77 N IV/1

APPROXIMATION VON VERTEILUNGSFUNKTIONEN,

EIN WICHTIGER SCHRITT BEI DER MODELLBILDUNG FÜR RECHENSYSTEME

Werner Bux* und Ulrich Herzog**

Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart* und

Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung (III) der
Friedrich - Alexander - Universität
Erlangen - Nürnberg, Erlangen**.

Übersicht

Ein wichtiger Schritt für die verkehrstheoretische Analyse von Modellen für Rechensysteme ist die Approximation gemessener Verteilungsfunktionen. Typische Beispiele sind Verteilungsfunktionen für Ankunftsabstände, für Bedienungszeiten oder für Transportzeiten.

Es wird ein Verfahren vorgeschlagen, welches für die verkehrstheoretische Analyse äußerst zweckmäßig ist und numerisch effektiv arbeitet. Die statistische Zulässigkeit der Approximation läßt sich mit Hilfe bekannter Methoden der Mathematischen Statistik feststellen.

Das Approximationsverfahren ist für ähnliche Anwendungen außerhalb der Verkehrstheorie ebenfalls geeignet.

Die einzelnen Abschnitte sind:

1. Einleitung
2. Phasenmethode
3. Approximation von Verteilungsfunktionen
4. Beispiele
5. Statistische Zulässigkeit
6. Zusammenfassung und Ausblick

Erschienen in: Informatik Fachberichte 9 (1977)
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, S. 1-15.

1. EINLEITUNG

Bei der praktischen Anwendung der Verkehrstheorie sind die Verteilungsfunktionen (VFn) der auftretenden Ankunftsabstände, Bedienungs- oder Transportzeiten zumeist nicht in analytischer Form bekannt, sondern es liegen oft nur Aussagen über die Größe einiger Momente oder über die Werte der VF an diskreten Stellen vor. Dies ist der Fall bei Messungen an realen Systemen oder bei der Auswertung von umfangreichen Systemsimulationen (s. auch Anhang). Gesucht ist dann eine analytische Funktion, die diese Werte mit einer vorgeschriebenen Genauigkeit einhält, den Bedingungen für eine Wahrscheinlichkeits- Verteilungsfunktion genügt und außerdem für eine verkehrstheoretische Analyse geeignet ist.

Aus der Sicht der Verkehrstheorie sollten Aussagen über gemessene Ankunftsabstände, Bedienungs- oder Transportzeiten sich nicht nur auf den Verlauf der VFn, sondern auch auf die Werte der Momente niedriger Ordnung erstrecken. Diese Forderung beruht auf der folgenden Beobachtung:

1) In vielen Bedienungssystemen sind wichtige charakteristische Größen (mittlere Wartezeiten, Belastungen, Verluste, etc.) ausschließlich oder hauptsächlich von bestimmten (meist niedrigen) Momenten der VF von Ankunftsabständen oder Bedienungszeiten abhängig. So ist z.B. die mittlere Wartezeit im System M/G/1 nur abhängig vom ersten und zweiten Moment der Bedienungszeitverteilung.

2) Auf der anderen Seite gibt es aber auch hinreichend viele Fälle, in denen charakteristische Größen erst durch die Angabe der vollständigen VF von Ankunftsabständen oder Bedienungszeiten festgelegt sind. Ein Beispiel ist die Wartezeit-VF des Systems M/G/1.

Diese, aus praktischen Gesichtspunkten als notwendig angesehene "Zweigleisigkeit" sollte sich nun aber nicht auf das Gebiet der Messungen beschränken, vielmehr muß sie auch bei der Approximation der gemessenen Verteilungsfunktionen berücksichtigt werden. Die klassischen Approximationsverfahren erfüllen diese Forderungen i. a. nicht. In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur Approximation von Verteilungsfunktionen vorgestellt, das bezüglich seiner Anwendung im Rahmen der verkehrstheoretischen Modellbildung drei wesentliche Eigenschaften besitzt:

1) Es werden sowohl der Verlauf der VF an diskreten Stellen als auch endlich viele Momente der VF bei der Approximation berücksichtigt.

2) Es wird eine Klasse von Funktionen benützt, die die Approximation aller VFn von praktischem Interesse gestattet und für die Analyse von Verkehrsmodellen äusserst zweckmäßig ist.

3) Es ist eine Aussage über die statistische Zulässigkeit der Approximation möglich.

Das Approximationsproblem stellt sich auch außerhalb der Verkehrstheorie, wenn ein statistischer Test über die Zulässigkeit einer angenommenen VF entscheidet: Um einen Test sinnvoll durchführen zu können, muß ein Vorwissen über einen geeigneten Typ der VF vorhanden sein (vgl. Abschnitt 5).

2. PHASENMETHODE

Ein häufig angewandtes Verfahren bei der Analyse von Wartesystemen ist die sog. Phasenmethode. In ihr werden allgemeine VFn näherungsweise oder exakt dargestellt mit Hilfe exponentialverteilter Phasen, die nacheinander durchlaufen werden. Der Übertritt von einer Phase zu einer anderen geschieht gemäß vorgegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten.

Die Vielfalt möglicher "Zusammenschaltungen" von solchen Phasen läßt sich, wie Cox /1/ gezeigt hat, insofern einschränken, als es schon möglich ist, mit dem in Bild 1 gezeigten "Cox'schen Modell" jede VF mit rationaler Laplacetransformierten zu erzeugen.
Mit Hilfe dieser VFn vom Phasentyp können allgemeine Verteilungsfunktionen mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden /1/.

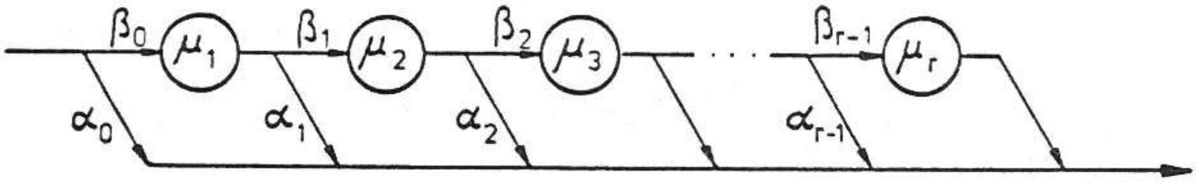


Bild 1: Allgemeine Anordnung exponentialverteilter Phasen nach Cox.

Falls die Anordnung in Bild 1 beispielsweise für eine Bedienungszeit steht, so denkt man sich die zufällige Bedienungszeit einer Anforderung in der folgenden Weise erzeugt: Mit Wahrscheinlichkeit α_0 ist die Bedienungszeit gleich Null. Mit Wahrscheinlichkeit $\beta_0 = 1-\alpha_0$ tritt die Anforderung in die erste exponentialverteilte Phase mit Mittelwert μ_1^{-1} ein. Nach Ablauf dieser zufälligen Zeit erfolgt mit Wahrscheinlichkeit β_1 ein Übertritt in die 2.Phase mit Mittelwert μ_2^{-1} oder mit Wahrscheinlichkeit $\alpha_1 = 1-\beta_1$ eine Beendigung der gesamten Bedienungszeit usw.

Die Laplacetransformierte der Dichte dieser Verteilungsfunktion ist:

$$\mathcal{L}\{f_{\mu_1,\dots,\mu_r}(t)\} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} \beta_0\beta_1\dots\beta_{i-1}\,\alpha_i \prod_{j=1}^{i} \frac{\mu_j}{s+\mu_j} \tag{1}$$

Die Phasenmethode besitzt den großen Vorteil, daß durch die Verwendung exponentialverteilter Phasen ein stochastischer Prozess als Markoff - scher Prozess beschreibbar ist. Für diesen Fall gibt es einen Standardlösungsweg, der bei der Analyse eingeschlagen werden kann. Das Hauptproblem, das dann allerdings auftritt, ist die Komplexität des entstehenden Zustandsraumes des Prozesses; das entsprechende Gleichungssystem für die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten ist häufig nur schwierig numerisch auswertbar.

Aus diesen Gründen ist es nützlich, die Anzahl der Parameter des allgemeinen Cox'schen Modells so einzuschränken, daß ein einheitlicher Mittelwert für alle Phasen angenommen wird (vgl. Bild 2):

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = \mu \tag{2}$$

Die dazugehörige VF besitzt dann die Form*:

$$F_\mu(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} a_i \left(1 - e^{-\mu t} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\mu t)^j}{j!}\right) & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \qquad a_i = \beta_1 \dots \beta_{i-1}\alpha_i \quad i \in \{1,\dots,r\} \tag{3}$$

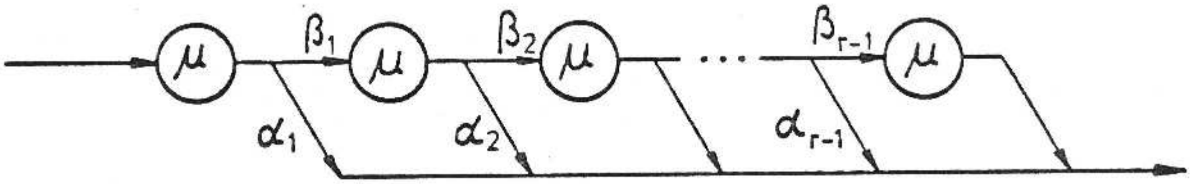


Bild 2: Modell mit einheitlichen exponentialverteilen Phasen. Dieses Modell ist ebenfalls geeignet, allgemeine VFn beliebig genau zu approximieren.

Trotz der Einschränkung des einheitlichen Phasen-Mittelwerts besitzt, wie Schaßberger /2/ gezeigt hat, diese Klasse von Funktionen die für ihre Verwendung zur Approximation wichtige Eigenschaft:

---

* Dabei werden der einfacheren Darstellung wegen hier wie im folgenden nur VFn betrachtet, die an der Stelle t=0 stetig sind ($\beta_0 = 1$). Die Verallgemeinerung der Betrachtungen für VFn mit einer Unstetigkeitsstelle bei t=0 ist offensichtlich.

Zu jeder auf $[0,\infty[$ konzentrierten VF F(t) gibt es eine Folge vom Typ der Gleichung (3), die schwach gegen F(t) konvergiert.

In /3/ wurde weiter gezeigt, daß trotz der Einschränkung des einheitlichen Phasen-Mittelwertes, diese Klasse von VFn geeignet ist, allgemeine VFn mit beliebiger Genauigkeit zu approximieren.

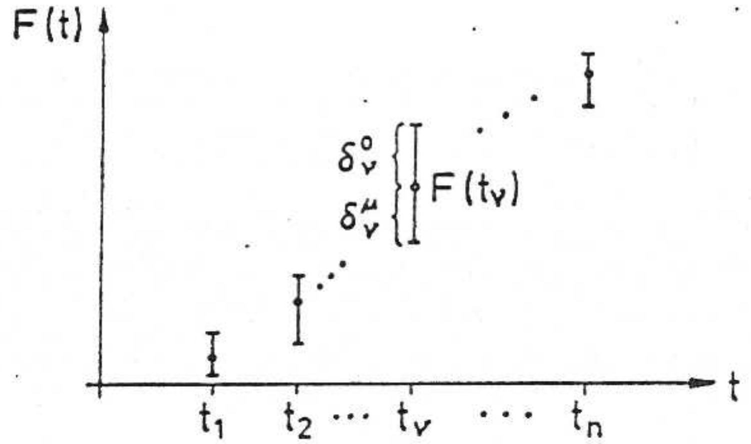
Um vorgegebene Werte einer Verteilungsfunktion mit einer bestimmten Genauigkeit zu approximieren, sind zwar i.a. mehr Phasen notwendig als beim ursprünglichen Cox'schen Modell, insgesamt gesehen wird jedoch der Aufwand bei der numerischen Auswertung erheblich reduziert und in vielen Fällen eine effektive numerische Auswertung erstmals möglich /3/.

3. APPROXIMATION VON VERTEILUNGSFUNKTIONEN

3.1 Die Approximationsaufgabe

Aus den im Abschnitt 1 erläuterten praktischen Erwägungen läßt sich die folgende Aufgabe eines für unsere Zwecke geeigneten Approximationsverfahrens für VFn formulieren:

<u>Gegeben</u> seien von einer VF F(t) eine Anzahl n von diskreten Stützstellen t_ν mit den zugehörigen Funktionswerten $F(t_\nu)$ sowie maximalen Abweichungen δ_ν^o, δ_ν^u nach oben bzw. unten von Approximation und gegebenem Wert an den Stellen t_ν (vgl. Bild 3).



<u>Bild 3:</u> Gegebene diskrete Werte der VF F(t) an den Stellen $t_1,\dots,t_n$ mit maximalen Abweichungen $\delta_\nu^o, \delta_\nu^u$ von Approximation und F(t).

Gegeben seien ferner die Werte für das erste Moment M_1 und das zweite Moment M_2 der VF F(t)*.

---

*Die Beschränkung auf zwei Momente ist nicht zwingend; sie wird hier aus Darstellungsgründen angenommen.

Gesucht ist eine approximierende Funktion A(t), so daß die folgenden sechs Bedingungen eingehalten werden:

(I) $A(t_\nu) \leqq F(t_\nu) + \delta_\nu^o$ $\quad \nu \in \{1,\dots,n\}$

(II) $A(t_\nu) \geqq F(t_\nu) - \delta_\nu^u$

(III) $\int_0^\infty t\,dA = M_1$

(IV) $\int_0^\infty t^2\,dA = M_2$

(V) A(t) ist eine auf $[0,\infty[$ konzentrierte VF

(VI) A(t) soll vom Phasentyp sein, d.h. A(t) muß eine rationale Laplacetransformierte besitzen (vgl. Gleichung (1)).

Die Bedingungen (I) bis (V) verstehen sich von selbst. Die Forderung (VI) rührt von der erwünschten Verwendbarkeit der approximierenden Funktion A(t) für eine verkehrstheoretische Analyse mit Hilfe der Phasenmethode her.

3.2 Approximationsverfahren

Aufgrund der speziellen Aufgabenstellung ist keines der bekannten "klassischen" Approximationsverfahren (oder auch Interpolationsverfahren) ohne weiteres zur Lösung des vorliegenden Problems geeignet.

3.2.1 Prony's Methode

Verzichtet man auf die Einhaltung der Momente (Bedingungen (III) und (IV)), so scheint die Methode von Prony /4/ bei gegebenen diskreten Funktionswerten das geeignetste Approximationsverfahren zu sein. Bei diesem Verfahren wird die näherungsweise Darstellung der Dichte einer VF F(t) mit Hilfe einer Summe gewichteter Exponentialfunktionen angestrebt:

$$\frac{dA_P(t)}{dt} = \sum_i u_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \tag{4}$$

$$\sum_i u_i = 1$$

Läßt man komplexe Werte für die Verzweigungswahrscheinlichkeiten zu, so läßt sich jede zu einem Cox'schen Modell gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mu_1,\dots,\mu_r}(t)$ in der Form von Gleichung (4) darstellen, sofern alle μ_i voneinander verschieden sind /1/. Die Funktion in (4) wird nun als Lösung einer linearen Differenzengleichung angesehen und die Parameter u_i, λ_i werden so bestimmt, daß die Funktion von den angegebenen Stützwerten die kleinste quadratische Abweichung aufweist.

Dieses im Prinzip sehr elegante Verfahren besitzt jedoch drei Nachteile:

1) Es liefert u.U. eine Funktion, deren Momente erheblich von vorgegebenen Werten abweichen können, so daß die gewonnene Approximation für Anwendungen in der Verkehrstheorie unbrauchbar sein kann.
2) Die komplexen Wahrscheinlichkeiten sind neben ihrer geringen Anschaulichkeit für die Verarbeitung auf dem Rechner unhandlich.
3) Die Einhaltung der Forderung (V) kann nicht garantiert werden, weil die erhaltene "Dichtefunktion" u.U. kleiner Null werden kann.

3.2.2 Neues Verfahren

In dem neu entwickelten Approximationsverfahren wird von der im Abschnitt 2 beschriebenen Klasse von Funktionen nach Gleichung (3) ausgegangen, d.h. wir setzen $A(t) = F_\mu(t)$.

Damit konkretisiert sich die Approximationsaufgabe in der folgenden Weise:
Gesucht sind bei minimalem r die Parameter $a_1,\ldots,a_r$ und μ unter den folgenden Bedingungen:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \left(1 - e^{-\mu t_\nu} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\mu t_\nu)^j}{j!}\right) \leq F(t_\nu) + \delta_\nu^o \qquad (5)$$

$$\nu \in \{1,\ldots,n\}$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \left(1 - e^{-\mu t_\nu} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(\mu t_\nu)^j}{j!}\right) \geq F(t_\nu) - \delta_\nu^u \qquad (6)$$

$$\mu^{-1} \sum_{i=1}^{r} i a_i = M_1 \qquad (7)$$

$$\mu^{-2} \sum_{i=1}^{r} i(i+1) a_i = M_2 \qquad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_i = 1 \qquad (9)$$

$$a_1,\ldots,a_r \geq 0 \qquad (10)$$

$$\mu \geq 0 \qquad (11)$$

Offensichtlich garantieren die Ungleichungen (5) und (6) die Einhaltung der Forderungen (I) und (II), die Gleichungen (7) und (8) die Einhaltung der Forderungen (III) und (IV). Die Forderung (V) ist befriedigt durch die Bedingungen (9), (10) und (11).
Die Forderung (VI) ist ebenfalls erfüllt.

Es handelt sich um ein gemischt ganzzahlig-nichtganzzahliges, nichtlineares Optimierungsproblem, zu dessen Lösung der folgende Weg eingeschlagen werden kann:

Aus der Sicht der praktischen Anwendung einer solchen Approximation ist der sinnvolle Bereich des Parameters r nach oben stark eingeschränkt. Das heißt konkret: Anwendbar ist die Approximation nur dann, wenn der Parameter r kleiner als wenige Hundert ist. Dies bedeutet aber, daß zur Bestimmung des minimalen Wertes von r eine sehr einfache Suchstrategie (z.B. beginnend mit dem kleinstmöglichen r) angewandt werden kann. Aus Grenzbetrachtungen läßt sich schließen, daß r den folgenden Ungleichungen gehorchen muß, damit die Bedingungen (7) und (8) eingehalten werden können:

$$r \geq \frac{1}{c^2} \qquad \text{falls} \quad c^2 \leq 1 \tag{12}$$

$$r \geq 2c^2 + 2\sqrt{c^4-1} \qquad \text{falls} \quad c^2 > 1$$

$$c^2 = \frac{M_2 - M_1^2}{M_1^2} \tag{13}$$

Ausgehend von der Überlegung, daß bei gegebenem r und gegebenem μ ein lineares Problem der Bestimmung von zulässigen $a_1, \ldots, a_r$ vorliegt, wird nun folgendermaßen vorgegangen:

Durch die Einführung von 2n nichtnegativen Schlupfvariablen $s_1, \ldots, s_{2n}$ werden die Ungleichungen (5) und (6) übergeführt in Gleichungen /5/.

Danach wird in jeder der insgesamt 2n+3 Gleichungen eine nichtnegative Hilfsvariable h_k $(k \in \{1, \ldots, 2n+3\})$ eingeführt, so daß sich nun das Problem folgendermaßen darstellen läßt:

Minimiere bei gegebenem μ und gegebenem r die Zielfunktion

$$Z = \sum_{k=1}^{2n+3} h_k \tag{14}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{r} a_i\left(1-e^{-\mu t_\nu}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(\mu t_\nu)^j}{j!}\right) + s_\nu + h_\nu = F(t_\nu)+\delta_\nu^o \tag{15}$$

$$\nu\in\{1,\dots,n\}$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_i\left(1-e^{-\mu t_\nu}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(\mu t_\nu)^j}{j!}\right) - s_{n+\nu} + h_{n+\nu} = F(t_\nu)-\delta_\nu^u \tag{16}$$

$$\mu^{-1}\sum_{i=1}^{r} i a_i + h_{2n+1} = M_1 \tag{17}$$

$$\mu^{-2}\sum_{i=1}^{r} i(i+1)a_i + h_{2n+2} = M_2 \tag{18}$$

$$\sum_{i=1}^{r} a_i + h_{2n+3} = 1 \tag{19}$$

$$a_1,\dots,a_r \geqq 0 \tag{20}$$

$$s_1,\dots,s_{2n} \geqq 0 \tag{21}$$

$$h_1,\dots,h_{2n+3} \geqq 0 \tag{22}$$

Dieses Minimum ist eindeutig bestimmbar /5/, d.h. wir erhalten durch die Lösung des linearen Optimierungsproblems Werte der Funktion

$$z_{min}=z_{min}\ (\mu) \tag{23}$$

Ist für ein μ_o die Funktion $z_{min}(\mu_o) = 0$, so ist mit μ_o und den zugehörigen Werten für r, $a_1,\dots,a_r$ eine Lösung des gesamten Problems gefunden.

Wegen der Nichtnegativität von z_{min}, läßt sich die Nullstellenbestimmung auch beschreiben als die Suche nach einem Minimum der nichtlinearen Funktion $z_{min}(\mu)$. Geeignete Verfahren dazu sind aus der Literatur bekannt /6/, /7/.

Die Minimumbestimmung läßt sich insofern noch vereinfachen, als es möglich ist, Schranken für den Wert von μ_o anzugeben. Bei vorgeschriebenem ersten und zweiten Moment und gegebenem r läßt sich der sinnvolle Bereich für μ, d.h. das Intervall I, in dem überhaupt eine Nullstelle von z_{min} liegen kann, folgendermaßen einschränken:

$$I = \begin{cases} \left[\dfrac{1}{c^2 M_1}, \dfrac{1}{M_1}\sqrt{\dfrac{r(r+1)}{1+c^2}}\right] & \text{für } c^2 \leq 1 \\ \left[\dfrac{1}{M_1}, \dfrac{1}{M_1}\sqrt{\dfrac{r(r+1)}{1+c^2}}\right] & \text{für } c^2 > 1 \end{cases} \qquad c^2 = \frac{M_2 - M_1^2}{M_1^2} \tag{24}$$

Das gesamte Approximationsverfahren ist in Bild 4 als Algorithmus dargestellt.

gegeben n

$t_\nu, F(t_\nu), \delta_\nu^o, \delta_\nu^u \quad (\nu \in \{1,\dots,n\})$

M_1, M_2

r_{max}

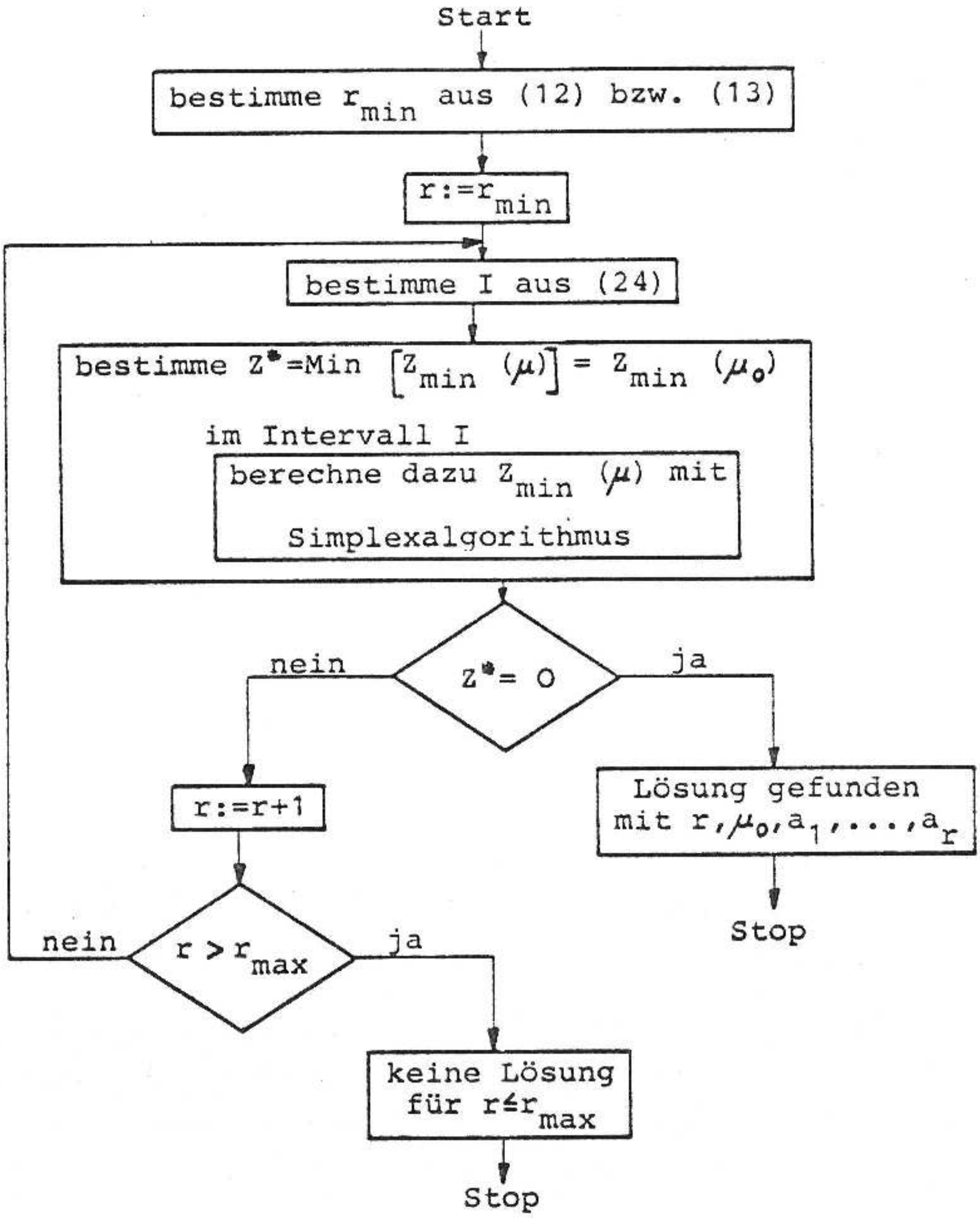


Bild 4: Algorithmus zur Bestimmung einer approximierenden VF

4. BEISPIELE

4.1 Approximation von VFn

Die Bilder 5 und 6 zeigen zwei Beispiele für die Approximation von VFn. Der Anschaulichkeit halber werden die (in der praktischen Anwendung nicht bekannten) den Beispielen zugrundegelegten VFn ebenfalls angegeben. Für die Approximation benutzt wurden nur die eingezeichneten 5 Stützwerte. Es sind die Ergebnisse für verschieden große zugelassene Abweichungen δ an den Stützstellen eingezeichnet. In allen Fällen wurden die ersten beiden Momente exakt im Rahmen der Rechengenauigkeit eingehalten.

Bild 5:

Approximation einer VF. Die ersten 2 Momente sind exakt, die 5 Stützwerte (∘) der VF sind im Rahmen der angegebenen Abweichungen eingehalten.

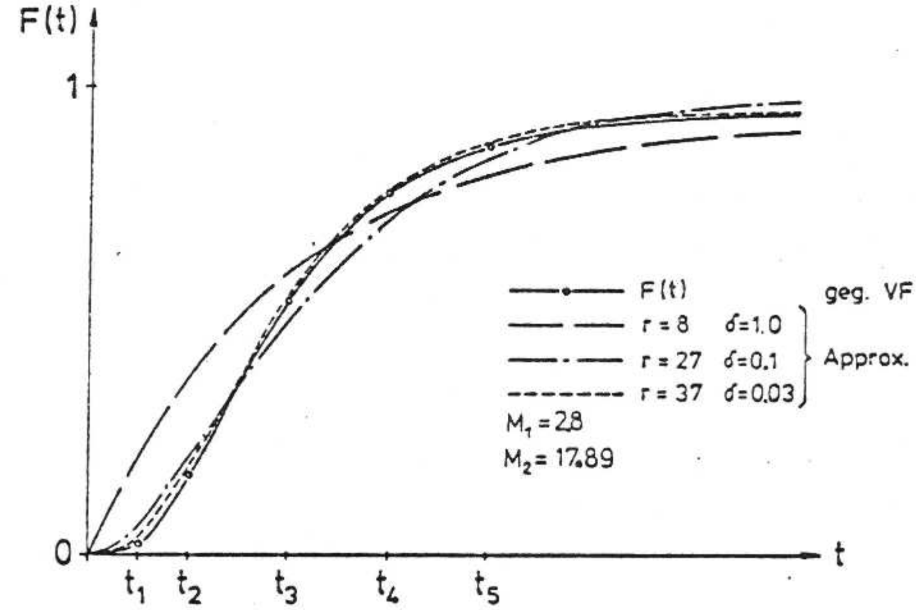
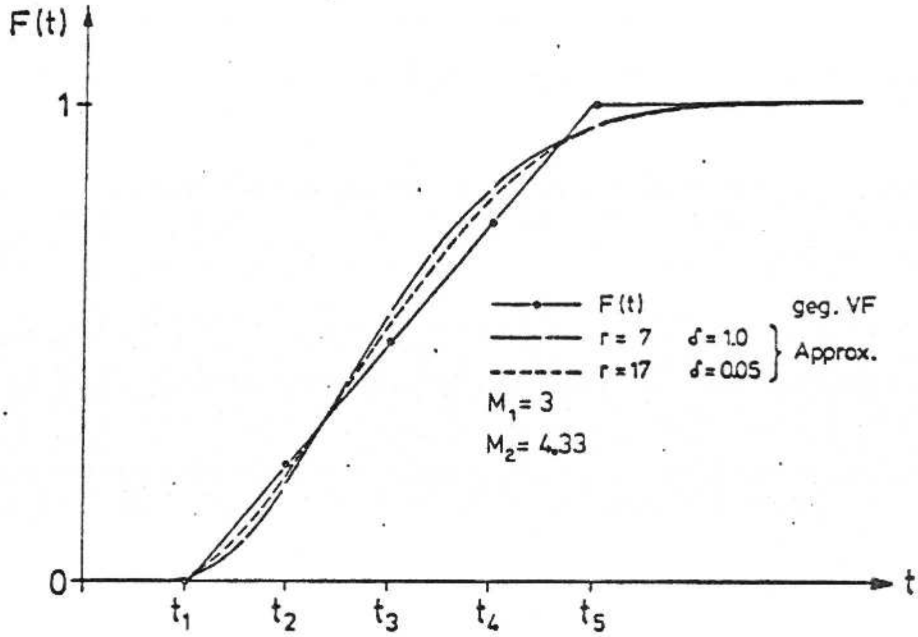


Bild 6:

Approximation einer VF. Die ersten 2 Momente sind exakt, die 5 Stützwerte (∘) der VF sind im Rahmen der angegebenen Abweichungen eingehalten.



4.2 Warteschlangenmodell für einen Magnetplattenspeicher

Als weiteres Beispiel wird ein Warteschlangenmodell für den Zugriff zu einem Festkopf-Plattenspeicher (bzw. Trommelspeicher) betrachtet. Das Modell besteht aus einem Wartespeicher für die Zugriffswünsche und einer Bedienungseinheit (vgl. Bild 7).

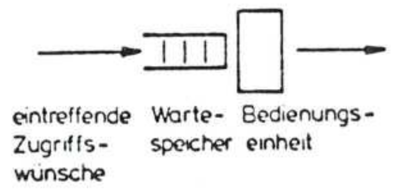


Bild 7: Warteschlangenmodell für Plattenspeicherzugriff

Es wird angenommen, daß die Zugriffswünsche Poisson-verteilt eintreffen. Die Bedienungszeit des Plattenspeichers setzt sich aus der abzuwartenden Rotationszeit und der Blocktransferzeit zusammen, vgl. Bild 6. Somit stellt das Modell einen Spezialfall des Wartesystems M/G/1 mit Poisson-Ankunftsprozeß, allgemeiner Bedienungszeit-Verteilung und einer Bedienungseinheit dar.

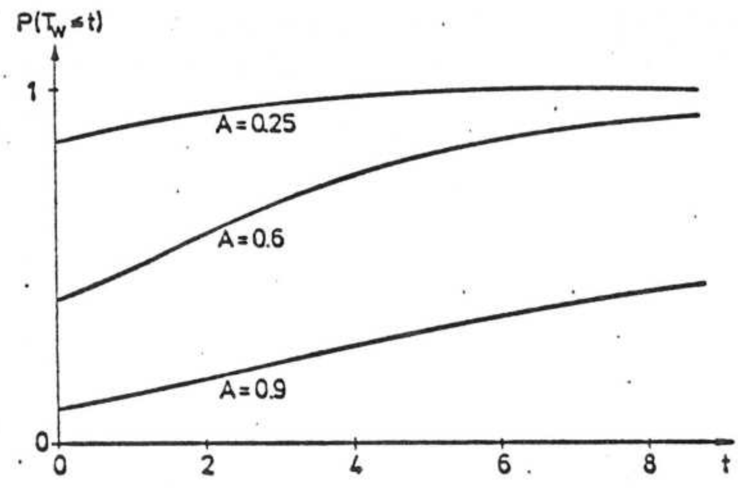
Approximiert man die Bedienungszeit-VF mit Hilfe des vorgestellten Verfahrens, so läßt sich damit eine sehr einfache Analyse des Wartesystems mit Hilfe der Phasenmethode durchführen, und zwar einheitlich für jede in Frage kommende VF.

Diese Analyse liefert ohne Schwierigkeiten /3/ die Wartezeit-VF bei Abfertigung in der Reihenfolge des Eintreffens. (Bei der herkömmlichen Analyse des Wartesystems M/G/1 muß diese für jede zugrundegelegte VF der Bedienungszeiten individuell und mit u.U. erheblichen numerischen Schwierigkeiten durch Rücktransformation aus einer Laplacetransformierten bestimmt werden.)

Bild 8 zeigt die Wartezeit-VF für unser Beispiel.

Bild 8: Wartezeit-VF für das Warteschlangenmodell eines Magnetplattenspeichers. (Bedienungszeitverteilung gemäß Bild 6 mit r=17)

A: Verkehrsangebot



5. STATISTISCHE ZULÄSSIGKEIT

Die bekannten Methoden der mathematischen Statistik gehen davon aus, daß eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:

1) Der Typ der Verteilungsfunktion ist gegeben; eventuell ist eine - meist geringe - Anzahl von Parametern unbekannt. (Theorie der Parameterschätzung, z.B. Maximum-Likelihood Methode).

2) Über die Verteilungsfunktion kann eine Hypothese aufgestellt werden, d.h. man hat eine Vermutung über den Typ der Verteilungsfunktion (Stat. Prüfen von Hypothesen, z.B. χ^2-Test oder Kolmogoroff-Test).

Die Auswahl der zur Verfügung stehenden Typen beschränkt sich auf relativ wenige Standard-VFn, wie z.B. die Normalverteilung. In vielen Fällen sind diese Typen von VFn jedoch nicht geeignet, das Verhalten realer Systeme zu beschreiben.

Eine VF ohne derartige Beschränkungen wurde in Abschnitt 2 vorgestellt. Wegen der Vielzahl der Parameter, (die teilweise voneinander abhängen), sind jedoch auch in diesem Fall Parametertests für eine Auswertung ungeeignet.

Im Gegensatz dazu wird bei dem neuen Verfahren aufgrund der Stichprobe zuerst eine hypothetische VF erzeugt. Daran anschließend kann - sofern erwünscht - mit Hilfe des Kolmogoroff- (oder Rényi-) Tests /8/ die statistische Aussagesicherheit bestimmt werden. Das Verfahren hat erstens den Vorteil, daß auch für beliebige reale VFn automatisch eine hypothetische VF gefunden wird, die innerhalb bestimmter, vorgebbarer Schranken liegt. Zweitens ist diese hypothetische VF geeignet für eine effektive verkehrstheoretische Auswertung.

6. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Es wurde ein neues Verfahren vorgestellt, das insbesondere für die Approximation von VFn der Ankunftsabstände, Bedienungszeiten und Transportzeiten von Warteschlangenmodellen geeignet ist.

Es berücksichtigt sowohl den Verlauf der VF in Form vorgebbarer diskreter Stützwerte als auch die niedrigen Momente. Beides erscheint aus praktischen Gesichtspunkten bei der Analyse von Warteschlangenmodellen als zwingend.

Die Approximation erfolgt mit Hilfe exponentialverteilter Phasen gleichen Mittelwerts. Dadurch wird in vielen Fällen eine äußerst elegante verkehrstheoretische Analyse mit Hilfe der Phasenmethode ermöglicht. Diesem Aspekt werden weitere Arbeiten gewidmet sein /9/. Das Verfahren wurde mit einer geringen Modifikation auch erfolgreich angewandt, analytisch vorgegebene VFn beliebig genau zu approximieren. Ein derartiges Vorgehen kann vorteilhaft sein, wenn z.B. die vorgegebene VF für eine verkehrstheoretische Auswertung ungeeignet ist.

Schließlich ist das Verfahren allgemein anwendbar zur Unterstützung bekannter Methoden der Mathematischen Statistik: In vielen Fällen der praktischen Anwendung war es bisher nicht einfach, aufgrund einer Stichprobe eine sinnvolle Hypothese über den Typ der Verteilungsfunktion aufzustellen.

ANHANG: Verteilung und Momente einer Stichprobe

Gegeben sei eine Stichprobe vom Umfang n, z.B. gemessene Bedienungszeiten $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Die Meßwerte seien der Größe nach geordnet, d.h. die Ungleichungen

$$t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots\ldots \leqq t_n$$

sind erfüllt. Anhand dieser Stichprobe sollen Stützwerte und Momente der (sog. empirischen) Verteilungsfunktion bestimmt werden.

A.1. Stützwerte

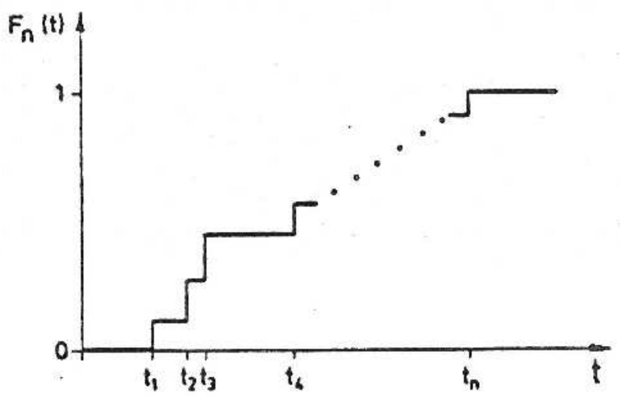


Bild 9: Konstruktion von Stützwerten der empirischen VF

Es sei t ein Punkt auf der t-Achse. Wir bezeichnen mit n_t die Anzahl der Stichprobenwerte, die auf der Achse links von t liegen. Die relative Häufigkeit n_t/n der beobachteten Werte, die kleiner als t sind, nennt man die Verteilungsfunktion der Stichprobe oder die empirische Verteilungsfunktion (s.z.B. /10/ S. 167 ff):

$$F_n(t) = \frac{n_t}{n}$$

Je nach geforderter Genauigkeit können bis zu n Stützwerte direkt aus Bild 9 entnommen werden.

A.2. Momente

Schätzungen für die ersten zwei Momente der Verteilungsfunktion ergeben sich direkt aus den bekannten Beziehungen:

$$M_1 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} t_\nu$$

$$M_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{\nu=1}^{n} (t_\nu - M_1)^2 + M_1^2$$

Anerkennung: Herr P. Reutter hat mit seiner Diplomarbeit viel zum Gelingen der vorliegenden Arbeit beigetragen.

Schrifttum:

/1/ Cox, D.R. : A Use of Complex Probabilities in the Theory of Stochastic Processes.
Proc. Camb. Phil. Soc. 51(1955), pp. 313-319.

/2/ Schaßberger, R. : Warteschlangen.
Springer-Verlag, Wien / New York, 1973.

/3/ Bux, W., Herzog, U., Reutter, P. : Analyse von Wartesystemen mit Hilfe der Phasenmethode.
Monographie. Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung, Universität Stuttgart, 1976.

/4/ Whittaker, E.T., Robinson, G. : The Calculus of Observations.
Blackie & Son, London / Glasgow / Bombay, 1926.

/5/ Neumann, K. : Operations Research Verfahren. Band 1.
Hanser Verlag, München / Wien, 1975.

/6/ Himmelblau, D.M. : Applied Nonlinear Programming.
McGraw-Hill, New York, 1972.

/7/ Sargent, R.W.H. : Minimization without Constraints.
In Avriel, M., Rijckaert, M.J., Wilde, D.J. : Optimization and Design.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1973, pp. 37-75.

/8/ Fisz, M. : Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik.
VEB Verlag, Berlin, 1958.

/9/ Bux, W., Herzog, U. : The Phase Concept: Approximation of Measured Data and Performance Analysis.
Wird in Kürze zur Veröffentlichung eingereicht.

/10/ Smirnow, N.W., Dunin-Barkowski, E.W. : Mathematische Statistik in der Technik.
VEB Verlag, Berlin, 1963.