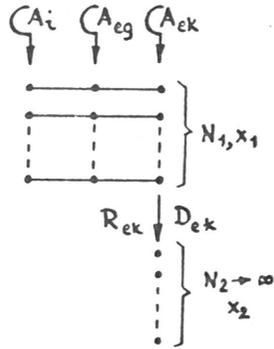
V.1. Die Berechnung der Momente des Überlaufverkehrs bei
Koppelanordnungen mit gemischtem Extern- und Intern-
verkehr.

Es ist möglich, nach dem in Abschnitt II.1. beschrie-
benen Lösungsweg auch den Überlaufverkehr von Koppelanord-
nungen zu berechnen, welchen Extern- und Internverkehr an-
geboten wird ("Vorfeldeinrichtungen"). Aus wirtschaftlichen
Gründen kommen derartige Überlauf-Vorfeldeinrichtungen bei
der heutigen Vermittlungstechnik nicht in Frage; bei voll-
elektronischen Vermittlungssystemen sind jedoch Vorfeldein-
richtungen mit Überlaufmöglichkeit für den Externverkehr
denkbar. Eine derartige Koppelanordnung würde folgende
Vorteile bieten:

- a) Hohe Bündelausnutzung des mit gemischtem Extern-Intern-
verkehr betriebenen Primärbündels.
- b) Niedrige Verlustwahrscheinlichkeit für den Externver-
kehr.

Hochbelastete Leitungsbündel sind sehr wirtschaftlich;
eine geringe Verlustwahrscheinlichkeit ist besonders bei
"Externverkehr kommend" wünschenswert. Im folgenden wird
deshalb der Streuwert des "Externverkehrs kommend" für
ein Primärbündel mit vollkommener Erreichbarkeit berechnet.
Daran anschließend wird noch die Streuwertformel für den
Überlaufverkehr angegeben, wenn sowohl der Externverkehr
"kommend" als auch "gehend" auf das Sekundärbündel über-
läuft. Für unvollkommene Bündel ist eine Berechnung analog
zu Abschnitt III.1. möglich.

1.1. Anordnung und Zustandswahrscheinlichkeiten im Primärbündel.



Internverkehr A_i , Externverkehr "kommend" A_{ek} und Externverkehr "gehend" A_{eg} suchen gemeinsam das vollkommen erreichbare Primärbündel ab. Bei Blockierung des Primärbündels wird der Externverkehr "kommend" dem unendlich großen Überlaufbündel angeboten.

Die Zustandswahrscheinlichkeit $p(x_1)$ der gleichzeitig belegten Leitungen im Primärbündel wurde bereits in mehreren Arbeiten untersucht. Es gilt nach /51/, /52/ und /53/:

Abb.13: Überlaufanordnung zur Streuwertberechnung.

$$(77) \quad p(x_1) = \frac{\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{x_1}{2} \rfloor} \frac{A_i^r \cdot A_e^{x_1-2r}}{r! (x_1-2r)!}}{\sum_{x_1=0}^{N_1} \sum_{r=0}^{\lfloor \frac{x_1}{2} \rfloor} \frac{A_i^r \cdot A_e^{x_1-2r}}{r! (x_1-2r)!}}$$

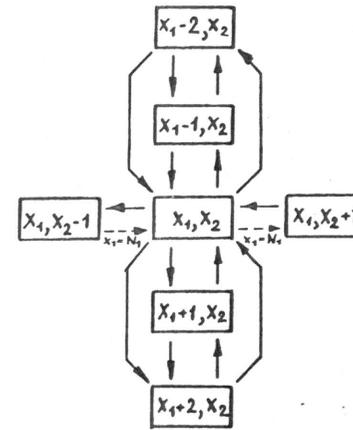
wo

$$(78) \quad A_e = A_{eg} + A_{ek}$$

Für die Aufteilungswahrscheinlichkeit $f(x_1+2)$, d.h. für den Anteil der Internbelegungen im Zustand " x_1+2 Belegungen im Primärbündel" ergibt sich:

$$(79) \quad f(x_1+2) = \frac{2A_i}{x_1+2} \cdot \frac{p(x_1)}{p(x_1+2)}$$

1.2. Zustandsschema und statistisches Gleichgewicht.



In Abbildung 14 ist das Zustandsschema für einen beliebigen Belegungszustand (x_1, x_2) mit $x_1 < N_1$ dargestellt. Für $x_1 = N_1$ fallen die beiden Belegungszustände (N_1+1, x_2) und (N_1+2, x_2) weg, dafür ist jedoch der Einfall von Belegungen in das Sekundärbündel möglich (gestrichelte Pfeile).

Völlig analog zu Abschnitt II.1. ergibt sich folgende Gleichgewichtsbedingung für die Belegungswahrscheinlichkeiten:

Abb.14: Zustandsschema.

$x_1 < N_1$:

$$(80) \quad \left. \begin{aligned} & A_i \cdot p(x_1-2, x_2) + \\ & + A_e \cdot p(x_1-1, x_2) + \\ & + (x_2+1) \cdot p(x_1, x_2+1) + \\ & + (x_1+1) \{1-f(x_1+1)\} \cdot p(x_1+1, x_2) + \\ & + \frac{1}{2}(x_1+2) \cdot f(x_1+2) \cdot p(x_1+2, x_2) \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} & A_i + \\ & + A_e + \\ & + x_2 + \\ & + \frac{1}{2} \cdot x_1 \cdot f(x_1) + \\ & + x_1 \{1-f(x_1)\} \end{aligned} \right\} \cdot p(x_1, x_2)$$

$x_1 = N_1$:

$$(81) \quad \left. \begin{aligned} & A_i \cdot p(N_1-2, x_2) + \\ & + A_e \cdot p(N_1-1, x_2) + \\ & + (x_2+1) \cdot p(N_1, x_2+1) + \\ & + A_{ek} \cdot p(N_1, x_2-1) \end{aligned} \right\} = \left. \begin{aligned} & x_2 + \\ & + \frac{1}{2} \cdot N_1 \cdot f(N_1) + \\ & + N_1 \{1-f(N_1)\} + \\ & + A_{ek} \end{aligned} \right\} \cdot p(N_1, x_2)$$

Da sowohl der Extern- als auch der Internverkehr stationär ist, kann man die Gleichungen (80) und (81) aufspalten. Es gilt für den Externverkehr:

$$x_1 < N_1:$$

$$(80 A) \quad \left. \begin{aligned} & A_e \cdot p(x_1-1, x_2) + \\ & + (x_2+1) \cdot p(x_1, x_2+1) + \\ & + (x_1+1) \cdot (1-f(x_1+1)) \cdot p(x_1+1, x_2) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} & A_e + \\ & + x_2 + \\ & + x_1(1-f(x_1)) \end{aligned} \right\} \cdot p(x_1, x_2)$$

$$x_1 = N_1:$$

$$(81 A) \quad \left. \begin{aligned} & A_e \cdot p(N_1-1, x_2) + \\ & + (x_2+1) \cdot p(N_1, x_2+1) + \\ & + A_{ek} \cdot p(N_1, x_2-1) \end{aligned} \right\} = \left\{ \begin{aligned} & x_2 + \\ & + N_1(1-f(N_1)) + \\ & + A_{ek} \end{aligned} \right\} \cdot p(N_1, x_2)$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen genügen bereits zur Berechnung der Momente im Überlaufbündel, da die Aufteilungswahrscheinlichkeit $f(x_1)$ nach Gleichung (79) festliegt.

Erweitert man die Gleichungen (80 A) und (81 A) mit dem Faktor $(1+t)^{x_2}$ und summiert über alle möglichen Zustände x_2 auf, so erhält man durch Einführen der erzeugenden Funktion völlig analog zu Abschnitt II.1. folgende Gleichungen für die bedingten faktoriellen Momente:

$$(82) \quad -A_e \cdot M_r(x_2/x_1-1) + \\ + \{A_e + x_1(1-f(x_1)) + r\} \cdot M_r(x_2/x_1) - \\ - (x_1+1) \cdot (1-f(x_1+1)) \cdot M_r(x_2/x_1+1) = 0$$

$$(83) \quad -A_e \cdot M_r(x_2/N_1-1) + \\ + N_1(1-f(N_1)) \cdot M_r(x_2/N_1) + \\ + r \cdot M_r(x_2/N_1) = r \cdot A_{ek} \cdot M_{r-1}(x_2/N_1)$$

(für $r = 0$ ist $M_{-1}(x_2/N_1) = 0$)!

Summiert man Gleichung (82) über alle möglichen Zustände ($0 = x_1 < N_1$) auf und addiert Gleichung (83) hinzu, so erhält man eine Beziehung zwischen Momenten r -ter und $(r-1)$ -ter Ordnung. Es gilt:

$$r \cdot \sum_{x_1=0}^{N_1} M_r(x_2/x_1) = r \cdot A_{ek} \cdot M_{r-1}(x_2/N_1)$$

$$(84) \quad M_r(x_2) = A_{ek} \cdot M_{r-1}(x_2/N_1)$$

und speziell für das gesuchte zweite faktorielle Moment:

$$(85) \quad M_2(x_2) = A_{ek} \cdot M_1(x_2/N_1)$$

Die Auflösung der Rekursionsformel (82) liefert folgende Bestimmungsgleichung für die bedingten faktoriellen Momente:

$$(86) \quad M_r(x_2/x_1) = M_r(x_2) \cdot \frac{\prod_{\xi=0}^{x_1-1} \frac{K_\xi}{(\xi+1)(1-f(\xi+1))}}{1 + \sum_{x_1=1}^{N_1} \prod_{\xi=0}^{x_1-1} \frac{K_\xi}{(\xi+1)(1-f(\xi+1))}}$$

$$\text{wo} \quad K_\xi = A_e + r + \xi(1-f(\xi)) - \frac{\xi(1-f(\xi)) \cdot A_e}{K_{\xi-1}}$$

$$K_0 = A_e + r$$

Durch Einsetzen von Gleichung (86) für $r = 1$ ($M_1(x_2) = R_{1k}$) in Gleichung (85) ergibt sich schließlich das zweite faktorielle Moment zu:

$$(87) \quad M_2(x_2) = A_{ek} \cdot R_{ek} \cdot \frac{\prod_{\xi=0}^{N_1-1} \frac{K_\xi}{(\xi+1)(1-f(\xi+1))}}{1 + \sum_{x_1=1}^{N_1} \prod_{\xi=0}^{x_1-1} \frac{K_\xi}{(\xi+1)(1-f(\xi+1))}}$$

Für den Streuwert des Überlaufverkehrs gilt:

$$D_{ek} = M_2(x_2) - R_{ek}^2$$

und mit Gleichung (87):

$$(88) \quad D_{ek} = R_{ek}^2 \cdot \left\{ \frac{\prod_{\xi=0}^{N_1-1} \frac{K_\xi}{(\xi+1)(1-f(\xi+1))}}{p(N_1) \cdot \left[1 + \sum_{x_1=1}^{N_1} \prod_{\xi=0}^{x_1-1} \frac{K_\xi}{(\xi+1)(1-f(\xi+1))} \right]} - 1 \right\}$$

Bei einem vollkommenen Bündel mit Überlaufmöglichkeit für den gesamten Externverkehr ("kommend" und "gehend") erhält man:

$$(89) \quad D_e = R_e^2 \cdot \left\{ \frac{\prod_{\xi=0}^{N_1-1} \frac{K_\xi}{(\xi+1)(1-f(\xi+1))}}{p(N_1) \cdot \left[1 + \sum_{x_1=1}^{N_1} \prod_{\xi=0}^{x_1-1} \frac{K_\xi}{(\xi+1)(1-f(\xi+1))} \right]} - 1 \right\}$$

Die Blockierungswahrscheinlichkeit $p(N_1)$ des Primärbündels wird nach Gleichung (77) bestimmt.

V.2. Beziehung zwischen der Ableitung der Belastung y und dem Streuwert D bei vollkommenen Bündeln.

Für vollkommen erreichbare Bündel ist es möglich, einen Zusammenhang zwischen dem Streuwert D (oder dem Spitzigkeitskoeffizienten p) und der Ableitung der Bündelbelastung anzugeben.

Die Belastung eines vollkommen erreichbaren Bündels ist durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(90) \quad y = A \cdot (1 - B)$$

$$(91) \quad B = A - \frac{A^{N+1}}{\sum_{\xi=0}^N \frac{A^\xi}{\xi!}}$$

Bildet man für Gleichung (91) die Ableitung dy/dA , so ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$(92) \quad \frac{dy}{dA} = 1 - B(N+1-y)$$

Nach Abschnitt II.1. gilt für den Spitzigkeitskoeffizienten

$$(93) \quad p = \frac{D}{R^2} = \frac{1}{B(N+1-y)} - 1$$

Mit den Gleichungen (92) und (93) ergibt sich deshalb folgender Zusammenhang:

$$(94) \quad p = \frac{dy}{dR}$$

$$(95) \quad D = R^2 \cdot \frac{dy}{dR}$$

VI. ZUSAMMENFASSUNG

Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit und Sicherheit besitzen große Fernsprechvermittlungsnetze die Möglichkeit der alternativen Leitweglenkung. Hierbei treten Fernsprechverkehre auf (Überlaufverkehre), deren statistische Eigenschaften nicht mehr mit den bekannten Formeln für Zufallsverkehr beschrieben werden können. Zur Charakterisierung der Überlaufverkehre benützt man deshalb neben dem Mittelwert R auch noch den Streuwert D .

In der vorliegenden Arbeit werden Formeln abgeleitet, die eine exakte Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr hinter ein- und mehrstufigen Koppelanordnungen mit vollkommener oder unvollkommener Erreichbarkeit erlauben.

Für die Planung bzw. Erweiterung von Vermittlungssystemen mit Leitweglenkung in der Praxis sind Tabellen und Diagramme erforderlich, die eine einfache Auswertung ermöglichen. Eine Tabellierung der exakten Formeln für mehrstufige Koppelanordnungen ist jedoch wegen der großen Anzahl von Strukturparametern nicht durchführbar. Weiter ist die exakte Berechnung von mehrstufigen Koppelanordnungen mit angebotenen Überlaufverkehr nicht möglich.

Die Verallgemeinerung des "RDA-Streuwertverfahrens" für mehrstufige Koppelanordnungen ermöglicht die Lösung beider Probleme: Sowohl der Streuwert von Überlaufverkehr als auch Koppelanordnungen, welchen dieser Verkehr angeboten wird, können jetzt auf einfache Weise bestimmt werden (Die Auswertung der Formeln erfolgt mit Hilfe der bereits für einstufige Koppelanordnungen vorhandenen Tabellen und Diagramme). Zahlreiche Tests mit künstlich erzeugtem (simuliertem) Fernsprechverkehr zeigen die gute Übereinstimmung von Simulations- und Rechenergebnissen.