Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung

Universität Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

14. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten

Das preemptive Warteverlustsystem

von

G. JOACHIM BRANDT

Institute for Switching and Data Technics

University Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

14th Report on Studies in Congestion Theory

The Pre-Emptive Delay and Loss System

by

G. JOACHIM BRANDT

1971

S U M M A R Y

(Überblick in deutsch S. 6 und 7)

The paper deals with a service system in which the arriving calls belong to several pre-emptive priority classes. The service process involved can be described by means of the following three characteristics:

(1) Structure of the System - a queueing system is dealt with having n parallel service units and one waiting line with s waiting places;

(2) Service Discipline - a pre-emptive priority discipline is applied; a pre-empted call is relegated to the queue where it awaits completion of service;

(3) Arrival and Service Process - the offered traffic is originated by POISSON sources; both a finite and an infinite number of sources are dealt with. The service time is negatively exponentially distributed.

This pre-emptive delay and loss system covers, as special cases, the pre-emptive loss system (s = 0) in which each pre-empted call is lost, and the pre-emptive delay system ($s \to \infty$) in which no call is lost. In the first part of the paper an explicit and homogeneous calculation of the delay and loss system without priorities is derived by means of the introduction of the basic function ϕ_k , thereby expressing all traffic characteristics in terms of ϕ_k .

The basic function can be interpreted as a generalization of the first Erlang formula.

Before referring to the pre-emptive delay and loss system the central Chapter 3 of the paper defines and deals with the general MARKOV service system, of which the pre-emptive delay and loss system is a special case.

The traffic characteristics of the MARKOV service system can be sub-divided into two groups:
The first group can be calculated directly from the probabilities of state. The general solution for these is derived for the MARKOV service system in the form of linear systems of equations/differential equations for the stationary/time-dependent case.

To the second group belong such important characteristics as the probability that a call of a certain priority class is interrupted during service by the arrival of a higher priority call; the mean number of interruptions per second; the mean service time taken up by calls which later on are discarded and lost.

A general solution of this second group of traffic characteristics is derived by introducing the RANDOM WALK principle. The traffic characteristics are expressed as SUCCESS/FAILURE probabilities and the distribution of the time which elapses until SUCCESS or FAILURE. Here again, the solutions are linear systems of equations/differential equations.

From the general solution of the MARKOV service systems it is a straightforward path to apply the results for the pre-emptive delay and loss system, as is done in Chapters IV and V of the paper. In the case of a finite number of sources the resulting simple systems of linear equations have been prepared for an easy numerical calculation even in the case of a high rank. In the case of an infinite number of sources, the results are derived explicitly by means of the further generalized basic function $\phi_{\nu,k}$.

In the concluding Chapter VI of the paper you will find some numerical examples which describe a number of remarkable features of the pre-emptive delay and loss system.

....

INHALTSVERZEICHNIS 1

IV. DAS PREEMTPVE WARTEVERLUSTSYSTEM BEI ENDLICH VIELEN POISSON-QUELLEN

V. DAS PREEMPTIVE WARTEVERLUSTSYSTEM BEI UNENDLICH VIELEN POISSON-QUELLEN

ÜBERBLICK

Bedienungsprozesse treten in vielen Gebieten moderner Technik auf. Insbesondere erfordert die Untersuchung der Verkehrsflüsse in Vermittlungssystemen, in Datenübertragungsnetzen aber auch in hochorganisierten Rechnern die verkehrstheoretische Berechnung von Bedienungsprozessen.
Bevor in Kapitel I das in der Arbeit behandelte preemptive Warteverlustsystem im einzelnen vorgestellt wird, soll hier dieses System stichwortartig beschrieben werden.

Wir können einen Bedienungsprozess durch die folgenden drei Merkmale charakterisieren:
(1) SYSTEMSTRUKTUR
In der Arbeit wird ein vollkommen erreichbares Warteverlustsystem mit einer beliebigen Zahl n von Bedienungseinheiten und einer beliebigen Zahl s von Warteplätzen untersucht.
(2) ABFERTIGUNGSDISZIPLIN
Es ist eine preemptive Prioritätsdisziplin vorgeschrieben. Unterbrochene Rufe warten im Wartespeicher auf ihre restliche Abfertigung. Innerhalb jeder Prioritätsklasse wird die Disziplin FIRST COME - FIRST SERVED angewandt.
(3) ANRUF- und ENDEPROZESS
Der angebotene Verkehr stammt aus endlich oder unendlich vielen POISSON-Quellen. Die Abfertigungsdauer ist negativ exponentiell verteilt.
Aufgabe einer verkehrstheoretischen Untersuchung von Bedienungssystemen ist es, aus dem gegebenen Anruf- und Endeprozess bei vorgeschriebener Abfertigungsdisziplin diejenigen Verkehrscharakteristika zu berechnen, die für den Praktiker besonders wichtig sind (Wartewahrscheinlichkeit, Verlustwahrscheinlichkeit, Unterbrechungswahrscheinlichkeit, Belastungen, Verteilung der Wartezeiten usw.). Dabei wird im allgemeinen der stationäre Verkehrsprozess von besonderem Interesse sein.

Es soll jetzt ein Überblick über den Inhalt der Arbeit gegeben werden.
In Kapitel I lernen wir die Systemstruktur und die Abfertigungsdisziplin im einzelnen kennen. Dann werden die grundlegenden

Eigenschaften des Anruf- und Endeprozesses besprochen

Im Kapitel II werden wir die Verkehrscharakteristika des Warteverlustsystems ohne Prioritäten sowohl für unendliche als auch für endliche Quellenzahl herleiten. Bei unendlicher Quellenzahl wird eine neue Grundfunktion $\emptyset_{\nu,\mu}$ als Parameter eingeführt. Die Funktion stellt eine Verallgemeinerung der 1. ERLANG'schen Formel /3/ dar. Durch die Einführung von $\emptyset_{\nu,\mu}$ wird eine wesentlich vereinfachte Darstellung der Ergebnisse erreicht. Die Gedankengänge dieses Kapitels sind für die weiteren verkehrstheoretischen Untersuchungen grundlegend. Sie werden in den Kapiteln IV und V vorausgesetzt.
Im zentralen Kapitel III wird für beliebige MARKOV-Bedienungssysteme ein allgemeines und praktisch direkt anwendbares Lösungsverfahren vorgestellt. Diese Lösung wird in Kapitel IV bzw. V auf das preemptive Warteverlustsystem mit endlich bzw. unendlich vielen Verkehrsquellen angewandt, um die Verkehrscharakteristika dieses Systems zu bestimmen. Die Berechnung der Verkehrscharakteristika wurde in ALGOL programmiert. Kapitel VI bringt zur Veranschaulichung der Theorie einige numerische Ergebnisse. Im Anhang sind zunächst einige Formeln und Sätze zusammengestellt, die im Verlaufe der Arbeit immer wieder benötigt werden. Insbesondere werden dort Rechenregeln für die Grundfunktion $\emptyset_{\nu,\mu}$ hergeleitet. Dann wird mit Hilfe der Grundfunktion ein für das preemptive Warteverlustsystem bei unendlicher Quellenzahl charakteristisches Gleichungssystem allgemein und geschlossen gelöst. Für das entsprechende Gleichungssystem bei endlicher Quellenzahl wird im Anhang schließlich ein Reduktionsalgorithmus hergeleitet. Die Gleichungen des Anhangs sind gesondert numeriert und charakterisiert durch geschwungene Klammern: { }
In den anderen Abschnitten der Arbeit sind Gleichungen, die nur für unendliche Quellenzahl gültig sind, durch Numerierung in eckigen Klammern gekennzeichnet: [ ] und die allgemein (für endliche und unendliche Quellenzahl) gültigen Gleichungen durch runde Klammern: ( ).

I. EINFOHRUNG

I. 1 DAS WARTEVERLUSTSYSTEM MIT VOLLKOMMENER ERREICHBARKEIT

Das allgemeine Warteverlustsystem ist ein Bedienungssystem mit beliebig vielen Bedienungseinheiten und beliebig vielen Warteplätzen. Die Zahl der Bedienungseinheiten sei n, die Zahl der Warteplätze s. Statt "Bedienungseinheiten" werden wir meistens "Leitungen" sagen. Die Gesamtheit aller Leitungen wird Bündel genannt. Die Gesamtheit der Warteplätze bezeichnen wir als Wartespeicher.
Ankommende Bedienungswünsche, die wir immer als "Rufe" bezeichnen wollen, werden in 3 Gruppen eingeteilt, je nachdem ob ihnen sofort eine freie Leitung zur Verfügung gestellt wird, ob ihnen ein Warteplatz zugewiesen wird, oder ob sie sofort und ohne Rückwirkung auf das System abgewiesen werden ("verloren gehen"). Rufe, denen ein Warteplatz zugewiesen wird, nennen wir Warterufe. Rufe, die sofort verloren gehen, heißen Verlustrufe. Diejenigen Rufe, die nicht verloren gehen, die also ihre Abfertigung erfolgreich beenden, nennen wir Erfolgsrufe.
Das allgemeine Warteverlustsystem enthält zwei wichtige Spezialfälle:

1. Für s=o hat das System keine Wartemöglichkeit. Alle Rufe, die nicht sofort eine freie Leitung finden, gehen verloren. Solche Bedienungssysteme werden Verlustsysteme genannt.

2. Der zweite Spezialfall ergibt sich, wenn die Zahl der Warteplätze so groß ist, daß keine Verlustrufe auftreten. Solche Bedienungssysteme heißen Wartesysteme oder auch Reine Wartesysteme.

I. 2 ABFERTIGUNGSDISZIPLINEN

Die Abfertigungsdisziplin legt eine Rangordnung der Rufe fest. Nehmen wir an, daß zur Zeit t sich j Rufe im System befinden, dann können wir diese Rangordnung durch die folgende Ausdrucksweise symbolisieren: Die j Rufe im System (d.h. auf Warteplätzen und Leitungen) sollen die Plätze 1, 2, ... bis j einnehmen. Diese Platznumerierung wird nur durch die Abfertigungsdisziplin festgelegt. Es ist dabei völlig gleichgültig, welche Leitung oder welchen Warteplatz der betrachtete Ruf im physi-

kalischen System tatsächlich belegt. Die Rangordnung sei so festgelegt, daß auf Platz 1 der dringlichste Ruf steht, auf Platz j der am wenigsten dringliche Ruf.
Wenn j = (n+k) ist, werden wir sagen, "der Ruf belegt den k-ten Warteplatz."

Endet bei vollbelegtem Bündel und mehreren wartenden Rufen die Abfertigungsdauer eines Rufes, dann rückt der nächst-dringliche Ruf aus dem Wartespeicher ins Bündel nach. Das ist der Ruf auf Platz n+1 (bzw. auf Warteplatz 1). Alle anderen Rufe rücken im Wartespeicher eine Position nach.

Fällt ein neuer Ruf ins System ein und befinden sich schon j Rufe (j= 0,1,2,..., n+s) im System, dann wird dem neuen Ruf ein Startplatz ν zugewiesen. Diese Startposition ν hängt von der durch die Abfertigungsdisziplin bestimmten Dringlichkeit des einfallenden Rufes ab. Die Startposition kann lauten: ν = 1, 2, ... oder (j+1). Falls ν = j+1, dann wird der eingefallene Ruf hinter allen anwesenden Rufen eingeordnet: Er ist weniger dringlich als diese Rufe. Falls ν = (n+s+1) ist, wird der einfallende Ruf abgewiesen und geht verloren. Ist der eingefallene Ruf dagegen dringlicher als die auf den Positionen ν, ν+1, und j stehenden Rufe, dann erhält der neue Ruf Startposition ν. Die bis jetzt auf den Positionen ν, ν+1,... bis j stehenden Rufe werden alle um einen Platz zurückgeschoben.

Wird ein Ruf von Position n auf Position n+1 zurückgeschoben, so bedeutet das eine Unterbrechung der Abfertigung dieses Rufes. Der unterbrochene Ruf wird aus dem Bündel in den Wartespeicher zurückgeschoben, wo er auf seine restliche Abfertigung wartet. Abfertigungsdisziplinen, bei denen Unterbrechungen von bestehenden Belegungen möglich sind, nennen wir - anlehnend an die englischsprachige Literatur - p r e e m p t i v e Disziplinen. Wird ein Ruf, der auf Position (n+s) stand, zurückgeschoben, dann wird dieser Ruf aus dem System verdrängt. Er geht ohne weitere Nachwirkung auf das System verloren.

I. 3 PLATZVARIABLE UND ZUSTANDSVARIABLE

Um die Frage: "Wie groß ist die mittlere Anzahl von Rufen im Bedienungssystem?" zu beantworten, muß die Zustandsentwicklung des Systems, d.h. sein Gesamtverhalten über der Zeit untersucht werden. Wir beschreiben die Zustandsentwicklung durch eine Zustandsvariable.

Wird aber die Frage gestellt: "Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf unterbrochen wird?", dann muß das Schicksal eines einzelnen Rufes während seines Aufenthaltes im Bedienungssystem beobachtet werden. Dazu verallgemeinern wir den in I.2 für das Warteverlustsystem eingeführten Begriff "Platz". Die Platzvariable eines Rufes soll das Schicksal dieses Rufes im Bedienungssystem beschreiben. Fällt ein Ruf zum Zeitpunkt $t=t_0$ ins Bedienungssystem ein, so gibt die Platzvariable für $t=t_0$ den Startplatz des Rufes an. Dieser Startplatz hängt vom Zustand (d.h. von der Zustandsvariablen) des Systems zum Zeitpunkt $t=t_0$ ab. Das weitere Schicksal des Rufes im System wird (im allgemeinen) beeinflußt durch die einfallenden und endenden Rufe und damit wieder durch den Zustand des Systems.
Erste Aufgabe bei der verkehrstheoretischen Untersuchung eines Bedienungssystems ist die Wahl einer geeigneten Zustands- und Platzbeschreibung. Oft reicht eine einzige (eindimensionale) Zufallsvariable nicht aus, wie z.B. bei seriellen und parallelen Warteschlangen oder auch im preemptiven Warteverlustsystem von Kapitel IV. Dann muß man zur Beschreibung mehrere (eindimensionale) Variable heranziehen. Diese kann man zu einer einzigen, mehrdimensionalen Zustandsvariablen zusammenfassen.

I. 4 PRIORITÄTSKLASSEN

Bei Prioritätsabfertigung sind die Rufe in Klassen verschiedener Priorität eingeteilt. Wir wollen r Prioritätsklassen annehmen. Die Klasse 1 hat höchste Priorität, Klasse r geringste Priorität.

Einen Ruf der Klasse i bezeichnen wir als i-Ruf. Unter der Klasse $\leq i$ verstehen wir die Rufe der Klassen 1, 2, ... bis i. Sie werden als $\leq i$-Rufe bezeichnet. Analog bedeutet ein >i-Ruf einen Ruf aus einer der Klassen i+1, i+2, ... bis r. Ein $\leq r$-Ruf ist ein beliebiger Ruf, ohne Ansehen seiner Prioritätsklasse. Diejenigen Größen, die sich auf eine bestimmte Klasse beziehen, werden wir unten links mit dem Klassenindex kennzeichnen.
So bedeutet ${}_iX(t)$ die Zahl der i-Rufe im System zur Zeit t. Es bedeutet ${}_{\leq i}X(t)$ die Zahl der $\leq i$-Rufe im System zur Zeit t. ${}_{\leq r}X(t)$ gibt die Gesamtzahl der Rufe im System zur Zeit t an.

Zustandsvariable und Verkehrscharakteristika ohne diese "Unten-Links-Indizierung" werden sich im allgemeinen auf das Warteverlustsystem ohne Prioritäten beziehen, das in Kapitel II behandelt wird. In diesem Sinne ist z.B. die spätere Gleichung (233): ${}_{\leq r}B=B$ zu verstehen: Die Gesamtverlustwahrscheinlichkeit ${}_{\leq r}B$ des preemptiven Warteverlustsystems -gemittelt über alle Prioritätsklassen- stimmt überein mit der Verlustwahrscheinlichkeit B im System ohne Prioritäten.

Ein i-Ruf hat bei preemptiver Priorität absoluten Vorrang über Rufe der Klasse >i. Er kann diese >i-Rufe nötigenfalls aus dem System verdrängen oder im Bündel unterbrechen. Innerhalb derselben Prioritätsklasse wird die Disziplin FIRST COME - FIRST SERVED angewandt: Von Rufen derselben Klasse wird derjenige mit Vorrang bedient, der zuerst angekommen ist. Die Startposition eines i-Rufes, der zur Zeit t in das Bedienungssystem einfällt, läßt sich mit Hilfe der Zustandsvariablen ${}_{\leq i}X(t)$ beschreiben: Für den Startplatz ν eines zur Zeit t einfallenden i-Rufes gilt:

$$\nu={}_{\leq i}X(t)+1 \qquad (1)$$

Ist ν=n+s+1, so wird der i-Ruf abgewiesen und geht sofort verloren. Ist ν=n+1,... bis (n+s), dann muß der i-Ruf warten. Ist ν=1,2,... bis n, dann wird der i-Ruf sofort bedient. Im preemptiven Warteverlustsystem kann ein i-Ruf mehrmals unterbrochen werden. Infolgedessen setzt sich die Gesamtzeit, die

ein Ruf im System verbringt, im allgemeinen aus mehreren Wartezeiten und mehreren Bedienungsabschnitten zusammen.
Im Warteverlustsystem ohne Prioritäten wird bei der Disziplin FIRST COME - FIRST SERVED der Startplatz durch die Zustandsvariable X(t) gegeben, wobei die Zufallsvariable X(t) die Zahl von Rufen im System zur Zeit t angibt.
Es gilt für den Startplatz ν:

$$\nu=X(t)+1 \qquad (2)$$

I. 5 DER ANRUFPROZESS

Der Anrufprozess beschreibt das Eintreffen der Bedienungswünsche (Rufe). Die ankommenden Rufe gehen entweder ohne Rückwirkung auf das System sofort verloren oder sie bleiben eine gewisse Zeit -die sich im allgemeinen aus Wartezeit und Bedienungszeit zusammensetzt- im Bedienungssystem.
Die Zahl j der Rufe im System ist gleich der Zahl der tätigen Quellen. Die restlichen Quellen sind frei und können weitere Rufe produzieren.

Ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen weiterer Rufe unabhängig von der Zahl j der schon tätigen Quellen, dann entspricht der Anrufprozess der Modellvorstellung einer unendlichen Zahl von Quellen, und er wird durch die Angabe des Angebots A (vergleiche II.4) vollständig beschrieben. Ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen weiterer Rufe jedoch abhängig von der Zahl j der schon tätigen Quellen, dann entspricht dies einem Anrufprozess, der von einer endlichen Zahl q von Verkehrsquellen ausgeht.

Den Anrufprozess wollen wir beschreiben durch die Wahrscheinlichkeit, mit der in der Zeit von t bis $(t+\Delta t)$ Rufe ins System einfallen. Für eine endliche Zahl von Verkehrsquellen ist die Rufeinfallwahrscheinlichkeit abhängig von der Zahl j der schon tätigen Quellen, d.h. abhängig von der Zahl j der Rufe im System. Für eine endliche Zahl von POISSON-Quellen ist die bedingte Wahrscheinlichkeit für den Einfall eines Rufes im Zeitintervall von t bis $(t+\Delta t)$ für den Zustand j Rufe im System und für kleine Δt gegeben durch:

P{EIN RUF FÄLLT EIN IM INTERVALL Δt| j RUFE IM SYSTEM} =

$$\lambda_j \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad (3)$$

P{MEHRERE RUFE FALLEN EIN IM INTERVALL Δt| j RUFE IM SYSTEM}=

$$o(\Delta t) \qquad (4)$$

Dabei ist λ_j eine (meist als linear angenommene) Funktion der Anzahl der (q-j) freien Quellen. Ferner ist $o(\Delta t)$ eine Funktion von höherer als 1. Ordnung in Δt. Eine Funktion $o(\Delta t)$ genügt den im Anhang Gleichung {1} bis {5} aufgeführten Regeln. Für unendliche Quellenzahl gilt für alle j:

$$\lambda_j = \lambda \qquad [5]$$

Die Rufeinfallwahrscheinlichkeiten sind hier unabhängig von der Zahl j tätiger Quellen:

P{EIN RUF FÄLLT EIN IM INTERVALL Δt} = $\lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$ [6]

P{MEHRERE RUFE FALLEN EIN IM INTERVALL Δt}= $o(\Delta t)$ [7]

Mit {9} und {6} gilt bei unendlicher Quellenzahl mit [6] und [7] die folgende Beziehung, wenn wir {3} berücksichtigen:

P{KEIN RUF FÄLLT EIN IM INTERVALL Δt} =

1 - P{EIN ODER MEHRERE RUFE FALLEN EIN IM INTERVALL Δt} =

$$1 - \{[\lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t)\} = 1 - \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad [8]$$

In ein System mit unendlich vielen POISSON Quellen möge zur Zeit t ein Ruf einfallen. Wir fragen nach jener Zeit, die bis zum Einfall des nächsten Rufes vergeht. Die Wahrscheinlichkeit, daß dieser Anrufabstand größer ist als x, bezeichnen wir mit:

P{ANRUFABSTAND >x} = L(x) [9]

Aus Gleichung [7] liest man für $\Delta t \to 0$ ab, daß der Anfangswert gleich 1 ist:

$$L(0) = 1 \qquad [10]$$

Da die Wahrscheinlichkeit, daß im Intervall Δt kein Ruf einfällt nach Gleichung [8] unabhängig vom Zeitpunkt t des Intervallbeginns ist, erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, daß der Anrufabstand größer als $(x+\Delta x)$ ist:

P{ANRUFABSTAND >x+Δx} =
P{ANRUFABSTAND >x} • P{KEIN RUF IM INTERVALL Δt}

Daraus wird mit [9] und [8]

$$L(x+\Delta x) = L(x) \cdot \{1 - \lambda \cdot \Delta x + o(\Delta x)\}$$

Mit {5}: $$L(x+\Delta x) - L(x) = -\lambda \cdot \Delta x \cdot L(x) + o(\Delta x)$$

Dividieren wir diese Gleichung durch Δx, so erhalten wir auf der linken Seite einen Differenzenquotienten, der für $\Delta x \to 0$ in die Ableitung $L'(x)$ übergeht: Mit {1} erhalten wir schließlich:

$$L'(x) = -\lambda \cdot L(x) \qquad [11]$$

Mit der Anfangsbedienung [10] ergibt sich aus [11] sofort:

$$L(x) = P\{\text{ANRUFABSTAND} > x\} = e^{-\lambda \cdot x} \qquad [12]$$

Dies bedeutet, daß der Anrufabstand bei u n e n d l i c h vielen POISSON-Quellen negativ exponentiell um den mittleren Anrufabstand $\frac{1}{\lambda}$ verteilt ist. Der Parameter λ wird Anrufrate genannt. Es ist λ die mittlere Zahl von ankommenden Rufen pro Zeiteinheit.
Bei e n d l i c h e r Quellenzahl gibt λ_j die mittlere Zahl von Rufen pro Zeiteinheit an, wenn sich das System während dieser ganzen Zeiteinheit im Zustand {j Rufe im System} befindet. Der Parameter λ_j ist also ein bedingter Erwartungswert; λ_j wird bedingte Anrufrate im Zustand {j Rufe im System} genannt. λ_0 ist die bedingte Anrufrate, wenn alle Quellen frei sind. Nehmen wir an, daß alle Quellen gleiche Intensität haben, dann ist die bedingte Anrufrate einer einzelnen freien Quelle $\frac{\lambda_0}{q}$ und die bedingten Anrufraten λ_j sind:

$$\lambda_j = \frac{q-\lambda}{q} \cdot \lambda_0 \qquad (13)$$

Für j = q ist die bedingte Anrufrate $\lambda_q = 0$: Es sind alle Quellen tätig, weshalb keine weiteren Rufe produziert werden können.
Sobald eine Quelle frei wird, kann sie wieder einen Ruf produzieren. Nehmen wir an, daß zur Zeit t eine bestimmte Quelle freigeworden ist und fragen wir nach dem Anrufabstand bis zum nächsten Ruf dieser Quelle. Wenn wir in der obigen Ableitung für unendliche Quellenzahl die Anrufrate λ durch die bedingte Anrufrate $\frac{\lambda_0}{q}$ einer freien Quelle ersetzen, dann erhalten wir als Ergebnis:
Der Anrufabstand einer freien Quelle ist negativ exponentiell um seinen Erwartungswert $\frac{q}{\lambda_0}$ verteilt.

I. 6 DER ENDEPROZESS

Der Endeprozess bestimmt die Abfertigungsdauern der Rufe. Für das untersuchte System sollen die Abfertigungsdauern unabhängig voneinander negativ exponentiell um die mittlere Abfertigungszeit h verteilt sein. Da oft die Formulierung gebraucht wird, "ein Ruf belegt eine Leitung", heißt h die m i t t l e r e B e l e g u n g s d a u e r. Es hat sich für diese Arbeit als vorteilhaft erwiesen, die mittlere Belegungsdauer h nicht auf die Zeiteinheit (h=1) zu normieren, wie es in vielen verkehrstheoretischen Arbeiten üblich ist. Ein Ruf möge zur Zeit t seine Abfertigung beginnen, d.h. er belegt zur Zeit t eine freie Leitung des Bündels. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß seine Abfertigungszeit länger als die Zeit x dauert:

$$P\{\text{ABFERTIGUNGSZEIT} > x\} = H(x) = e^{-\frac{x}{h}} \qquad (14)$$

Ein Ruf beginne seine Abfertigung zur Zeit t. Wir fragen nach der restlichen Abfertigungszeit zum Zeitpunkt (t+x), also x Zeiteinheiten nach Beginn der Abfertigung. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden: Hat der betrachtete Ruf im Zeitpunkt (t+x) seine Abfertigung bereits beendet, dann

ist die restliche Abfertigungszeit gleich 0. Dauert aber die Abfertigung im Zeitpunkt (t+x) noch an, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die restliche Abfertigungszeit größer als x_0 ist, gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit, daß die Gesamtabfertigungsdauer größer ist als $(x+x_0)$, vorausgesetzt, daß sie schon größer als x ist.
Diese bedingte Wahrscheinlichkeit läßt sich mit {12} berechnen:

$$P\{\text{ABFERTIGUNGSZEIT} > x+x_0 \mid \text{ABFERTIGUNGSZEIT} > x\} = \frac{P\{\text{ABFERTIGUNGSZEIT} > x+x_0, \text{ABFERTIGUNGSZEIT} > x\}}{P\{\text{ABFERTIGUNGSZEIT}>x\}} =$$

Wir wenden {11} an und setzen dann (14) ein:

$$\frac{P\{\text{ABFERTIGUNGSZEIT} > x+x_0\}}{P\{\text{ABFERTIGUNGSZEIT} > x\}} = \frac{e^{-\frac{x+x_0}{h}}}{e^{-\frac{x}{h}}} = e^{-\frac{x_0}{h}} \qquad (15)$$

Die Restabfertigungszeit ist also -genau wie die Gesamtabfertigungszeit- negativ exponentiell um den Erwartungswert h verteilt, und zwar unabhängig davon wie groß die schon vergangene Abfertigungszeit war.
Wir bestimmen jetzt die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf seine Belegung im Zeitintervall x bis $(x+\Delta x)$ beendet, w e n n wir wissen, daß sie zum Zeitpunkt x noch bestanden hat. Sie ist gleich jener bedingten Wahrscheinlichkeit, daß die Abfertigungsdauer kleiner oder höchstens gleich $(x+\Delta x)$ ist, wenn wir wissen, daß sie größer als x ist. Mit {13} und {15} erhalten wir:

$$P\{\text{BELEGUNGSENDE IM INTERVALL VON } x \text{ BIS } x+\Delta x\} =$$
$$P\{\text{ABFERTIGUNGSZEIT} \leq x+\Delta x \mid \text{ABFERTIGUNGSZEIT} > x\} =$$
$$1 - P\{\text{ABFERTIGUNGSZEIT} > x+\Delta x \mid \text{ABFERTIGUNGSZEIT} > x\} =$$
$$1 - e^{-\frac{\Delta x}{h}} \qquad (16)$$

Entwickeln wir nach Δx, so ergibt sich:

$$P\{\text{BELEGUNGSENDE IM INTERVALL VON } x \text{ BIS } x+\Delta x\} = \frac{\Delta x}{h} + o(\Delta x) \qquad (17)$$

Die Funktion $o(\Delta x)$ enthält die Glieder höherer als erster Ordnung in Δx, (die für kleine Δx verschwinden).

Zur Zeit t seien j Rufe im Bündel. Nach (15) sind die restlichen Abfertigungszeiten dieser j Rufe unabhängig davon, wie lange diese Rufe schon das Bündel belegen. Wir wollen die Zeit berechnen, die vergeht, bis die erste der zum Zeitpunkt t belegten j Leitungen frei wird. Wenn diese Zeit größer als x_0 sein soll, müssen alle j Belegungen eine restliche Abfertigungszeit größer x_0 haben. Die j restlichen Abfertigungsdauern sind unabhängig voneinander nach (14) verteilt:

$$P\{\text{ALLE } j \text{ BELEGUNGEN DAUERN NOCH} > x\} = \left(e^{-\frac{x}{h}}\right)^{j} = e^{-\frac{j}{h}x} \qquad (18)$$

Die m i t t l e r e Zeit, die vergeht bis die erste von j bestehenden Belegungen endet, ist demgemäß $\frac{h}{j}$. Sind alle n Leitungen im Bündel belegt, so muß man im Mittel

$$\frac{h}{n} \qquad (19)$$

Zeiteinheiten warten, bis eine Leitung frei wird. Aus der negativ exponentiellen Verteilung folgt gemäß (14) und (17) -wenn wir dort h durch $\frac{h}{j}$ ersetzen- sofort die Wahrscheinlichkeit, daß von j zur Zeit t bestehenden Belegungen im Zeitintervall Δt eine Belegung endet:

$P\{\text{EINE VON } j \text{ BESTEHENDEN BELEGUNGEN ENDET IM INTERVALL } \Delta t\}$ =

$$\frac{j}{h} \cdot \Delta t \qquad (20)$$

Die Wahrscheinlichkeit für mehrere Ereignisse {Belegungsende} innerhalb von Δt ergibt sich als Produkt von Wahrscheinlichkeiten der Form (20) und es gilt unter Berücksichtigung der Rechenregeln für eine Funktion $o(\Delta t)$:

$$P\{\text{MEHRERE BELEGUNGSENDEN IM INTERVALL } \Delta t\} = o(\Delta t) \qquad (21)$$

Analog zu der bedingten Anrufrate λ_j nennen wir $\frac{j}{h}$ die bedingte Enderate, wenn j Rufe im Bündel sind. Es ist $\frac{n}{h}$ die bedingte Enderate, wenn alle n Leitungen belegt sind. Befinden sich mehr als n Rufe im System, ändert sich die Enderate nicht mehr, da auch für j>n nur n Rufe im Bündel sind und deshalb endigen können. Wir definieren allgemein

die bedingte Enderate μ_j im Zustand {j Rufe im System} als

$$\mu_j = \begin{cases} \frac{j}{h} & j \le n \\ \frac{n}{h} & j > n \end{cases} \qquad (22)$$

Damit wird allgemein aus Gleichung (20):

$P\{\text{EINE LEITUNG WIRD FREI IM INTERVALL } \Delta t \mid j \text{ RUFE IM SYSTEM}\}$ =

$$\mu_j \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad (23)$$

I. 7 ANRUF- UND ENDEPROZESS ALS MARKOV-PROZESSE

Ein MARKOV-Prozess ist bestimmt durch seinen gegenwärtigen Zustand. Die Entstehungsgeschichte des Zustandes ist irrelevant für die zukünftige Entwicklung des MARKOV-Prozesses.

Mit Gleichung (15) haben wir gesehen, daß die negative Exponentialverteilung die MARKOV-Eigenschaft besitzt: Die Wahrscheinlichkeit, mit der im Zeitintervall Δt ein Ruf einfällt oder eine Belegung endet, hängt von der Zahl j der Rufe im System ab, aber nicht davon, wie lange eine Belegung schon besteht oder wie lange schon kein Ruf mehr ins System eingefallen ist. Die MARKOV-Eigenschaft des Anruf- und des Endeprozesses manifestiert sich in den Gleichungen (3), (4) bzw. (6), (7) und in (23). Diese Gleichungen seien hier zusammengefaßt:

Die bedingten Anruf- bzw. Endewahrscheinlichkeiten für das Zeitintervall t bis $(t+\Delta t)$ lauten, wenn sich j Rufe im System befinden:

$P\{\text{EIN RUF FÄLLT EIN IM ZEITINTERVALL } \Delta t \mid j \text{ RUFE IM SYSTEM}\}$ =

$$\lambda_j \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad (24)$$

$P\{\text{EINE BELEGUNG ENDET IM INTERVALL } \Delta t \mid j \text{ RUFE IM SYSTEM}\}$ =

$$\mu_j \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad (25)$$

Die Wahrscheinlichkeit für mehrere Ereignisse im Intervall von t bis $(t+\Delta t)$ ergeben sich als Produkte aus den Wahrscheinlichkeiten (24) und (25). Deshalb gilt:

$$P\{\text{MEHRERE EREIGNISSE IM INTERVALL } \Delta t | j \text{ RUFE IM SYSTEM}\} = o(\Delta t) \tag{26}$$

Schließlich erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, daß kein Ruf einfällt und keine Belegung endet im Zeitintervall von t bis $(t+\Delta t)$ direkt aus den Gleichungen (24), (25) und (26) mit {6} und {9} :

$$P\{\text{KEIN EREIGNIS IM INTERVALL} \Delta t | j \text{ RUFE IM SYSTEM}\} = 1 - (\lambda_j+\mu_j) \cdot \Delta t + o(\Delta t) \tag{27}$$

Bei unendlicher Quellenzahl gilt in (24) und (27):

$$\lambda_j = \lambda \qquad [28]$$

II. DAS WARTEVERLUSTSYSTEM OHNE PRIORITÄTEN

II. 1 ALLGEMEINES

Die Berechnung des Warteverlustsystems mit n Leitungen und s Warteplätzen geht bei FIRST COME - FIRST SERVED Disziplin für eine unendliche Zahl von POISSON-Quellen zurück auf ERLANG und JENSEN und für eine endliche Zahl von POISSON-Quellen auf BAUER und STÖRMER.

Nach I.1 gehen die Formeln des Warteverlustsystems für $s = 0$ über in diejenigen des reinen Verlustsystems. Für $s = q$ bzw. bei unendlicher Quellenzahl für $s \to \infty$ geht das Warteverlustsystem über in das reine Wartesystem. Wie wir in I.3 und I.4 gesehen haben, wählen wir bei FIRST COME - FIRST SERVED Disziplin als Zustandsvariable $X(t)$ die Zahl der Rufe, die sich zur Zeit t im System befinden. Ist $X(t)=j$, so sagen war, das System befindet sich zur Zeit t im Zustand j. Die Startposition ν eines zur Zeit t einfallenden Rufes ist nach (2): $\nu = X(t)+1$.

II. 2 DIE ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN

Die Zustandswahrscheinlichkeit $P_j(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß zur Zeit t sich j Rufe im System befinden:

$$P\{j \text{ RUFE IM SYSTEM ZUR ZEIT } t\} = P_j(t) \tag{29}$$

Da sich das System mit Sicherheit in einem der Zustände $j = 0,1,\ldots,n+s$ befindet, gilt

$$\sum_{j=o}^{n+s} P_j(t) = 1 \tag{30}$$

Das System startet zur Zeit $t=0$ mit einem Anfangszustand, der durch die Anfangsverteilung $P_j(t=0)$ beschrieben wird.
Um die zeitabhängigen Zustandswahrscheinlichkeit $P_j(t)$ zu berechnen, betrachten wir zwei dicht aufeinander folgende Zeitpunkte t und $(t+\Delta t)$. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit $P_j(t+\Delta t)$, daß sich das System zum Zeitpunkt $(t+\Delta t)$ im Zustand j befindet; dabei sei zunächst $0 < j < (n+s)$. Die folgenden 4 Ereignisse können auftreten:

(1) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System zum Zeitpunkt t im Zustand (j-1) befindet und durch einen Rufeinfall innerhalt Δt in den Zustand j übergeht, ist mit (24):

$$P_{j-1}(t)\cdot[\lambda_{j-1}\cdot\Delta t + o(\Delta t)]$$

(2) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System zum Zeitpunkt t im Zustand j befindet und in diesem Zustand während Δt verweilt ist mit (27):

$$P_j(t)[1 - \Delta t\cdot(\lambda_j+\mu_j) + o(\Delta t)]$$

(3) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System zum Zeitpunkt t im Zustand (j+1) befindet und durch ein Belegungsende innerhalb Δt in den Zustand j übergeht ist mit (25):

$$P_{j+1}(t)[\mu_{j+1}\cdot\Delta t + o(\Delta t)]$$

(4) Die Wahrscheinlichkeit, daß das System aus einem Zustand zur Zeit t durch Mehrfachereignisse in den Zustand j zur Zeit $(t+\Delta t)$ übergeht ist mit (26):

$$o(\Delta t)$$

Addieren wir diese vier Wahrscheinlichkeiten und fassen die Funktionen höherer Ordnung zusammen, so erhalten wir (nach {14}):

$$P_j(t+\Delta t) = P_{j-1}(t)\cdot\lambda_{j-1}\cdot\Delta t + P_j(t)\,[1-\Delta t(\lambda_j+\mu_j)] + P_{j+1}(t)\cdot\mu_{j+1}\,\Delta t + o(\Delta t) \qquad (31)$$

Und daraus durch Umordnung:

$$P_j(t+\Delta t) - P_j(t) =$$

$$\Delta t\cdot\lambda_{j-1}\,P_{j-1}(t) - \Delta t\,(\lambda_j+\mu_j)\cdot P_j(t) + \Delta t\,\mu_{j+1}\,P_{j+1}(t) + o(\Delta t)$$

Dividieren wir diese Gleichung durch Δt, so erhalten wir auf der linken Seite einen Differenzenquotienten, der für $\Delta t \to 0$ in die zeitliche Ableitung $P_j'(t)$ übergeht.

Mit {1} ergibt sich für $\Delta t \to 0$ die Differentialgleichung:

$$P_j'(t) = \lambda_{j-1}\,P_{j-1}(t) - (\lambda_j+\mu_j)\cdot P_j(t) + \mu_{j+1}\,P_{j+1}(t) \qquad (32)$$

Wir bestimmen jetzt die entsprechende Differentialgleichung für j = 0.
Hier fällt der erste Term weg: Der Zustand j=0 kann innerhalb des Intervalls Δt bei Vernachlässigung von Mehrfachübergängen nur entstehen aus den Zuständen j=0 und j=1, wobei man noch $\mu_0=0$ berücksichtigen kann:

$$P_0'(t) = -\lambda_0\cdot P_0(t) + \mu_1\cdot P_1(t) \qquad (33)$$

Der Zustand j=(n+s) kann innerhalb Δt bei Vernachlässigung von Mehrfachereignissen entstehen aus dem Zustand j=(n+s-1), indem ein Ruf in diesen Zustand innerhalb Δt einfällt und aus dem Zustand j=(n+s) selbst, wenn kein Ruf innerhalb Δt endet. Mit (25) ergibt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß im Zustand j=(n+s) kein Ruf endet zu:

P{KEIN RUFENDE INNERHALB Δt | n+s RUFE IM SYSTEM} =

$$1 - \mu_{n+s}\cdot\Delta t + o(\Delta t) \qquad (34)$$

Es darf aber -im Gegensatz zur Gleichung (31) für j < (n+s)- ein Ruf in den Zustand j=(n+s) einfallen. Dieser einfallende Ruf geht verloren und verändert den Zustand des Systems nicht. Aus der Gleichung:

$$P_{n+s}(t+\Delta t) = P_{n+s-1}(t)\cdot\lambda_{n+s-1}\cdot\Delta t + P_{n+s}(t)[1-\mu_{n+s}\cdot\Delta t] + o(\Delta t)$$

erhalten wir analog zu (31):

$$P_{n+s}'(t+\Delta t) = \lambda_{n+s-1}\,P_{n+s-1}(t) - \mu_{n+s}\,P_{n+s}(t) \qquad (35)$$

Zusammenfassend haben wir das folgende Differentialgleichungssystem für die zeitabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda_0\,P_0(t) + \mu_1\,P_1(t) \\ P_j'(t) &= \lambda_{j-1}\,P_{j-1}(t) - (\lambda_j+\mu_j)\,P_j(t) + \mu_{j+1}\,P_{j+1}(t) \\ P_{n+s}'(t) &= \lambda_{n+s-1}\,P_{n+s-1}(t) - \mu_{n+s}\,P_{n+s}(t) \end{aligned} \qquad (36)$$

Addieren wir die Differentialgleichungen des Systems (36) von einem beliebigen Wert j=m bis j=(n+s) auf, so erhalten wir die folgende Darstellung:

$$\sum_{j=m}^{n+s} P_j'(t) = \lambda_{m-1} P_{m-1}(t) - \mu_m P_m(t) \tag{37}$$

Nochmaliges Aufsummieren der Gleichungen (37) von m=1 bis m=(n+s) führt zu:

$$\sum_{m=1}^{n+s} \sum_{j=m}^{n+s} P_j'(t) = \sum_{m=0}^{n+s-1} \lambda_m \cdot P_m(t) - \sum_{m=1}^{n+s} \mu_m \cdot P_m(t) \tag{38}$$

Aus dem Differentialgleichungssystem (36) erhält man zusammen mit der Normierungsbedingung (30) und der Anfangsverteilung $P_j(t=0)$ die zeitabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten $P_j(t)$. Für große t streben die $P_j(t)$ einer Grenzverteilung zu, die von der Anfangsverteilung $P_j(t=0)$ unabhängig ist /4/. Für die zeitunabhängige Lösung der Zustandswahrscheinlichkeiten gilt:

$$P_j(t) = P_j \qquad\qquad P_j'(t) = 0 \tag{39}$$

D.h. die Zustandswahrscheinlichkeiten des stationären Prozesses sind zeitunabhängig, ihre zeitliche Ableitung verschwindet. Aus der Normierung (30) wird beim stationären Prozeß:

$$\sum_{j=0}^{n+s} P_j = 1 \tag{40}$$

Setzen wir die Stationaritätsbedingungen (39) in das Differentialgleichungssystem (36) ein, so erhalten wir ein homogenes lineares Gleichungssystem für die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten P_j mit verschwindender Systemdeterminante:

$$\begin{aligned} \lambda_0 P_0 \qquad\qquad - \mu_1 P_1 &= 0 \\ -\lambda_{j-1} P_{j-1} + (\lambda_j + \mu_j) P_j - \mu_{j+1} P_{j+1} &= 0 \\ -\lambda_{n+s-1} P_{n+s-1} + \mu_{n+s} P_{n+s} &= 0 \end{aligned} \tag{41}$$

Mit (40) wird dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar. Setzen wir die Stationaritätsbedingung (39) in das Differentialgleichungssystem (37) ein, so erhalten wir eine Rekursionsformel für die Zustandswahrscheinlichkeiten P_j:

$$\mu_m \cdot P_m = \lambda_{m-1} \cdot P_{m-1} \tag{42}$$

Gleichung (41) manifestiert ein stationäres Gleichgewicht für einen bestimmten Z u s t a n d j: Die Wahrscheinlichkeit für Übergänge nach dem Zustand j muß gleich sein der Wahrscheinlichkeit für Übergänge aus dem Zustand j.

Gleichung (42) dagegen manifestiert ein stationäres Gleichgewicht für den Ü b e r g a n g der Zustandsvariablen x(t) zwischen m und m-1. Die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs m → m-1 muß beim stationären Prozeß genauso groß sein, wie die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang m-1 → m. (Während das Gleichgewicht für einen bestimmten Z u s t a n d j immer für stationäre Prozesse gilt, ist das Gleichgewicht der Ü b e r g ä n g e nur dann für einen stationären Prozeß gültig, wenn keine anderen Übergänge m → j → k → m-1 existieren, die den direkten Übergang m → m-1 umgehen. Hier ist nur der direkte Übergang m → m-1 möglich. Ein Beispiel für ein komplizierteres Gleichgewicht der Übergänge werden wir in Kapitel IV.6 kennenlernen.

Aus der Rekursionsformel (42) ergibt sich sofort:

$$P_j = P_0 \cdot \prod_{m=1}^{j} \frac{\lambda_{m-1}}{\mu_m} \tag{43}$$

oder auch

$$P_j = P_{n+s} \cdot \prod_{m=j+1}^{n+s} \frac{\mu_m}{\lambda_{m-1}} \tag{44}$$

Durch Einsetzen von (43) bzw. (44) in die Normierungsbedingung (40) erhalten wir:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n+s} \prod_{m=1}^{j} \frac{\lambda_{m-1}}{\mu_m}} \tag{45}$$

$$P_{n+s} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n+s} \prod_{m=j+1}^{n+s} \frac{\mu_m}{\lambda_{m-1}}} \tag{46}$$

Dabei beachten wir, daß analog zur leeren Summe -der ja der Wert 0 beigelegt wird- das leere Produkt durch den Wert 1 definiert ist.

Setzen wir die Stationaritätsbedingung (39) in die Differentialgleichung (38) ein, so haben wir schließlich die folgende Gleichung, auf die wir im Abschnitt II.5 zurückkommen werden:

$$\sum_{m=1}^{n+s} \mu_m P_m = \sum_{m=0}^{n+s-1} \lambda_m P_m \qquad (47)$$

Bei u n e n d l i c h e r Quellenzahl ($\lambda_j=\lambda$) führen wir die Abkürzung

$$\beta_m = \frac{\mu_m}{\lambda} \qquad (48)$$

ein und definieren die Grundfunktion

$$\phi_{\nu,\kappa} = \sum_{j=\nu}^{\kappa} \prod_{m=j+1}^{\kappa} \beta_m \qquad (49)$$

Diese neue Grundfunktion $\phi_{\nu,\kappa}$ kann sehr vorteilhaft als Parameterfunktion im Warteverlustsystem verwendet werden. Die Grundfunktion ist eine gebrochen rationale Funktion des Verkehrsparameters

$$A = h \cdot \lambda \qquad (50)$$

Der Verkehrsparameter A wird als Verkehrsangebot bezeichnet (Vergl. II.4).

Die wichtigsten Eigenschaften der Grundfunktion werden im Anhang hergeleitet. Wir wollen deshalb hier nur noch zwei Schreibweisen verabreden:

$$\phi_{\kappa} = \phi_{0,\kappa}$$

$$\Psi_{\rho} = \phi_{\nu,\nu+\rho} \qquad \nu \geq n$$

Wir führen die Grundfunktion $\phi_{\nu,\kappa}$ in (45) ein und erhalten:

$$P_{n+s} = \frac{1}{\phi_{n+s}} \qquad (51)$$

Für die anderen Zustandswahrscheinlichkeiten gilt nach (43) bzw. (44):

$$P_j = P_{n+s} \prod_{m=j+1}^{n+s} \beta_m \qquad (52)$$

$$P_j = \frac{P_0}{\prod_{m=1}^{j} \beta_m} \qquad (53)$$

$$P_0 = \frac{n!\, n^s}{A^{n+s}} \; \frac{1}{\phi_{n+s}} \qquad (54)$$

Setzen wir β_m ein, so ergibt sich mit Gleichung (48) und (50):

$$P_j = \frac{A^j}{j!} P_0 \qquad j = 0, 1, \ldots, n \qquad (55)$$

$$P_{n+j} = \left(\frac{A}{n}\right)^j P_n \qquad j = 0, 1, \ldots, s \qquad (56)$$

$$P_n = \frac{n^s}{A^s} \; \frac{1}{\phi_{n+s}} \qquad (57)$$

Die Verwendung der Grundfunktion $\phi_{\nu,\kappa}$ bringt (auch im folgenden) eine wesentliche Vereinfachung der Herleitung und Darstellung vieler Verkehrscharakteristika. Die Grundfunktion vermeidet auch die explizite Unterscheidung der Fälle A = n und A ≠ n, die sonst schon bei der Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten notwendig ist.

II. 3 DIE MITTLERE ANRUFRATE

Nach I.5 haben wir bei unendlicher Quellenzahl den Parameter λ eingeführt als die mittlere Zahl von Rufen, die pro Zeiteinheit in das System einfallen.
Wir werden jetzt auch für den Fall endlicher Quellenzahl eine mittlere Anrufrate λ berechnen. Die bedingte Anrufrate λ_j ist

die mittlere Zahl von einfallenden Rufen pro Zeiteinheit, wenn sich das System während dieser ganzen Zeiteinheit im Zustand j befindet. Jetzt betrachten wir eine aus dem stationären Verkehrsprozess beliebig herausgegriffene Zeiteinheit. Die während dieser Zeiteinheit einfallenden Rufe verteilen sich auf die verschiedenen Zustände j. Im Mittel ist jeder Zustand j anteilig mit seiner Wahrscheinlichkeit P_j vertreten. Deshalb fallen im Mittel

$$\lambda_j \cdot P_j \tag{58}$$

Rufe pro Zeiteinheit in den Zustand j ein. Zählen wir alle einfallenden Rufe zusammen, so erhalten wir die Gesamtzahl von Rufen, die im Mittel pro Zeiteinheit in das System einfallen, d.h. die mittlere Anrufrate λ:

$$\lambda = \sum_{j=0}^{n+s} \lambda_j P_j \tag{59}$$

(Bei unendlicher Quellenzahl sind wegen [28] und (40) die beiden Seiten von (59) trivialerweise gleich.)
Die mittlere Anrufrate λ ist bei unendlicher Quellenzahl ein systemunabhängiger Verkehrsparameter. Bei endlicher Quellenzahl wird die Anrufrate λ wegen der systemabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten ebenfalls systemabhängig.
Es soll jetzt die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, daß ein einfallender Ruf den Zustand j antrifft. Wir erhalten diese Wahrscheinlichkeit als das Verhältnis der pro Zeiteinheit in den Zustand j einfallenden Rufe (58) dividiert durch die Gesamtzahl λ der pro Zeiteinheit überhaupt einfallenden Rufe:

$$P\{\text{RUF FÄLLT IN ZUSTAND } j \text{ EIN}\} = \frac{\lambda_j}{\lambda} P_j \tag{60}$$

Bei unendlicher Quellenzahl gilt wegen [28] :

$$P\{\text{RUF FÄLLT IN ZUSTAND } j \text{ EIN}\} = P_j \qquad [61]$$

Damit ein Ruf auf Platz j startet, muß im System der Zustand (j-1) herrschen. Für die Wahrscheinlichkeit F_j, daß ein Ruf auf Platz j startet, gilt:

$$F_j = P\{\text{RUF STARTET AUF PLATZ } j\} = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda_{j-1} \cdot P_{j-1} \tag{62}$$

Bei unendlicher Quellenzahl gilt wegen [28]:

$$F_j = P_{j-1} \qquad [63]$$

II. 4 DAS ANGEBOT

Das Angebot ist definiert als die während der mittleren Belegungsdauer h im Mittel einfallende Zahl von Rufen:

$$A = h \cdot \lambda = h \cdot \sum_{j=o}^{n+s} \lambda_j \cdot P_j \tag{64}$$

Genauso wie die mittlere Anrufrate λ ist bei endlicher Quellenzahl das Angebot A systemabhängig. Bei unendlicher Quellenzahl ist das Angebot A ebenso wie λ systemunabhängig.

II. 5 DIE MITTLERE ENDERATE

Ersetzen wir in Punkt 4 die bedingten Anrufraten λ_j durch die bedingten Enderaten μ_j, so kommen wir auf analogem Weg zur mittleren Enderate μ:

$$\mu = \sum_{j=1}^{n+s} \mu_j \cdot P_j \tag{65}$$

Die Summe beginnt bei j = 1, da $\mu_0 = 0$ ist. Die mittlere Enderate μ ist die mittlere Zahl von Rufen, die pro Zeiteinheit ihre Abfertigung beenden. Nach Gleichung (47) gilt mit (59):

$$\mu = \lambda - \lambda_{n+s} \cdot P_{n+s} \tag{66}$$

Nach (58) ist $\lambda_{n+s} \cdot P_{n+s}$ die mittlere Zahl von Rufen, die pro Zeiteinheit in den Zustand (n+s) einfallen und deshalb verloren gehen. Gleichung (66) läßt sich demgemäß wie folgt interpretieren: Beim stationären Prozess muß die mittlere Zahl von endenden Rufen (μ) gleich sein der mittleren Zahl von einfallenden Rufen (λ) abzüglich der mittleren Zahl von Verlustrufen ($\lambda_{n+s} \cdot P_{n+s}$).

II. 6 DIE VERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT

B ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein ankommender Ruf verloren geht, d.h. daß er den Zustand (n+s) antrifft.
Mit (60) gilt:

$$B = \frac{\lambda_{n+s}}{\lambda} P_{n+s} \tag{67}$$

Für unendliche Quellenzahl ($\lambda_j=\lambda$) ist mit [28] :

$$\mathcal{B} = P_{n+s} = \frac{1}{\phi_{n+s}} \qquad [68]$$

II. 7 DIE ERFOLGSWAHRSCHEINLICHKEIT

S ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ruf erfolgreich ist, also nicht verlorengeht:

$$S = 1 - B \qquad (69)$$

oder auch:

$$S = \sum_{j=0}^{n+s} F_j \qquad (70)$$

Für unendliche Quellenzahl ist mit [68] und {35}:

$$S = 1 - \frac{1}{\phi_{n+s}} = \frac{n}{A} \frac{\phi_{n+s-1}}{\phi_{n+s}} \qquad (71)$$

II. 8 DIE BLOCKIERUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT

Die Blockierungswahrscheinlichkeit E ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein ankommender Ruf abgewiesen wird oder nicht sofort eine freie Leitung findet, also einen der Zustände j = n, n+1,... bis (n+s) antrifft. Mit (62) ist:

$$E = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=n}^{n+s} \lambda_j P_j \qquad (72)$$

Bei unendlicher Quellenzahl ($\lambda_j=\lambda$) berechnen wir mit [36] und [38] :

$$E = \sum_{j=n}^{n+s} P_j = P_{n+s} \sum_{j=n}^{n+s} \prod_{m=j+1}^{n+s} \beta_m = P_{n+s}\, \phi_{n,n+s} = \frac{\Psi_s}{\phi_{n+s}} \qquad [73]$$

II. 9 DIE FREIWAHRSCHEINLICHKEIT

Die Freiwahrscheinlichkeit F ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein ankommender Ruf sofort eine freie Leitung findet:

$$F = 1 - E \qquad (74)$$

$$F = \sum_{j=1}^{n} F_j \qquad (75)$$

Mit [73] und {42} ergibt sich bei unendlicher Quellenzahl:

$$F = 1 - \frac{\Psi_s}{\phi_{n+s}} = \left(\frac{n}{A}\right)^{s+1} \frac{\phi_{n-1}}{\phi_{n+s}} \qquad (76)$$

II. 10 DIE WARTEWAHRSCHEINLICHKEIT

Die Wartewahrscheinlichkeit W ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein ankommender Ruf warten muß, also auf einem der Plätze j = n+1,n+2,...,n+s startet:

$$W = \sum_{j=n+1}^{n+s} F_j \qquad (77)$$

Es gelten die beiden Beziehungen:

$$F + W + B = 1 \qquad (78)$$

$$W + B = E \qquad (79)$$

Aus der letzten Beziehung ergibt sich für unendliche Quellenzahl sofort mit {41}:

$$W = \frac{\Psi_{s-1}}{\phi_{n+s}} = \frac{n}{A} \frac{\Psi_{s-1}}{\phi_{n+s}} \qquad (80)$$

II. 11 DIE BONDELBELASTUNG

Y ist die mittlere Zahl von belegten Leitungen. In den Zuständen j = 0,1,... bis n sind j Leitungen belegt. In den Zuständen j = (n+1),... bis (n+s) sind jeweils n Leitungen belegt. Es ist also Y als der Erwartungswert der Zahl belegten Leitungen:

$$Y = \sum_{j=1}^{n} j \cdot P_j + \sum_{j=n+1}^{n+s} n\, P_j \qquad (81)$$

Diese Gleichung können wir zusammenfassen:

$$Y = \sum_{j=1}^{n+s} \min(j, n)$$

Mit μ_j aus Gleichung (22) lautet Y jetzt unter Anwendung von(65):

$$Y = h \sum_{j=1}^{n+s} \mu_j P_j = h \cdot \mu \qquad (82)$$

Mit (66) und (67) gilt:

$$Y = A(1 - B) = A \cdot S \qquad (83)$$

Bei unendlicher Quellenzahl gilt mit [68] und {35}:

$$Y = A\left(1 - \frac{1}{\phi_{n+s}}\right) = n \frac{\phi_{n+s-1}}{\phi_{n+s}} \qquad [84]$$

Analog zu Gleichung (66) können wir Y in der Form Y = A - A•B interpretieren: A ist das gesamte Angebot und A•B ist derjenige Teil des Angebots A, der verlorengeht. Y = A - A•B ist also derjenige Teil des Angebots, der vom Bündel verarbeitet wird.

II. 12 DIE WARTEBELASTUNG

Q sei die mittlere Zahl von belegten Warteplätzen. Im Zustand (n+k) sind k Warteplätze belegt. Deshalb ergibt sich der Erwartungswert zu:

$$Q = \sum_{k=1}^{s} k \cdot P_{n+k} \qquad (85)$$

Bei unendlicher Quellenzahl ist mit [57] :

$$Q = P_n \sum_{k=1}^{s} k \left(\frac{A}{n}\right)^k \qquad [86]$$

Daraus ergibt sich: Für $A \neq n$ $\qquad Q = \frac{A}{n-A} \cdot \frac{\Psi_s - (s+1)}{\phi_{n+s}}$

$A = n \qquad Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{s(s+1)}{\phi_{n+s}} \qquad [87]$

II. 13 DIE SYSTEMBELASTUNG

X ist die mittlere Zahl von Rufen im System (Leitungen und Warteplätze)

$$X = \sum_{j=1}^{n+s} j P_j \qquad (88)$$

Mit (81) und (85) ergibt sich:

$$X = Y + Q \qquad (89)$$

II. 14 DIE BELASTUNG PRO PLATZ

X_j sei die Wahrscheinlichkeit, daß Platz j belegt ist:

$$X_j = \sum_{\nu=j}^{n+s} P_\nu \qquad (90)$$

X_j bedeutet auch die Belastung von Platz k, die es beispielsweise erlaubt, die unterschiedlichen Belastungen der verschiedenen Warteplätze zu untersuchen (j = n+1,...,n+s). Die Belastung einer bestimmten Gruppe von Plätzen (z.B. der Leitungen des Bündels) erhält man durch Aufsummation der Belastungen X_j der zur Gruppe gehörigen Plätze (z.B. der Leitungen).

Deshalb gilt für das Gesamtsystem, bzw. das Bündel bzw. den Wartespeicher nach Vertauschung der Summen:

Mit (88):

$$\sum_{j=1}^{n+s} X_j = \sum_{j=1}^{n+s} \sum_{\nu=j}^{n+s} P_\nu = \sum_{\nu=1}^{n+s} \nu P_\nu = X \qquad (91)$$

Mit (81):

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=j}^{n+s} P_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \nu P_\nu + \sum_{j=n+1}^{n+s} n P_j = Y \qquad (92)$$

Mit (85):

$$\sum_{j=n+1}^{n+s} X_j = \sum_{j=n+1}^{n+s} \sum_{\nu=j}^{n+s} P_\nu = \sum_{\nu=1}^{s} \nu P_{n+\nu} = Q \qquad (93)$$

Für unendliche Quellenzahl erhalten wir mit [52] und {36} als Belastung von Platz j:

$$X_j = \sum_{\nu=j}^{n+s} P_\nu = P_{n+s} \sum_{\nu=j}^{n+s} \prod_{m=\nu+1}^{n+s} \beta_m = \frac{\phi_{j,n+s}}{\phi_{n+s}} \qquad [94]$$

Die Grundfunktion $\phi_{j,n+s}$ kann also interpretiert werden als die nicht normierte Belastung des Platzes j im Warteverlustsystem mit n Leitungen und s Speicherplätzen. Die

tatsächliche Belastung ergibt sich durch Normierung auf die Grundfunktion ϕ_{n+s} .
Setzen wir die Gleichung (94) in (91),(92) und (93) ein, so erhalten wir:

$$X = \frac{1}{\phi_{n+s}} \sum_{j=1}^{n+s} \phi_{j,n+s} \qquad [95]$$

$$Y = \frac{1}{\phi_{n+s}} \sum_{j=1}^{n} \phi_{j,n+s} \qquad [96]$$

$$Q = \frac{1}{\phi_{n+s}} \sum_{j=n+1}^{n+s} \phi_{j,n+s} = \frac{1}{\phi_{n+s}} \sum_{j=0}^{s-1} \Psi_j \qquad [97]$$

Vergleichen wir die Ausdrücke (96) und (97) mit (84) und (87) so ergeben sich zwei wichtige Beziehungen:

$$\sum_{j=1}^{n} \phi_{j,n+s} = n \cdot \phi_{n+s-1} \qquad [98]$$

$$\sum_{j=n+1}^{n+s} \phi_{j,n+s} = \sum_{j=0}^{s-1} \Psi_j = \begin{cases} \frac{A}{n-A} \left[\Psi_s - (s+1) \right] & A \neq n \\ \frac{1}{2}\, s\,(s-1) & A = n \end{cases} \qquad [99]$$

II. 15 DIE BEDIENUNGSZEITEN

Im Warteverlustsystem ohne Prioritäten ist die Bedienungszeit eines Verlustrufes gleich 0. Für die restlichen, also erfolgreichen Rufe (seien sie nun Warterufe oder Rufe, die sofort ins Bündel kommen) ist die Bedienungszeit nach Gleichung (14) aus Kapitel I.6 verteilt - unabhängig vom Startplatz des Rufes.

Die Wahrscheinlichkeit $M_j(x)$, dass ein auf Platz j startender Ruf das Bündel länger als die Zeit x belegt, ergibt sich für alle j gemäss Gleichung (14):

$$M_j(x) = P\{\text{BEDIENUNGSZEIT} > x \,|\, \text{START AUF PLATZ } j\} = e^{-\frac{x}{h}} \qquad (100)$$

Multiplizieren wir Gleichung (100) mit der Wahrscheinlichkeit F_j, daß ein Ruf auf Platz j startet, dann erhalten wir die Verbundwahrscheinlichkeit:

$$P\{\text{RUF STARTET AUF PLATZ } j \text{ , BEDIENUNGSZEIT} > x\} = F_j \cdot M_j(x) \qquad (101)$$

Wenn wir die Verbundwahrscheinlichkeiten (101) über alle Startplätze aufsummieren, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit M(x), dass ein beiliebiger Ruf eine Bedienungszeit grösser x hat:

$$M(x) = \sum_{j=1}^{n+s} F_j \cdot M_j(x) \qquad (102)$$

Mit $M_j(x)$ aus (100) und unter Berücksichtigung von (70) erhalten wir:

$$M(x) = S \cdot e^{-\frac{x}{h}} \qquad (103)$$

Die mittlere Bedienungszeit M eines beliebigen Rufes ergibt sich aus Gleichung (103) durch Integration gemäss {20}.

$$M = S \cdot h \qquad (104)$$

M lässt sich aber auch direkt bestimmen: Mit der Wahrscheinlichkeit B geht ein ankommender Ruf verloren und hat die Bedienungszeit 0. Mit der Wahrscheinlichkeit S kommt ein Ruf ins System; seine mittlere Bedienungszeit ist dann gleich der mittleren Belegungsdauer h. Also gilt für die mittlere Bedienungsdauer M eines beliebigen Rufes:

$$M = B \cdot 0 + S \cdot h = S \cdot h$$

II. 16 DIE WARTEZEITEN

Die Wartezeit eines beobachteten Rufes hängt von seinem Startplatz j ab. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit $T_j(x)$, dass ein auf Platz j startender Ruf eine Wartezeit grösser x hat:

$$P\{\text{WARTEZEIT} > x \mid \text{START AUF PLATZ } j\} = T_j(x) \qquad (105)$$

Genauso wie die Verlustrufe, so haben auch diejenigen Rufe, die sofort ins Bündel kommen die Wartezeit 0. Deshalb gilt:

$$T_j(x) = 0 \qquad j = 1,2,\dots,n \tag{106}$$

Startet ein Ruf auf Platz (n+1), so muss er warten, bis eine der n Belegungen endet. Nach (18) mit j=n ist seine Wartezeit folgendermassen verteilt:

$$T_{n+1}(x) = e^{-\frac{n}{h}\cdot x} = e^{-\mu_n \cdot x} \tag{107}$$

Startet ein Ruf auf Platz (n+k), muss er k Belegungsenden abwarten. Diese k Zeitdauern sind unabhängig voneinander jeweils nach (107) verteilt.
$T_{n+k}(x)$ ist demzufolge die k-fache Faltung der Verteilung (107) und lautet nach (24):

$$T_{n+k}(x) = e^{-\mu_n \cdot x} \cdot \sum_{\kappa=0}^{k-1} \mu_n^{\kappa} \cdot \frac{x^{\kappa}}{\kappa!} \tag{108}$$

Multiplizieren wir die Wahrscheinlichkeiten $T_j(x)$ mit der Wahrscheinlichkeit F_j für Startplatz j, so erhalten wir die Verbundwahrscheinlichkeit:

$$P\{\text{RUF STARTET AUF PLATZ } j \text{ , WARTEZEIT} > x\} = F_j \cdot T_j(x) \tag{109}$$

Die Wahrscheinlichkeit T (x), dass ein beliebiger Ruf (Verlustrufe und direkt ins Bündel kommende Rufe inbegriffen) länger als die Zeit x warten muss, ergibt sich durch Aufsummation der Verbundwahrscheinlichkeiten (109) über alle Startplätze:

$$T(x) = \sum_{j=1}^{n+s} F_j \cdot T_j(x) = \sum_{k=1}^{s} F_{n+k} \cdot T_{n+k}(x) \tag{110}$$

Wir setzen Gleichung (62) ein:

$$T(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{s} \lambda_{n+k-1} \cdot P_{n+k-1} \cdot T_{n+k}(x) \tag{111}$$

Aus Gleichung (42) erhalten wir mit (22):

$$\lambda_{n+k-1} \cdot P_{n+k-1} = \mu_{n+k} \cdot P_{n+k} = \frac{n}{h} \cdot P_{n+k} \tag{112}$$

Setzen wir Gleichung (112) in (111) ein, dann ergibt sich die Wartezeitverteilung T(x) eines beliebigen Rufes zu:

$$T(x) = \frac{n}{A} \sum_{k=1}^{s} P_{n+k} \cdot T_{n+k}(x) \tag{113}$$

Neben der Wartezeitverteilung T(x) eines beiliebigen Rufes führen wir weitere Wartezeitverteilungen ein. Zunächst die Wartezeitverteilung eines Warterufes: $P\{\text{WARTEZEIT} > x \mid \text{RUF WARTET}\}$
Nach {12} gilt:

$$P\{\text{WARTEZEIT} > x \mid \text{RUF WARTET}\} = \frac{1}{W} \cdot P\{\text{WARTEZEIT}, \text{WARTEZEIT} > x\} \tag{114}$$

Da nur die Warterufe eine Wartezeit grösser 0 haben, gilt nach {11}:

$$\begin{aligned} P\{\text{RUF WARTET}, \text{WARTEZEIT} > x\} &= P\{\text{WARTEZEIT} > x\} \\ &= T(x) \end{aligned} \tag{115}$$

Da weder die Verlustrufe, noch diejenigen Rufe, die direkt ins Bündel kommen, Anteile zur Wartezeit beitragen, stimmt die auf alle Rufe bezogene Wartezeitverteilung eines Warterufes : $P\{\text{RUF WARTET}, \text{WARTEZEIT} > x\}$ mit der Wartezeitverteilung T(x) eines beliebigen Rufes überein. Deshalb ergibt sich die Wartezeitverteilung eines Warterufes nach Gleichung (114):

$$P\{\text{WARTEZEIT} > x \mid \text{RUF WARTET}\} = \frac{T(x)}{W} \tag{116}$$

Analog erhält man die bedingte Wartezeitverteilung der erfolgreichen Rufe:

$$P\{\text{WARTEZEIT} > x \mid \text{RUF IST ERFOLGREICH}\} = \frac{T(x)}{S} \tag{117}$$

Wir kommen jetzt zu den mittleren Wartezeiten. Mit Hilfe von {20} könnte man die mittlere Wartezeit T_j eines Rufes, der auf Platz j startet, durch Integration bestimmen. Man sieht aber mit (106), (108), und (19) sofort:

$$\begin{aligned} T_j &= 0 && j=1,2,\dots,n \\ T_{n+k} &= \frac{k}{n} \cdot h && k=1,2,\dots,s \end{aligned} \tag{118}$$

Analog zu Gleichung (110), bzw. (113) ergibt sich für die mittlere Wartezeit T eines beliebigen Rufes:

$$T = \sum_{j=1}^{n+s} F_j \cdot T_j = \frac{n}{A} \cdot \sum_{k=1}^{s} P_{n+k} \cdot T_{n+k} \tag{119}$$

Wir setzen T_{n+k} nach Gleichung (118) ein und erhalten:

$$T = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{s} k \cdot P_{n+k}$$

Die in dieser Gleichung auftretende Summe ist gemäss (85) gleich der Wartebelastung Q. Deshalb gilt:

$$Q = \lambda \cdot T \tag{120}$$

Diese Beziehung wollen wir interpretieren: Q ist die mittlere Länge der Warteschlange. Im Mittel beginnt also ein (beliebig herausgegriffener) Ruf als letzter Ruf einer Warteschlange der Länge Q zu warten. Er wartet im Mittel die Zeit T bis er ins Bündel kommt. Während dieser Zeit T treffen gemäss (59) $\lambda \cdot T$ Rufe ein. Diese $\lambda \cdot T$ Rufe bilden jetzt (d.h. nachdem der betrachtete Ruf ins Bündel gekommen ist) die neue Warteschlange. Der Erwartungswert für deren Länge muss aber wieder gleich Q sein, also $\lambda \cdot T = Q$.

Dieselbe Interpretation lässt Gleichung (83) zu, wenn wir darin die Erfolgswahrscheinlichkeit S aus Gleichung (104) einsetzen:

$$Y = \frac{A}{h} \cdot M = \lambda \cdot M \tag{121}$$

Bei der Interpretation von Gleichung (121) haben wir die Warteschlange Q zu ersetzen durch die Bündelbelastung Y und die mittlere Wartezeit T durch die mittlere Bedienungszeit M.

Für die mittleren Wartezeiten eines Warterufes, bzw. eines erfolgreichen Rufes gilt nach (116), bzw. (117):

$$\text{MITTLERE WARTEZEIT EINES WARTERUFES} = \frac{T}{W} \tag{122}$$

$$\text{MITTLERE WARTEZEIT EINES ERFOLGREICHEN RUFES} = \frac{T}{S} \tag{123}$$

II. 17 DIE GESAMTZEITEN

In diesem Abschnitt berechnen wir die Gesamtzeiten, die ein Ruf im System verbringt. Diese setzen sich (im allgemeinen) aus einer Wartezeit und einer Bedienungszeit zusammen.

Startet ein Ruf auf einem der Plätze $\nu = 1,2,\ldots$ bis n, also im Bündel), dann ist die Gesamtzeit, die er im System verbringt, gleich seiner Belegungszeit. Startet ein Ruf auf einem Warteplatz, dann setzt sich seine Gesamtzeit im System aus einer Wartezeit und einer davon unabhängigen Belegungszeit zusammen. Die Verteilung der Gesamtzeit ergibt sich gemäss {23} als Faltung der Verteilungen (100) und (108). Aus diesen Gesamtzeiten $G_j(x)$ bei Start auf Platz j erhält man mit (62) die Verbundwahrscheinlichkeit, dass der Ruf sowohl auf Platz j startet, als auch länger als die Zeit x im System verweilt, zu:

$$P\{\text{RUF STARTET AUF PLATZ } j \text{ , GESAMTZEIT} > x\} = F_j \cdot G_j(x) \tag{124}$$

Addieren wir die Verbundwahrscheinlichkeiten (124) über alle Startplätze $j=1,2,\ldots,n+s$ dann erhalten wir die Wahrscheinlichkeit G(x), dass ein beliebiger Ruf eine Zeit grösser x im System (Bündel und Wartespeicher) verbringt:

$$G(x) = P\{\text{GESAMTZEIT} > x\} = \sum_{j=1}^{n+s} F_j \cdot G_j(x) \tag{125}$$

Analog lassen sich die auf alle Rufe bezogenen Gesamtverteilungen der Warterufe, der sofort ins Bündel kommenden Rufe, oder der erfolgreichen Rufe berechnen. Da die Verlustrufe keinen Beitrag zur Gesamtzeit liefern, stimmt die auf alle Rufe bezogene Gesamtzeitverteilung der erfolgreichen Rufe mit der Gesamtzeitverteilung G(x) aller Rufe nach Gleichung (125) überein.

Die Wahrscheinlichkeit L(x), dass die Gesamtzeit eines erfolgreichen Rufes grösser als x ist, ergibt sich, indem wir die auf alle Rufe bezogene Gesamtzeitverteilung der erfolgreichen Rufe durch die Erfolgswahrscheinlichkeit S dividieren:

$$L(x) = P\{\text{GESAMTZEIT} > x \mid \text{ERFOLG}\} = \frac{G(x)}{S} \tag{126}$$

Für die mittlere Gesamtzeit eines beliebigen Rufes (einschliesslich Verlustrufe) gilt:

$$G = T + M \tag{127}$$

Die mittlere Gesamtzeit L eines erfolgreichen Rufes erhalten wir aus Gleichung (126):

$$L = \frac{G}{S} \tag{128}$$

Diese Gleichung kann genauso wie (120), bzw. (121) interpretiert werden, wenn wir sie mit Hilfe von (120), (121) und (89) in der folgenden Form schreiben:

$$L = \lambda \cdot G \tag{129}$$

Aus den Gleichungen (123), bzw. (124), bzw. (129) folgt, dass die mittleren Verweilzeiten im Wartespeicher, bzw. im Bündel, bzw. im Gesamtsystem dieselbe Information über den Verkehrsablauf im Warteverlustsystem ohne Prioritäten liefern, wie die Belastungen des Wartespeichers, bzw. des Bündels, bzw. des Gesamtsystems.

III. MARKOV - BEDIENUNGSSYSTEME

III.1 MARKOV-BEDIENUNGSSYSTEME

Dieses Kapitel behandelt ein neues Verfahren, das es erlaubt, allgemeinere MARKOV-Bedienungssysteme als bisher möglich, zu berechnen.
Zusammen mit Kapitel II liefert Kapitel III die Grundlagen für die Berechnung des preemptiven Warteverlustsystems in den Kapiteln IV und V.
Ein stochastisches System nennen wir ein MARKOV-System, wenn seine zukünftige Entwicklung nur vom gegenwärtigen Zustand des Systems beeinflußt wird, aber nicht von dessen Vergangenheit. MARKOV-Bedienungssysteme überdecken bei verschiedensten Abfertigungsdisziplinen eine Vielzahl von Bedienungssystemen und Bedienungsnetzen. Die MARKOV-Eigenschaft hängt dabei insbesondere vom Anruf- und Endeprozess und von der Abfertigungsdisziplin ab. Der Anruf- und Endeprozess dieser Arbeit haben nach I.7 MARKOV-Charakter, genauso wie die hier behandelte Abfertigungsdisziplin.

III.2 DISKONTINUIERLICHE PROZESSE

Wir beschränken uns auf diskontinuierliche MARKOV-Prozesse in Bedienungssystemen mit endlich oder abzählbar unendlich vielen Zuständen bei zeitunabhängigen Übergangswahrscheinlichkeiten.

Die verschiedenen Zustände, die ein Bedienungssystem im Laufe der Zeit t annehmen kann, werden im allgemeinen nur durch mehrere (eindimensionale) Zustandsvariable (vergleiche I.3) eindeutig beschrieben. Da jede dieser Zustandsvariablen höchstens abzählbar viele Werte annimmt, können wir sie auch zu einer einzigen eindimensionalen Zustandsvariablen mit abzählbar vielen Zuständen umordnen.

$X(t)$ sei diese eindimensionale Zustandsvariable. Ihre verschiedenen Zustände numerieren wir von 0,1,2,... bis κ durch. Das System könnte beispielsweise die Zustände 25, 3, 36, 97 usw. nacheinander annehmen. Es geht durch Sprünge aus einem Zustand k in einen anderen Zustand j über. In der Zeit zwischen den Sprüngen bleibt das System unverändert. Man bezeichnet den zugeordneten stochastischen Prozess als diskontinuierlich oder auch als rein diskontinuierlich. Solche rein diskontinuierlichen MARKOV-Prozesse werden wir in diesem Kapitel untersuchen.

Der diskontinuierliche Prozess enthält einen bekannten Sonderfall: Wenn der Prozess aus dem Zustand k (in einem Schritt) nur in die "Nachbarzustände" (k-1) und (k+1) übergeht, spricht man von einem Geburts- und Sterbeprozess. Ein Beispiel für diesen Sonderfall haben wir in Kapitel II.2 kennengelernt. Die dort behandelte Zustandsvariable des Warteverlustsystems ohne Prioritäten ist ein Geburts- und Sterbeprozess.

III. 3 DIE OBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEITEN DES SYSTEMS

Das System befinde sich zum Zeitpunkt t im Zustand k. Um eine Aussage über den möglichen Zustand des Systems im Zeitpunkt $t+\Delta t$ machen zu können, muß man die Obergangswahrscheinlichkeiten der Zustandsvariablen kennen. Diese Obergangswahrscheinlichkeiten sollen vom Zeitpunkt t unabhängig sein und nur von der Zeitspanne Δt und vom Zustand des Systems abhängen. Mit $W_{k,j}(\Delta t)$ bezeichnen wir die Obergangswahrscheinlichkeit, daß das System nach der Zeitspanne Δt vom Zustand k in den Zustand j übergegangen ist:

$$P\{X(t+\Delta t) = j \mid X(t) = k\} = W_{k,j}(\Delta t) \tag{130}$$

Bei diskontinuierlichen Prozessen haben die bedingten Obergangswahrscheinlichkeiten für $j \neq k$ die folgende Eigenschaft:

$$j \neq k \qquad W_{k,j}(\Delta t) = w_{k,j} \cdot \Delta t + o(\Delta t) \tag{131}$$

Die Parameter $w_{k,j}$ sind zeitunabhängig und werden Sprungkoeffizienten oder Obergangskoeffizienten genannt. Da sich das System zur Zeit $(t+\Delta t)$ mit Sicherheit in einem der Zustände $j=0,1,\ldots,\kappa$ befindet, gilt die Normierungsbedingung:

$$\sum_{j=o}^{\kappa} W_{k,j}(\Delta t) = 1 \tag{132}$$

Aus dieser Normierungsbedingung berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $W_{k,k}(\Delta t)$, daß sich das System nach der Zeit Δt noch im Zustand k befindet:

$$W_{k,k}(\Delta t) = 1 - \sum_{\substack{j=o \\ \neq k}}^{\kappa} W_{k,j}(\Delta t) \tag{133}$$

$$W_{k,k}(\Delta t) = 1 - \Delta t \cdot \sum_{\substack{j=o \\ \neq k}}^{\kappa} w_{k,j} + o(\Delta t) \tag{134}$$

Die Sprungkoeffizienten $w_{k,j}$ lassen sich bei gegebenem Anruf- und Endeprozess sofort angeben. Sie setzen sich direkt aus den bedingten Anruf- und Enderaten zusammen, wie wir es in Kapitel IV am Beispiel des preemptiven Warteverlustsystems sehen werden.

III.4 DIE ZEITABHÄNGIGEN ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN

Die zeitabhängige Zustandswahrscheinlichkeit $P_j(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich das System zur Zeit t im Zustand j befindet:

$$P\{X(t) = j\} = P_j(t) \tag{135}$$

Das System startet mit einer Anfangsverteilung zum Zeitpunkt 0:

$$P_j(t = 0) \tag{136}$$

Genauso wie in Kapitel II.2 werden wir die Zustandswahrscheinlichkeiten zur Zeit $(t+\Delta t)$ berechnen aus den Zustandswahrscheinlichkeiten zur Zeit t. Das System soll sich zur Zeit $(t+\Delta t)$ im Zustand j befinden. Dann muß es zur Zeit t in einem der Zustände $k = 0,1,\ldots,\kappa$ gewesen sein. Aus dem Zustand k zur Zeit t geht es mit der Wahrscheinlichkeit $W_{k,j}(\Delta t)$ bis zum Zeitpunkt $(t+\Delta t)$ in den Zustand j über. Alle diese verschiedenen Obergänge sind disjunkte Ereignisse und wir haben nach {14}:

$$P_j(t+\Delta t) = \sum_{k=o}^{\kappa} P_k(t) \cdot W_{k,j}(\Delta t) \tag{137}$$

Wir setzen nach (133) die Obergangswahrscheinlichkeit $W_{j,j}(\Delta t)$ in Gleichung (137) ein:

$$P_j(t+\Delta t) = \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} P_k(t)\cdot W_{k,j}(\Delta t) + P_j(t)\cdot W_{j,j}(\Delta t) =$$

$$= \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} P_k(t)\cdot W_{k,j}(\Delta t) + [1 - \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} W_{j,k}(\Delta t)]\cdot P_j(t)$$

$$P_j(t+\Delta t) - P_j(t) = \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} P_k(t)\cdot W_{k,j}(\Delta t) - P_j(t) \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} W_{j,k}(\Delta t)$$

Wir setzen die Obergangswahrscheinlichkeiten (131) des diskontinuierlichen Prozesses ein und erhalten nach Zusammenfassung der Funktionen $o(\Delta t)$:

$$P_j(t+\Delta t)-P_j(t)=\Delta t\cdot \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} w_{k,j}\cdot P_k(t)-\Delta t\cdot P_j(t)\cdot \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} w_{j,k}+o(\Delta t)$$

Dividieren wir diese Gleichung durch Δt, dann steht auf der linken Seite ein Differenzenquotient, der für $\Delta t \to 0$ in die (im Nullpunkt rechtsseitige) zeitliche Ableitung $P_j'(t)$ der zeitabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten übergeht. Mit {1} erhalten wir:

$$P_j'(t) = \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} w_{k,j}\cdot P_k(t) - P_j(t) \cdot \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} w_{j,k} \qquad (138)$$

Dieses Gleichungssystem ist ein Spezialfall des KOLMOGOROV-FELLER Gleichungssystems /5/ für den allgemeinen diskontinuierlichen MARKOV-Prozess.
Die erste Summe der rechten Seite von Gleichung (138) erstreckt sich über alle Zustände k des Systems, aus denen Zustand j in einem Schritt entstehen kann. Die zweite Summe erstreckt sich über die Sprungkoeffizienten zu jenen Zuständen, die aus Zustand j in einem Schritt entstehen können. Die Zustandswahrscheinlichkeiten $P_j(t)$ erfüllen die Normierungsbedingung:

$$\sum_{j=o}^{K} P_j(t) = 1 \qquad (139)$$

III. 5 DIE STATIONÄREN ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN

FÜr den stationären Prozess sind die Zustandswahrscheinlichkeiten zeitunabhängig und die zeitlichen Ableitungen der Zustandswahrscheinlichkeiten verschwinden:

$$P_j(t) = P_j \qquad P_j'(t) = 0 \qquad (140)$$

Falls ein stationärer Prozess existiert, erhält man die stationären Zustandsgleichungen P_j aus (138), indem man die Stationaritätsbedingungen (140) einsetzt. Das führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$P_j\cdot \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} w_{j,k} - \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} w_{k,j}\cdot P_k = 0 \qquad (141)$$

Schreiben wir diese Gleichung in der Form:

$$P_j\cdot \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} w_{j,k} = \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} w_{k,j}\cdot P_k \qquad (142)$$

dann können wir wie folgt interpretieren:
Beim stationären Prozess herrscht ein Gleichgewicht zwischen allen Obergängen a u s dem Zustand j und allen Obergängen i n den Zustand j. Die linke Summe erstreckt sich über alle Sprungkoeffizienten $w_{j,k}$, die Obergänge aus j in einen Zustand k beschreiben. Die rechte Summe erstreckt sich über alle jene Zustände k, aus denen der Zustand j (in einem Schritt) entstehen kann.
Gleichungssystem (141) ist ein homogenes Gleichungssystem mit verschwindender Systemdeterminante. Die stationären Zustandsgleichungen P_j müssen gemäß (139) die folgende Normierungsbedingung erfüllen:

$$\sum_{j=o}^{K} P_j = 1$$

Wir wollen das Gleichungssystem (141) inhomogen machen, indem wir P_0 als Parameter einführen:

$$P_j\cdot \sum_{\substack{k=o\\ \neq j}}^{K} w_{j,k} - \sum_{\substack{k=1\\ \neq j}}^{K} w_{k,j}\cdot P_k = w_{o,j}\cdot P_0 \qquad (143)$$

P_0 berechnen wir aus der Normierungsbedingung:

$$P_0 = 1 - \sum_{j=1}^{K} P_j \qquad (144)$$

Die Berechnung der stationären Zustandswahrscheinlichkeit P_j ist damit für MARKOV-Bedienungssysteme zurückgeführt auf die Lösung des Gleichungssystems (143), dessen Koeffizienten die Sprungkoeffizienten $w_{k,j}$ der Zustandsvariablen sind.

III. 6 DER RANDOM-WALK EINES RUFES IM BEDIENUNGSSYSTEM

Bis jetzt haben wir in Kapitel III das Gesamtverhalten des MARKOV-Bedienungssystems untersucht. Wir wenden uns jetzt der in Kapitel I.3 angedeuteten zweiten Fragestellung zu: Ein Ruf einer bestimmten Priorität falle -beispielsweise- in das preemptive Warteverlustsystem zur Zeit t_0 ein. Dem einfallenden Ruf wird auf Grund des Systemzustandes zur Zeit t_0 ein bestimmter Startplatz zugewiesen. Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß dieser Ruf unterbrochen wird, wenn sein Startplatz bekannt ist?
Der beobachtete Ruf durchläuft von seinem Startplatz aus mehrere Plätze bis er entweder (zum erstenmal) unterbrochen wird oder bis er das System verläßt, ohne unterbrochen worden zu sein, (sei es durch das Ende seiner Abfertigung oder durch Verdrängen aus dem System). Wir wollen sagen, daß der Ruf das "Ziel" {Erfolg} erreicht hat, sobald er unterbrochen worden ist. Verläßt der Ruf das System, ohne unterbrochen worden zu sein, dann wollen wir sagen, daß der Ruf {Mißerfolg} hat.
Der beobachtete Ruf falle im Zeitpunkt $t=t_0$ ein. Wir führen die neue Zeitvariable x so ein, daß x=0 dem Zeitpunkt $t=t_0$ entspricht. Der Aufenthalt des beobachteten Rufes wird durch die in I.3 definierte Platzvariable in Abhängigkeit von der Zeit x beschrieben.
Wir können die Platzvariable als eindimensional annehmen, da wir eine mehrdimensionale Variable durch Umnumerierung in eine eindimensionale Variable transformieren können. Wir bezeichnen diese eindimensionale Platzvariable mit Y(x); ihre verschiedenen Werte ν (d.h. die verschiedenen Plätze, die der Ruf während seines Aufenthaltes belegen kann) seien von 1,2,... bis σ durchnumeriert. Das mögliche Schicksal eines Rufes könnte beispielsweise sein: Der Ruf starte auf Platz 25, belege dann nacheinander Platz 8, 29, 5 und werde auf Platz 5 unterbrochen.(Wir nehmen an, daß Platz 5 ein Platz im Bündel ist).
Für den beschriebenen Sachverhalt führen wir eine neue Bezeichnung ein, indem wir sagen, daß der Ruf innerhalb des

Systems einen RANDOM-WALK durchläuft. Der RANDOM-WALK ist als Interpretation vieler stochastischer Prozesse bekannt /4/. Wir schließen uns der üblichen Nomenklatur an und nennen die Plätze, die ein Ruf belegt, die "Zustände des RANDOM-WALK" oder auch die Zustände des Rufes. Infolgedessen haben wir "Systemzustand" und "Rufzustand" zu unterscheiden. Systemzustand und Rufzustand ändern sich durch die möglichen Ereignisse "Rufeinfall" oder "Rufende". Dabei sind die drei folgenden Situationen möglich: Systemzustand und Rufzustand ändern sich gleichzeitig; Rufzustand bleibt, Systemzustand ändert sich; Systemzustand bleibt, Rufzustand ändert sich.

Wir erweitern die möglichen Zustände $\nu=1,2,\dots,\sigma$ des RANDOM-WALK um die beiden Zustände {Erfolg} und {Mißerfolg}. Diese Zustände seien absorbierend, d.h. der RANDOM-WALK des beobachteten Rufes endet, sobald einer der absorbierenden Zustände {Erfolg} oder {Mißerfolg} erreicht ist. Um die Darstellung der Formeln zu vereinfachen, führen wir für den Zustand {Erfolg} den Wert 0 und für den Zustand {Mißerfolg} den Wert $(\sigma+1)$ ein. Der RANDOM-WALK durchläuft von seinem Startzustand (z.B. 25) mehrere Zustände (z.B. 8,29,5) bis er entweder den Zustand 0, d.h. {Erfolg} oder den Zustand $(\sigma+1)$, d.h. {Mißerfolg}, erreicht.

Die drei folgenden Beispiele sollen unsere Vorstellungen verallgemeinern. Wir wählen drei verschiedene RANDOM-WALK im preemptiven Warteverlustsystem:

(1) Der Ruf starte auf einem beliebigen Platz ν des Systems: $\nu=1,2,\dots,n+s$. Der Zustand {Erfolg} sei das Verlassen des Systems. Er kann von den Plätzen $\nu=1,2,\dots,n$ durch das erfolgreiche Enden der Bedienung dieses Rufes erreicht werden o d e r vom Platz $\nu=n+s$ aus durch Verdrängen des Rufes aus dem System. Dieser RANDOM-WALK hat keinen Zustand {Mißerfolg}: Jeder Ruf endet "erfolgreich" (im Sinne des definierten RANDOM-WALK).

(2) Wir beobachten einen Ruf, der sich bereits im Bündel befindet. Das Ziel {Erfolg} soll definiert werden als die Unterbrechung der Abfertigung durch einen Ruf höherer Priorität. Der Zustand {Erfolg} kann nur von Platz $\nu=n$ aus erreicht werden. Der Zustand {Mißerfolg} bedeutet {Beenden der Abfertigung ohne Unterbrechung}. Der Zustand {Mißerfolg} kann von den Plätzen $\nu=1,2,\ldots,n$ aus erreicht werden.

(3) Jetzt beobachten wir einen wartenden Ruf. Der Zustand {Erfolg} ist das (erste) Erreichen des Bündels, was von Platz (n+1) aus möglich ist. (Das spätere Schicksal des Rufes nach Eintritt ins Bündel ist für diesen RANDOM-WALK nicht mehr interessant.) Der Zustand {Mißerfolg} (d.h. Nichterreichen des Bündels), kann nur von Platz (n+s) aus erreicht werden, dadurch daß der beobachtete Ruf durch einen Ruf höherer Priorität aus dem System verdrängt wird.

Das waren drei verschiedene RANDOM-WALK, deren charakteristische Größen wir in den Kapiteln IV und V berechnen. Wie wir dort sehen werden, erhält man die gewünschten Verkehrscharakteristika, indem man die Zustände {Erfolg} und {Mißerfolg} des RANDOM-WALK entsprechend wählt. In diesem Kapitel werden wir allgemein die Wahrscheinlichkeit für das Erreichen des Zieles {Erfolg} von einem bestimmten Startplatz aus berechnen und außerdem die Verteilung der Zeiten, die ein Ruf bis zum Erreichen des Zieles im System verbringt.

III. 7 DIE ÜBERGANGSWAHRSCHEINLICHKEITEN DES RANDOM-WALK

Der RANDOM-WALK eines Rufes in einem Bedienungssystem wird durch die Platzvariable Y(x) beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit, daß der stochastische Prozeß Y(x) zum Zeitpunkt $(x+\Delta x)$ in den Zustand j übergegangen ist, wenn er sich im Zeitpunkt x im Zustand k befunden hat, sei unabhängig vom Zeitpunkt x (genauso wie die Übergangswahrscheinlichkeiten der Zustandsvariablen in III.3):

$$P\{Y(x+\Delta x)=j \mid Y(x)=k\} = U_{k,j}(\Delta x) \qquad (145)$$

In MARKOV-Bedienungssystemen haben die Übergangswahrscheinlichkeiten $U_{k,j}(\Delta x)$ des RANDOM-WALK Y(x) die folgende Gestalt (vergleiche III.3):

$$j \neq k \qquad U_{k,j}(\Delta x) = u_{k,j}\cdot\Delta x + o(\Delta x) \qquad (146)$$

Die Parameter $u_{k,j}$ sind zeitunabhängig und werden Sprungkoeffizienten des RANDOM-WALK genannt.
Die Übergangswahrscheinlichkeiten $U_{k,j}(\Delta x)$ genügen der folgenden Normierungsbedingung, da der RANDOM-WALK sich zur Zeit $(t+\Delta t)$ in einem der Zustände $j=0,1,\ldots,\sigma,\sigma+1$ mit Sicherheit befindet:

$$\sum_{j=0}^{\sigma+1} U_{k,j}(\Delta x) = 1 \qquad (147)$$

Aus dieser Normierungsbedingung läßt sich für $k = 1,2,\ldots,\sigma$ die Wahrscheinlichkeit angeben, daß sich ein Ruf nach der Zeit Δx noch auf dem Platz k befindet:

$$U_{k,k}(\Delta x) = 1 - \sum_{\substack{j=0\\ \neq k}}^{\sigma+1} U_{k,j}(\Delta x)$$

Die in dieser Gleichung auftretende Summe ist die Wahrscheinlichkeit, daß der RANDOM-WALK den Platzzustand k innerhalb Δx verläßt. Wir setzen Gleichung (146) ein und erhalten:

$$U_{k,k}(\Delta x) = 1 - \Delta x\cdot\sum_{\substack{j=0\\ \neq k}}^{\sigma+1} u_{k,j} + o(\Delta x)$$

Für die in dieser Gleichung auftretende Summe führen wir eine Abkürzung ein:

$$\sum_{\substack{j=0\\ \neq k}}^{\sigma+1} u_{k,j} = u_{k,k} \qquad (148)$$

Die Größe $u_{k,k}$ ist der Sprungkoeffizient des Ereignisses: {Der RANDOM-WALK verläßt den Platz k nach einem anderen Platz im System oder verläßt er es zu dem Erfolgszustand 0 oder dem Mißerfolgszustand $\sigma+1$}. Damit erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit $U_{k,k}(\Delta x)$: (149)

$$U_{k,k}(\Delta x) = 1 - u_{k,k}\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

In III.6 haben wir den Unterschied "Zustand des Systems" und "Zustand des RANDOM-WALK" betont. Ebenso sind die Sprungkoeffizienten $w_{k,j}$ des Systems und die Sprungkoeffizienten $u_{k,j}$ des RANDOM-WALK unterschiedliche Größen. Sie sind allerdings sehr verwandt, da sich beide aus den bedingten Anruf- bzw. Enderaten direkt ergeben, wie wir es in Kapitel IV für verschiedene RANDOM-WALK durchführen werden.

III.8 DIE VERWEILZEIT EINES ERFOLGREICHEN RUFES BEI START AUF PLATZ j

$Z_j(x)$ sei die bedingte Verbundwahrscheinlichkeit, daß ein Ruf den Zielzustand 0 erreicht u n d dazu länger als die Zeit x benötigt, wenn der Ruf im Zustand j startet:

$$P\{\text{ERFOLG, VERWEILZEIT} > x \mid \text{START IM ZUSTAND } j\} = Z_j(x) \qquad (150)$$

Dabei kann j laufen von j=1,2,... bis σ. Wir untersuchen zunächst den Anfangswert $Z_j(x=0)$. Der Ruf ist zur Zeit x=0 eingefallen. Er wartet mit Sicherheit eine Zeit $x > 0$ auf das Erreichen des Zustandes {Erfolg}. Deshalb ist wegen (11) die bedingte Verbundwahrscheinlichkeit $Z_j(x=0)$, daß der Ruf den Zustand {Erfolg} erreicht und dazu eine Zeit x>0 benötigt, gleich der bedingten Wahrscheinlichkeit, daß der Ruf den Zustand {Erfolg} erreicht, wenn er auf Platz j startet. Diese bedingte Wahrscheinlichkeit nennen wir die Erfolgswahrscheinlichkeit E_j des RANDOM-WALK bei Start im Zustand j:

$$Z_j(x=o) = E_j$$

Diese Wahrscheinlichkeit wird im nächsten Abschnitt berechnet.

III. 9 DIE ERFOLGSWAHRSCHEINLICHKEIT BEI START AUF PLATZ j

Wir haben im vergangenen Abschnitt schon definiert:

$$P\{\text{ERFOLG} \mid \text{START IM ZUSTAND } j\} = E_j$$

Um die Erfolgswahrscheinlichkeit E_j zu berechnen, beobachten wir den Ruf direkt zu Beginn seines RANDOM-WALK und eine kleine Zeitspanne Δx später. Der Ruf starte im Zustand j. Nach der Zeit Δx hat der Ruf den Zielzustand 0 mit der Obergangswahrscheinlichkeit $U_{j,o}(\Delta x)$ erreicht. Mit der Obergangs-

wahrscheinlichkeit $U_{j,k}(\Delta x)$ befindet sich der Ruf nach der Zeit Δx auf einem der Plätze k=1,2,...,σ und muß von diesem Platz k aus Erfolg haben. Die Erfolgswahrscheinlichkeit von Platz k aus ist wegen der MARKOV-Eigenschaft des Systems gleich E_k: Diese Erfolgswahrscheinlichkeit von Platz k aus ist unabhängig davon, wie der Ruf auf Platz k gekommen ist, das heißt unabhängig davon, ob er in k startet oder ob er den Platz k durch Obergang von Platz j erreicht hat. Nach der Regel (14) über die Zusammensetzung disjunkter Ereignisse erhalten wir:

$$E_j = U_{j,o}(\Delta x) + \sum_{k=1}^{\sigma} U_{j,k}(\Delta x) \cdot E_k$$

Wir setzen die $U_{j,k}(\Delta x)$ nach (146) und $U_{j,j}(\Delta x)$ nach (149) ein und erhalten:

$$\Delta x \cdot E_j \cdot u_{j,j} - \Delta x \cdot \sum_{\substack{k=1\\ \neq j}}^{\sigma} u_{j,k} \cdot E_k = \Delta x \cdot u_{j,o} + o(\Delta x)$$

Dividieren wir durch Δx so erhalten wir für $\Delta x \to 0$ ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem zur Berechnung der Erfolgswahrscheinlichkeiten E_j:

$$u_{j,j} \cdot E_j - \sum_{\substack{k=1\\ \neq j}}^{\sigma} u_{j,k} \cdot E_k = u_{j,o} \qquad (151)$$

Genauso wie das lineare Gleichungssystem der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten nur von den Sprungkoeffizienten $w_{k,j}$ der Zustandsvariablen abhängt, so ist das lineare Gleichungssystem der Erfolgswahrscheinlichkeiten durch die Sprungkoeffizienten $u_{k,j}$ der Platzvariablen bestimmt. Dabei erstreckt sich die Summe in (151) über alle jene Plätze k, k = 1,2,...,j-1,j+1,...,σ, die der Ruf von Platz j aus in einem Schritt erreichen kann. (Jene Plätze k, die der Ruf von j aus nicht in einem Schritt erreichen kann, haben den Sprungkoeffizienten $u_{j,k}=0$.) Nach III.7 ist $u_{j,j}$ der Sprungkoeffizient des Ereignisses {Verlassen des Platzes j} und $u_{j,o}$ der Sprungkoeffizient des direkten Obergangs vom Platz j in den Zustand 0, d.h. in den Zustand {Erfolg} des RANDOM-WALK.

Nachdem wir jetzt die für die Praxis wohl wichtigsten Verkehrscharakteristika -die Erfolgswahrscheinlichkeiten- berechnen können, wenden wir uns wieder den Erfolgszeiten zu.

III.10 DIE VERTEILUNGSFUNKTION DER VERWEILZEITEN EINES ERFOLGREICHEN RUFES BEI START AUF PLATZ j

Wir werden zu einem Differentialgleichungssystem für die bedingten Verbundwahrscheinlichkeiten $Z_j(x)$ kommen, wenn wir den Ruf zu Beginn seines RANDOM-WALK und eine kleine Zeitspanne Δx später betrachten. $Z_j(x+\Delta x)$ ist die bedingte Verbundwahrscheinlichkeit, daß ein Ruf das Ziel {Erfolg} des RANDOM-WALK erreicht u n d dazu eine Zeit größer $(x+\Delta x)$ benötigt, wenn er auf Platz j startet. Wir dürfen $x>0$ voraussetzen, da wir $Z_j(x=0) = E_j$ in Abschnitt III.9 schon bestimmt haben.
Wenn der beobachtete Ruf das Ziel {Erfolg} erreichen soll und eine Zeit größer $(x+\Delta x)$ vom Start an bis zum Erreichen des Zieles vergehen soll, dann muß sich der Ruf nach Ablauf der Zeit Δx nach Startbeginn auf einem der Plätze $k=1,2,\dots,\sigma$ befinden und von diesem Platz k aus bis zum Erreichen des Zieles {Erfolg}noch eine Zeit größer x warten.
Die Wahrscheinlichkeit dafür ist wegen der MARKOV-Eigenschaft unseres Systems gleich $Z_k(x)$: Für die weitere Entwicklung des Prozesses ist es irrelevant, ob der Ruf auf Platz k gestartet ist oder durch Obergang von Platz j aus den Platz k erreicht hat.
Addieren wir die Wahrscheinlichkeiten über alle möglichen Obergänge von j nach k, so ergibt sich (wieder nach der Regel {14} über die Vereinigung disjunkter Ereignisse):

$$Z_j(x+\Delta x) = \sum_{k=1}^{\sigma} U_{j,k}(\Delta x) \cdot Z_k(x) \tag{152}$$

Mit (146) und (149) wird daraus:

$$Z_j(x+\Delta x)-Z_j(x) = \Delta x \cdot \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\sigma} u_{j,k} \cdot Z_k(x) - \Delta x \cdot u_{j,j} \cdot Z_j(x) + o(\Delta x)$$

Dividieren wir durch Δx, so steht auf der linken Seite ein Differenzenquotient, der für $\Delta x \to 0$ in die (im Nullpunkt rechtsseitige) Ableitung $Z_j'(x)$ übergeht. Mit {1} ergibt sich:

$$Z_j'(x) = \sum_{\substack{k=1\\\neq j}}^{\sigma} u_{j,k} \cdot Z_k(x) - u_{j,j} \cdot Z_j(x) \tag{153}$$

Das ist ein lineares Differentialgleichungssystem für die bedingten Verbundwahrscheinlichkeiten $Z_j(x)$. Die Anfangswerte $Z_j(x=0) = E_j$ ergeben sich aus dem oben abgeleiteten linearen Gleichungssystem (151).
Die Summe in Gleichung (153) erstreckt sich über alle jene Plätze $k=1,2,\dots,j-1,j+1,\dots,\sigma$, die ein Ruf im RANDOM-WALK von Platz j aus in einem Schritt erreichen kann. Außerdem ist $u_{j,j}$ der Sprungkoeffizient des Ereignisses {Verlassen des Platzes j (und zwar einschließlich des Verlassens durch Erfolg, also "Sprung ins Ziel", bzw. durch Mißerfolg)}.
Der Ansatz $Z_j(x) = c_j \cdot e^{\xi \cdot x}$ führt die Lösung des linearen Differentialgleichungssystems zurück auf die Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms $C(\xi)$ vom Grad σ:

$$C(\xi) = \begin{vmatrix} u_{11}+\xi & -u_{21} & -u_{31} & \cdots & -u_{\sigma 1} \\ -u_{12} & u_{22}+\xi & -u_{32} & \cdots & -u_{\sigma 2} \\ -u_{13} & -u_{23} & u_{33}+\xi & \ddots & -u_{\sigma 3} \\ \vdots & \vdots & & & \\ -u_{1\sigma} & -u_{2\sigma} & -u_{3\sigma} & \cdots & u_{\sigma\sigma}+\xi \end{vmatrix}$$

Die Nullstellen ξ_ν dieses Polynoms sind die sogenannten Eigenwerte des linearen Differentialgleichungssystems. Die Lösung des Differentialgleichungssystem (153) stellt sich dann in bekannter Weise dar als:

$$Z_j(x) = \sum_{\nu} e^{\xi_\nu x} \cdot \mathrm{POLYNOM}_\nu(x) \tag{154}$$

Das $\mathrm{POLYNOM}_\nu(x)$ wird eine Konstante, wenn ξ_ν eine einfache Nullstelle ist.

III. 11 DIE MITTLEREN VERWEILZEITEN EINES ERFOLGREICHEN RUFES BEI START AUF PLATZ j

Der durch die folgende Gleichung definierte Erwartungswert Z_j:

$$Z_j = \int_{x=0}^{\infty} Z_j(x)\, dx$$

ist die mittlere Verweilzeit eines erfolgreichen, auf Platz j startenden Rufes, bezogen auf alle auf Platz j startenden Rufe. Diese Erwartungswerte Z_j könnte man mit Hilfe von {20} direkt aus den Wahrscheinlichkeiten $Z_j(x)$ berechnen. Stattdessen werden wir ein lineares Gleichungssystem für die Z_j dadurch herleiten, dass wir das Differentialgleichungssystem (153) über x integrieren:

$$\int_{x=0}^{\infty} Z_j'(x)dx = \int_{x=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=1\\ \neq j}}^{\sigma} u_{j,k} \cdot Z_k(c)dx - u_{j,j} \int_{x=0}^{\infty} Z_j(x)dx \qquad (155)$$

Für endliches σ kann man das Summenzeichen und das Integrationszeichen immer vertauschen. Ist $\sigma=\infty$, so setzen wir die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{j,k}$$

voraus. Mit {20} und {22} ergibt sich wegen $Z_j(x=0)=E_j$ direkt:

$$u_{j,j} \cdot Z_j - \sum_{\substack{k=1\\ \neq j}}^{\sigma} u_{j,k} \cdot Z_k = E_j \qquad (156)$$

Die mittleren Erfolgszeiten genügen einem inhomogenen linearen Gleichungssystem. Dieses lineare Gleichungssystem ist formal identisch mit demjenigen für die Erfolgswahrscheinlichkeiten, allerdings mit anderen "rechten Seiten".

III. 12 ERGEBNISSE

Die Berechnung der Verkehrscharakteristika von MARKOV-Bedienungssystemen konnte auf 2 Aufgaben zurückgeführt werden, die numerisch leicht zu lösen sind

(1) LINEARE INHOMOGENE GLEICHUNGSSYSTEME
(143), (151), (156)

(2) LINEARE HOMOGENE DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME
(138), (153)

Die Koeffizienten der Systeme sind gegeben durch die Sprungkoeffizienten $w_{j,k}$ nach (131), (133) bzw. $u_{j,k}$ nach (146) und (149).

Erheblichen Arbeitsaufwand kann man in Spezialfällen investieren, wenn man geschlossene Lösungen sucht oder auch Näherungslösungen für den Fall anstrebt, daß der Rang der Gleichungssysteme sehr groß wird.

Das vorgestellte Konzept soll in den folgenden beiden Kapiteln auf das preemptive Warteverlustsystem angewandt werden.

IV DAS PREEMPTIVE WARTEVERLUSTSYSTEM BEI ENDLICH VIELEN POISSON-QUELLEN

IV. 1 DIE ZUSTANDSVARIABLEN

Die preemptive Abfertigungsdisziplin haben wir in der Einleitung kennengelernt. Wir haben r Prioritätsklassen. Ein Ruf der Klasse i hat preemptive Priorität vor allen Rufen der Klasse >i.

Die Zustandsvariablen ${}_iX(t)$ geben die Zahl der i-Rufe im System an. Sie können die Werte m = 0,1,...n+s annehmen.

Um die Startposition eines zur Zeit t einfallenden i-Rufes zu bestimmen, benötigen wir nach (1) die Zustandsvariable ${}_{\le i}X(t)$, die uns die Zahl der ≤i-Rufe im System zur Zeit t angibt:

$$ {}_{\le i}X(t) = \sum_{\nu=1}^{i} {}_{\nu}X(t) \qquad (157) $$

Für i=r erhalten wir die Gesamtzahl ${}_{\le r}X(t)$ der Rufe im System. Die Wahrscheinlichkeiten der Zustandsvariablen ${}_{\le i}X(t)$ seien:

$$ P\{ {}_{\le i}X(t) = k \} = {}_{\le i}P_k(t) \qquad (158) $$

Die Zustandsvariablen ${}_{\le i}X(t)$ sind voneinander abhängige Zufallsvariable; beispielsweise folgt aus ${}_{<i}X(t)=k$, daß ${}_{\le i}X(t) \ge k$ ist. Daraus folgt die Beziehung:

$$ {}_{<i}P_k(t) \le {}_{\le i}P_k(t) \qquad (159) $$

Für die Klasse >i bezeichnen wir die Zustandsvariablen mit ${}_{>i}X(t)$:

$$ {}_{>i}X(t) = \sum_{\nu=i+1}^{r} {}_{\nu}X(t) \qquad (160) $$

und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten mit ${}_{>i}P_l(t)$:

$$ P\{ {}_{>i}X(t) = \ell \} = {}_{>i}P_\ell(t) \qquad (161) $$

Bei u n e n d l i c h e r Quellenzahl ist die Zustandsvariable ${}_{\le i}X(t)$ unabhängig von den Zustandsvariablen ${}_{\nu}X(t)$ für ν= i+1,...,r.

Deshalb werden wir in diesem Fall direkt für die Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_{k,j}$ ein Differentialgleichungssystem aufstellen können (Vergl. V.2)

Bei endlicher Quellenzahl ist der Anrufprozess abhängig von der Gesamtzahl tätiger Quellen und damit ist auch die Zustandsvariable ${}_{\le i}X(t)$ abhängig von der Gesamtzahl ${}_{\le r}X(t)$ der Rufe im System. Für die Gesamtzustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le r}P_j(t)$ wird sich in IV.4 ein lineares Differentialgleichungssystem ergeben. Für i=1,2,...bis (r-1) fassen wir die Zustandsvariablen ${}_{\le i}X(t)$ und ${}_{\le r}X(t)$ zu einer (zweidimensionalen) Zustandsvariablen zusammen, deren Zustandswahrscheinlichkeit zur Zeit t wir ${}_{\le i}P_{k,j}(t)$ nennen:

$$ P\{ {}_{\le i}X(t) = k ,\ {}_{\le r}X(t) = j \} = {}_{\le i}P_{k,j}(t) \qquad (162) $$

Für diese Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_{k,j}(t)$ stellen wir in IV.3 ein lineares Differentialgleichungssystem auf. Addieren wir die ${}_{\le i}P_{k,j}(t)$ über den ersten Index von k=0,1,...bis j auf, dann erhalten wir gerade die Wahrscheinlichkeit ${}_{\le r}P_j(t)$, daß die Gesamtzahl der Rufe im System gleich j ist:

$$ \sum_{k=0}^{j} {}_{\le i}P_{k,j}(t) = {}_{\le r}P_j(t) \qquad (163) $$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_k(t)$, daß sich von der Klasse ≤i genau k Rufe im System befinden und die Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{>i}P_l$, daß sich von der Klasse >i genau l Rufe im System befinden, erhalten wir ebenfalls durch Aufsummation aus den ${}_{\le i}P_{k,j}(t)$:

$$ i = 1,2,\dots,r-1 \qquad \sum_{j=k}^{n+s} {}_{\le i}P_{k,j}(t) = {}_{\le i}P_k(t) \qquad (164) $$

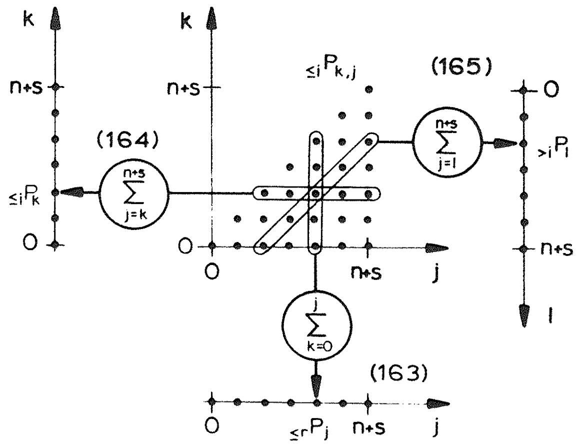
$$ i = 1,2,\dots,r-1 \qquad \sum_{j=\ell}^{n+s} {}_{\le i}P_{j-\ell,j}(t) = {}_{>i}P_\ell(t) \qquad (165) $$

An den Rändern erhalten wir (den physikalischen Gegebenheiten entsprechend) folgende Zustandswahrscheinlichkeiten:

Für k > j, k < 0, k > n+s, j < 0 und j > n+s:

$$ {}_{\le i}P_{k,j}(t) = 0 \qquad {}_{\le i}P_k(t) = 0 \qquad {}_{\le r}P_j(t) = 0 \qquad (166) $$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten gemäß (163), (164) und (165) können durch das folgende Bild veranschaulicht werden:



FIGUR 1 DIE ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN DES PREEMPTIVEN WARTEVERLUSTSYSTEMS

Aus den Randverteilungen (163) und (164) lassen sich die beiden folgenden Spezialfälle ablesen (vergleiche Figur 1):

$$_{\le r}P_0(t) = {}_{\le i}P_{0,0}(t) \qquad (167)$$

$$_{\le i}P_{n+s}(t) = {}_{\le i}P_{n+s,n+s}(t) \qquad (168)$$

Die Wahrscheinlichkeit $_{\le 1}P_j(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß j Rufe von Klasse 1 im System sind:

$$_{\le 1}P_j(t) = {}_1P_j(t) \qquad (169)$$

IV. 2 DER ANRUF- UND ENDEPROZESS

Der Anrufprozess ist ein MARKOV-Prozess, den wir durch die bedingte Wahrscheinlichkeit beschreiben, daß im Intervall von t bis (t+Δt) ein i-Ruf einfällt, wenn das System im Zustand j ist, d.h. wenn j Rufe sich im System befinden:

$$P\{\text{i-RUF FÄLLT EIN IN } \Delta t \mid \text{ZUSTAND } j\} = {}_i\lambda_j \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad (170)$$

$$P\{\text{MEHRERE RUFE FALLEN EIN IN } \Delta t \mid \text{ZUSTAND } j\} = o(\Delta t) \qquad (171)$$

$_i\lambda_j$ ist die bedingte Anrufrate der Klasse i im Zustand j. Wir führen die folgenden Abkürzungen ein:

$$_{\le i}\lambda_j = \sum_{\nu=1}^{i} {}_\nu\lambda_j \qquad (172)$$

$$_{>i}\lambda_j = \sum_{\nu=i+1}^{r} {}_\nu\lambda_j \qquad (173)$$

Damit erhalten wir aus (170):

$$P\{\le \text{i-RUF FÄLLT EIN IN } \Delta t \mid \text{ZUSTAND } j\} = {}_{\le i}\lambda_j \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad (174)$$

$$P\{>\text{i-RUF FÄLLT EIN IN } \Delta t \mid \text{ZUSTAND } j\} = {}_{>i}\lambda_j \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad (175)$$

Speziell für i=r erhalten wir aus (174) die bedingte Gesamtanrufwahrscheinlichkeit:

$$P\{\text{RUF FÄLLT EIN IN } \Delta t \mid \text{ZUSTAND } j\} = {}_{\le r}\lambda_j \cdot \Delta t + o(\Delta t) \qquad (176)$$

Wir werden das preemptive Warteverlustsystem oft mit dem Warteverlustsystem o h n e Prioritäten vergleichen. Deshalb wollen wir die beiden Systeme dem gleichen Gesamtanrufprozess unterwerfen. Wir wählen die bedingte Gesamtanrufrate $_{\le r}\lambda_j$ gleich der bedingten Anrufrate des Warteverlustsystems ohne Prioritäten:

$$_{\le r}\lambda_j = \lambda_j \qquad (177)$$

Damit sind die beiden bedingten Gesamtanrufwahrscheinlichkeiten (167) und (24) sowohl für endliche als auch für unendliche Quellenzahl gleich.

Die angebotenen Rufe stammen aus q Verkehrsquellen. Sendet eine dieser q Quellen einen Ruf, so soll dieser Ruf mit der Wahrscheinlichkeit $_ip$ der Prioritätsklasse i angehören.

Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{r} {}_{i}p = 1 \tag{178}$$

Für die Teilsummen führen wir Abkürzungen ein:

$$_{\le i}p = \sum_{\nu=1}^{i} {}_{\nu}p \tag{179}$$

$$_{>i}p = \sum_{\nu=i+1}^{r} {}_{\nu}p \tag{180}$$

Mit diesen Wahrscheinlichkeiten folgt für die bedingten Anrufraten mit (177)

$$_{i}\lambda_j = {}_{i}p \cdot \lambda_j \tag{181}$$

$$_{\le i}\lambda_j = {}_{\le i}p \cdot \lambda_j \tag{182}$$

$$_{>i}\lambda_j = {}_{>i}p \cdot \lambda_j \tag{183}$$

Der Endeprozess ist gegeben durch die Abfertigungsdauern der Rufe. Wir nehmen an, daß sie - genauso wie für das Warteverlustsystem ohne Prioritäten - negativ exponentiell um die mittlere Belegungsdauer h verteilt sind.
Wir stellen nun die Frage, wie sich die Unterbrechung einer Abfertigung auf den Endeprozess auswirkt. Die restliche Abfertigungsdauer eines unterbrochenen Rufes ist nach (15) wieder negativ exponentiell um h verteilt. Wir müssen deshalb die unterbrochenen Rufe im Wartespeicher nicht gesondert behandeln. Die Unterbrechung eines Rufes zugunsten eines Rufes von höherer Priorität wirkt sich auf den Endeprozess nicht aus, da zwei um h negativ-exponentiell verteilte Belegungsdauern "ausgetauscht" werden, in diesem Fall also die Restabfertigungsdauer des unterbrochenen Rufes und die Gesamtabfertigungsdauer des eingetroffenen Rufes höherer Priorität. Was in I.7 über den Anruf- und Endeprozess gesagt wurde, gilt mit den durch (170) bis (176) beschriebenen Modifikationen auch hier.

IV. 3 DIE ZEITABHÄNGIGEN ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN

Um das Differentialgleichungssystem (138) bzw. das lineare Gleichungssystem (143) aufzustellen, müssen wir die Sprungkoeffizienten der Zustandsvariablen des Systems bestimmen.

Das preemptive Warteverlustsystem habe den Zustand

$\{{}_{\le i}X(t)=k,\ {}_{\le r}X(t)=j\}$ mit $k=0,1,\dots,n+s$ und $j=k,k+1,\dots,n+s$.
In diesem Zustand können im Zeitintervall von t bis $(t+\Delta t)$ die folgenden Ereignisse (1) bis (5) auftreten:

(1) Es endet ein $\le i$-Ruf. Die im System anwesenden k Rufe der Klasse $\le i$ besetzen gemäß I.2 und I.4 die Plätze 1,2,... bis k. Das Ereignis (1) hat deshalb den Sprungkoeffizienten: μ_k. (Für $k > n$ gilt $\mu_k = \mu_n$).

(2) Es endet ein >i-Ruf. Im System befinden sich (j-k) Rufe der Klasse >i. Sie stehen auf den Plätzen k+1, k+2,... bis j. Diejenigen >i-Rufe, die sich im Bündel befinden, haben den Sprungkoeffizienten: $(\mu_j - \mu_k)$. Für $k \ge n$ gilt: $(\mu_j - \mu_k) = 0$.

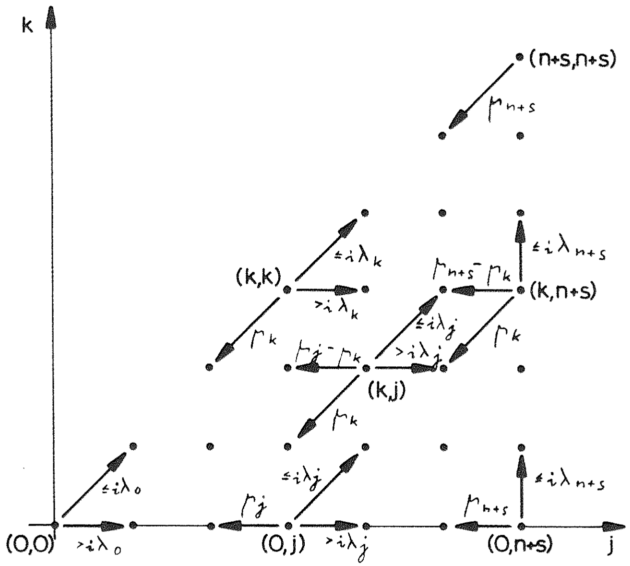
(3) Es fällt ein $\le i$-Ruf ein. Dieses Ereignis ist im Hinblick auf die Sprungkoeffizienten nur für die Zustände mit $k< (n+s)$ relevant. Fällt nämlich in den Zustand $k=(n+s)$ ein $\le i$-Ruf ein, so wird dieser Ruf entweder abgewiesen oder er wird gegen einen anderen $\le i$-Ruf ausgetauscht. In beiden Fällen ändert sich weder die Zustandsvariable ${}_{\le i}X(t)$ noch die Zustandsvariable ${}_{\le r}X(t)$.
Der Sprungkoeffizient des Ereignisses (3) ist für $k<(n+s)$ ${}_{\le i}\lambda_j$ und für $k=(n+s)$ gleich 0.

(4) Es fällt ein >i-Ruf ein. Dieses Ereignis ist - analog zu Punkt (3) - nur relevant für $j<n+s$. Der Sprungkoeffizient des Ereignisses (4) ist für $j<(n+s)$ gleich ${}_{>i}\lambda_j$ und für $j=n+s$ gleich 0, da für $j=n+s$ ein einfallender >i-Ruf abgewiesen wird und damit der Zustand des Systems unverändert bleibt.

(5) Die Wahrscheinlichkeit für Mehrfachereignisse innerhalb Δt ist von höherer Ordnung in Δt. Ihr Sprungkoeffizient ist deshalb gleich 0.

Trifft keines der Ereignisse (1) bis (5) ein, dann bleibt der Zustand $\{ {}_{\le i}X(t)=k,\ {}_{\le r}X(t)=j\}$ erhalten.

Für die verschiedenen Zustände nach Bild 1 stellen wir die aufgeführten Obergänge in der folgenden Obersicht zur Veranschaulichung dar:



FIGUR 2 DIE ZUSTÄNDE $\{ {}_{\le i}X(t) = k,\ {}_{\le r}X(t) = j\}$ UND IHRE OBERGÄNGE

Als erstes stellen wir nun die Differentialgleichungen (138) für die Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_{k,j}(t)$ auf.

Die in (138) auftretende erste Summe erstreckt sich über alle jene Zustände $\{ {}_{\le i}X(t)=\sigma,\ {}_{\le r}X(t)=\theta\}$ aus denen der betrachtete Zustand $\{ {}_{\le i}X(t)=k,\ {}_{\le r}X(t)=j\}$ durch eines der Ereignisse (1) bis (4) entstehen kann. Die zugehörigen Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_{\sigma,\theta}(t)$ werden mit denjenigen Sprungkoeffizienten multipliziert, die den Obergang aus dem Zustand $(k,j) = \{ {}_{\le i}X(t) = k,\ {}_{\le r}X(t) = j\}$ in den betrachteten Zustand (σ,θ) beschreiben.

Die zweite Summe in (138) erstreckt sich über alle jene Sprungkoeffizienten, die einen Obergang aus dem Zustand $\{ {}_{\le i}X(t)=k,\ {}_{\le r}X(t)=j\}$ in einen anderen Zustand beschreiben.

Berücksichtigen wir die Randbedingung (166) für ${}_{\le i}P_{k,j}(t)$ dann können wir auf eine gesonderte Behandlung des Randes $k = j < (n+s)$ und des Randes $k = 0 < (n+s)$ verzichten.

Wir erhalten damit das Differentialgleichungssystem für die ${}_{\le i}P_{k,j}(t)$ in der folgenden Form:

$k = 0,1,\dots,j \qquad j = 0,1,\dots,n+s-1$

$$\begin{aligned} {}_{\le i}P'_{k,j}(t) = {} & {}_{\le i}P_{k,j-1}(t)\cdot {}_{>i}\lambda_{j-1} + {}_{\le i}P_{k-1,j-1}(t)\ {}_{\le i}\lambda_{j-1} + \\ & + {}_{\le i}P_{k,j+1}(t)\,(\mu_{j+1}-\mu_k) + {}_{\le i}P_{k+1,j+1}(t)\ \mu_{k+1} + \\ & - {}_{\le i}P_{k,j}(t)\,(\lambda_j + \mu_j) \end{aligned}$$

$k = 0,1,\dots,n+s-1 \qquad j = n+s$ (184)

$$\begin{aligned} {}_{\le i}P'_{k,n+s}(t) = {} & {}_{\le i}P_{k,n+s-1}(t)\ {}_{>i}\lambda_{n+s-1} + {}_{\le i}P_{k-1,n+s-1}(t)\ {}_{\le i}\lambda_{n+s-1} + \\ & + {}_{\le i}P_{k-1,n+s}(t)\ {}_{\le i}\lambda_{n+s} - {}_{\le i}P_{k,n+s}(t)\,({}_{\le i}\lambda_{n+s} + \mu_{n+s}) \end{aligned}$$

$k = j = n+s$

$$\begin{aligned} {}_{\le i}P'_{n+s,n+s}(t) = {} & {}_{\le i}P_{n+s-1,n+s-1}(t)\ {}_{\le i}\lambda_{n+s-1} + {}_{\le i}P_{n+s-1,n+s}(t)\ {}_{\le i}\lambda_{n+s} + \\ & - {}_{\le i}P_{n+s,n+s}(t)\cdot \mu_{n+s} \end{aligned}$$

Die Normierungsbedingung lautet:

$$\sum_{j=0}^{n+s} \sum_{k=0}^{j} {}_{\le i}P_{k,j}(t) = 1 \tag{185}$$

Mit Hilfe der Normierungsbedingung könnten aus (104) die zeitabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_{k,j}(t)$ berechnet werden, wenn man die Anfangsverteilungen ${}_{\le i}P_{k,j}(t=0)$ vorgibt.

IV. 4 DIE GESAMTZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN UND DER GESAMTPROZESS

Wir summieren die Differentialgleichungen (184) von k=0 bis k=j auf und erhalten mit (163) das Differentialgleichungssystem für die Gesamtzustandswahrscheinlichkeiten

$j = 0, 1, \ldots, n+s-1$

$$ {}_{\le r}P'_j(t) = \sum_{k=0}^{j} {}_{\le i}P'_{k,j}(t) = {}_{\le r}P_{j-1}(t) \cdot \lambda_{j-1} + {}_{\le r}P_{j+1}(t) \cdot \mu_{n+s} + - {}_{\le r}P_j(t) \, (\lambda_j + \mu_j) \tag{186} $$

$j = n+s$

$$ {}_{\le r}P'_{n+s}(t) = \sum_{k=0}^{n+s} {}_{\le i}P'_{k,j}(t) = {}_{\le r}P_{n+s-1}(t) \, \lambda_{n+s-1} - {}_{\le r}P_{n+s}(t) \, \mu_{n+s} $$

Die Normierungsbedingung lautet:

$$ \sum_{j=0}^{n+s} {}_{\le r}P_j(t) = 1 \tag{187} $$

Das Gleichungssystem (186) für die Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le r}P_j$ der Zustandsvariablen ${}_{\le r}X(t)$ läßt sich gemäß den Bemerkungen in IV.1 auch ohne den Umweg über (184) direkt herleiten. Vergleichen wir das Differentialgleichungssystem (186) für die Gesamtzustandswahrscheinlichkeiten des preemptiven Warteverlustsystems mit dem System (36) der Zustandswahrscheinlichkeiten $P_j(t)$ des Warteverlustsystems ohne Prioritäten, so sehen wir, daß bei gleicher Anfangsverteilung - das heißt für ${}_{\le r}P_j(t=0) = P_j(t=0)$ - die Zustandswahrscheinlichkeiten beider Systeme gleich sind:

$$ {}_{\le r}P_j(t) = P_j(t) \tag{188} $$

Da nach II.2 die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten P_j in geschlossener Form vorliegen, sind auch die stationären Gesamtzustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le r}P_j$ des preemptiven Warteverlustsystems bestimmt. Mit (43) bis (57) gilt:

$$ {}_{\le r}P_j = P_j \tag{189} $$

Wir haben damit den Satz, daß sich der G e s a m t prozess so verhält, als würde k e i n e Einteilung in Prioritätsklassen bestehen. Die physikalische Begründung dieses Satzes ist, daß die Prioritätsdisziplin (nach IV.2) nur ein Austauschen von Rufen bewirkt, durch das der Gesamtprozess n i c h t beeinflußt wird. Deshalb bleiben insbesondere die Gesamtbelastungen des Bündels, des Wartespeichers und des Systems gleich.

Wegen (189) lassen sich jetzt auch die mittlere Anrufrate und die mittlere Enderate analog zu II.3 bzw. II.5 berechnen (Vergl. (59) und (65)):

MITTLERE GESAMTANRUFRATE: $$ {}_{\le r}\lambda = \sum_{j=0}^{n+s} {}_{\le r}\lambda_j \cdot {}_{\le r}P_j = \lambda \tag{190} $$

MITTLERE ANRUFRATE DER KLASSE ≤i: $$ {}_{\le i}\lambda = {}_{\le i}\rho \cdot \lambda \tag{191} $$

MITTLERE ANRUFRATE DER KLASSE i: $$ {}_{i}\lambda = {}_{\le i}\lambda - {}_{< i}\lambda = {}_{i}\rho \cdot \lambda \tag{192} $$

MITTLERE GESAMTENDERATE: $$ {}_{\le r}\mu = \sum_{j=1}^{n+s} \mu_j \, {}_{\le r}P_j = \mu \tag{193} $$

Multiplizieren wir die mittleren Anrufraten mit der mittleren Belegungsdauer h so ergeben sich die Angebote:

GESAMTANGEBOT: $$ {}_{\le r}A = h \cdot \lambda = h \sum_{j=0}^{n+s} \lambda_j P_j = A \tag{194} $$

ANGEBOT DER KLASSE ≤i: $$ {}_{\le i}A = h \cdot {}_{\le i}\lambda = {}_{\le i}\rho \cdot A \tag{195} $$

ANGEBOT DER KLASSE i: $$ {}_{i}A = h \cdot {}_{i}\lambda = {}_{i}\rho \, A \tag{196} $$

Wegen (167) ist durch (188) bzw. (189) die Zustandswahrscheinlichkeit ${}_{\le i}P_{0,0}$ bestimmt, die sich deswegen als Parameter in der allgemeinen Lösung anbietet:

$$ {}_{\le i}P_{0,0}(t) = P_0(t) \tag{197} $$

$$ {}_{\le i}P_{0,0} = P_0 \tag{198} $$

IV. 5 DIE ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN ${}_{\le i}P_k(t)$ UND ${}_{>i}P_l(t)$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_k$ und ${}_{>i}P_l$ ergeben sich gemäß (164) und (165) als Summen aus den ${}_{\le i}P_{k,j}(t)$. Wir erhalten zunächst:

$k = 0, 1, \ldots, n+s-1$

$$ {}_{\le i}P'_k(t) = \sum_{j=k}^{n+s} {}_{\le i}P'_{k,j}(t) = \sum_{j=k-1}^{n+s} {}_{\le i}P_{k-1,j}(t) - \mu_k \, {}_{\le i}P_k(t) + - \sum_{j=k}^{n+s} {}_{\le i}P_{k,j}(t) + \mu_{k+1} \, {}_{\le i}P_{k+1}(t) \tag{199} $$

$${}_{\le i}P'_{n+s}(t) = \sum_{j=n+s-1}^{n+s} {}_{\le i}P_{n+s-1,j}(t)\ {}_{\le i}\lambda_j - \mu_{n+s} \cdot {}_{\le i}P_{n+s}(t)$$

Summieren wir diese Gleichung von k=m bis k=n+s auf, so ergibt sich:

$$\sum_{k=m}^{n+s} {}_{\le i}P'_k(t) = \sum_{j=m-1}^{n+s} {}_{\le i}P_{m-1,j}(t)\ {}_{\le i}\lambda_j - \mu_m\ {}_{\le i}P_m(t) \qquad (200)$$

Diese Gleichung entspricht der Gleichung (37) beim Warteverlustsystem ohne Prioritäten; wir werden darauf in Abschnitt IV.6 näher eingehen. Addieren wir die Gleichungen (200) schließlich von m=1 bis m=n+s, so ergibt sich:

$$\sum_{m=1}^{n+s} \sum_{k=m}^{n+s} {}_{\le i}P'_k(t) = \sum_{j=0}^{n+s} {}_{\le i}\lambda_j \sum_{m=0}^{j} {}_{\le i}P_{m,j}(t) - {}_{\le i}\lambda_{n+s}\ {}_{\le i}P_{n+s} +$$

$$- \sum_{m=1}^{n+s} \mu_m\ {}_{\le i}P_m(t) =$$

Mit (163) und (182):

$$= {}_{\le i}\lambda - {}_{\le i}\lambda_{n+s}\ {}_{\le i}P_{n+s}(t) - \sum_{m=1}^{n+s} \mu_m\ {}_{\le i}P_m(t) \qquad (201)$$

Analog erhält man für die Zustandswahrscheinlichkeit ${}_{>i}P_1(t)$:

$${}_{>i}P'_0(t) = {}_{\le i}\lambda_{n+s}\ {}_{\le i}P_{n+s-1,n+s}(t) - \sum_{j=0}^{n+s-1} {}_{>i}\lambda_j\ {}_{\le i}P_{j,j}(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n+s} (\mu_j - \mu_{j-1})\ {}_{\le i}P_{j-1,j}(t)$$

$${}_{>i}P'_\ell(t) = \qquad (202)$$

$${}_{\le i}\lambda_{n+s}\ {}_{\le i}P_{n+s-\ell-1,n+s}(t) - \sum_{j=\ell}^{n+s-1} {}_{>i}\lambda_j \cdot {}_{\le i}P_{j-\ell,j}(t) - \sum_{j=\ell+1}^{n+s} {}_{\le i}P_{j-\ell-1,j}(t)\ (\mu_j - \mu_{j-\ell-1}) +$$

$$- {}_{\le i}\lambda_{n+s}\ {}_{\le i}P_{n+s-\ell,n+s}(t) + \sum_{j=\ell-1}^{n+s-1} {}_{>i}\lambda_j\ {}_{\le i}P_{j-\ell-1,j}(t) + \sum_{j=\ell}^{n+s} {}_{\le i}P_{j-\ell,j}(t)\ (\mu_j - \mu_{j-\ell})$$

$$\sum_{\ell=m}^{n+s} {}_{>i}P'_\ell(t) = \sum_{j=m-1}^{n+s-1} {}_{>i}\lambda_j \cdot {}_{\le i}P_{j-m+1,j}(t) - {}_{\le i}\lambda_{n+s} \cdot {}_{\le i}P_{n+s-m,n+s}(t) + \qquad (203)$$

$$- \sum_{j=m}^{n+s} (\mu_j - \mu_{j-m})\ {}_{\le i}P_{j-m,j}(t)$$

Mit (201) und (186) erhalten wir direkt:

$$\sum_{m=1}^{n+s} \sum_{\ell=m}^{n+s} \sum_{j=\ell}^{n+s} {}_{\le i}P_{j-\ell,j}(t) = \qquad (204)$$

$$\sum_{m=1}^{n+s} \sum_{j=m}^{n+s} \sum_{k=0}^{j} {}_{\le i}P_{k,j}(t) - \sum_{m=1}^{n+s} \sum_{k=m}^{n+s} \sum_{j=k}^{n+s} {}_{\le i}P_{k,j}(t) =$$

$$= {}_{>i}\lambda - (\lambda_{n+s}\ P_{n+s} - {}_{\le i}\lambda \cdot {}_{\le i}P_{n+s}(t) - \left(\mu - \sum_{m=1}^{n+s} \mu_m\ {}_{\le i}P_m(t)\right)$$

Auf diese Differentialgleichungen werden wir in IV.6, IV.7 und IV.16 zurückkommen.

IV. 6 DIE STATIONÄREN ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN

Analog zu Gleichung (39) beim Warteverlustsystem ohne Prioritäten lauten hier die Bedingungen für den stationären Prozeß:

$${}_{\le i}P_{k,j}(t) = {}_{\le i}P_{k,j} \qquad {}_{\le i}P'_{k,j}(t) = 0 \qquad (205)$$

Mit diesen Stationaritätsbedingungen erhalten wir aus dem Differentialgleichungssystem (184) das folgende lineare Gleichungssystem für die ${}_{\le i}P_{k,j}$:

$k = 0,1,\dots,j \qquad j = 0,1,\dots,n+s-1$

$$0 = {}_{\le i}P_{k,j-1}\ {}_{>i}\lambda_{j-1} + {}_{\le i}P_{k-1,j-1}\ {}_{\le i}\lambda_{j-1} + {}_{\le i}P_{k,j+1}\ (\mu_{j+1} - \mu_k) +$$

$$+ {}_{\le i}P_{k+1,j+1}\ \mu_{k+1} - {}_{\le i}P_{k,j}\ (\lambda_j + \mu_j) \qquad (206)$$

$k = 0,1,\dots,n+s-1 \qquad j = n+s$

$$0 = {}_{\le i}P_{k,n+s-1}\ {}_{>i}\lambda_{n+s-1} + {}_{\le i}P_{k-1,n+s-1}\ {}_{\le i}\lambda_{n+s-1} + {}_{\le i}P_{k-1,n+s}\ {}_{\le i}\lambda_{n+s} +$$

$$- {}_{\le i}P_{k,n+s}\ ({}_{\le i}\lambda_{n+s} + \mu_{n+s})$$

$k = j = n+s$

$$0 = {}_{\le i}P_{n+s-1,n+s-1}\ {}_{\le i}\lambda_{n+s-1} + {}_{\le i}P_{n+s-1,n+s}\ {}_{\le i}\lambda_{n+s} - {}_{\le i}P_{n+s,n+s}\ \mu_{n+s}$$

Setzen wir nach Gleichung (198) die schon bekannte Zustandswahrscheinlichkeit ${}_{\le i}P_{0,0}$ ein, so erhalten wir ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem, das numerisch nach bekannten Methoden gelöst werden kann. Im Anhang wird zur numerischen Lösung dieses Gleichungssystems noch einiges gesagt. Insbesondere wird ein Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe dieses Gleichungssystem mit (n+s+1)(n+s+2)-1 Unbekannten auf ein (lineares, inhomogenes) Gleichungssystem mit nur (n+s) Unbekannten reduziert werden kann, weshalb auch für größere (n+s) die numerische Berechnung keine Schwierigkeiten bereitet.

Aus den stationären Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_{k,j}$ ergeben sich gemäß (163) und (164) die uns interessierenden Wahrscheinlichkeiten des stationären Prozesses, daß k Rufe der Klasse ≤i bzw. l Rufe der Klasse >i sich im System befinden:

$$ {}_{\le i}P_k = \sum_{j=k}^{n+s} {}_{\le i}P_{k,j} \tag{207}$$

$$ {}_{>i}P_l = \sum_{j=l}^{n+s} {}_{\le i}P_{j-l,j} \tag{208}$$

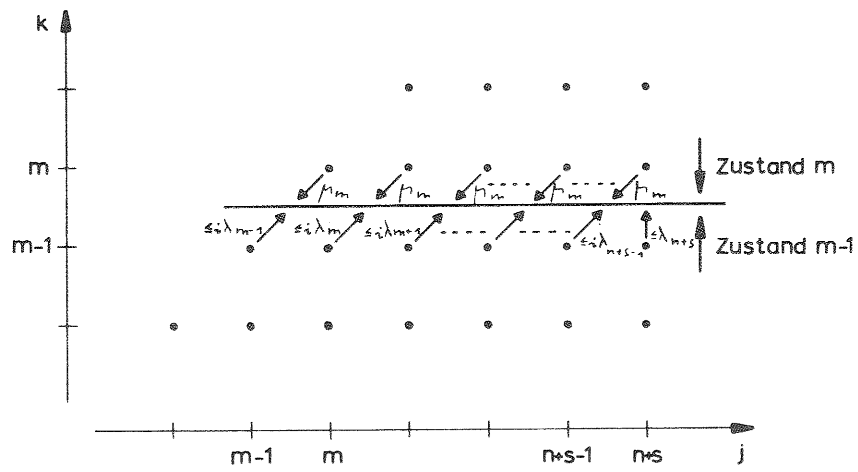
Bevor wir aus den Zustandswahrscheinlichkeiten in den nächsten Abschnitten wichtige Verkehrscharakteristika berechnen, leiten wir für beide Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_k$ und ${}_{>i}P_l$ ein Gleichgewicht zwischen Übergängen her, das dem Gleichgewicht (42) der Übergänge beim Warteverlustsystem o h n e Prioritäten entsprechen wird.
Wir setzen die Stationaritätsbedingungen (205) zunächst in (200) ein:

$$ \mu_m \, {}_{\le i}P_m = \sum_{j=m-1}^{n+s} {}_{\le i}P_{m-1,j} \; {}_{\le i}\lambda_j \tag{209}$$

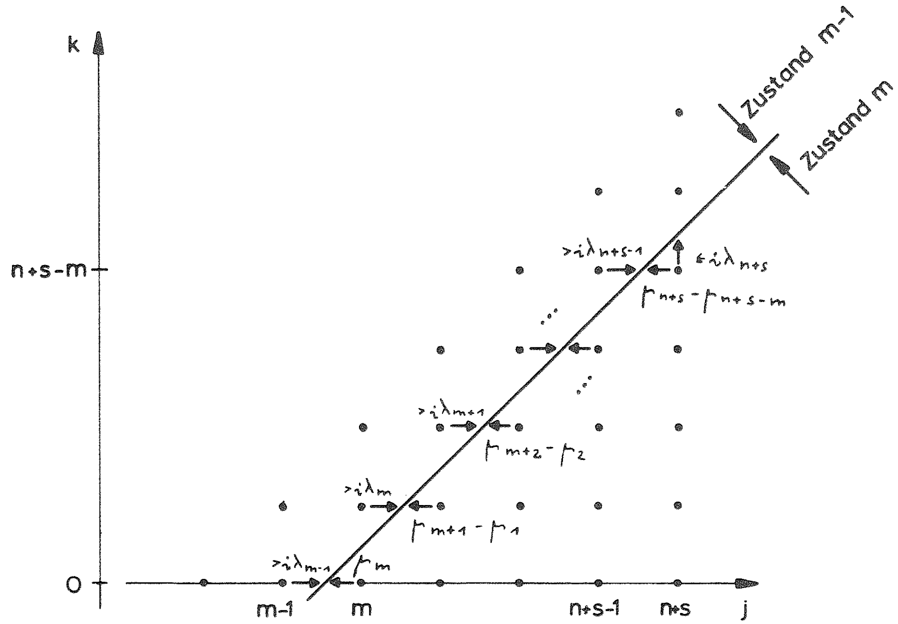
Wie Gleichung (42) so manifestiert Gleichung (209) ein Gleichgewicht der Ü b e r g ä n g e der Zustandsvariablen ${}_{\le i}X$ von m → (m-1) und von (m-1) → m. Dieses Gleichgewicht der Übergänge wird in Bild 3 verdeutlicht.
Das Gleichungssystem (206) dagegen stellt ein Gleichgewicht für den Z u s t a n d $\{{}_{\le i}X(t)=k,\ {}_{\le r}X(t)=j\}$ dar, genau wie Gleichungssystem (41) beim Warteverlustsystem ohne Prioritäten.
Aus Differentialgleichung (203) erhalten wir das stationäre Gleichgewicht der Ü b e r g ä n g e für die Zustandsvariable ${}_{>i}X$:

$$ \sum_{j=m-1}^{n+s-1} {}_{>i}\lambda_j \; {}_{\le i}P_{j-m+1,j} = {}_{\le i}\lambda_{n+s} \; {}_{\le i}P_{n+s-m,n+s} + \sum_{j=m}^{n+s} (\mu_j - \mu_{j-m}) \, {}_{\le i}P_{j-m,j} \tag{210}$$

Es finden genauso viele Übergänge aus dem Zustand $\{{}_{>i}X=m-1\}$ in den Zustand $\{{}_{>i}X=m\}$ statt, wie Übergänge aus dem Zustand $\{{}_{>i}X=m\}$ in den Zustand $\{{}_{>i}X=m-1\}$. Dieses Gleichgewicht der Übergänge der Zustandsvariablen ${}_{>i}X$ verdeutlicht Bild 4.



FIGUR 3 GLEICHGEWICHT DER OBERGÄNGE FÜR DIE ZUSTANDSVARIABLE ${}_{\le i}X$



FIGUR 4 GLEICHGEWICHT DER OBERGÄNGE FÜR DIE ZUSTANDSVARIABLE ${}_{>i}X$

Die Gleichgewichtsbeziehungen (209) und (210) sind von Interesse, um den Prozess physikalisch zu verstehen. Aus ihnen läßt sich zwar nicht -wie im Warteverlustsystem ohne Prioritäten- eine geschlossene Lösung der stationären Zustandswahrscheinlichkeiten ableiten, sie bringen im folgenden aber wesentliche Vereinfachungen.

IV. 7 DIE MITTLERE ENDERATE

Nachdem wir in IV.4 die mittleren Anrufraten und die Angebote mit Hilfe der Gesamtzustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\leq r}P_j$ schon berechnet haben, können jetzt die Enderaten ${}_{\leq i}\mu$ der Klasse $\leq i$ auch bestimmt werden:

MITTLERE ENDERATE DER KLASSE $\leq i$:

$$ {}_{\leq i}\mu = \sum_{k=1}^{n+s} \mu_k \, {}_{\leq i}P_k \tag{211} $$

Setzen wir in die Differentialgleichung (201) die Stationaritätsbedingungen ein, so erhalten wir mit (211) die folgende Beziehung:

$$ {}_{\leq i}\mu = {}_{\leq i}\lambda - {}_{\leq i}\lambda_{n+s} \cdot {}_{\leq i}P_{n+s} \tag{212} $$

Diese Gleichung entspricht Gleichung (66) beim System ohne Prioritäten und kann genauso interpretiert werden: ${}_{\leq i}\lambda_{n+s} \cdot {}_{\leq i}P_{n+s}$ ist die mittlere Zahl von $\leq i$-Rufen, die pro Zeiteinheit verloren gehen, sei es durch direktes Abweisen oder durch Verdrängen. Die mittlere Zahl ${}_{\leq i}\mu$ von endenden $\leq i$-Rufen ist gleich der mittleren Zahl ${}_{\leq i}\lambda$ von ankommenden $\leq i$-Rufen abzüglich der mittleren Zahl von verlorengehenden $\leq i$-Rufen.

Für i=r erhalten wir die G e s a m tenderate ${}_{\leq r}\mu$, die mit Gleichung (66) übereinstimmen muß:

$$ {}_{\leq r}\mu = {}_{\leq r}\lambda - {}_{\leq r}\lambda_{n+s} \, {}_{\leq r}P_{n+s} = \lambda - \lambda_{n+s} P_{n+s} = \mu $$

Die Enderate der Klasse i ergibt sich als Differenz:

$$ {}_{i}\mu = {}_{\leq i}\mu - {}_{<i}\mu \tag{213} $$

Die Enderate ${}_{>i}\mu$ ist:

$$ {}_{>i}\mu = {}_{\leq r}\mu - {}_{\leq i}\mu \tag{214} $$

$$ {}_{>i}\mu = {}_{>i}\lambda - \lambda_{n+s} P_{n+s} + {}_{\leq i}\lambda_{n+s} \, {}_{\leq i}P_{n+s} \tag{215} $$

Gleichung (215) folgt durch Einsetzen der Stationaritätsbedingungen auch direkt aus Differentialgleichung (204).

IV. 8 DIE ABWEISWAHRSCHEINLICHKEIT

Es sei ${}_iC$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein ankommender i-Ruf wegen Systemblockierung sofort verloren geht. Ein i-Ruf geht verloren, wenn er in den Zustand $\{ {}_{\leq i}X = n+s \}$ einfällt. Im Mittel fallen pro Zeiteinheit ${}_i\lambda_{n+s} \cdot {}_{\leq i}P_{n+s}$ Rufe der Klasse i in diesen Zustand ein. Wir erhalten ${}_iC$ als Verhältnis der pro Zeiteinheit abgewiesenen i-Rufe zur Gesamtzahl der pro Zeiteinheit einfallenden i-Rufe. Wegen (181) und (192) läßt sich der Klassenindex der beiden Anrufraten "herauskürzen".

$$ {}_iC = \frac{{}_i\lambda_{n+s} \cdot {}_{\leq i}P_{n+s}}{{}_i\lambda} = \frac{\lambda_{n+s}}{\lambda} \cdot {}_{\leq i}P_{n+s} \tag{216} $$

Speziell erhalten wir für i=r nach Gleichung (67), daß die Abweiswahrscheinlichkeit ${}_rC$ der letzten Klasse r übereinstimmt mit der Verlustwahrscheinlichkeit B des Warteverlustsystems ohne Prioritäten:

$$ {}_rC = \frac{\lambda_{n+s}}{\lambda} P_{n+s} = B \tag{217} $$

Diese Gleichung ist leicht zu verstehen: Im Warteverlustsystem ohne Prioritäten geht jeder ankommende Ruf verloren, wenn sich (n+s) Rufe im System befinden. Ebenso geht im preemptiven Warteverlustsystem jeder Ruf der Klasse r verloren, wenn (n+s) Rufe sich im System befinden. Da die Gesamtprozesse nach IV.4 identisch sind, müssen die Verlustwahrscheinlichkeit B und die Abweiswahrscheinlichkeit ${}_rC$ der r Klasse übereinstimmen.

Da für die Klasse 1 (höchste Priorität) keine nachträglichen Verluste durch Verdrängen möglich sind, gilt für die Verlustwahrscheinlichkeit ${}_1B$ der Klasse 1:

$$ {}_1B = \frac{\lambda_{n+s}}{\lambda} \, {}_1P_{n+s} = {}_1C \tag{218} $$

Berücksichtigen wir die Beziehung (159) und (217) dann folgt aus Gleichung (216):

$$ {}_{i}C < {}_{i+1}C \leq B $$

Infolge der Prioritätsdisziplin ist die Abweiswahrscheinlichkeit einer Klasse umso kleiner, je größer ihre Priorität ist, auf jeden Fall ist sie nicht größer als die Verlustwahrscheinlichkeit B des Warteverlustsystems ohne Prioritäten.

Die Abweiswahrscheinlichkeit ${}_{\leq i}C$ der Klasse $\leq i$ erhalten wir durch die folgende Überlegung: Die Zahl ${}_{\leq i}\lambda \cdot {}_{\leq i}C$ der im Mittel pro Zeiteinheit von der Klasse $\leq i$ abgewiesenen Rufe setzt sich aus den abgewiesenen Rufen der Klassen 1,2,... bis i zusammen:

$$ {}_{\leq i}\lambda \cdot {}_{\leq i}C = \sum_{\nu=1}^{i} {}_{\nu}\lambda \cdot {}_{\nu}C $$

$$ {}_{\leq i}C = \frac{1}{{}_{\leq i}\rho} \sum_{\nu=1}^{i} {}_{\nu}\rho \cdot {}_{\nu}C \qquad (219) $$

Die Gesamtabweiswahrscheinlichkeit ${}_{\leq r}C$ ist:

$$ {}_{\leq r}C = \sum_{\nu=1}^{r} {}_{\nu}\rho \cdot {}_{\nu}C \qquad (220) $$

Analog zu (219) erhalten wir die Wahrscheinlichkeit, daß ein >i-Ruf abgewiesen wird:

$$ {}_{>i}C = \frac{1}{{}_{>i}\rho} \sum_{\nu=i+1}^{r} {}_{\nu}\rho \cdot {}_{\nu}C \qquad (221) $$

IV. 9 DIE VERDRÄNGUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT

Es sei ${}_{i}V$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein i-Ruf aus dem System verdrängt wird. Die Zahl ${}_{i}\lambda \cdot {}_{i}V$ der pro Zeiteinheit im Mittel verdrängten i-Rufe muß gleich der Anzahl derjenigen Rufe sein, welche diese i-Rufe verdrängen. Ein i-Ruf kann nur durch <i-Rufe verdrängt werden. Im Mittel fallen ${}_{<i}\lambda_{n+s} \cdot {}_{\leq i}P_{n+s}$ Rufe der Klasse <i in den Zustand $\{{}_{\leq i}X=n+s\}$ ein. Von diesen Rufen treffen aber ${}_{<i}\lambda_{n+s} \cdot {}_{<i}P_{n+s}$ den Zustand $\{{}_{<i}X = n+s\}$ an, d.h. einen Zustand, in dem gar keine i-Rufe im System sind (und deshalb nicht verdrängt werden können). Wir erhalten:

ANZAHL DER VERDRÄNGTEN i-RUFE =

ANZAHL JENER RUFE, DIE i-RUFE VERDRÄNGEN

$$ {}_{i}\lambda \cdot {}_{i}V = {}_{<i}\lambda_{n+s}\; {}_{\leq i}P_{n+s} - {}_{<i}\lambda_{n+s}\; {}_{<i}P_{n+s} \qquad (222) $$

$$ {}_{i}V = \frac{{}_{<i}\rho}{{}_{i}\rho} \frac{\lambda_{n+s}}{\lambda} \left({}_{\leq i}P_{n+s} - {}_{<i}P_{n+s} \right) \qquad (223) $$

$$ {}_{i}V = \frac{{}_{<i}\rho}{{}_{i}\rho} \left({}_{i}C - {}_{i-1}C \right) \qquad (224) $$

Für i = 1 ist: ${}_{1}V = 0$ (225)

Genau wie im Abschnitt IV.7 ergibt sich:

$$ {}_{\leq i}V = \frac{1}{{}_{\leq i}\rho} \sum_{\nu=2}^{i} {}_{\nu}\rho\; {}_{\nu}V $$

Nach Zwischenrechnung erhalten wir:

$$ {}_{\leq i}V = {}_{i}C - {}_{\leq i}C \qquad (226) $$

Daraus ergibt sich für i=r die Gesamtverdrängungswahrscheinlichkeit ${}_{\leq r}V$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, daß ein (beliebiger) Ruf verdrängt wird:

$$ {}_{\leq r}V = B - {}_{\leq r}C \qquad (227) $$

Die Gleichungen (226) und (227) lassen sich folgendermaßen interpretieren: Die Zahl der verdrängten $\leq$i-Rufe ist gleich der Zahl a l l e r jener $\leq$i-Rufe, die das Bündel im Zustand $\{{}_{\leq i}X=n+s\}$ antreffen, abzüglich derjenigen, die sofort bei Eintreffen abgewiesen werden.

Für die Verdrängungswahrscheinlichkeit der Klasse >i gilt:

$$ {}_{>i}\rho\; {}_{>i}V = B - {}_{\leq i}\rho\; {}_{\leq i}C - {}_{>i}\rho\; {}_{>i}C \qquad (228) $$

IV. 10 DIE VERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT

Die Verlustwahrscheinlichkeit setzt sich aus der Abweiswahrscheinlichkeit und der Verdrängungswahrscheinlichkeit zusammen:

$$ {}_{i}B = {}_{i}C + {}_{i}V \qquad (229) $$

$$ {}_{\leq i}B = {}_{\leq i}C + {}_{\leq i}V \qquad (230) $$

$$ {}_{>i}B = {}_{>i}C + {}_{>i}V \qquad (231) $$

Mit (224) $${}_{i}\rho \cdot {}_{i}\mathcal{B} = {}_{\le i}\rho \cdot {}_{i}C - {}_{<i}\rho \cdot {}_{i-1}C \tag{232}$$

Mit (226) $${}_{\le i}\mathcal{B} = {}_{i}C \tag{233}$$

Diese Beziehung (233) läßt sich interpretieren. Dazu schreiben wir Gleichung (216) um:

$${}_{i}C = \frac{{}_{\le i}\rho\ \lambda_{n+s}}{{}_{\le i}\rho\ \lambda}\ {}_{\le i}P_{n+s} = \frac{{}_{\le i}\lambda_{n+s}}{{}_{\le i}\lambda}\ {}_{\le i}P_{n+s}$$

Die Abweiswahrscheinlichkeit ${}_{i}C$ der Klasse i ist demnach gleich der Wahrscheinlichkeit, daß ein einfallender $\le$ i-Ruf den Zustand $\{ {}_{\le i}X=n+s \}$ antrifft, (das System ist durch $\le$ i-Rufe blockiert). Fällt ein $\le$ i-Ruf aber in diesen Zustand ein, dann geht in jedem Fall ein $\le$ i-Ruf verloren: Entweder geht der einfallende $\le$ i-Ruf selbst durch Abweisen verloren, oder der einfallende $\le$ i-Ruf verdrängt einen anderen $\le$ i-Ruf aus dem System.
Für i=r geht aus Gleichung (232) hervor:

$${}_{\le r}\mathcal{B} = \mathcal{B} \tag{234}$$

Die Gesamtverlustwahrscheinlichkeit ${}_{\le r}B$ (als Mittel über alle Klassen) ist gleich der Verlustwahrscheinlichkeit B des Warteverlustsystems ohne Prioritäten. Diese Beziehung kann man aus IV.4 auch direkt folgern, da die Gesamtprozesse ${}_{\le r}X(t)$ und X(t) identisch sind.
Aus Gleichung (233) folgt durch Vergleich mit (218), daß - wie es der Prioritätsdisziplin entspricht - die Verlustwahrscheinlichkeit der Klasse $\le$ i mit wachsendem i zunimmt, bis sie schließlich für i=r mit der Verlustwahrscheinlichkeit des Warteverlustsystems übereinstimmt.

IV. 11 DIE ERFOLGSWAHRSCHEINLICHKEIT

Die Erfolgswahrscheinlichkeiten ergeben sich aus den Verlustwahrscheinlichkeiten durch Komplementbildung:

$${}_{i}S = 1 - {}_{i}\mathcal{B} \tag{235}$$

$${}_{\le i}S = 1 - {}_{\le i}\mathcal{B} \tag{236}$$

Die über alle Klassen gemittelte Erfolgswahrscheinlichkeit ${}_{\le r}S$ ist (gemäß IV.4) gleich der Erfolgswahrscheinlichkeit des Warteverlustsystems ohne Prioritäten:

$${}_{\le r}S = S \tag{237}$$

IV. 12 DIE WAHRSCHEINLICHKEIT FÜR START EINES i-RUFES AUF EINEM BESTIMMTEN PLATZ DES WARTEVERLUSTSYSTEMS

Zunächst wollen wir die Wahrscheinlichkeit ${}_{r}F_{k}$ bestimmen, daß ein r-Ruf, also ein Ruf der niedersten Prioritätsklasse, auf Platz k startet. Analog zu Gleichung (62) gilt:

$${}_{r}F_{k} = \frac{{}_{r}\lambda_{k-1}}{{}_{r}\lambda}\ {}_{\le r}P_{k-1} \tag{238}$$

Beachten wir (181) und (192) dann folgt mit Gleichung (62):

$${}_{r}F_{k} = F_{k} \tag{239}$$

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein r-Ruf im preemptiven Warteverlustsystem auf Platz k startet, genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit für Startplatz k eines beliebigen Rufes im Warteverlustsystem ohne Prioritäten.

Wir kommen jetzt zu den anderen Klassen i=1,2,... bis (r-1). Startet ein i-Ruf auf Platz k im Zustand $\{ {}_{\le r}X = j \}$, dann werden wir sagen, der Ruf startet auf Platz (k,j). Für die Wahrscheinlichkeit ${}_{i}F_{k,j}$, das ein i-Ruf auf Platz (k,j) startet, gilt:

$$\begin{aligned} {}_{i}F_{k,j} &= \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda}\ {}_{\le i}P_{k-1,j-1} \qquad j=1,2,\dots,n+s-1 \quad k=1,\dots,j \\ {}_{i}F_{k,n+s} &= \frac{\lambda_{n+s-1}}{\lambda}\ {}_{\le i}P_{k-1,n+s-1} + \frac{\lambda_{n+s}}{\lambda}\ {}_{\le i}P_{k-1,n+s} \qquad k=1,\dots,n+s \end{aligned} \tag{240}$$

Die Wahrscheinlichkeit ${}_{i}F_{k}$, daß ein i-Ruf auf Platz k startet, erhalten wir durch Aufsummation:

$${}_{i}F_{k} = \sum_{j=k}^{n+s} {}_{i}F_{k,j} = \sum_{j=k-1}^{n+s} \frac{{}_{i}\lambda_{j}}{{}_{i}\lambda}\ {}_{\le i}P_{k-1,j} \tag{241}$$

Wenden wir (181), (182) und (191), (192) an, dann ergibt sich:

$${}_{i}F_{k} = \frac{1}{{}_{\le i}\lambda} \sum_{j=k-1}^{n+s} {}_{\le i}\lambda_{j}\ {}_{\le i}P_{k-1,j} \tag{242}$$

Setzen wir schließlich das Gleichgewicht (209) ein, dann erhalten wir:

$$ {}_iF_k = \frac{\rho_k}{{}_{\le i}\lambda} \; {}_{\le i}P_k \qquad (243) $$

Diese Gleichung gilt auch für Klasse r, wie wir aus (238) sofort sehen, wenn wir dort (189) und (42) berücksichtigen.

IV. 13 DIE BLOCKIERUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT

Es sei ${}_iE$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein einfallender i-Ruf nicht sofort eine freie Leitung findet:

$$ {}_iE = \sum_{k=n+1}^{n+s} {}_iF_k + {}_iC \qquad (244) $$

Für i=r ergibt sich unter Berücksichtigung von (239) und (217) zusammen mit (74), daß die Wahrscheinlichkeit, daß ein r-Ruf im preemptiven Warteverlustsystem keine freie Leitung findet, genauso groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebiger Ruf im Warteverlustsystem ohne Prioritäten keine freie Leitung findet:

$$ {}_rE = E \qquad (245) $$

IV. 14 DIE FREIWAHRSCHEINLICHKEIT

Es sei ${}_iF$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein i-Ruf s o f o r t ins Bündel kommt. Wir summieren die Wahrscheinlichkeiten ${}_iF_k$ für Startplatz k von k=1,2,... bis n auf und erhalten mit (241):

$$ {}_iF = \sum_{k=1}^{n} {}_iF_k = \frac{1}{{}_{\le i}\lambda} \sum_{k=1}^{n} \rho_k \; {}_{\le i}P_k \qquad (246) $$

Es gilt:

$$ {}_iF + {}_iE = 1 \qquad (247) $$

und speziell für i=r:

$$ {}_rF + {}_rE = 1 \qquad (248) $$

Setzen wir Gleichung (245) ein, dann ergibt sich mit Gleichung (74):

$$ {}_rF = F \qquad (249) $$

In Worten: die Freiwahrscheinlichkeit für Klasse r im preemptiven System ist gleich der Freiwahrscheinlichkeit im Warteverlustsystem ohne Prioritäten. Gleichung (248) geht für i=r in Gleichung (74) über.

IV. 15 DIE SOFORTWARTEWAHRSCHEINLICHKEIT

Wir werden jetzt die Wahrscheinlichkeit ${}_iR$, daß einem i-Ruf s o f o r t bei seiner Ankunft ein Warteplatz zugewiesen wird (und nicht erst nachträglich bei seiner eventuellen Unterbrechung im Bündel) berechnen:

$$ {}_iR = \sum_{k=n+1}^{n+s} {}_iF_k \qquad (250) $$

Für i=r erhalten wir mit (239), (217) und (77):

$$ {}_rR = W $$

Die Sofortwartewahrscheinlichkeit der Klasse r ist gleich der Wartewahrscheinlichkeit des Warteverlustsystems ohne Prioritäten. Freiwahrscheinlichkeit, Sofortwartewahrscheinlichkeit und Abweiswahrscheinlichkeit genügen den folgenden beiden Beziehungen:

$$ {}_iF + {}_iR + {}_iC = 1 \qquad (251) $$

$$ {}_iR + {}_iC = {}_iE \qquad (252) $$

Die beiden Gleichungen (251) und (252) entsprechen den Beziehungen (78) und (79) des Warteverlustsystems ohne Prioritäten und sind für i=r mit diesen identisch.

IV. 16 DIE BÜNDELBELASTUNG

${}_{\le i}Y$ ist die Zahl der im Mittel von ≤i-Rufen belegten Leitungen. Analog zu (83) ist:

$$ {}_{\le i}Y = h \sum_{k=1}^{n+s} \rho_k \; {}_{\le i}P_k = h \; {}_{\le i}\rho \qquad (253) $$

Mit den Gleichungen (212) und (216) ergibt sich daraus:

$$ {}_{\le i}Y = h \; {}_{\le i}\lambda \, (1 - {}_iC) \qquad (254) $$

$$ {}_{\le i}Y = {}_{\le i}A \, (1 - {}_{\le i}B) \qquad (255) $$

Dies ist eine Beziehung, die genauso wie (84) interpretiert werden kann.
Für i=r erhalten wir die Gesamtbündelbelastung ${}_{\le r}Y$, die mit (234) und (84) -und auch gemäß IV.4- gleich der Bündelbelastung des Warteverlustsystems ohne Prioritäten ist:

$$ {}_{\le r}Y = Y \tag{256} $$

Für die Bündelbelastung ${}_{i}Y$ der i-Rufe gilt:

$$ {}_{i}Y = {}_{\le i}Y - {}_{<i}Y \tag{257} $$

$$ {}_{i}Y = h\{{}_{i}\lambda - ({}_{\le i}\lambda\;{}_{\le i}B - {}_{<i}\lambda\;{}_{<i}B)\} $$

$$ {}_{i}Y = {}_{i}A\,(1 - {}_{i}B) \tag{258} $$

Diese Beziehung ist in keiner Weise so selbstverständlich, wie es die Beziehung (84) im Warteverlustsystem ohne Prioritäten ist. Denn hier tragen zur Belastung des Bündels durch i-Rufe auch jene i-Rufe bei, die aus dem Bündel durch Unterbrechung verdrängt werden.

Für ${}_{>i}Y$ ergibt sich: $$ {}_{>i}Y = {}_{\le r}Y - {}_{\le i}Y \tag{259} $$

und $$ {}_{>i}Y = {}_{>i}A\,(1 - {}_{>i}B) \tag{260} $$

Um den Anteil der Belastung ${}_{\le i}Y$ an der Gesamtbelastung ${}_{\le r}Y$ zu bestimmen, formen wir um:

$$ {}_{\le i}Y = {}_{\le i}A\,(1 - {}_{\le r}B + {}_{\le r}B - {}_{\le i}B) = {}_{\le i}p \cdot {}_{\le r}Y + {}_{\le i}A\,({}_{\le r}B - {}_{\le i}B) \tag{261} $$

Die Belastung ${}_{\le i}Y$ der Klasse ≤i ist wegen ihrer im Vergleich zur Klasse >i bevorzugten Bedienung größer als es ihrem Anteil am Gesamtangebot entspricht.
Für >i gilt das Umgekehrte:

$$ {}_{>i}Y = {}_{>i}p \cdot {}_{\le r}Y - {}_{>i}A\,({}_{>i}B - {}_{\le r}B) \tag{262} $$

Eine analoge Beziehung läßt sich für ${}_{i}Y$ herleiten:

$$ {}_{i}Y = {}_{i}p \cdot {}_{\le r}Y + {}_{i}A\,({}_{\le r}B - {}_{i}B) \tag{263} $$

Zu der angebotsproportionalen Belastung ${}_{i}p \cdot {}_{\le r}Y$ addiert sich ein Term, der positiv oder negativ sein kann, je nachdem, ob der über alle Klassen gemittelte Gesamtverlust ${}_{\le r}B = B$ größer oder kleiner als der Verlust ${}_{i}B$ der Klasse i ist.

IV. 17 DIE WARTEBELASTUNG

Wir berechnen die Wartebelastung ${}_{\le i}Q$ der Klasse ≤i, also die mittlere Zahl von Warteplätzen, die von ≤i-Rufen belegt sind:

$$ {}_{\le i}Q = \sum_{k=n+1}^{n+s} (k-n)\;{}_{\le i}P_k = \sum_{k=1}^{n} k\;{}_{\le i}P_{n+k} \tag{264} $$

$$ {}_{i}Q = {}_{\le i}Q - {}_{<i}Q \tag{265} $$

Für i=r erhalten wir für die Gesamtwartebelastung ${}_{\le r}Q$ aus (264) die nach IV.4 selbstverständliche Beziehung:

$$ {}_{\le r}Q = Q \tag{266} $$

Das heißt, die Gesamtwartebelastung des preemptiven Warteverlustsystems ist gleich der Wartebelastung des Warteverlustsystems ohne Prioritäten. Die Wartebelastung der Klasse >i ist:

$$ {}_{>i}Q = {}_{\le r}Q - {}_{\le i}Q \tag{267} $$

IV. 18 DIE SYSTEMBELASTUNG

$$ {}_{\le i}X = \sum_{k=1}^{n+s} k \cdot {}_{\le i}P_k \tag{268} $$

Mit (255) und (264): $$ {}_{\le i}X = {}_{\le i}Y + {}_{\le i}Q $$

Speziell (vergleiche IV.4) gilt: $$ {}_{\le r}X = X \tag{269} $$

$$ {}_{i}X = {}_{i}Y + {}_{i}Q \tag{270} $$

$$ {}_{>i}X = {}_{>i}Y + {}_{>i}Q \tag{271} $$

IV. 19 DIE GESAMTVERWEILZEIT EINES i-RUFES IM SYSTEM VERTEILUNG UND ERWARTUNGSWERTE

Wir kommen jetzt zu denjenigen Verkehrscharakteristika des preemptiven Warteverlustsystems, die wir mit Hilfe des in Kapitel III eingeführten RANDOM-WALK Prinzips berechnen werden.
Ein i-Ruf starte auf Platz (k,j). Wir beobachten seinen RANDOM-WALK bis er das System verläßt. Das Ziel {Erfolg} des RANDOM-WALK ist: {VERLASSEN DES SYSTEMS}. Dieses Ziel erreicht jeder Ruf mit Sicherheit, unabhängig von seinem Startplatz. Deshalb ist die "Erfolgswahrscheinlichkeit" dieses RANDOM-WALK für alle Startplätze gleich 1 (vergl. III.9).

Mit Hilfe des Differentialgleichungssystems (153) werden wir die Wahrscheinlichkeit ${}_iG_{k,j}(x)$ berechnen, daß ein i-Ruf bei Start auf Platz (k,j) nach der Zeit x das System noch nicht verlassen hat:

$$P\{\text{GESAMTVERWEILZEIT EINES i-RUFES} > x \mid \text{START AUF PLATZ } (k,j)\} = {}_iG_{k,j}(x) \qquad (272)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. die Sprungkoeffizienten (vergl. III.7) dieses RANDOM-WALK erhalten wir direkt aus den in IV.3 aufgeführten Übergangsmöglichkeiten. Sie seien am Beispiel dieses RANDOM-WALK im preemptiven Warteverlustsystem nochmals im einzelnen aufgeführt. Der beobachtete i-Ruf befinde sich auf Platz (k,j). Das Erfolgsziel des RANDOM-WALK kann der i-Ruf in einem Schritt erreichen e n t w e d e r von Platz k=1,2,... bis n aus, wenn die Bedienung des beobachteten Rufes endet - der zugehörige Sprungkoeffizient ist μ_1- o d e r von Platz (n+s), wenn ein <i-Ruf einfällt -der zugehörige Sprungkoeffizient ist ${}_{<i}\lambda_{n+s}$. Damit haben wir diejenigen Sprungkoeffizienten unseres RANDOM-WALK bestimmt, die einen direkten Übergang in den Zustand {Erfolg} beschreiben.
Um die anderen (von Null verschiedenen) Sprungkoeffizienten aufzustellen, unterscheiden wir die beiden Fälle j<(n+s) und j=(n+s):

(A) j< (n+s)

Der i-Ruf bleibt innerhalb Δt auf seinem Platz (k,j), wenn kein Ruf endet und kein Ruf einfällt. Das geschieht mit der Wahrscheinlichkeit: $1-(\lambda_j+\mu_j)\cdot\Delta t + o(\Delta t)$.
Von seinem Platz (k,j) kann der i-Ruf die folgenden Plätze durch e i n e n Schritt seines RANDOM-WALK erreichen:

(1) Platz (k-1, j-1), indem einer der (k-1) Rufe endet, die gemäß der Abfertigungsdisziplin im Sinne von I.2 v o r dem betrachteten i-Ruf im System placiert sind. Der zugehörige Sprungkoeffizient ist μ_{k-1}.

(2) Platz (k,j-1), indem einer der hinter dem beobachteten Ruf placierten Rufe endet. Sprungkoeffizient: $(\mu_j-\mu_k)$

(3) Platz (k+1,j+1), indem ein <i-Ruf einfällt: ${}_{<i}\lambda_j$

(4) Platz (k,j+1), indem ein ≥i-Ruf einfällt: ${}_{\geq i}\lambda_j$

(B) j = n+s

Damit der i-Ruf innerhalb Δt auf Platz (k,n+s) bleibt, (Erhaltung des Platz-Zustandes), darf kein Ruf enden und kein <i-Ruf einfallen: Das geschieht mit der Wahrscheinlichkeit: $1 - ({}_{<i}\lambda_{n+s} + \mu_{n+s})\cdot\Delta t + o(\Delta t)$.
Von Platz (k,n+s) können die folgenden Plätze in einem Schritt erreicht werden:

(1) Platz (k-1,n+s-1) mit Sprungkoeffizient μ_{k-1}

(2) Platz (k, n+s-1) mit Sprungkoeffizient $(\mu_{n+s}-\mu_k)$

(3) Falls k<(n+s), Platz (k+1,n+s) mit Sprungkoeffizient ${}_{<i}\lambda_{n+s}$

Um Schreibarbeit zu sparen, wollen wir die folgende Regel einführen:
Tritt in einer der Gleichungen ein Term auf, dessen Sprungkoeffizient für einen bestimmten Parameterwert Null ist, dann interessiert uns nicht, ob die zugehörige Wahrscheinlichkeit definiert ist oder nicht. Wir setzen den gesamten Term gleich Null.

Beispielsweise tritt im folgenden Differentialgleichungssystem (273) der Term $\mu_{k-1} \cdot {}_iG_{k-1,j-1}$ auf. Für k=1 ist die Wahrscheinlichkeit ${}_iG_{k-1,j-1}$ nicht definiert, da es keinen Platz (o,j-1) im System gibt. Wir lassen diesen gesamten Term für k=1 weg, da $\mu_0=0$ ist.
Für die Wahrscheinlichkeiten ${}_iG_{k,j}(x)$ erhalten wir - gemäß (153) - mit den oben aufgeführten Sprungkoeffizienten das folgende Differentialgleichungssystem:

j=1,2,...,n+s-1 k=1,2,...,j

$$
{}_iG'_{k,j}(x) = \mu_{k-1} \cdot {}_iG_{k-1,j-1}(x) + (\mu_j - \mu_k) \cdot {}_iG_{k,j-1}(x) + {}_{<i}\lambda_j \cdot {}_iG_{k+1,j+1}(x) + {}_{>i}\lambda_j \cdot {}_iG_{k,j+1}(x) - (\lambda_j + \mu_j) \cdot {}_iG_{k,j}(x)
$$

j=n+s k=1,2,...,n+s-1 (273)

$$
{}_iG'_{k,n+s} = \mu_{k-1} \cdot {}_iG_{k-1,n+s-1}(x) + (\mu_{n+s} - \mu_k) \cdot {}_iG_{k,n+s-1}(x) + {}_{<i}\lambda_{n+s} \cdot {}_iG_{k+1,n+s}(x) - ({}_{<i}\lambda_{n+s} + \mu_{n+s}) \, {}_iG_{k,n+s}(x)
$$

j=n+s k=n+s

$$
{}_iG'_{n+s,n+s} = \mu_{n+s-1} \cdot {}_iG_{n+s-1,n+s-1}(x) - ({}_{<i}\lambda_{n+s} + \mu_{n+s}) \cdot {}_iG_{n+s,n+s}(x)
$$

Wir haben oben festgestellt, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit dieses RANDOM-WALK unabhängig vom Startplatz gleich 1 ist. Deshalb lautet die Anfangsbedingung (Vergleiche III.10):

$$
{}_iG_{k,j}(x=0) = 1 \qquad (274)
$$

Multiplizieren wir die ${}_iG_{k,j}(x)$ für i=1,2,... bis (r-1) (dabei ist r die Klasse mit geringster Priorität) mit der Wahrscheinlichkeit ${}_iF_{k,j}$ für Startplatz (k,j) nach Gleichung (240), dann erhalten wir nach Aufsummation über alle Startplätze die Verteilung der Gesamtverweilzeit eines beliebigen i-Rufes im System:

$$
P\{\text{GESAMTZEIT EINES i-RUFES} > x\} = {}_iG(x) \qquad (275)
$$

$$
{}_iG(x) = \sum_{k=1}^{n+s} \sum_{j=k}^{n+s} {}_iF_{k,j} \cdot {}_iG_{k,j}(x) \qquad (276)
$$

Da ein einfallender r-Ruf immer hinter allen im System schon anwesenden Rufen eingeordnet wird, tritt an die Stelle von (276) für i=r die Gleichung:

$$
{}_rG(x) = \sum_{k=1}^{n+s} {}_rF_k \cdot {}_rG_{k,k}(x)
$$

Der Anfangswert ${}_iG(x=0) = P\{\text{GESAMTZEIT EINES i-RUFES} > 0\}$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der i-Ruf überhaupt ins System kommt, also gleich $(1-{}_iC)$, denn nur für abgewiesene i-Rufe ist die Gesamtverweilzeit im System gleich 0.

Die m i t t l e r e n Gesamtverweilzeiten ${}_i\bar{G}_{k,j}$ eines auf Platz (k,j) startenden i-Rufes genügen dem folgenden linearen Gleichungssystem, das sich aus (156) mit der rechten Seite ${}_iG_{k,j}(0)=1$ genauso ergibt wie (273) aus (153):

j=1,2,...,n+s-1 k=1,2,...,j

$$
(\lambda_j + \mu_j) \cdot {}_iG_{k,j} - \mu_{k-1} \cdot {}_iG_{k-1,j-1} - (\mu_j - \mu_k) \cdot {}_iG_{k,j-1} - {}_{<i}\lambda_j \cdot {}_iG_{k+1,j+1} - {}_{>i}\lambda_j \cdot {}_iG_{k,j+1} = 1
$$

j=n+s k=1,2,...,n+s-1 (277)

$$
({}_{<i}\lambda_{n+s} + \mu_{n+s}) \cdot {}_iG_{k,n+s} - \mu_{k-1} \cdot {}_iG_{k-1,n+s-1} - (\mu_{n+s} - \mu_k) \cdot {}_iG_{k,n+s-1} - {}_{<i}\lambda_{n+s} \cdot {}_iG_{k+1,n+s} = 1
$$

j=n+s k=n+s

$$
({}_{<i}\lambda_{n+s} + \mu_{n+s}) \cdot {}_iG_{n+s,n+s} - \mu_{n+s-1} \cdot {}_iG_{n+s-1,n+s-1} = 1
$$

Das Gleichungssystem (277) ist vom selben Typ wie das mit Hilfe von ${}_{\le i}P_{0,0}$ inhomogenisierte Gleichungssystem der Zustandswahrscheinlichkeiten (vgl. Abschnitt IV.6) und kann mit denselben - im Anhang erläuterten - numerischen Methoden gelöst werden.
Die mittlere Gesamtverweilzeit eines beliebigen i-Rufes im System (einschliesslich der verdrängten und der sofort abgewiesenen i-Rufe) erhält man für i=2,3,...(r-1) aus den ${}_iG_{k,j}$ durch Aufsummation analog zu Gleichung (275):

$$_iG = \sum_{k=1}^{n+s} \sum_{j=k}^{n+s} {}_iF_{k,j} \cdot {}_iG_{k,j} \tag{278}$$

Für i=r erhalten wir:

$$_rG = \sum_{k=1}^{n+s} {}_rF_k \cdot {}_rG_{k,k}$$

IV. 20 DIE VERDRÄNGUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT UND DIE ERFOLGSWAHRSCHEINLICHKEIT BEI START AUF PLATZ (k,j)

In IV.9 haben wir die Verdrängungswahrscheinlichkeit $_iV$ eines <u>beliebigen</u> i-Rufes bestimmt. Um die Gesamtverweilzeit eines erfolgreichen i-Rufes zu berechnen, werden wir aber auch die bedingte Verdrängungswahrscheinlichkeit $_iV_{k,j}$ eines i-Rufes benötigen, <u>wenn</u> er auf Platz (k,j) startet. Mitteln wir für i=1,2,...(r-1) diese bedingten Verdrängungswahrscheinlichkeiten $_iV_{k,j}$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeiten $_iF_{k,j}$ für Startplatz (k,j), dann erhalten wir wieder die nach Gleichung (224) schon bekannte (über <u>alle</u> Startplätze gemittelte) Verdrängungswahrscheinlichkeit $_iV$:

$$_iV = \sum_{k=1}^{n+s} \sum_{j=k}^{n+s} {}_iF_{k,j} \cdot {}_iV_{k,j} \tag{279}$$

Für i=r erhalten wir entsprechend:

$$_rV = \sum_{k=1}^{n+s} {}_rF_k \cdot {}_rV_{k,k}$$

Wir untersuchen wie in Abschnitt IV.18 den RANDOM-WALK, den ein auf Platz (k,j) startender i-Ruf im gesamten System durchläuft. Als {ERFOLG} definieren wir hier die Verdrängung des Rufes aus dem System. Rufe, die ihre Bedienung beenden, sind folglich im Sinne unseres RANDOM-WALK erfolglos, da sie nicht verdrängt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein auf Platz (k,j) stehender i-Ruf im Sinne des RANDOM-WALK Erfolg hat, ist gleich der Verdrängungswahrscheinlichkeit $_iV_{k,j}$ eines auf Platz (k,j) startenden i-Rufes. Um diese $_iV_{k,j}$ nach Gleichungssystem (151) zu berechnen, müssen die Sprungkoeffizienten des RANDOM-WALK bestimmt werden.

Da wir den RANDOM-WALK aus Abschnitt IV.19 nur in bezug auf das Ziel {ERFOLG} abgeändert haben, ändern sich nur die Sprungkoeffizienten mit dem Sprungziel {ERFOLG}. Die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems (151) wurde bestimmt durch alle jene Sprungkoeffizienten des RANDOM-WALK, die ein Sprungziel $\neq$ {ERFOLG} haben. Infolgedessen genügen die "Erfolgswahrscheinlichkeiten" $_iV_{k,j}$ dieses RANDOM-WALK dem selben Gleichungssystem (277), wie die mittleren "Verweilzeiten" $_iG_{k,j}$ des RANDOM-WALK aus Abschnitt IV.19, allerdings mit anderer "rechter Seite". Die rechte Seite von Gleichungssystem (151) wird durch die Sprungkoeffizienten mit einem Sprungziel = {ERFOLG} bestimmt. Das Ziel {ERFOLG} = {VERDRÄNGUNG} kann ein i-Ruf nur erreichen, wenn er auf Platz (n+s,n+s) steht und ein <i-Ruf einfällt; der entsprechende Sprungkoeffizient ist $_{<i}\lambda_{n+s}$. Die rechte Seite des Gleichungssystems der $_iV_{k,j}$ lautet demgemäss:

$$\begin{aligned} {}_iC_{k,j} &= 0 \quad \text{für } (k,j) \neq (n+s,n+s) \\ {}_iC_{n+s,n+s} &= {}_{<i}\lambda_{n+s} \end{aligned} \tag{280}$$

Damit können die Verdrängungswahrscheinlichkeiten $_iV_{k,j}$ eines i-Rufes auf Platz (k,j) aus einem Gleichungssystem berechnet werden, dessen Koeffizientenmatrix durch Gleichungssystem (277) und dessen rechte Seite durch Gleichung (280) gegeben ist.

Die Wahrscheinlichkeit $_iS_{k,j}$, dass ein i-Ruf von Startplatz (k,j) aus nicht verdrängt wird, sondern erfolgreich endet, ergibt sich als Komplement der Verdrängungswahrscheinlichkeit:

$$_iS_{k,j} = 1 - {}_iV_{k,j} \tag{281}$$

IV. 21 VERTEILUNGEN UND ERWARTUNGSWERTE DER GESAMTVERWEILZEIT EINES ERFOLGLOSEN BZW. EINES ERFOLGREICHEN RUFES

Wir berechnen jetzt die Gesamtverweilzeiten eines erfolgreichen bzw. eines erfolglosen i-Rufes. Diese bedingten Gesamtverweilzeiten lassen sich <u>nicht</u> aus den Gesamtverweilzeiten $_iG$ eines beliebigen i-Rufes direkt berechnen, da ${}_iG$ die Gesamtverweilzeiten der erfolgreichen und der verdrängten Rufe gemeinsam erfasst.

Um die Gesamtverweilzeit eines erfolglosen Rufes zu berechnen, gehen wir aus vom RANDOM-WALK des Abschnitts IV.20, dessen Erfolgsziel die Verdrängung des beobachteten i-Rufes war. Mit Hilfe des Differentialgleichungssystems (153) bestimmen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit:

$$P\{\text{i-RUF WIRD VERDRÄNGT,GESAMTZEIT}>x\,|\,\text{START AUF PLATZ }(k,j)\} = {}_iJ_{k,j}(x) \qquad (282)$$

Wie wir aus Differentialgleichung (153) sehen, benötigen wir zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten (282) nur diejenigen Sprungkoeffizienten des RANDOM-WALK, die ein Sprungziel $\neq$ {ERFOLG} haben. Nach Abschnitt IV.20 unterscheiden sich die Sprungkoeffizienten mit einem Sprungziel $\neq$ {ERFOLG} aber nicht von denjenigen aus Abschnitt IV.19, die wir zur Berechnung der ${}_iG_{k,j}$ untersucht haben. Infolgedessen genügen die ${}_iJ_{k,j}(x)$ dem selben Differentialgleichungssystem (253), wie die ${}_iG_{k,j}(x)$. Allerdings müssen wir andere Anfangsbedingungen für x=0 einsetzen.

Gemäss Abschnitt III.9 ist der Anfangswert ${}_iJ_{k,j}(x=0)$ gleich der "Erfolgswahrscheinlichkeiten" (im Sinne des definierten RANDOM-WALK), die wir in Abschnitt IV.20 berechnet haben:

$${}_iJ_{k,j}(x=0) = {}_iV_{k,j} \qquad (283)$$

Mitteln wir die ${}_iJ_{k,j}(x)$ über alle Startplätze (k,j), dann erhalten wir die Verbundwahrscheinlichkeit ${}_iJ(x)$, dass ein Ruf erfolglos ist und eine Zeit grösser x im System verweilt:

$$\begin{aligned} {}_iJ(x) &= \sum_{k=1}^{n+s}\sum_{j=k}^{n+s} {}_iF_{k,j}\cdot{}_iJ_{k,j}(x) \qquad i=2,\dots,r-1 \\ {}_rJ(x) &= \sum_{k=1}^{n+s} {}_rF_k\cdot{}_rJ_{k,k}(x) \end{aligned} \qquad (284)$$

Nachdem wir jetzt die Verteilung berechnen können, wenden wir uns den Erwartungswerten zu.

Den Erwartungswert der Verteilung ${}_iJ_{k,j}(x)$ bezeichnen wir mit ${}_iJ_{k,j}$. Es ist die mittlere Gesamtzeit eines auf Platz (k,j) startenden und erfolglosen i-Rufes bezogen auf alle i-Rufe (einschliesslich der erfolgreichen), die auf Platz (k,j) starten. Nach Abschnitt III.11 ergeben sich die Erwartungswerte ${}_iJ_{k,j}$ aus einem linearen Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix wiederum mit (277) identisch ist, dessen "rechte Seite" ${}_iC_{k,j}$ aber gleich der "Erfolgswahrscheinlichkeit" im Sinne des hier definierten RANDOM-WALK ist:

$${}_iC_{k,j} = {}_iV_{k,j} \qquad (285)$$

Mitteln wir die ${}_iV_{k,j}$ über alle Startplätze (k,j), dann erhalten wir die mittlere Gesamtverweilzeit eines erfolglosen i-Rufes bezogen auf alle i-Rufe:

$$\begin{aligned} {}_iJ &= \sum_{k=1}^{n+s}\sum_{j=k}^{n+s} {}_iF_{k,j}\cdot{}_iJ_{k,j} \qquad i=2,3,\dots,r-1 \\ {}_rJ &= \sum_{k=1}^{n+s} {}_rF_k\cdot{}_rJ_{k,k} \end{aligned} \qquad (286)$$

Eine Reihe interessierender Verkehrscharakteristika lassen sich jetzt direkt berechnen:

$$P\{\text{GESAMTZEIT} > x\,|\,\text{i-RUF ERFOLGLOS}\} = \frac{{}_iJ(x)}{{}_iB} \qquad (287)$$

$$\text{MITTLERE GESAMTZEIT EINES ERFOLGLOSEN i-RUFES} = \frac{{}_iJ}{{}_iB} \qquad (288)$$

$$P\{\text{GESAMTZEIT} > x\,|\,\text{i-RUF VERDRÄNGT}\} = \frac{{}_iJ(x)}{{}_iV} \qquad (289)$$

$$\text{MITTLERE GESAMTZEIT EINES VERDRÄNGTEN i-RUFES} = \frac{{}_iJ}{{}_iV} \qquad (290)$$

Wir kommen jetzt zu den Gesamtzeiten der erfolgreichen Rufe, die wir durch Komplementbildung aus den schon berechneten Gesamtzeiten der erfolglosen Rufe erhalten.

$$P\{\text{i-RUF IST ERFOLGREICH, GESAMTZEIT} > x\} = {}_iG(x) - {}_iJ(x) \tag{291}$$

$${}_iL(x) = P\{\text{GESAMTZEIT} > x \mid \text{i-RUF IST ERFOLGREICH}\} = \frac{{}_iG(x) - {}_iJ(x)}{{}_iS}$$

Daraus ergibt sich die mittlere Gesamtzeit ${}_iL$ eines erfolgreichen i-Rufes:

$${}_iL = \frac{{}_iG - {}_iJ}{{}_iS}$$

Wir wollen abschliessend auf die Bedeutung der verschiedenen Gesamtzeiten hinweisen.

Die mittlere Gesamtverweilzeit $\frac{{}_iJ}{{}_iV}$ nach Gleichung (290) ist jene Zeit, die ein einzelner, später verdrängter i-Ruf im System verweilt. Diese Kenngrösse ist insbesondere vom Standpunkt jener Teilnehmer aus interessant, die nach vorangehendem Warten und eventueller teilweiser Abfertigung doch noch aus dem System verdrängt werden. Eine Verdrängung nach langer Gesamtverweilzeit im System wird als besonders störend empfunden werden.

Die mittlere Gesamtverweilzeit ${}_iJ$ eines erfolglosen i-Rufes ist bezogen auf alle i-Rufe, berücksichtigt aber nur jene Rufe, die erfolglos sind. Diese Kenngrösse ist von Interesse für die Betriebsleitung, weil sie eine Aussage über die nutzlose Belastung des Systems durch verdrängte Rufe liefert. Diese Aussage wird bei unendlicher Quellenzahl noch verdeutlicht werden.

Die Verbundwahrscheinlichkeit ${}_iJ(x)$ wird ausserdem benötigt, um z.B. die folgende Frage zu beantworten: Steigt oder fällt die Verdrängungswahrscheinlichkeit mit der schon im System verbrachten Zeit. Es gilt:

$$P\{\text{VERDRÄNGUNG} \mid \text{GESAMTZEIT} > x\} = \frac{{}_iJ(x)}{{}_iG(x)} \tag{294}$$

IV. 22 VERTEILUNGEN UND ERWARTUNGSWERTE DER SOFORTWARTEZEIT EINES i-RUFES

Wir beobachten i-Warterufe, d.h. solche i-Rufe, denen bei ihrer Ankunft ein Warteplatz zugewiesen wird. Wir beobachten einen i-Warteruf solange, bis er erstmalig den Wartespeicher verlässt. Diese Zeit nennen wir Sofortwartezeit. (Kommt der beobachtete Ruf aus dem Wartespeicher ins Bündel, kann er dort unterbrochen werden. In diesem Fall verbringt der beobachtete i-Ruf eine zweite Wartezeit, was aber für die Sofortwartezeit ohne Bedeutung ist).

Wir definieren den RANDOM-WALK eines i-Warterufes mit dem Erfolgsziel {VERLASSEN DES SPEICHERS}. Dieses Erfolgsziel erreicht der i-Warteruf mit Wahrscheinlichkeit 1, nämlich durch Verdrängung oder Eintritt ins Bündel. Da die Überlegungen der vorangegangenen Abschnitte sofort auf den hier definierten RANDOM-WALK im Wartespeicher übertragen werden können, wollen wir uns kurz fassen: Die bedingten Verbundwahrscheinlichkeiten

$${}_iT_{k,j} = P\{\text{i-RUF WARTET} > x \mid \text{START AUF PLATZ } (k,j)\} \tag{295}$$

genügen für k>n und j>n dem folgenden Differentialgleichungssystem:

$j=n+1, n+2, \ldots, n+s-1 \quad k=n+1$

$${}_iT_{n+1,j}(x) = {}_{<i}\lambda_j \cdot {}_iT_{n+2,j+1}(x) + {}_{>i}\lambda_j \cdot {}_iT_{n+1,j+1}(x) + \\ - (\lambda_j + \mu_n) \cdot {}_iT_{n+1,j}(x)$$

$j=n+1 \quad k=n+s$

$${}_iT_{n+1,n+s}(x) = {}_{<i}\lambda_{n+s} \cdot {}_iT_{n+2,n+s}(x) - ({}_{<i}\lambda_{n+s} + \mu_n) \cdot {}_iT_{n+1,n+s}(x)$$

$j=n+2, n+3, \ldots, n+s-1 \quad k=n+2, n+3, \ldots, j$

$${}_iT_{k,j}(x) = \mu_n \cdot {}_iT_{k-1,j-1}(x) + {}_{<i}\lambda_j \cdot {}_iT_{k+1,j+1}(x) + \\ + {}_{>i}\lambda_j \cdot {}_iT_{k,j+1} - (\lambda_j + \mu_n) \, {}_iT_{k,j}(x)$$

$j=n+s \quad k=n+2, n+3, \ldots, n+s$ (296)

$${}_iT_{k,n+s}(x) = \mu_n \cdot {}_iT_{k-1,n+s-1}(x) + {}_{<i}\lambda_{n+s} \cdot {}_iT_{k+1,n+s}(x) + \\ - ({}_{<i}\lambda_{n+s} + \mu_n) \cdot {}_iT_{k,n+s}(x)$$

$j=n+s \quad k=n+s$

$${}_iT_{n+s,n+s}(x) = \mu_n \cdot {}_iT_{n+s-1,n+s-1}(x) - (\mu_n + {}_{<i}\lambda_{n+s}) \cdot {}_iT_{n+s,n+s}(x)$$

Da die Erfolgswahrscheinlichkeit dieses RANDOM-WALK gleich 1 ist, haben wir die Anfangsbedingung ${}_iT_{k,j}(x=0)=1$.

Die m i t t l e r e n Sofortwartezeiten ${}_iT_{k,j}$ auf Platz (k,j) genügen dem folgenden linearen Gleichungssystem, das sich gemäss (156) sofort aus dem Differentialgleichungssystem (298) ergibt:

$j=n+1,n+2,\dots,n+s-1 \qquad k=n+1$

$$(\lambda_j+\mu_n)\cdot{}_iT_{n+1,j} - {}_{<i}\lambda_j\cdot{}_iT_{n+2,j+1} - {}_{\geq i}\lambda_j\cdot{}_iT_{n+1,j+1} = 1$$

$j=n+s \qquad k=n+1$

$$({}_{<i}\lambda_{n+s}+\mu_n)\cdot{}_iT_{n+1,n+s} - {}_{<i}\lambda_{n+s}\cdot{}_iT_{n+2,n+s} = 1$$

$j=n+2,n+3,\dots,n+s-1 \qquad k=n+2,n+3,\dots,j$

$$(\lambda_j+\mu_n)\cdot{}_iT_{k,j} - {}_{<i}\lambda_j\cdot{}_iT_{k+1,j+1} - {}_{\geq i}\lambda_j\cdot{}_iT_{k,j+1} - \mu_n\cdot{}_iT_{k-1,j-1} = 1 \qquad (297)$$

$j=n+s \qquad k=n+2,n+3,\dots,n+s-1$

$$({}_{<i}\lambda_{n+s}+\mu_n)\cdot{}_iT_{k,n+s} - {}_{<i}\lambda_{n+s}\cdot{}_iT_{k+1,n+s} - \mu_n\cdot{}_iT_{k-1,n+s-1} = 1$$

$j=n+s \qquad k=n+s$

$$({}_{<i}\lambda_{n+s}+\mu_n)\cdot{}_iT_{n+s,n+s} - \mu_n\cdot{}_iT_{n+s-1,n+s-1} = 1$$

Wir wollen jetzt die Sofortverdrängungswahrscheinlichkeit berechnen, dass ein i-Ruf verdrängt wird, ohne ins Bündel zu gelangen. Dazu modifizieren wir den eingeführten RANDOM-WALK eines i-Warterufes im Speicher, indem wir ein anderes Erfolgsziel definieren: Das Erfolgsziel sei jetzt: {VERDRÄNGUNG OHNE INS BÜNDEL ZU KOMMEN}. Die "Erfolgswahrscheinlichkeiten" (im Sinne von III.9) dieses neuen RANDOM-WALK sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten

$$P\{\text{i-RUF WIRD VERDRÄNGT (OHNE INS BÜNDEL ZU KOMMEN)} \mid \text{START AUF PLATZ } (k,j)\} = {}_iK_{k,j} \qquad (298)$$

Da wir nur das Erfolgsziel des RANDOM-WALK abgeändert haben, genügen die Sofortverdrängungswahrscheinlichkeiten ${}_iK_{k,j}$ auf Platz (k,j) gemäss (151) dem Gleichungssystem (297) der mittleren Sofortwartezeiten, wenn die folgende "rechte Seite" gewählt wird:

$$\begin{aligned} {}_iC_{k,j} &= 0 \qquad k<n+s \\ {}_iC_{n+s,n+s} &= {}_{<i}\lambda_{n+s} \end{aligned} \qquad (299)$$

Die Sofortverdrängungswahrscheinlichkeit ${}_iK$, dass ein beiliebiger i-Ruf verdrängt wird, ohne ins Bündel zu gelangen, ergibt sich zu:

$$i=2,3,\dots,r-1 \qquad {}_iK = \sum_{k=n+1}^{n+s}\sum_{j=k}^{n+s} {}_iF_{k,j}\cdot{}_iK_{k,j}$$

$$(300)$$

$${}_rK = \sum_{k=n+1}^{n+s} {}_rF_k\cdot{}_rK_{k,k}$$

Die Wahrscheinlichkeit ${}_iD_{k,j}$, dass ein i-Warteruf bei Start auf Platz (k,j) (mindestens einmal) ins Bündel gelangt, ergibt sich als Komplement:

$$\begin{aligned} {}_iD_{k,j} &= P\{\text{i-RUF KOMMT INS BÜNDEL} \mid \text{START AUF PLATZ } (k,j)\} = \\ &= 1 - {}_iK_{k,j} \end{aligned} \qquad (301)$$

$${}_iD = P\{\text{i-RUF KOMMT INS BÜNDEL}\} = 1 - {}_iC - {}_iK \qquad (302)$$

Völlig analog zu Abschnitt IV.21 könnte man jetzt beispielsweise die Verteilung und die Erwartungswerte der Sofortwartezeiten derjenigen i-Warterufe berechnen, die ins Bündel gelangen (dabei bleibt völlig offen, ob diese Rufe im Bündel später unterbrochen werden oder nicht, ob sie später verdrängt werden, oder nicht).

Da sich die Überlegungen aus IV.21 leicht übertragen lassen, soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

IV. 23 DIE UNTERBRECHUNGSWAHRSCHEINLICHKEITEN

Um die Unterbrechungswahrscheinlichkeit ${}_iU$ eines beliebigen i-Rufes zu berechnen, definieren wir den RANDOM-WALK eines i-Rufes im preemptiven Warteverlustsystem mit dem Erfolgsziel: {UNTERBRECHUNG}. Das Erfolgsziel erreicht ein i-Ruf, wenn er auf Platz (n,j) steht und ein <i-Ruf einfällt. Die "Erfolgswahrscheinlichkeit" bei Start auf Platz (k,j) dieses RANDOM-WALK ist die Unterbrechungswahrscheinlichkeit ${}_iU_{k,j}$ eines i-Rufes, der auf Platz (k,j) startet:

$${}_iU_{k,j} = P\{\text{i-RUF WIRD UNTERBROCHEN} \mid \text{START AUF PLATZ } (k,j)\}$$

Die Unterbrechungswahrscheinlichkeiten ${}_iU_{k,j}$ genügen -gemäß III.9- dem folgenden linearen Gleichungssystem:

$k = 1,2,\ldots,n-1,n+1,n+2,\ldots,n+s-1 \qquad j = k,k+1,\ldots,n+s-1$

$$0 = (\mu_j + \lambda_j)\,{}_iU_{k,j} - \mu_{k-1}\,{}_iU_{k-1,j-1} - (\mu_j - \mu_k)\,{}_iU_{k,j-1} + $$
$$- {}_{>i}\lambda_j\,{}_iU_{k,j+1} - {}_{<i}\lambda_j\,{}_iU_{k+1,j+1}$$

$k = n \qquad j = n,n+1,\ldots,n+s-1$

$${}_{<i}\lambda_j = (\mu_j + \lambda_j)\,{}_iU_{n,j} - \mu_{n-1}\,{}_iU_{n-1,j-1} - {}_{>i}\lambda_j\,{}_iU_{n,j+1} \qquad (303)$$

$j = n+s \qquad k = 1,2,\ldots,n-1,n+1,n+2,\ldots,n+s-1$

$$0 = (\mu_{n+s} + {}_{<i}\lambda_{n+s})\,{}_iU_{k,n+s} - \mu_{k-1}\,{}_iU_{k-1,n+s-1} + $$
$$-(\mu_{n+s} - \mu_k)\,{}_iU_{k,n+s-1} - {}_{<i}\lambda_{n+s}\,{}_iU_{k+1,n+s}$$

$${}_{<i}\lambda_{n+s} = (\mu_{n+s} + {}_{<i}\lambda_{n+s})\,{}_iU_{n,n+s} - \mu_{n-1}\,{}_iU_{n-1,n+s-1}$$

$$0 = (\mu_{n+s} + {}_{<i}\lambda_{n+s})\,{}_iU_{n+s,n+s} - \mu_{n+s-1}\,{}_iU_{n+s-1,n+s-1}$$

Die Wahrscheinlichkeit ${}_iU$, daß ein beliebiger i-Ruf unterbrochen wird, erhalten wir zu:

$${}_iU = \sum_{k=1}^{n+s}\sum_{j=k}^{n+s} {}_iF_{k,j}\,{}_iU_{k,j} \qquad i = 2,3,\ldots,r-1 \qquad (304)$$
$${}_rU = \sum_{k=1}^{n+s} {}_rF_k\,{}_iU_{k,k}$$

IV. 24 DIE WARTEWAHRSCHEINLICHKEIT

Wir wollen die Wartewahrscheinlichkeit ${}_iW_{k,j}$ berechnen, daß ein i-Ruf bei Start auf Platz (k,j) während seiner Verweilzeit im System überhaupt einmal warten muß (sofort bei seiner Ankunft o d e r später nach Unterbrechung). Startet ein i-Ruf im Wartespeicher, dann muß er mit Sicherheit warten:

$${}_iW_{k,j} = 1 \qquad \begin{array}{l} k = n+1,n+2,\ldots,n+s \\ j = k,k+1,\ldots,n+s \end{array}$$

Startet ein i-Ruf im Bündel, dann ist seine Wartewahrscheinlichkeit gleich seiner Unterbrechungswahrscheinlichkeit:

$${}_iW_{k,j} = {}_iU_{k,j} \qquad \begin{array}{l} k = 1,2,\ldots,n \\ j = k,k+1,\ldots,n+s \end{array}$$

Damit wird die Wartewahrscheinlichkeit ${}_iW$, daß ein i-Ruf (sofort oder später) warten muß:

$${}_iW = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n+s} {}_iF_{k,j}\,{}_iU_{k,j} + \sum_{k=n+1}^{n+s} {}_iF_k \qquad i = 1,2,\ldots,r-1 \qquad (305)$$
$${}_rW = \sum_{k=1}^{n} {}_rF_k\,{}_rU_{k,k} + \sum_{k=n+1}^{n+s} {}_rF_k$$

oder mit (250):

$${}_iW = {}_iR + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n+s} {}_iF_{k,j}\,{}_iU_{k,j} \qquad i = 1,2,\ldots,r-1 \qquad (306)$$
$${}_rW = W + \sum_{k=1}^{n} {}_rF_k\,{}_rU_{k,k}$$

IV. 25 DIE ν-FACHE UNTERBRECHUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT

Wir wollen jetzt die Wahrscheinlichkeit ${}_i^{\nu}U_{k,j}$ berechnen, daß ein i-Ruf bei Start auf Platz (k,j) genau ν-mal unterbrochen wird. (Egal ob am Ende erfolgreich oder nicht.)

P{i-RUF WIRD ν-MAL UNTERBROCHEN|START AUF PLATZ (k,j)} (307)

Um diese Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können, definieren wir einen RANDOM-WALK, der den beobachteten i-Ruf durch mehrere (fiktive) Warteverlustsysteme führt. Wir vervielfältigen unser Warteverlustsystem und numerieren diese Warteverlustsysteme durch von $\eta=0,1,\ldots$ bis ν. Der i-Ruf starte bei seiner Ankunft im System 0 auf Platz (k,j). Wir wollen sagen, der i-Ruf startet auf Platz (k,j,0). Wird der beobachtete i-Ruf unterbrochen, dann verlegen wir den RANDOM-WALK in das System 1. Nach seiner (ersten) Unterbrechung befindet sich der Ruf auf Platz (n+1,j,1). Nach seiner ν-ten Unterbrechung befindet sich der beobachtete Ruf auf Platz (n+1,j, ν), also im ν-ten System. Das Erfolgsziel des RANDOM-WALK definieren wir als: {VERLASSEN DES SYSTEMS NACH DER ν-TEN UNTERBRECHUNG}. Erfolgswahrscheinlichkeiten dieses RANDOM-WALK sind die Wahrscheinlichkeiten ${}_i^{\nu}U_{k,j,\eta}$, daß ein i-Ruf auf Platz (k,j,η) das (fiktive) System ν erreicht (also im Gesamten ν-mal unterbrochen wird) und das System verläßt, ohne ein weiteres Mal unterbrochen zu werden.

Es wird darauf verzichtet, das recht umfangreiche Gleichungssystem für die ${}_i^{\nu}U_{k,j,\eta}$ aufzuschreiben. Hat man die ${}_i^{\nu}U_{k,j,\eta}$

berechnet, so haben wir zunächst die gesuchte Wahrscheinlichkeit ${}^{\nu}_{i}U_{k,j}$, dass ein i-Ruf bei Start auf Platz (k,j) ν-mal unterbrochen wird:

$$ {}^{\nu}_{i}U_{k,j} = {}^{\nu}_{i}U_{k,j,0} \tag{308}$$

In Kapitel IV.23 haben wir die Wahrscheinlichkeit ${}_{i}U$ berechnet, daß ein i-Ruf überhaupt unterbrochen wird. Summieren wir die ν-fachen Unterbrechungswahrscheinlichkeiten ${}^{\nu}_{i}U_{k,j}$ von ν= 1,2,... über alle ν auf, dann muß sich gerade die Unterbrechungswahrscheinlichkeit ${}_{i}U_{k,j}$ ergeben:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} {}^{\nu}_{i}U_{k,j} = {}_{i}U_{k,j} \tag{309}$$

Mitteln wir über die Startplätze (k,j), dann erhalten wir die Wahrscheinlichkeit ${}^{\nu}_{i}U$, dass ein i-Ruf ν-mal unterbrochen wird:

$$ {}^{\nu}_{i}U = \sum_{k=1}^{n+s} \sum_{j=k}^{n+s} {}_{i}F_{k,j} \cdot {}^{\nu}_{i}U_{k,j} \qquad i=2,3,\dots,r-1$$

$$ {}^{\nu}_{r}U = \sum_{k=1}^{n+s} {}_{r}F_{k} \cdot {}^{\nu}_{r}U_{k,k} \tag{310}$$

Bevor wir aus diesen ν-fachen Unterbrechungswahrscheinlichkeiten im nächsten Abschnitt die mittlere Zahl von Unterbrechungen eines beliebigen i-Rufes berechnen, wollen wir zunächst die ν-fachen Unterbrechungswahrscheinlichkeiten der erfolgreichen i-Rufe bestimmen. Dazu modifizieren wir den in diesem Abschnitt definierten RANDOM-WALK, indem wir ein neues Erfolgsziel definieren: {ERFOLGREICHES ENDEN DER ABFERTIGUNG IM ν-TEN SYSTEM (ALSO NACH ν UNTERBRECHUNGEN)}. Die "Erfolgswahrscheinlichkeiten" ${}^{\nu}_{i}I_{k,j,\eta}$ dieses RANDOM-WALK von Platz (k,j,η) aus sind für η=0 die gesuchten Wahrscheinlichkeiten ${}^{\nu}_{i}I_{k,j}$, dass ein erfolgreicher i-Ruf genau ν-mal unterbrochen wird:

$$ {}_{i}I_{k,j} = P\{\text{ i-RUF IST ERFOLGREICH,i-RUF WIRD } \nu\text{-mal UNTERBROCHEN } | \text{ START AUF PLATZ (k,j)}\} \tag{311}$$

Mitteln wir diese Wahrscheinlichkeiten über die Startplätze (k,j), dann erhalten wir die Wahrscheinlichkeit ${}^{\nu}_{i}I$, dass ein i-Ruf erfolgreich ist und ν-mal unterbrochen wird:

$$ {}^{\nu}_{i}I = \sum_{k=1}^{n+s} \sum_{j=k}^{n+s} {}_{i}F_{k,j} \cdot {}^{\nu}_{i}I_{k,j} \qquad i=2,3,\dots,r-1$$

$$ {}^{\nu}_{r}I = \sum_{k=1}^{n+s} {}_{r}F_{k} \cdot {}^{\nu}_{r}I_{k,k} \tag{312}$$

Addieren wir die Wahrscheinlichkeiten ${}^{\nu}_{i}I$ über alle ν=1,2,... auf, so erhalten wir:

$$P\{\text{ i-RUF WIRD UNTERBROCHEN,ERFOLG}\} = {}_{i}I = \sum_{\nu=1}^{\infty} {}^{\nu}_{i}I \tag{313}$$

und als Komplement:

$$P\{\text{i-RUF WIRD NICHT UNTERBROCHEN , ERFOLG}\} = {}_{i}S - {}_{i}I \tag{314}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein erfolgreicher i-Ruf genau ν-mal unterbrochen wird, ergibt sich aus Gleichung (312):

$$P\{\text{i-RUF WIRD } \nu\text{-MAL UNTERBROCHEN } | \text{ ERFOLG}\} = \frac{{}^{\nu}_{i}I}{{}_{i}S} \tag{315}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein erfolgreicher i-Ruf (mindestens einmal) unterbrochen wird, ist:

$$P\{\text{i-RUF WIRD UNTERBROCHEN } | \text{ ERFOLG}\} = \frac{{}_{i}I}{{}_{i}S} \tag{316}$$

Als Komplement ergibt sich:

$$P\{\text{i-RUF WIRD NICHT UNTERBROCHEN } | \text{ ERFOLG}\} = \frac{{}_{i}S - {}_{i}I}{{}_{i}S} \tag{317}$$

Analog erhält man die Unterbrechungswahrscheinlichkeiten der verdrängten Rufe oder der Verlustrufe.

IV. 26 DIE MITTLERE ZAHL VON UNTERBRECHUNGEN EINES RUFES

Wir berechnen jetzt, wie oft ein i-Ruf im Mittel unterbrochen wird. Die mittlere Zahl ${}_{i}N$ von Unterbrechungen eines i-Rufes erhalten wir als Erwartungswert der ${}^{\nu}_{i}U$:

$$ {}_{i}N = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \cdot {}^{\nu}_{i}U \tag{318}$$

MITTLERE ZAHL VON UNTERBRECHUNGEN EINES ERFOLGREICHEN i-RUFES:

$$ {}_iM = \frac{1}{{}_iS} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \; {}_i^{\nu}\mathfrak{Z} \tag{319}$$

Aus ${}_iN$ erhält man direkt die mittlere Zahl von Unterbrechungen für die Klasse ≤i (unter Berücksichtigung, daß Rufe der Klasse 1 nicht unterbrochen werden):

$$ {}_{\le i}\lambda \; {}_{\le i}N = \sum_{\nu=2}^{i} {}_{\nu}\lambda \; {}_{\nu}N \tag{320}$$

$$ {}_{\le i}N = \frac{1}{{}_{\le i}\rho} \sum_{\nu=2}^{i} {}_{\nu}\rho \cdot {}_{\nu}N \tag{321}$$

Und speziell für i=r:

$$ {}_{\le r}N = \sum_{\nu=2}^{r} {}_{\nu}\rho \cdot {}_{\nu}N \tag{322}$$

IV. 27 DIE MITTLERE ZAHL VON UNTERBRECHUNGEN PRO ZEITEINHEIT

Die mittlere Zahl Z von Unterbrechungen, die sich im System pro Zeiteinheit ereignen, ist zwar für den einzelnen Teilnehmer uninteressant. Dem Teilnehmer genügt die Kenntnis der mittleren Zahl von Unterbrechungen pro i-Ruf. Die Kenngröße Z kann aber für das Systemmanagement von besonderem Interesse sein, wenn das Warteverlustsystem stark durch die Unterbrechungen belastet wird.

Ein Ruf verweilt im Mittel die Zeit ${}_{\le r}G$ im System. Mit Gleichung (278) erhält man:

$$ {}_{\le r}G = \sum_{\nu=1}^{r} {}_{\nu}\rho \; {}_{\nu}G \tag{323}$$

Im Mittel wird jeder Ruf ${}_{\le r}N$-mal unterbrochen. Da sich im Mittel ${}_{\le r}X$ Rufe im System befinden, erhalten wir:

$$ Z = \frac{{}_{\le r}X \; {}_{\le r}N}{{}_{\le r}G} \tag{324}$$

V DAS PREEMPTIVE WARTEVERLUSTSYSTEM BEI UNENDLICH VIELEN POISSON-QUELLEN

V. 1 ALLGEMEINES

Wir spezialisieren die Ergebnisse des letzten Kapitels auf den Sonderfall einer unendlichen Zahl von Verkehrsquellen (Teilnehmer). Als Parameter werden wir jetzt die Angebote (194) bis (196) verwenden, da sie bei unendlicher Quellenzahl systemunabhängig sind.

Die im Kapitel IV hergeleiteten Formeln behalten ihre Gültigkeit und gehen für $\lambda_j=\lambda$ in die Formeln für unendliche Quellenzahl über.

Für unendliche Quellenzahl lassen sich viele der in Kapitel IV hergeleiteten Ergebnisse in geschlossener Form angeben. Das beruht im wesentlichen auf der Lösung des allgemeinen Gleichungssystems {53} im Anhang mit Hilfe der Grundfunktionen $\phi_{\nu,\mu}$ -angewandt auf die Angebote ${}_{\le i}A$ und ${}_{>i}A$:

Gemäss {33} ist: $\quad {}_{\le i}\phi_{\nu,\mu} = \sum_{\sigma=\nu}^{\mu} \prod_{\varrho=\sigma+1}^{\mu} {}_{\le i}\beta_{\varrho}$ mit $\quad {}_{\le i}\beta_{\varrho} = \frac{\rho_{\varrho}}{{}_{\le i}\lambda}$

$\quad {}_{>i}\phi_{\nu,\mu} = \sum_{\sigma=\nu}^{\mu} \prod_{\varrho=\sigma+1}^{\mu} {}_{>i}\beta_{\varrho}$ mit $\quad {}_{>i}\beta_{\varrho} = \frac{\rho_{\varrho}}{{}_{>i}\lambda}$

Wir werden in diesem Kapitel nur solche Verkehrscharakteristika behandeln, für die sich geschlossene Lösungen angeben lassen. Die übrigen Verkehrscharakteristika bei unendlicher Quellenzahl ergeben sich aus Kapitel IV mit $\lambda j=\lambda$.

Für s=0 geht das preemptive Warteverlustsystem über in das preemptive Verlustsystem. Auf einige besonders interessante Formeln für das preemptive Verlustsystem wird verwiesen.

V. 2 DIE ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN

Bei unendlicher Quellenzahl erhalten wir aus dem Differentialgleichungssystem (184) für die Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_k(t)$ ein vollständiges Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
{}_{\le i}P_0'(t) &= \qquad\qquad\qquad\qquad - {}_{\le i}\lambda\ {}_{\le i}P_0(t) + \mu_1\ {}_{\le i}P_1(t) \\
{}_{\le i}P_k'(t) &= {}_{\le i}\lambda\ {}_{\le i}P_{k-1}(t) - ({}_{\le i}\lambda + \mu_k)\ {}_{\le i}P_k(t) + \mu_{k+1}\ {}_{\le i}P_{k+1}(t) \\
{}_{\le i}P_{n+s}'(t) &= {}_{\le i}\lambda\ {}_{\le i}P_{n+s-1}(t) - \mu_{n+s}\ {}_{\le i}P_{n+s}(t)
\end{aligned} \qquad [325]$$

Bei gleichen Anfangsverteilungen für t=0 genügen die Zustandswahrscheinlichkeiten ${}_{\le i}P_k(t)$ des preemptiven Warteverlustsystems genau dem Differentialgleichungssystem der Zustandswahrscheinlichkeiten $P_j(t)$ im Warteverlustsystem ohne Prioritäten (Vergleiche Differentialgleichungssystem (36) für $\lambda_j=\lambda$), wenn wir die Gesamtanrufrate λ durch die Anrufrate ${}_{\le i}\lambda$ der Klasse $\le i$ ersetzen. Wir haben damit den wichtigen Satz, daß sich der Prozeß ${}_{\le i}X(t)$ des preemptiven Warteverlustsystems bei unendlicher Quellenzahl genauso verhält wie der Prozeß $X(t)$ des Warteverlustsystems ohne Prioritäten, wenn wir dem System ohne Prioritäten nur das Angebot ${}_{\le i}A$ anbieten.

Der in IV.4 für endliche Quellenzahl bewiesene Satz über den Gesamtprozeß ${}_{\le r}X(t)$ des preemptiven Systems ist bei unendlicher Quellenzahl der Spezialfall i=r des eben bewiesenen allgemeinen Satzes für ${}_{\le i}X(t)$.

Im Sonderfall i=1 ist sogar eine noch weitergehende Aussage möglich: Da Rufe der Klasse 1 nicht unterbrochen werden, gilt für Rufe der Klasse 1, dass diese Rufe genauso abgefertigt werden, als ob nur diese Rufe dem System angeboten würden. Deshalb stimmen die Verkehrscharakteristika der Klasse 1 mit den Verkehrscharakteristika desjenigen Warteverlustsystems ohne Prioritäten überein, dem nur die Rufe von Klasse 1 angeboten werden.

Durch Anwendung des obigen Satzes über den Prozess ${}_{\le i}X(t)$ lassen sich eine Reihe von Verkehrscharakteristika, insbesondere auch die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten, sofort aus den entsprechenden Grössen desjenigen Warteverlustsystems o h n e Prioritäten angeben, dem nur die Rufe von Klasse $\le i$ angeboten werden. Wir werden aber auf diesen allgemeinen Satz nicht immer zurückkommen, da sich diese Verkehrscharakteristika auch sehr einfach aus den Formeln des preemptiven Warteverlustsystems bei endlicher Quellenzahl in Kapitel IV herleiten lassen.

Für die stationären Zustandswahrscheinlichkeiten erhalten wir aus dem Gleichgewicht (209) sofort:

$$\mu_m\ {}_{\le i}P_m = {}_{\le i}\lambda\ {}_{\le i}P_{m-1} \qquad [326]$$

Daraus ergeben sich die Zustandswahrscheinlichkeiten (Vergl. [43] bis [57]):

$${}_{\le i}P_0 = \frac{n!\,n^s}{{}_{\le i}A^{n+s}}\frac{1}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} \qquad {}_{\le i}P_n = \frac{n^s}{{}_{\le i}A^s}\frac{1}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} \qquad {}_{\le i}P_{n+s} = \frac{1}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} \qquad [327]$$

$${}_{\le i}P_j = \frac{\prod_{m=j+1}^{n+s} {}_{\le i}\beta_m}{{}_{\le i}\phi_{n+s}}$$

$$j=0,1,\dots,n \quad {}_{\le i}P_j = \frac{{}_{\le i}A^j}{j!}\,{}_{\le i}P_0 \qquad j=0,1,\dots,s \quad {}_{\le i}P_{n+j} = \left(\frac{{}_{\le i}A}{n}\right)^j {}_{\le i}P_n \qquad [328]$$

V. 3 EINIGE AUS DEN ZUSTANDSWAHRSCHEINLICHKEITEN DIREKT ABLEITBARE KENNGRÖSSEN

Aus (212) die mittleren Enderaten ${}_{\le i}\mu$: $\quad {}_{\le i}\mu = {}_{\le i}\lambda\left(1 - \frac{1}{{}_{\le i}\phi_{n+s}}\right)$ [329]

Aus (216) die Abweiswahrscheinlichkeit ${}_iC$ der Klasse i:

$${}_iC = {}_{\le i}P_{n+s} = \frac{1}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} \qquad [330]$$

Aus (224) die Verdrängungswahrscheinlichkeit ${}_iV$ der Klasse i:

$${}_iV = \frac{{}_{<i}\rho}{{}_i\rho}\left(\frac{1}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} - \frac{1}{{}_{<i}\phi_{n+s}}\right) \qquad [331]$$

Im preemptiven V e r l u s t system (s=0) ist die Verdrängungswahrscheinlichkeit gleich der Unterbrechungswahrscheinlichkeit

$${}_iU = {}_iV = \frac{{}_{<i}\rho}{{}_i\rho}\left(\frac{1}{{}_{\le i}\phi_n} - \frac{1}{{}_{<i}\phi_n}\right) \qquad [332]$$

Aus (229) mit [330] und [331] die Verlustwahrscheinlichkeit ${}_iB$ der Klasse i:

$${}_iB = \frac{1}{{}_i\rho}\left(\frac{{}_{\le i}\rho}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} - \frac{{}_{<i}\rho}{{}_{<i}\phi_{n+s}}\right) \qquad [333]$$

Aus (240) bzw. (241) die Wahrscheinlichkeit, daß ein einfallender i-Ruf den Startplatz k erhält:

$${}_iF_k = {}_{\le i}P_{k-1} \qquad [334]$$

$${}_iF_k = \frac{\mu_k}{{}_{\le i}\lambda}\,{}_{\le i}P_k \qquad [335]$$

Aus (242) analog zu [73] die Blockierungswahrscheinlichkeit für einen i-Ruf:

$${}_iE = \frac{{}_{\le i}\Psi_s}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}} \qquad [336]$$

Im preemptiven V e r l u s t system (s=0) muß die Blockierungswahrscheinlichkeit gleich der Abweiswahrscheinlichkeit sein.

Mit ${}_{\le i}\Phi_0 = 1$ nach {31} ergibt sich für das preemptive V e r l u s t system:

$${}_iE = {}_iC \qquad [337]$$

Die Freiwahrscheinlichkeit ${}_iF$ ist nach (245) analog zu [76]:

$${}_iF = \left(\frac{n}{{}_{\le i}A}\right)^{s+1} \frac{{}_{\le i}\Phi_{n-1}}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}} \qquad [338]$$

Im preemptiven V e r l u s t system ergibt sich die Freiwahrscheinlichkeit als Komplement der Abweiswahrscheinlichkeit:

$${}_iF = \frac{n}{{}_{\le i}A}\,\frac{{}_{\le i}\Phi_{n-1}}{{}_{\le i}\Phi_n} = \frac{{}_{\le i}\Phi_n - 1}{{}_{\le i}\Phi_n} = 1 - \frac{1}{{}_{\le i}\Phi_n} = 1 - {}_iC \qquad [339]$$

Die Sofortwartewahrscheinlichkeit ist nach (250)analog zu [80]:

$${}_iR = \frac{n}{{}_{\le i}A}\,\frac{{}_{\le i}\Psi_{s-1}}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}}$$

V. 4 DIE BELASTUNGEN

Die Belastung ${}_{\le i}X_k$ von Platz k durch Rufe der Klasse $\le i$ ist analog zu [94]:

$${}_{\le i}X_k = \sum_{\nu=k}^{n+s} {}_{\le i}P_\nu = \frac{{}_{\le i}\Phi_{k,n+s}}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}} \qquad [340]$$

Durch Aufaddition der Belastungen erhalten wir analog zu [95] bis [97]:

Die Gesamtbelastung: $${}_{\le i}X = \frac{1}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}} \sum_{k=1}^{n+s} {}_{\le i}\Phi_{k,n+s} \qquad [341]$$

Die Bündelbelastung: $${}_{\le i}Y = \frac{1}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}} \sum_{k=1}^{n} {}_{\le i}\Phi_{k,n+s} \qquad [342]$$

Die Wartebelastung: $${}_{\le i}Q = \frac{1}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}} \sum_{k=n+1}^{n+s} {}_{\le i}\Phi_{k,n+s} = \frac{1}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}} \sum_{\sigma=0}^{s-1} {}_{\le i}\Psi_\sigma \qquad [343]$$

Statt dessen können wir auch die folgenden Formeln benutzen:

Nach (255) analog zu [84] :

$${}_{\le i}Y = {}_{\le i}A\left(1 - \frac{1}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}}\right)$$

Nach (264) analog zu [87]:

$${}_{\le i}Q = \frac{{}_{\le i}A}{n - {}_{\le i}A}\;\frac{{}_{\le i}\Psi_s - (s+1)}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}} \qquad {}_{\le i}A \neq n$$

$${}_{\le i}Q = \tfrac{1}{2}\, s(s+1)\, \frac{1}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}} \qquad {}_{\le i}A = n$$

Die Belastungen der Klasse i erhalten wir als Differenzen der Belastungen der Klassen $\le i$ und $< i$. Insbesondere gilt für die Belastung des Platzes k durch i-Rufe:

$${}_iX_k = \frac{{}_{\le i}\Phi_{k,n+s}}{{}_{\le i}\Phi_{n+s}} - \frac{{}_{<i}\Phi_{k,n+s}}{{}_{<i}\Phi_{n+s}} \qquad [344]$$

V. 5 DIE GESAMTVERWEILZEIT

Im preemptiven Warteverlustsystem mit unendlich vielen Quellen gilt:

$${}_iG_{k,j}(x) = {}_iG_k(x) \qquad [345]$$

Für das Schicksal eines i-Rufes sind bei unendlicher Quellenzahl nur die Rufe der Klasse $\le i$ von Bedeutung. Die Gesamtzahl j der Rufe im System gibt bei unendlicher Quellenzahl keine zusätzliche Information über das Schicksal eines betrachteten i-Rufes auf Platz k, da die Anrufrate von der Gesamtzahl nicht beeinflusst wird.

Setzen wir (345) und $\lambda_j = \lambda$ in (273) ein, so ergibt sich das folgende Differentialgleichungssystem für die Wahrscheinlichkeiten ${}_iG_k(x)$, dass ein i-Ruf länger als die Zeit x im System verweilt, wenn er auf Platz k startet:

$$\begin{aligned}
{}_iG_1'(x) &= -({}_{\le i}\lambda + \mu_1)\,{}_iG_1(x) + {}_{\le i}\lambda\,{}_iG_2(x) \\
{}_iG_k'(x) &= \mu_{k-1}\,{}_iG_{k-1}(x) - ({}_{\le i}\lambda + \mu_k)\,{}_iG_k(x) + {}_{\le i}\lambda\,{}_iG_{k+1}(x) \\
{}_iG_{n+s}'(x) &= \mu_{n+s-1}\,{}_iG_{n+s-1}(x) - ({}_{\le i}\lambda + \mu_{n+s})\,{}_iG_{n+s}(x)
\end{aligned} \qquad [346]$$

Für die mittleren Gesamtverweilzeiten ${}_iG_k$ der i-Rufe, die auf Platz k starten, erhalten wir aus (277) mit (345) das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
({}_{\le i}\lambda + \mu_1)\,{}_iG_1 - {}_{\le i}\lambda\,{}_iG_2 &= 1 \\
-\mu_{k-1}\,{}_iG_{k-1} + ({}_{\le i}\lambda + \mu_k)\,{}_iG_k - {}_{\le i}\lambda\,{}_iG_{k+1} &= 1 \\
-\mu_{n+s-1}\,{}_iG_{n+s-1} + ({}_{\le i}\lambda + \mu_{n+s})\,{}_iG_{n+s} &= 1
\end{aligned} \qquad [347]$$

Dieses Gleichungssystem ist das im Anhang geschlossen gelöste Gleichungssystem {53}, wenn wir dort die "rechte Seite" ${}_iC_k=1$ wählen.
Da im Anhang nicht nur das Gleichungssystem bei allgemeiner "rechter Seite" geschlossen gelöst wird, sondern die Lösungen des Gleichungssystems für die Startplätze k auch mit den Wahrscheinlichkeiten ${}_iF_k$ über alle Startplätze von k=1,2,... bis (n+s) gemittelt wird, erhalten wir nach {60} sofort die (über alle Startplätze gemittelte) Gesamtverweilzeit eines i-Rufes:

$$ {}_iG = \frac{1}{{}_i\lambda} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n+s} \frac{{}_{\le i}\phi_{\nu,n+s}}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} - \sum_{\nu=1}^{n+s} \frac{{}_{<i}\phi_{\nu,n+s}}{{}_{<i}\phi_{n+s}} \right\} \qquad [348] $$

Setzen wir [341] ein, so erhalten wir:

$$ {}_i\lambda \cdot {}_iG = {}_{\le i}X - {}_{<i}X = {}_iX \qquad [349] $$

Die mittlere Gesamtverweilzeit ${}_iG$ eines Rufes der Klasse i läßt sich also aus der Systembelastung der Klasse i berechnen. Wir interpretieren diese Beziehung genauso wie (129). Wir können auch sagen, daß die Gesamtzeit ${}_iG$ dieselbe Information über das Systemverhalten liefert, wie die Systembelastung ${}_iX$.

Im preemptiven V e r l u s t system wird aus der Gesamtverweilzeit ${}_iG$ eines i-Rufes die Belegungszeit ${}_iM$ eines i-Rufes:

$$ {}_iM(x) = {}_iG(x) \qquad [350] $$

$$ {}_iM = {}_iG \qquad [351] $$

Die Bündelbelastung ist für s=0 gleich der Gesamtbelastung:

$$ {}_iY = {}_iX \qquad [352] $$

Damit haben wir im preemptiven Verlustsystem:

$$ {}_i\lambda \cdot {}_iM = {}_iY \qquad [354] $$

Die mittlere Belegungszeit eines i-Rufes ist wegen der preemptiven Prioritätsdisziplin nicht mehr für alle Klassen gleich. Sie ist von Klasse zu Klasse verschieden. Setzen wir (263) ein, so ergibt sich:

$$ {}_i\lambda \cdot {}_iM = {}_{i}{}_{\rho}Y + {}_iA\,(\mathcal{B} - {}_i\mathcal{B}) $$

Die mittlere Belegzeit M im System ohne Prioritäten ist nach (124): $M = \frac{Y}{\bar{h}}$. Damit gilt:

$$ {}_iM = M + {}_iA\,(\mathcal{B} - {}_i\mathcal{B}) \qquad [355] $$

Ist der Verlust der Klasse i kleiner als der Gesamtverlust (das trifft zu für Rufe höherer Priorität), dann ist die mittlere Belegungszeit größer als die mittlere Belegungszeit M im System ohne Prioritäten. Für Rufe geringer Priorität ist sie kleiner als M.

V. 6 DIE VERDRÄNGUNGS- UND ERFOLGSWAHRSCHEINLICHKEITEN

Bei unendlicher Quellenzahl ist analog zu [345]:

$$ {}_iV_{k,j} = {}_iV_k \qquad [356] $$

Berücksichtigen wir [356] in IV.20 so genügt die Verdrängungswahrscheinlichkeit ${}_iV_k$ bei Start auf Platz k für i=2,3,...r dem Gleichungssystem [347] mit der durch (280) gegebenen "rechten Seite":

$$ k = 1,2,\dots,n+s-1 \qquad {}_iC_k = 0 \qquad {}_iC_{n+s} = {}_{<i}\lambda \qquad [357] $$

Damit erhalten wir zunächst aus {58} die Verdrängungswahrscheinlichkeit eines i-Rufes, der auf Platz k startet:

$$ {}_iV_k = \frac{{}_{<i}\phi_{k-1}}{{}_{<i}\phi_{n+s}} \qquad [358] $$

Die Verdrängungswahrscheinlichkeit wird einleuchtenderweise umso größer, je größer die Nummer seiner Startposition ist.

Die Erfolgswahrscheinlichkeit auf Platz k ist dann nach (281)

$$ {}_iS_k = 1 - {}_iV_k = 1 - \frac{{}_{<i}\phi_{k-1}}{{}_{<i}\phi_{n+s}} \qquad [359] $$

Setzen wir die rechte Seite [357] in {60} ein, dann erhalten wir aus den Verdrängungswahrscheinlichkeiten ${}_iV_k$ die über alle Startplätze gemittelte Verdrängungswahrscheinlichkeit eines (beliebigen) i-Rufes:

$$ {}_iV = \frac{{}_{\leq i}\lambda}{{}_i\lambda} \left\{ \frac{1}{{}_{\leq i}\Phi_{n+s}} - \frac{1}{{}_{<i}\Phi_{n+s}} \right\} \qquad [360] $$

Da diese Gleichung mit [331] übereinstimmt, ist die Behauptung (279) bei unendlicher Quellenzahl verifiziert. Die physikalische Überlegung, die uns zu Gleichung (224) bzw. [331] geführt hat, ist mit [360] bestätigt worden. Im preemptiven V e r l u s t system ist ${}_iV_k$ gleich der Unterbrechungswahrscheinlichkeit ${}_iU_k$ eines i-Rufes auf Platz k:

$$ {}_iU_k = {}_iV_k \qquad {}_iU = {}_iV \qquad [361] $$

V. 7 DIE GESAMTVERWEILZEITEN EINES ERFOLGLOSEN RUFES

Die Wahrscheinlichkeit ${}_iJ_k(x)$, dass ein erfolgloser i-Ruf länger als die Zeit x im System verweilt, genügt dem Differentialgleichungssystem [346] mit den Anfangswerten: ${}_iJ_k(x=0) = {}_iV_k$. Nehmen wir diese Anfangswerte als "rechte Seite" des Gleichungssystems {53}:

$$ {}_iC_k = {}_iV_k = \frac{{}_{<i}\Phi_{k-1}}{{}_{<i}\Phi_{n+s}} \qquad [362] $$

dann ergibt sich für die mittlere Gesamtverweilzeit eines erfolglosen i-Rufes nach Gleichung {60}:

$$ {}_iJ = \frac{1}{{}_i\lambda \cdot {}_{<i}\Phi_{n+s}} \left\{ \frac{\sum_{\nu=1}^{n+s} {}_{<i}\Phi_{\nu-1}\, {}_{\leq i}\Phi_{\nu,n+s}}{{}_{\leq i}\Phi_{n+s}} - \frac{\sum_{\nu=1}^{n+s} {}_{<i}\Phi_{\nu-1}\, {}_{<i}\Phi_{\nu,n+s}}{{}_{<i}\Phi_{n+s}} \right\} \qquad [363] $$

Dieses Ergebnis lässt eine Interpretation zu, die analog zu [349] ist. Wir schreiben [363] um:

$$ {}_i\lambda \cdot {}_iJ = \sum_{\nu=1}^{n+s} \frac{{}_{<i}\Phi_{n+s}}{{}_{<i}\Phi_{n+s}} \left(\frac{{}_{\leq i}\Phi_{\nu,n+s}}{{}_{\leq i}\Phi_{n+s}} - \frac{{}_{<i}\Phi_{\nu,n+s}}{{}_{<i}\Phi_{n+s}} \right) \qquad [364] $$

oder mit [340]:

$$ {}_i\lambda \cdot {}_iJ = \sum_{k=1}^{n+s} {}_iV_k \cdot {}_iX_k \qquad [365] $$

${}_iX_k$ ist die Belastung des Platzes k durch i-Rufe. ${}_iV_k \cdot {}_iX_k$ ist derjenige Anteil der i-Ruf-Belastung von Platz k, der verdrängt werden wird. Summieren wir diese Anteile ${}_iV_k \cdot {}_iX_k$ auf über alle Plätze k, so erhalten wir die

$$ \text{ERFOLGLOSE SYSTEMBELASTUNG DER KLASSE } i = \sum_{k=1}^{n+s} {}_iV_k \cdot {}_iX_k \qquad [366] $$

Die erfolglose Systembelastung der Klasse i ist nicht gleich ${}_iX \cdot {}_iV$, also nicht gleich dem Produkt von Gesamtbelastung der Klasse i multipliziert mit der Verdrängungswahrscheinlichkeit der Klasse i. Das ist einleuchtend, da die Wahrscheinlichkeit ${}_iV_j$, dass ein auf Platz j stehender i-Ruf verloren geht nicht für alle Plätze gleich ist, sondern umso grösser ist, je grösser j ist.

Diese erfolglose Systembelastung der Klasse i ist nach Gleichung [365] gleich dem Produkt von mittlerer Gesamtverweilzeit eines erfolglosen i-Rufes und mittlerer Anrufrate der Klasse i. Wir haben eine völlig analoge Interpretation von Gleichung [365] und [349] . Wir können sagen, dass die erfolglose Systembelastung genau dieselbe Information über den Verkehrsablauf liefert, wie die auf alle i-Rufe bezogene Gesamtverweilzeit der erfolglosen i-Rufe.

Für das preemptive Verlustsystem werden aus den Gesamtverweilzeiten die Bedienungszeiten. Wir erhalten für das preemptive Verlustsystem die mittlere Bedienungszeit ${}_iJ$ eines erfolglosen i-Rufes bezogen auf alle i-Rufe:

$$ {}_i\lambda \cdot {}_iJ = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{{}_{<i}\Phi_{\nu-1}}{{}_{<i}\Phi_n} \left(\frac{{}_{\leq i}\Phi_{\nu,n}}{{}_{\leq i}\Phi_n} - \frac{{}_{<i}\Phi_{\nu,n}}{{}_{<i}\Phi_n} \right) \qquad [367] $$

oder auch:

$$ {}_i\lambda \cdot {}_iJ = \sum_{k=1}^{n} {}_iX_k \cdot {}_iU_k \qquad [368] $$

V. 8 DIE GESAMTVERWEILZEIT EINES ERFOLGREICHEN RUFES

Die Verteilung der Gesamtverweilzeiten der erfolgreichen i-Rufe errechnen wir aus jener der erfolglosen i-Rufe nach den Gleichungen (291) bzw. (293). Für die mittlere Gesamtverweilzeit (${}_{i}G-{}_{i}J$) eines erfolgreichen i-Rufes bezogen auf alle i-Rufe erhalten wir eine Interpretation wie in V.7, wenn wir sie in der folgenden Form schreiben:

$$ {}_{i}\lambda \cdot ({}_{i}G-{}_{i}J) = \sum_{k=1}^{n+s} {}_{i}X_{k} \cdot {}_{i}S_{k} \qquad [369] $$

$\sum_{k=1}^{n+s} {}_{i}X_{k} \cdot {}_{i}S_{k}$ lässt sich interpretieren als der erfolgreiche Anteil der Gesamtbelastung des Systems:

$$ \text{ERFOLGREICHE SYSTEMBELASTUNG} = \sum_{k=1}^{n+s} {}_{i}X_{k} \cdot {}_{i}S_{k} \qquad [370] $$

Für s=0 gehen diese Ergebnisse über in die Bedienungszeiten des preemptiven Verlustsystems.

V. 9 DIE SOFORTWARTEZEITEN UND DIE ZUGEHÖRIGEN WAHRSCHEINLICHKEITEN

Mit $\quad {}_{i}T_{k,j}(x) = {}_{i}T_{k}(x) \qquad [371]$

erhalten wir aus (296) das folgende Differentialgleichungssystem für die Wahrscheinlichkeit ${}_{i}T_{k,j}(x)$, dass ein auf Platz (k,j) startender i-Warteruf den Wartespeicher bis zu seinem (erstmaligen) Verlassen länger als die Zeit x belegt:

$$ \begin{aligned} {}_{i}T'_{n+1}(x) &= \qquad\qquad -({}_{<i}\lambda+\mu_n)\cdot{}_{i}T_{n+1}(x) + {}_{<i}\lambda\cdot{}_{i}T_{n+2}(x) \\ {}_{i}T'_{k}(x) &= \mu_n\cdot{}_{i}T_{k}(x) - ({}_{<i}\lambda+\mu_n)\cdot{}_{i}T_{k}(x) + {}_{<i}\lambda\cdot{}_{i}T_{k+1}(x) \qquad [372] \\ {}_{i}T'_{n+s}(x) &= \mu_n\cdot{}_{i}T_{n+s}(x) - ({}_{<i}\lambda+\mu_n)\cdot{}_{i}T_{n+s}(x) \end{aligned} $$

Dieses Differentialgleichungssystem stimmt mit dem Differentialgleichungssystem für die Wartezeiten des Warteverlustsystems bei nichtpreemptiver Prioritätsdisziplin genau überein. Da ich

für das nichtpreemptive Warteverlustsystem eine geschlossene Lösung dieser Differentialgleichung im Anschluss an diese Arbeit veröffentlichen werde, möchte ich hier darauf verzichten, die recht komplizierte Verteilung herzuleiten.
Wir werden uns hier auf die Berechnung der Erwartungswerte beschränken. Zunächst seien die mittleren Sofortwartezeiten bestimmt. Für sie erhält man aus (297) das folgende lineare Gleichungssystem:

$$ \begin{aligned} ({}_{<i}\lambda+\mu_n)\cdot{}_{i}T_{n+1} - {}_{<i}\lambda\cdot{}_{i}T_{n+2} &= 1 \\ -\mu_n\cdot{}_{i}T_{k-1} + ({}_{<i}\lambda+\mu_n)\cdot{}_{i}T_{k} - {}_{<i}\lambda\cdot{}_{i}T_{k+1} &= 1 \qquad [373] \\ -\mu_n\cdot{}_{i}T_{n+s-1} + ({}_{<i}\lambda+\mu_n)\cdot{}_{i}T_{n+s} &= 1 \end{aligned} $$

Setzen wir im Gleichungssystem {53} n=0, so können wir die im Anhang hergeleitete Lösung so modifizieren, dass daraus direkt die mittlere Sofortwartezeit ${}_{i}T$ eines beliebigen i-Rufes abgelesen werden kann.

$$ {}_{i}T = \frac{1}{{}_{i}\lambda}\left\{ \sum_{\nu=1}^{s} \frac{{}_{\le i}\Psi_{s-\nu}}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} - \frac{{}_{i}E}{{}_{i-1}E} \sum_{\nu=1}^{s} \frac{{}_{<i}\Psi_{s-\nu}}{{}_{<i}\phi_{n+s}} \right\} \qquad [374] $$

Dabei ist ${}_{i}E$ die Blockierungswahrscheinlichkeit |336| für Klasse i. Durch Einsetzen der Formel [343] für die Wartebelastung erhalten wir:

$$ {}_{i}\lambda\cdot{}_{i}T = {}_{\le i}Q - \frac{{}_{i}E}{{}_{i-1}E}\,{}_{<i}Q \qquad [375] $$

Für den Sonderfall i=1 erhalten wir:

$$ {}_{1}\lambda\cdot{}_{1}T = {}_{1}Q \qquad [376] $$

Für i > 1 können wir die mittlere Sofortwartezeit nicht analog zu (123) interpretieren, da die rechte Seite von [375] nicht gleich ${}_{i}Q$ ist. Das ist insofern auch einleuchtend, da die Warteschlange der i-Rufe nicht nur von den neu ankommenden i-Rufen aufrecht erhalten wird, sondern auch von den im Bündel unterbrochenen i-Rufen gespeist wird.

Bei Klasse 1 gibt es keine unterbrochenen Rufe, weshalb hier für [376] die Interpretation von [375] gültig ist.

Wir kommen jetzt zur Wahrscheinlichkeit ${}_iK_k$, dass ein auf Warteplatz k stehender i-Ruf aus dem System verdrängt wird, ohne ins Bündel zu gelangen. Die Wahrscheinlichkeit ${}_iK_k$ erfüllt das Gleichungssystem [373] mit der folgenden rechten Seite nach (299):

$$k=n+1,n+2,\dots,n+s-1 \qquad {}_iC_k = 0 \qquad {}_iC_{n+s} = {}_{<i}\lambda$$

Setzen wir n=0 in Gleichungssystem {53} ein, so erhalten wir direkt aus Gleichung [60]:

$$k=n+1,n+2,\dots,n+s \qquad {}_iK_k = \frac{{}_{<i}\Psi_{k-n-1}}{{}_{<i}\Psi_s} \qquad [377]$$

und speziell auf Platz (n+1):

$${}_iK_{n+1} = \frac{1}{{}_{<i}\Psi_s} \qquad [378]$$

Die Sofortverdrängungswahrscheinlichkeit ${}_iK$ eines beliebigen i-Rufes erhalten wir mit der obigen "rechten Seite" aus {60}:

$${}_iK = \frac{{}_{<i}\rho}{{}_i\rho} \left\{ \frac{1}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} - \frac{{}_iE}{{}_{i-1}E} \, \frac{1}{{}_{<i}\phi_{n+s}} \right\} \qquad [379]$$

Auch in dieser Formel taucht wieder der Faktor $\frac{{}_iE}{{}_{i-1}E}$ auf, genau wie in Gleichung [375]. (Vergleiche die Verdrängungswahrscheinlichkeit ${}_iV$ nach Gleichung [331].)
Aus der Wahrscheinlichkeit ${}_iK_k$ ergibt sich als Komplement die Wahrscheinlichkeit ${}_iD_k$, dass ein i-Ruf ins Bündel kommt:
Mit [44] erhält man:

$${}_iD_k = 1 - {}_iK_k = \frac{{}_{<i}\Psi_{n+s-k}}{{}_{<i}\Psi_s} \left(\frac{n}{{}_{<i}A} \right)^{k-n} \qquad [380]$$

Setzen wir die Wahrscheinlichkeiten ${}_iD_k$ als "rechte Seiten" des Gleichungssystems [53] ein, so erhalten wir - bis auf den schon bekannten Faktor $\frac{{}_iE}{{}_{i-1}E}$ - für die Sofortwartezeiten eines

erfolgreichen i-Rufes eine zu [365] analoge Formel:

$${}_i\lambda \cdot {}_iO = \sum_{\nu=n+1}^{n+s} {}_iD_\nu \left({}_{\le i}X_\nu - \frac{{}_iE}{{}_{i-1}E} \, {}_{<i}X_\nu \right) \qquad [381]$$

V. 10 DIE UNTERBRECHUNGSWAHRSCHEINLICHKEITEN

Aus (303) leitet sich bei unendlicher Quellenzahl das folgende lineare Gleichungssystem für die Wahrscheinlichkeit ${}_iU_k$ ab, dass ein auf Platz k stehender i-Ruf unterbrochen wird:

$$\begin{aligned}
(\mu_1 + {}_{<i}\lambda) \cdot {}_iU_1 - {}_{<i}\lambda \cdot {}_iU_2 &= 0 \\
-\mu_{k-1} \cdot {}_iU_{k-1} + (\mu_k + {}_{<i}\lambda) \cdot {}_iU_k - {}_{<i}\lambda \cdot {}_iU_{k+1} &= 0 \qquad k \neq n \\
-\mu_{n-1} \cdot {}_iU_{n-1} + (\mu_n + {}_{<i}\lambda) \cdot {}_iU_n &= {}_{<i}\lambda \qquad [382] \\
-\mu_{n+s-1} \cdot {}_iU_{n+s-1} + (\mu_n + {}_{<i}\lambda) \cdot {}_iU_{n+s} &= 0
\end{aligned}$$

Im Anhang ist die Lösung dieses Gleichungssystems angegeben.
Es ist nach [62]:

$$k = 1,2,\dots,n \qquad {}_iU_k = \frac{{}_{<i}\phi_{k-1}}{{}_{<i}\phi_n} \qquad [383]$$

$$k = 1,2,\dots,s \qquad {}_iU_{n+k} = \frac{{}_{<i}\phi_{n-1}}{{}_{<i}\phi_n} \, \frac{{}_{<i}\Psi_{s-k}}{{}_{<i}\Psi_s} \, {}_{<i}\beta_n^k \qquad [384]$$

$$= {}_iU_n \cdot {}_iD_{n+k}$$

Zunächst können wir mit [361] aus Gleichung [383] folgern, daß die Unterbrechungswahrscheinlichkeit auf einem Platz im Bündel (k=1,2,...,n) bei unendlicher Quellenzahl genau so groß ist, wie die Unterbrechungswahrscheinlichkeit für einen i-Ruf, der auf Platz k im preemptiven V e r l u s t - system startet.

Soll ein i-Warteruf, der auf Platz (n+k) startet, unterbrochen werden, dann muß er zunächst ins Bündel gelangen. Das geschieht nach [380] mit der Wahrscheinlichkeit ${}_iD_{n+k}$. Dann belegt der Ruf zunächst den Platz n im Bündel und muß auf seinem weiteren RANDOM-WALK im Bündel unterbrochen werden. Das geschieht von Platz n aus mit der Wahrscheinlichkeit ${}_iU_n$. Diese beiden Ereignisse {i-RUF KOMMT VON PLATZ n+k AUS INS BÜNDEL} und {i-RUF WIRD VON PLATZ n AUS UNTERBROCHEN} sind gemäß [384] unabhängig.
Diese Unabhängigkeit erlaubt es uns auch, die ν-fachen Unterbrechungswahrscheinlichkeiten einfach zu berechnen.

Zunächst kommen wir aber zur Unterbrechungswahrscheinlichkeit eines (beliebigen) i-Rufes:

$$\begin{aligned} {}_iU &= \sum_{k=1}^{n+s} {}_iF_k\, {}_iU_k = \sum_{k=1}^{n} {}_iF_k\, {}_iU_k + {}_iU_n \sum_{k=1}^{s} {}_iF_{n+k}(1 - {}_iK_{n+k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_iF_k\, {}_iU_k + ({}_iR - {}_ik)\, {}_iU_n \end{aligned} \qquad [385]$$

Aus {60} erhalten wir mit s=0 innerhalb {53}:

$$\sum_{k=1}^{n} {}_iF_k \cdot {}_iU_k = \frac{{}_{\varepsilon i}\lambda}{{}_i\lambda} \frac{n^s}{{}_{\varepsilon i}A^s} \frac{1}{{}_{\varepsilon i}\phi_{n+s}} \left\{ 1 - \frac{{}_{\varepsilon i}\phi_n}{{}_{\varepsilon i}\phi_n} \right\} \qquad [386]$$

Setzen wir diese Gleichung ein, so erhalten wir die Unterbrechungswahrscheinlichkeit ${}_iU$ für einen (beliebigen) i-Ruf:

$${}_iU = \frac{{}_{\varepsilon i}\rho}{{}_i\rho} \frac{n^s}{{}_{\varepsilon i}A^s} \frac{1}{{}_{\varepsilon i}\phi_{n+s}} \left\{ 1 - \frac{{}_{\varepsilon i}\phi_n}{{}_{\varepsilon i}\phi_n} \right\} + {}_iU_n\, ({}_iR - {}_ik) \qquad [387]$$

Wegen der Unabhängigkeit von Wartespeicher und Bündel bei unendlicher Quellenzahl, können wir die ν-fache Unterbrechungswahrscheinlichkeit ${}^{\nu}_{i}U$ eines i-Rufes leicht berechnen:
Der i-Ruf wird mit der Wahrscheinlichkeit ${}_iU$ unterbrochen

und befindet sich dann auf Platz (n+1). Die Wahrscheinlichkeit von Platz (n+1) aus unterbrochen zu werden ist ${}_iU_{n+1}$.
Die Ereignisse {UNTERBRECHUNG} sind unabhängig voneinander. Soll ein i-Ruf ν-mal unterbrochen werden, dann darf er nach seiner ν-ten Unterbrechung kein weiteres Mal unterbrochen werden. Nach der ν-ten Unterbrechung steht der i-Ruf wieder auf Platz (n+1). Die Wahrscheinlichkeit von Platz (n+1) aus nicht mehr unterbrochen zu werden ist $(1 - {}_iU_{n+1})$. Für die Wahrscheinlichkeit, daß ein i-Ruf ν-mal unterbrochen wird erhalten wir:

$${}^{\nu}_{i}U = {}_iU\; {}_iU_{n+1}^{\nu-1}\; (1 - {}_iU_{n+1}) \qquad [388]$$

Die ν-fachen Unterbrechungswahrscheinlichkeiten nehmen mit wachsendem ν geometrisch ab.
Die Unterbrechungswahrscheinlichkeit ${}_iU$, daß ein i-Ruf überhaupt unterbrochen wird, muß sich nach (309) ergeben, wenn man die ν-fachen Unterbrechungswahrscheinlichkeiten für ν=1,2,... aufsummiert:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} {}^{\nu}_{i}U = {}_iU\, (1 - {}_iU_{n+1}) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} {}_iU_{n+1}^{\nu-1} = {}_iU$$

Damit wurde Formel (309) bei unendlicher Quellenzahl verifiziert. Analog zu Gleichung [388] ergibt sich die Verbundwahrscheinlichkeit ${}^{\nu}_{i}I$, daß ein i-Ruf erfolgreich ist u n d ν-mal unterbrochen wird:

$${}^{\nu}_{i}I = {}_iU\; {}_iU_{n+1}^{\nu-1}\; {}_iD_{n+1}\, (1 - {}_iU_n) \qquad [389]$$

Addieren wir über alle ν=1,2,... ergibt sich die Verbundwahrscheinlichkeit ${}_iI$, daß ein i-Ruf erfolgreich ist u n d unterbrochen wird:

$${}_iI = \frac{{}_iD_{n+1}\,(1 - {}_iU_n)}{1 - {}_iU_{n+1}}\, {}_iU = \frac{{}_iD_{n+1} - {}_iU_n\, {}_iD_{n+1}}{1 - {}_iU_n\, {}_iD_{n+1}}\, {}_iU \qquad [390]$$

V. 11 DIE MITTLERE ZAHL VON UNTERBRECHUNGEN

Mit den Kenngrößen des Abschnitts V.10 lassen sich die mittlere Zahl von Unterbrechungen nach Abschnitt IV.26 berechnen.

Wir erhalten zunächst die mittlere Zahl ${}_iN$ von Unterbrechungen eines i-Rufes nach (318):

$$ {}_iN = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \, {}_i^{\nu}U = {}_iU \, (1 - {}_iU_{n+1}) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \, {}_iU_{n+1}^{\nu-1} $$

Wenden wir Formel {47} an, dann erhalten wir:

$$ {}_iN = \frac{{}_iU}{1 - {}_iU_{n+1}} \qquad [391] $$

Analog ergibt sich:

MITTLERE ZAHL VON UNTERBRECHUNGEN EINES ERFOLGREICHEN RUFES:

$$ {}_iM = \frac{{}_iU}{{}_iS} \; \frac{{}_iD_{n+1} \, (1 - {}_iU_n)}{(1 - {}_iU_{n+1})^2} \qquad [392] $$

Abschließend sei noch die mittlere Zahl von Unterbrechungen Z pro Zeiteinheit gemäß (324) und mit [349] angegeben:

$$ Z = {}_{\leq r}\lambda \;\; {}_{\leq r}N \qquad [393] $$

Mit dieser wichtigen Kenngröße haben wir alle wesentlichen Verkehrscharakteristika des preemptiven Warteverlustsystems bestimmt.

VI EINIGE NUMERISCHE ERGEBNISSE

VI.1 RECHENPROGRAMME ZUR AUSWERTUNG DER ERGEBNISSE

In der Arbeit haben wir die Verkehrscharakteristika des preemptiven Warteverlustsystems bei endlicher und unendlicher Quellenzahl berechnet. Um die Anwendung zu erleichtern, wurden ALGOL-Programme zur Berechnung der Kenngrössen erstellt. Die Eingabegrössen dieser Rechenprogramme sind:

n Zahl der Leitungen
s Zahl der Warteplätze
h mittlere Belegungsdauer
r Zahl der Prioritätsklassen
${}_ip$ (i=1,2,...,r-1) Klassenanteile

Bei unendlicher Quellenzahl:

λ Anrufrate

Bei endlicher Quellenzahl

${}_{\leq r}\lambda_0$ bedingte Gesamtanrufrate, wenn alle Quellen frei sind
q Zahl der Quellen

Die Rechenprogramme sind so angelegt, dass sie ohne Kenntnis der Theorie angewandt werden können. Damit erhält man auf einfache Weise einen Überblick über die Verkehrscharakteristika eines bestimmten Systems.

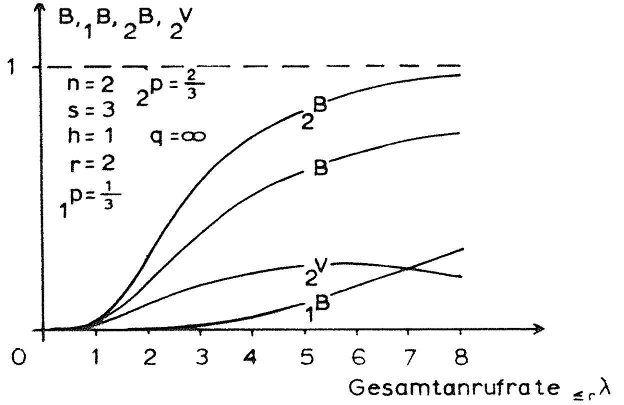
Neben dieser Analyse eines gegebenen Systems für fest vorgegebene Verkehrswerte, können mit Hilfe der Rechenprogramme die Abhängigkeiten der Verkehrscharakteristika von den Verkehrswerten direkt untersucht werden. Das ist für die Synthese solcher Systeme wichtig.

In den folgenden Abschnitten VI.2 bis VI.4 werden einige Verkehrscharakteristika bei unendlicher Quellenzahl untersucht. In Abschnitt VI.5 wird gezeigt, wie eine endliche Zahl von Verkehrsquellen die Verkehrscharakteristika beeinflusst.

VI.2 ABHÄNGIGKEIT DER VERKEHRSCHARAKTERISTIKA VON DER GESAMTANRUFRATE ${}_{\leq r}\lambda$

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Abhängigkeit einiger Verkehrscharakteristika von der Gesamtanrufrate ${}_{\leq r}\lambda$.

Figur 5 zeigt die verschiedenen Verlustwahrscheinlichkeiten eines Warteverlustsystems mit r=2 Prioritätsklassen:



FIGUR 5: B GESAMTVERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT
$_1B$ VERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT VON KLASSE 1
$_2B$ VERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT VON KLASSE 2
$_2V$ VERDRÄNGUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT VON KLASSE 2

Die mittlere Kurve stellt die Verlustwahrscheinlichkeit B des entsprechenden Warteverlustsystems ohne Prioritäten dar. B wächst mit wachsender Gesamtanrufrate $_{\leq r}\lambda$ und nähert sich für $_{\leq r}\lambda \to \infty$ asymptotisch dem Wert 1. Nach Gleichung (234) stimmt die (über die beiden Klassen 1 und 2 gemittelte) Verlustwahrscheinlichkeit $_{\leq 2}B$ des preemptiven Warteverlustsystems mit B überein:

$$_{\leq 2}B = B$$

Die Verlustwahrscheinlichkeit $_1B$ der bevorrechtigten Klasse 1 ist kleiner als B und die Verlustwahrscheinlichkeit $_2B$ der Klasse 2 ist grösser als B. Nach IV.10 gilt:

$$_{\leq 2}B = {}_1p \cdot {}_1B + {}_2p \cdot {}_2B = \frac{1}{3} \cdot {}_1B + \frac{2}{3} \cdot {}_2B$$

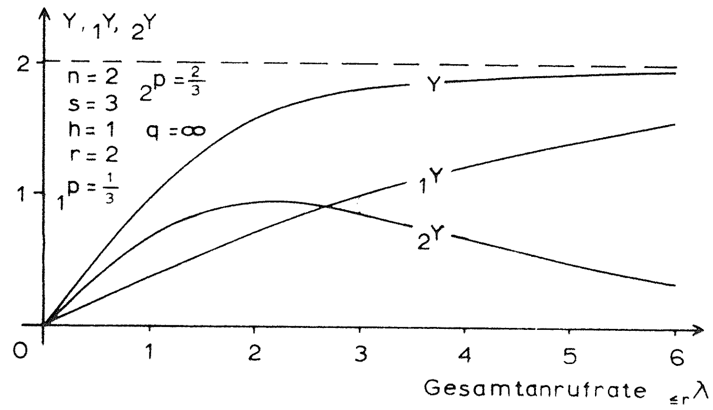
Die Abweiswahrscheinlichkeiten $_1C$ von Klasse 1 und $_2C$ von Klasse 2 lassen sich ebenfalls aus Figur 5 ablesen. Nach Gleichung (217), bzw. (218) gilt:

$$_1C = {}_1B \qquad {}_2C = B$$

Ausser den Verlustwahrscheinlichkeiten zeigt Figur 5 die Verdrängungswahrscheinlichkeit $_2V$. Nach Gleichung (229) gilt:

$$_2B = {}_2C + {}_2V = B + {}_2V$$

Die Verdrängungswahrscheinlichkeit $_2V$ bezieht sich auf die Gesamtheit aller 2-Rufe (einschließlich der sofort abgewiesenen 2-Rufe). Bei kleinen Werten $_{\leq r}\lambda$ haben beide Klassen im System "Platz", so dass die Verlustwahrscheinlichkeit und auch die Verdrängungswahrscheinlichkeit $_2V$ sehr klein ist. Mit wachsender Anrufrate $_{\leq r}\lambda$ wächst $_2V$. Für grosse Anrufraten ist die Abweiswahrscheinlichkeit $_2C$=B der Klasse 2 so gross, dass nur noch sehr wenige Rufe ins System kommen. Deswegen können auch nur sehr wenige Rufe verdrängt werden: $_2V$ strebt für $_{\leq r}\lambda \to \infty$ gegen 0. Dagegen würde die bedingte Verdrängungswahrscheinlichkeit für solche Rufe, die ins System kommen, für $_{\leq r}\lambda \to 1$ gegen 1 streben; denn für große $_{\leq r}\lambda$ werden fast alle ins System kommenden Rufe von Klasse 2 wieder verdrängt.



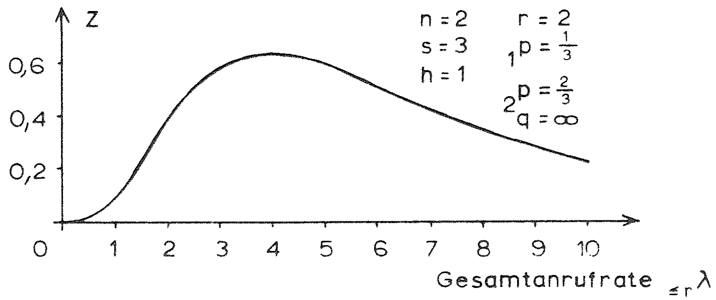
FIGUR 6: Y GESAMTBÜNDELBELASTUNG
$_1Y$ BÜNDELBELASTUNG VON KLASSE 1
$_2Y$ BÜNDELBELASTUNG VON KLASSE 2

Für dasselbe Warteverlustsystem wird in Figur 6 die Abhängigkeit der Bündelbelastung von der Gesamtanrufrate gezeigt.

Die Gesamtbelastung $_{\leq r}Y$ des preemptiven Warteverlustsystems stimmt nach Gleichung (256) mit der Belastung Y des entsprechenden Systems ohne Prioritäten überein.

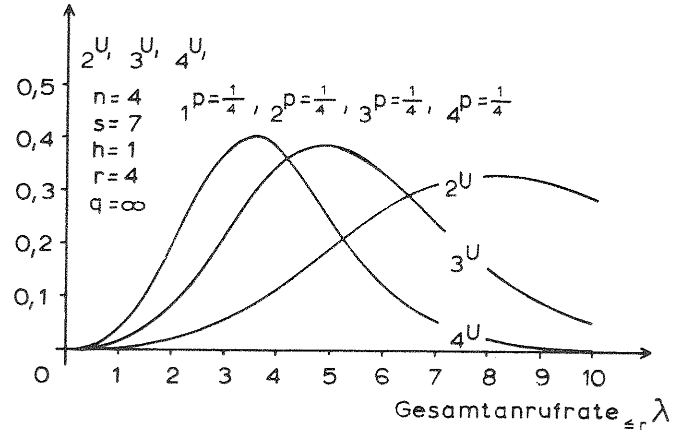
Für kleine ${}_{\leq r}\lambda$ wächst Y zunächst nahezu linear an (dort hat das gesamte Angebot im Bündel "Platz", weshalb die Verlustwahrscheinlichkeit sehr klein ist. Vergleiche Gleichung (83)). Für grosse ${}_{\leq r}\lambda$ nähert sich Y asymptotisch dem Maximalwert der Bündelbelastung n=2 (als Erwartungswert belegter Leitungen).

Für kleine ${}_{\leq r}\lambda$ teilt sich die Gesamtbündelbelastung gemäss den Prioritätsanteilen ${}_{i}p$ in die Belastungen ${}_{1}Y$ bzw. ${}_{2}Y$ von Klasse 1 bzw. 2 auf. Der Anteil ${}_{1}Y$ an der Gesamtbelastung Y wächst mit wachsender Anrufrate und für grosse ${}_{\leq r}\lambda$ verdrängt Klasse 1 die niedrigere Prioritätsklasse 2 ganz aus dem Bündel, weshalb ${}_{2}Y$ nach dem Erreichen eines Maximums abnimmt und für ${}_{\leq r}\lambda \to \infty$ gegen 0 strebt.



FIGUR 7 : Z MITTLERE ZAHL VON UNTERBRECHUNGEN PRO ZEITEINHEIT

Wiederum für das System von Figur 5 und 6 wird in Figur 7 das Verhalten der mittleren Zahl Z von Unterbrechungen pro Zeiteinheit in Abhängigkeit von der Gesamtanrufrate ${}_{\leq r}\lambda$ gezeigt. Für kleine ${}_{\leq r}\lambda$ finden sehr wenige Unterbrechungen statt. Genau wie die Unterbrechungswahrscheinlichkeiten (Vergl. Figur 7), nimmt Z nach dem Erreichen eines Maximalwertes wieder ab, da für grosse ${}_{\leq r}\lambda$ Rufe der Klasse 2 gar nicht mehr ins Bündel kommen. Unterbrechungen belasten das System. Deshalb wird man versuchen, ein System so zu planen, dass es nicht in der Nähe des Maximums von Z arbeitet.



FIGUR 8: ${}_{i}U$ UNTERBRECHUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT VON KLASSE i (i=2,3,4)

Figur 8 zeigt für r=4 Prioritätsklassen die Unterbrechungswahrscheinlichkeiten ${}_{i}U$ der Klassen i=2,3,4 eines Warteverlustsystems in Abhängigkeit von der Gesamtanrufrate ${}_{\leq r}\lambda$. (${}_{1}U$ ist gleich 0, da Rufe von Klasse 1 nicht unterbrochen werden.) Die Unterbrechungswahrscheinlichkeit ${}_{i}U$ einer Klasse i ist bezogen auf alle i-Rufe (einschließlich der sofort abgewiesenen Rufe).

Die Unterbrechungswahrscheinlichkeit ${}_{i}U$ der Klasse i wird durch die Anrufrate ${}_{\leq i}\lambda$ der Klasse ≤i beeinflusst. Nach Gleichung (191) gilt:

$${}_{\leq i}\lambda = {}_{\leq i}p \cdot {}_{\leq r}\lambda$$

Als Erwartungswert der Anzahl belegter Leitungen ist der Maximalwert der Bündelbelastung gleich n. Solange die Anrufrate ${}_{\leq i}\lambda$ der Klasse ≤i klein ist gegenüber n=4 (bei einer mittleren Belegungsdauer h=1), hat die gesamte Klasse ≤i "Platz" im Bündel, weshalb nur wenige Unterbrechungen innerhalb der Klasse ≤i vorkommen. Die Unterbrechungswahrscheinlichkeit ${}_{i}U$ steigt zunächst mit wachsendem ${}_{\leq r}\lambda$. Aus Figur 8 sehen wir, dass ${}_{i}U$ in der Nähe des durch Gleichung:

$${}_{\leq i}A = {}_{\leq i}\lambda \cdot h = {}_{\leq i}p \cdot {}_{\leq r}\lambda \cdot h = n$$

festgelegten Wertes von $_{\leq r}\lambda$ ein Maximum erreicht. Für grösssere Werte von $_{\leq r}\lambda$ (und damit von $_{\leq i}\lambda$) ist das Angebot der Klasse $\leq i$ so gross, dass nur noch wenige Rufe von Klasse i ins Bündel gelangen und deswegen nur noch wenige i-Rufe unterbrochen werden können. (Die Unterbrechungswahrscheinlichkeit $_iU$ ist bezogen auf alle i-Rufe !) Für $_{\leq r}\lambda \to \infty$ streben alle Unterbrechungswahrscheinlichkeiten gegen 0, da das Bündel dann ganz von Klasse 1 beansprucht wird.

VI. 3 ABHÄNGIGKEIT DER VERKEHRSCHARAKTERISTIKA VON DER PRIORITÄTSKLASSENEINTEILUNG

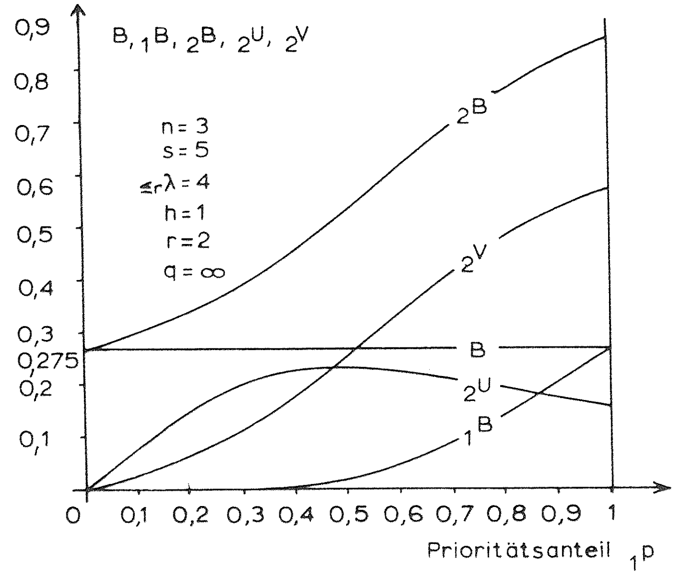
In diesem Abschnitt diskutieren wirfür ein Warteverlustsystem mit r=2 Prioritätsklassen die Abhängigkeit der Verkehrscharakteristika vom Anteil $_1p$ der Prioritätsklasse 1.

Nach Gleichung (234) ist die über alle r Klassen gemittelte Gesamtverlustwahrscheinlichkeit $_{\leq r}B$ gleich der Verlustwahrscheinlichkeit B des entsprechenden Warteverlustsystems ohne Prioritäten, d.h. $_{\leq r}B$ ist unabhängig von den Prioritätsklassenanteilen $_ip$ (Vergl. Figur 9).

Wir haben ein System mit n=3 Leitungen, dem (bei einer mittleren Belegungsdauer von h=1) ein Gesamtangebot $_{\leq r}A=4$ angeboten wird. Das System ist also sehr stark belastet, was der hohen Gesamtverlustwahrscheinlichkeit $_{\leq r}B=B$ entspricht (Vergl. Figur 9).

Für $_1p=0$ werden dem System nur Rufe der Klasse 2 angeboten, d.h. die Verkehrscharakteristika der Klasse 2 müssen für $_1p=0$ mit denjenigen des Warteverlustsystems ohne Prioritäten übereinstimmen. Das Entsprechende gilt für Klasse 1 , wenn $_1p=1$ ist.

In Figur 9 sehen wir, dass die Verlustwahrscheinlichkeit $_1B$ von 0 ausgehend, wächst, bis sie für $_1p=1$ den Wert B des Warteverlustsystems ohne Prioritäten erreicht. Wir sehen, dass trotz der hohen Gesamtbelastung selbst für recht grosse Werte von $_1p$ die Verlustwahrscheinlichkeit $_1B$ von Klasse 1 sehr klein bleibt.



FIGUR 9: B GESAMTVERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT
$_1B$ VERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT VON KLASSE 1
$_2B$ VERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT VON KLASSE 2
$_2V$ VERDRÄNGUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT VON KLASSE 2
$_2U$ UNTERBRECHUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT VON KLASSE 2

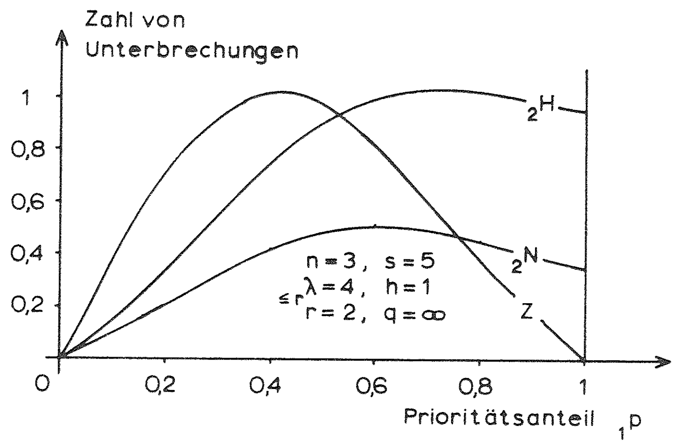
Je grösser der Anteil $_1p$ von Klasse 1, desto grösser ist auch die Verdrängungswahrscheinlichkeit $_2V$ von Klasse 2. Für Werte $_1p$ in der Nähe von $_1p=1$ werden zwar nur noch sehr wenige 2-Rufe angeboten. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Rufe verdrängt werden, ist aber sehr groß.

Nach Gleichung (229) mit Gleichung (217) gilt für r=2 Prioritätsklassen:

$$_2B = {_2C} + {_2V} = B + {_2V}$$

Deshalb wächst die Verlustwahrscheinlichkeit $_2B$ von Klasse 2 zusammen mit $_2V$.

Auch die Unterbrechungswahrscheinlichkeit $_2U$ von Klasse 2 wächst zunächst mit wachsendem Anteil $_1p$ von Klasse 1. Nach Erreichen eines Maximums fällt ${}_2U$ wieder, da für grosse ${}_1p$ die Klasse 2 von Klasse 1 zunehmend aus dem Bündel verdrängt wird.



FIGUR 10: Z MITTLERE ZAHL VON UNTERBRECHUNGEN PRO ZEITEINHEIT
${}_2N$ MITTLERE ZAHL VON UNTERBRECHUNGEN EINES BELIEBIGEN 2-RUFES
${}_2H$ MITTLERE ZAHL VON UNTERBRECHUNGEN EINES ERFOLGREICHEN 2-RUFES

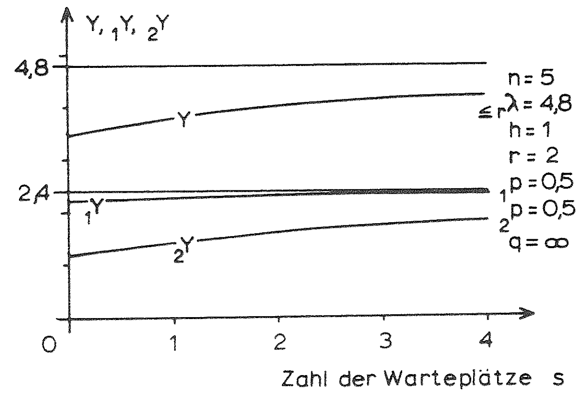
Die mittlere Zahl Z von Unterbrechungen pro Zeiteinheit ist sowohl für ${}_1p=0$ (keine unterbrechenden Rufe) als auch für ${}_1p=1$ (keine Rufe, die unterbrochen werden können) gleich 0. Dazwischen liegt ein Maximum von Z. Aufgabe richtiger Dimensionierung eines Systems könnte es sein, eine zu grosse Zahl Z von Unterbrechungen pro Zeiteinheit zu vermeiden.

In Figur 10 wird ausserdem die mittlere Zahl von Unterbrechungen ${}_2N$ eines beliebigen 2-Rufes und die mittlere Zahl von Unterbrechungen ${}_2H$ eines erfolgreichen 2-Rufes in Abhängigkeit von ${}_1p$ gezeigt. Beide Kurven nehmen nach Erreichung eines Maximalwertes wieder ab, was folgendermassen erklärt werden kann:
Bei dem vorgegebenen grossen Gesamtangebot sind für grosse ${}_1p$ nur noch wenige 2-Rufe erfolgreich. Es sind hauptsächlich solche 2-Rufe erfolgreich, die eine kurze Belegungszeit haben, und deshalb - wenn sie erst einmal im Bündel sind - nur in weniger Fällen unterbrochen werden.

Dasselbe Verhalten zeigt die mittlere Zahl ${}_2N$ von Unterbrechungen für einen beliebigen 2-Ruf (einschliesslich der direkt abgewiesenen und der verdrängten Rufe).

VI. 4 ABHÄNGIGKEIT DER VERKEHRSCHARAKTERISTIKA VON DER ZAHL s DER WARTEPLÄTZE

Für s=0 haben wir das reine preemptive Verlustsystem; für $s \to \infty$ erhalten wir das reine preemptive Wartesystem.



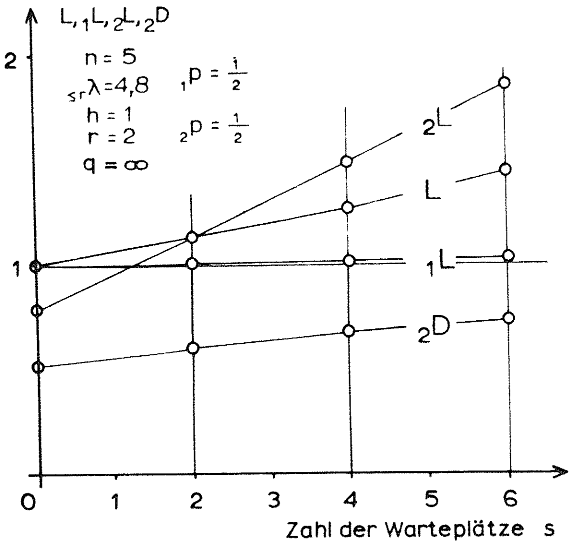
FIGUR 11: Y GESAMTBÜNDELBELASTUNG
${}_1Y$ BÜNDELBELASTUNG VON KLASSE 1
${}_2Y$ BÜNDELBELASTUNG VON KLASSE 2

Figur 11 zeigt, dass die Bündelbelastungen ausgehend vom Wert des reinen Verlustsystems mit wachsendem s ansteigen, bis sie den Wert des reinen Wartesystems für $s \to \infty$ erreichen. Im reinen Wartesystem treten keine Verluste auf, dort gilt (für $A \le n$) nach Gleichung (83) bzw. (255):

$${}_{\le r}Y = {}_{\le r}A = h \cdot {}_{\le r}\lambda$$

Mit wachsendem s strebt Y in unserem Beispiel gegen den Wert 4,8 des reinen Wartesystems. Analog streben ${}_1Y$ und ${}_2Y$ wegen ${}_1p={}_2p=\frac{1}{2}$ beide gegen $\frac{1}{2} \cdot 4{,}8 = 2{,}4$. Die Vergrösserung des Wartespeichers kommt vor allem der Klasse 2 zugute, da die Rufe von Klasse 1 schon für kleine Werte von s vom System zum grössten Teil verarbeitet werden.

Figur 12 zeigt das Verhalten der Gesamtzeiten, die die Rufe im System verbringen, in Abhängigkeit von der Zahl s der Warteplätze.



FIGUR 12: L GESAMTZEIT DER ERFOLGREICHEN RUFE IM WARTEVERLUSTSYSTEM OHNE PRIORITÄTEN

$_1L$ GESAMTZEIT EINES ERFOLGREICHEN 1-RUFES

$_2L$ GESAMTZEIT EINES ERFOLGREICHEN 2-RUFES

$_2D$ GESAMTZEIT EINES VERDRÄNGTEN 2-RUFES

Mit wachsendem s werden immer weniger Rufe direkt abgewiesen oder verdrängt. Die mittlere Länge Q der Warteschlange wird grösser und damit steigen auch die Gesamtzeiten, die ein Ruf im System verbringt. Das bestätigt Figur 12.

Wir diskutieren zunächst das Verhalten der Gesamtzeiten für s=0, also für das reine Verlustsystem. Dort treten keine Wartezeiten auf; infolgedessen sind die Gesamtzeiten gleich den Bedienungs-

zeiten. Im Verlustsystem ohne Prioritäten ist die mittlere Bedienungszeit eines erfolgreichen Rufes gleich der mittleren Belegungsdauer: L = h = 1. Dasselbe gilt für die mittlere Bedienungszeit eines erfolgreichen 1-Rufes: $_1L = h$. Dagegen sind von Klasse 2 hauptsächlich solche Rufe erfolgreich, die eine kurze Belegungsdauer haben. Rufe mit grosser Belegungsdauer werden mit grösserer Wahrscheinlichkeit unterbrochen und gehen verloren. Deshalb ist die mittlere Bedienungszeit erfolgreicher 2-Rufe kleiner als h. Im Mittel belegt ein verdrängter 2-Ruf das Bündel eine Zeit $_2D$, die wesentlich kleiner als h ist.

Wie wir schon aus Figur 11 abgelesen haben, wirkt sich die Vergrösserung des Wartespeichers hauptsächlich auf Klasse 2 aus. Das wird dadurch bestätigt, dass die mittlere Gesamtzeit eines erfolgreichen 1-Rufes mit wachsendem s nur noch unwesentlich zunimmt. Dagegen steigt die mittlere Gesamtzeit eines verdrängten 2-Rufes sehr stark mit s an: Die Zahl erfolgreicher 2-Rufe wird grösser, allerdings steigt gleichzeitig die mittlere Gesamtverweilzeit an.

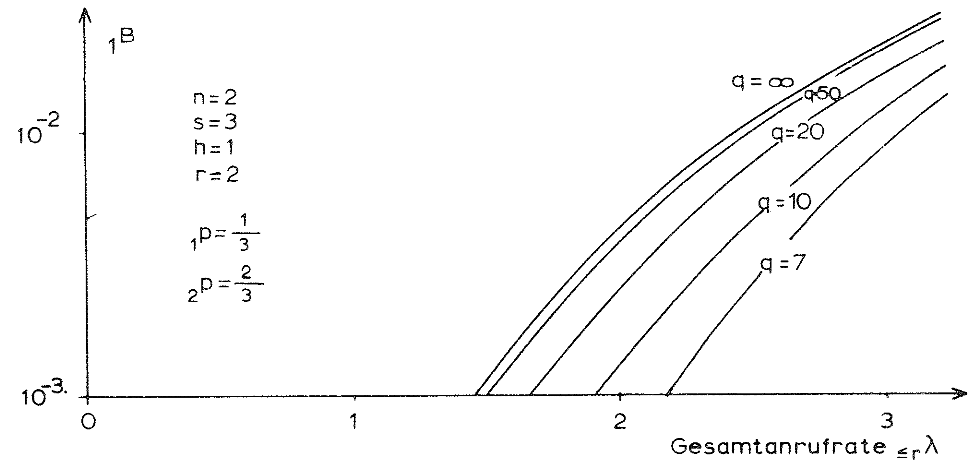
Die Zeit $_2D$, die ein verdrängter 2-Ruf im System verbringt, verhält sich analog. Für grosse s werden nur noch wenige Rufe verdrängt, allerdings verbringen diese wenigen verdrängten 2-Rufe im Mittel eine grössere Zeit im System, als die verdrängten 2-Rufe bei kleinem Wartespeicher.

VI. 5 ABHÄNGIGKEIT DER VERKEHRSCHARAKTERISTIKA VON DER ZAHL q VON QUELLEN

Bei unendlicher Quellenzahl ist der "Angebotsdruck" auf das Bedienungssystem gleichbleibend. Bei endlicher Quellenzahl dagegen ist der "Angebotsdruck" auf das Bedienungssystem von der Zahl tätiger Quellen abhängig. Die bedingte Anrufrate ist am grössten, wenn alle Quellen frei sind. Sie nimmt (linear) mit wachsender Zahl tätiger Quellen ab. Die kritischen Zustände des Bedienungssystems (alle Leitungen belegt, alle Warteplätze belegt) treten deshalb - gleiches Angebot vorausgesetzt - bei endlicher Quellenzahl weniger oft auf als bei unendlicher Quellenzahl. Diese Überlegung wird in den folgenden 3 Diagrammen bestätigt. Zum Vergleich wurde dasselbe Warteverlustsystem herangezogen, das wir für unendliche Quellenzahl unter anderem in Bild 5 und 6 diskutiert haben.

Der Vergleich verschiedener q-Werte wird für gleiches Angebot durchgeführt. Das bedeutet, dass die Anrufrate einer einzelnen freien Quelle in unserem Vergleich umso grösser ist, je kleiner die Quellenzahl q ist. Für $q \to \infty$ strebt die Anrufrate einer freien Quelle gegen 0. Die Anrufrate einer freien Quelle wird in Abhängigkeit von q so gewählt, dass die Gesamtheit aller q Quellen bei verschiedenen Werten q das gleiche Angebot produziert.

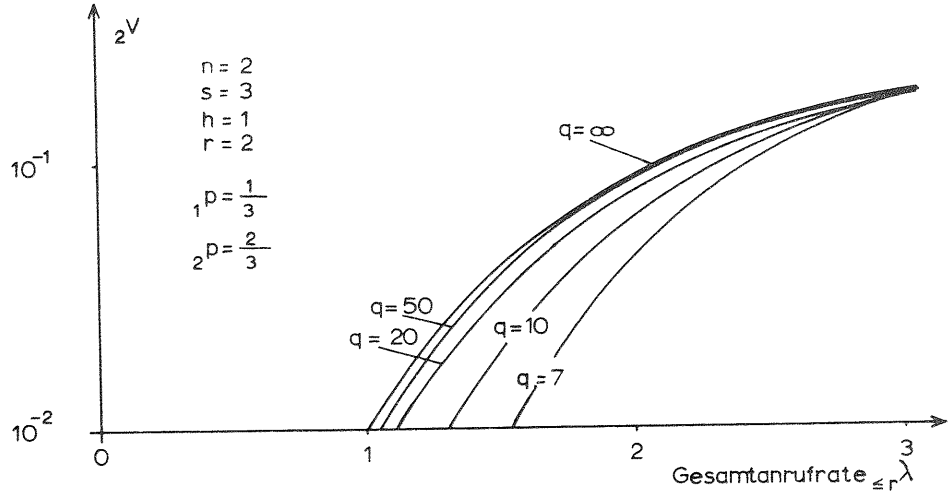
Da die bedingte Anrufrate mit wachsender Zahl tätiger Quellen abnimmt, treten die kritischen Zustände eines Bedienungssystems (alle Leitungen belegt, alle Warteplätze belegt) - gleiches Angebot vorausgesetzt - umso weniger häufig auf, je kleiner die Quellenzahl q ist. Diese Überlegungen werden im folgenden bestätigt.



FIGUR 13: ${}_1B$ VERLUSTWAHRSCHEINLICHKEIT VON KLASSE 1
q ZAHL DER QUELLEN

In Figur 13 ist die Verlustwahrscheinlichkeit ${}_1B$ von Klasse 1 für mehrere Werte von q aufgetragen in Abhängigkeit von der Gesamtanrufrate $_{\leq r}\lambda$. (In Figur 13 und 14 sind die Ordinaten logarithmisch unterteilt.)

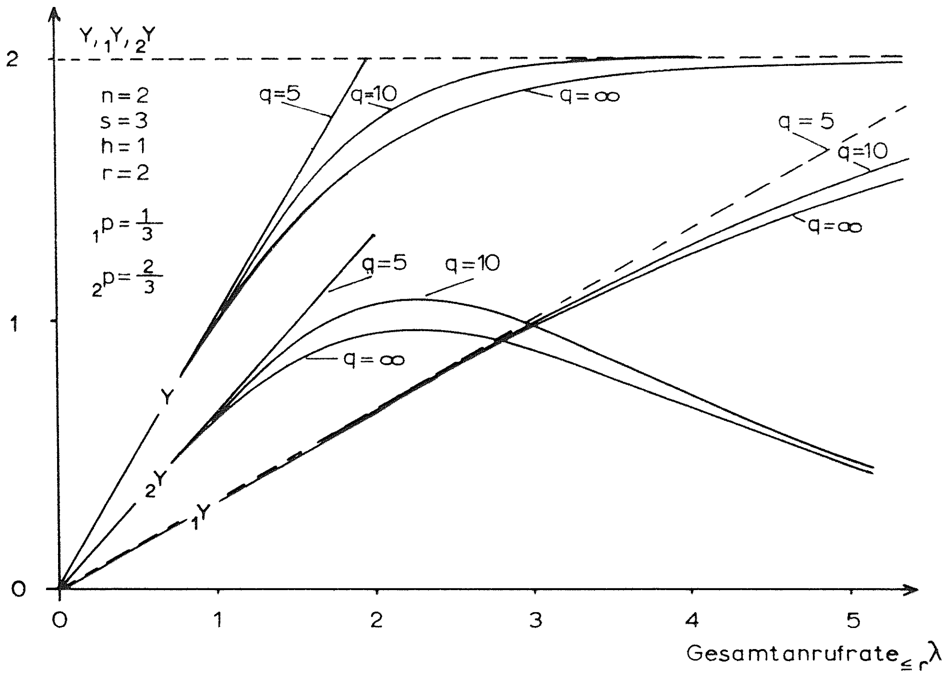
Für q=n+s=7 haben wir ein reines Wartesystem, da die Zahl q von Quellen mit der Zahl n+s von Plätzen im System übereinstimmt: Es treten keine Verluste auf. Mit wachsender Zahl q von Verkehrsquellen steigt die Verlustwahrscheinlichkeit ${}_1B$ und nähert sich für grosse q den Werten bei unendlicher Quellenzahl ($q = \infty$).



FIGUR 14: ${}_2V$ VERDRÄNGUNGSWAHRSCHEINLICHKEIT VON KLASSE 2

Ähnlich verhält sich die Verdrängungswahrscheinlichkeit ${}_2V$ von Klasse 2, wie Figur 14 zeigt.

Schliesslich diskutieren wir anhand von Figur 15 die Bündelbelastungen $Y, {}_1Y$ und ${}_2Y$ für verschiedene Werte q von Verkehrsquellen. Da die Verlustwahrscheinlichkeiten bei gleichem Angebot mit wachsendem q grösser werden, muss die Belastung mit wachsendem q abnehmen. Das bestätigt Figur 15.



FIGUR 15: Y GESAMTBÜNDELBELASTUNG
$_1Y$ BÜNDELBELASTUNG VON KLASSE 1
$_2Y$ BÜNDELBELASTUNG VON KLASSE 2

Der Verlauf der Kurven bei unendlicher Quellenzahl wurde in Figur 6 besprochen. Für den anderen Extremfall q=n+s=5 (reines Wartesystem) gilt nach Gleichung (225):

$$Y = {}_{\leq r}Y = {}_{\leq r}A = h \cdot {}_{\leq r}\lambda$$

und nach Gleichung (258):

$$_iY = h \cdot {}_ip \cdot {}_{\leq r}\lambda$$

Dieser linearen Abhängigkeit im Falle des reinen Wartesystems (q=5) entsprechen in Figur 15 die 3 Geraden für Y, $_1Y$ und $_2Y$. Die Belastungen für Werte q > n + s = 5 liegen zwischen den beiden Extremfällen q = ∞ und q = n+s, wie es in Figur 15 am Beispiel für q=10 gezeigt wird.

ANHANG 1
DIE FUNKTION o(x)

Eine beliebige Funktion ist eine Funktion o(x), wenn für sie die Grenzbeziehung gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0 \qquad \{1\}$$

Das heißt, o(x) ist eine Funktion, die für $x \to 0$ klein von höherer Ordnung als die lineare Funktion $f(x)=x$ wird, d.h. es geht für $x \to 0$ nicht nur o(x) sondern auch $\frac{o(x)}{x}$ gegen 0

Beispiele für Funktionen o(x) sind: x^2, x^k für $k > 1$, $x \cdot \sin x$.

Man sieht so fort die folgenden Rechenregeln:

Falls C eine Konstante ist gilt: $C \cdot o(x) = o(x)$ $\{2\}$

Die Linearkombination zweier Funktionen höherer Ordnung ist wieder eine Funktion höherer Ordnung: $C_1 \cdot o(x) + C_2 \cdot o(x) = o(x)$ $\{3\}$

Die Funktion f(x) sei beschränkt (zumindest in einem Intervall, das den Nullpunkt überdeckt). Dann gilt:

$$f(x) \cdot o(x) = o(x) \qquad \{4\}$$

Daraus folgt für jede Verteilungsfunktion F(x):

$$F(x) \cdot o(x) = o(x) \qquad \{5\}$$

ANHANG 2
EINIGE FORMELN AUS DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Wir gehen von Elementarereignissen ω aus.

Die Vereinigung aller Elementarereignisse ω ist das Grundereignis Ω (das "sichere Ereignis").

Die Ereignisse A,B,C,... seien Vereinigungen gewisser Elementarereignisse. Ein Ereignis A tritt genau dann ein, wenn eines der in A enthaltenen Elementarereignisses eintritt.

Jedes Ereignis A ist eine Untermenge des Grundereignisses Ω:

(In der Beziehung $\subset$ sei das Gleichheitszeichen eingeschlossen: deshalb gilt $A \subset A$): $A \subset \Omega$

Das Komplement des Ereignisses A bezeichnen wir mit $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \Omega - A$$

Die Vereinigung C zweier Ereignisse bezeichnen wir mit:

$$C = A+B$$

und den Durchschnitt D zweier Ereignisse mit:

$$D = A \cdot B$$

Zwei Ereignisse heißen disjunkt, wenn ihr Durchschnitt gleich 0 ("unmögliches Ereignis") ist.

Ein System disjunkter Ereignisse A,B,C,... heißt vollständig, wenn die Vereinigung aller Ereignisse des Systems gleich der Grundmenge Ω ist.

Für die Wahrscheinlichkeit $P\{A\}$ eines Ereignisses gilt:

$$0 \leq P\{A\} \leq 1$$

und speziell:

$$P\{\Omega\} = 1$$

$$P\{0\} = 0$$

Für die Vereinigung disjunkter Ereignisse gilt:

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} \qquad \{6\}$$

Ist B eine Untermenge von A, dann gilt:

$$P\{A+B\} = P\{A\} \qquad \{7\}$$

Für beliebige Ereignisse A und B haben wir:

$$P\{A+B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cdot B\} \qquad \{8\}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Komplements $\bar{A}$ von A ist:

$$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\} \qquad \{9\}$$

Zwei Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn ihre Verbundwahrscheinlichkeit gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ist:

$$P\{A \cdot B\} = P\{A\} \cdot P\{B\} \qquad \{10\}$$

Ist B eine Untermenge von A, dann gilt für die Verbundwahrscheinlichkeit:

$$P\{A \cdot B\} = P\{B\} \qquad \{11\}$$

Für beliebige, abhängige Ereignisse A und B haben wir für die Verbundwahrscheinlichkeit:

$$P\{A \cdot B\} = P\{B\} \cdot P\{A|B\} \qquad \{12\}$$

Dadurch wird die bedingte Wahrscheinlichkeit $P\{A|B\}$ definiert. Für die bedingte Wahrscheinlichkeit des Komplements $\bar{A}$ von A gilt:

$$P\{\bar{A}|B\} = 1 - P\{A|B\} \qquad \{13\}$$

Bilden die Ereignisse A_i ein vollständiges System, dann gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B:

$$P\{B\} = \sum_i P\{B|A_i\}\ P\{A_i\} \qquad \{14\}$$

X, X_i, Y u.s.w. seien Zufallsvariable. Eine Zufallsvariable heißt diskret, wenn sie nur endlich viele oder abzählbar viele Werte annimmt. Wir definieren für diskrete Zufallsvariable X:

$$P\{X = j\} = P_j$$

Wir sehen die Wahrscheinlichkeiten $P\{X>x\}$ als Funktion von x an:

$$F(x) = P\{X>x\} \qquad \{15\}$$

Die Verteilungsfunktion $P\{X\le x\}$ ist dann:

$$P\{X\le x\} = 1 - F(x) \qquad \{16\}$$

In der gesamten Arbeit treten nur nicht-negative Zufallsvariable auf. Wir setzen deshalb für alle Zufallsvariablen X voraus:

$$P\{X\le x\} = 0 \quad \text{für } x<0 \qquad \{17\}$$

Das heißt: $F(x) = 1 \quad \text{für } x<0 \qquad \{18\}$

Außerdem gilt: $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0 \qquad \{19\}$

Der Erwartungswert $E(X)$ einer diskreten Zufallsvariablen X ist:

$$E(X) = \sum_j j\ P_j$$

Für den Erwartungswert $E(X)$ einer nicht-negativen Zufallsvariablen gilt:

$$E(X) = \int_0^\infty F(x)\ dx \qquad \{20\}$$

Existiert die Ableitung der Funktion $F(x)$ für $x>0$, dann hat die Zufallsvariable X eine Dichte $f(x)$. Es gilt:

$$f\ (x) = -\ F'(x) \qquad \{21\}$$

Ist $F'(x)$ für $x>0$ integrierbar, dann gilt:

$$\int_0^\infty F'(x)\ dx = -\ F(0) \qquad \{22\}$$

X und Y seien zwei unabhängige Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktion der Summe:

$$Z = X + Y$$

ergibt sich als Faltung der beiden Verteilungsfunktionen $P\{X\le x\}$ und $P\{Y\le y\}$:

$$P\{Z\le z\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{X\le z-x\} \cdot dP\{Y\le y\} \qquad \{23\}$$

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ bis X_k seien unabhängig voneinander um den gleichen Erwartungswert $\frac{1}{\mu}$ negativ-exponentiell verteilt:

$$P\{X_i>X\} = e^{-\mu X} \quad \text{für } i = 1,2,\ldots,k$$

Für ihre Summe $\quad Z_k = \sum_{i=1}^{k-1} X_i$

gilt dann: $\quad P\{Z_k>z\} = e^{-\mu z} \cdot \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(\mu\cdot z)^\nu}{\nu!} \qquad \{24\}$

ANHANG 3
DIE GRUNDFUNKTION $\phi_{\nu,\kappa}$

Die Funktion $\phi_{\nu,\kappa}$ ist eine neue Grundfunktion für Warteverlustsysteme bei unendlicher Quellenzahl. Sie ist eine gebrochen rationale Funktion des Angebots A:

$$\phi_{\nu,\kappa} = \phi_{\nu,\kappa}(A) \qquad \{25\}$$

Setzen wir statt des Angebotes A das Angebot ${}_{\le i}A$ der Klasse $\le i$ ein, so versehen wir die Grundfunktion $\phi_{\nu,\kappa}$ mit einem "Vorne-Links-Index":

$${}_{\le i}\phi_{\nu,\kappa} = \phi_{\nu,\kappa}({}_{\le i}A) \qquad \{26\}$$

Die Definitionen (22), (48) und (50) benötigen wir:

$$\mu_j = \begin{cases} \frac{j}{h} & \text{für } j = 0,1,\ldots,n \\ \frac{n}{h} & \text{für } j = n+1,\ldots,n+s \end{cases} \qquad \{27\}$$

$$A = h\cdot\lambda \qquad \{28\}$$

$$\beta_m = \frac{\mu_m}{\lambda} \qquad \{29\}$$

Als Randbedingungen definieren wir:

$$\phi_{\nu,\nu} = 1 \qquad \{30\}$$

$$\phi_{\nu,\kappa} = 0 \quad \text{für } \kappa<\nu \text{ und } \nu<0 \qquad \{31\}$$

Wir definieren $\phi_{\nu,\varkappa}$ zunächst als Determinante:

$$\phi_{\nu,\varkappa} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \beta_{\nu+1} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \beta_{\nu+2} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{\varkappa-1} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{\varkappa} \end{bmatrix} \qquad \{32\}$$

Entwickeln wir die Determinante {32} nach der Spalte σ, dann erhalten wir die grundlegende Beziehung:

$$\phi_{\nu,\varkappa} = \phi_{\sigma,\varkappa} + \phi_{\nu,\sigma-1} \prod_{\rho=\sigma}^{\varkappa} \beta_\rho \qquad \{33\}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Sonderfälle:

$$\phi_{\nu,\varkappa} = \phi_{\nu+1,\varkappa} + \prod_{\rho=\nu+1}^{\varkappa} \beta_\rho \qquad \{34\}$$

$$\phi_{\nu,\varkappa} = 1 + \beta_\varkappa \, \phi_{\nu,\varkappa-1} \qquad \{35\}$$

Mit $\{35\}$ haben wir eine Rekursionsformel aus der man die $\phi_{\nu,\varkappa}$ ausgehend von $\phi_{\nu,\nu} = 1$ berechnen kann.
Mit Induktionsbeweis bestätigt man die folgende explizite Darstellung für die Grundfunktion $\phi_{\nu,\varkappa}$:

$$\phi_{\nu,\varkappa} = \sum_{\sigma=\nu}^{\varkappa} \prod_{\rho=\sigma+1}^{\varkappa} \beta_\rho \qquad \{36\}$$

Wir verabreden die Schreibweise:

$$\phi_{0,\varkappa} = \phi_\varkappa \qquad \{37\}$$

Ist $\nu \geq n$, dann sind alle auftretenden $\beta_\rho = \beta_n$ und es folgt aus $\{36\}$:

$$\phi_{\nu,\varkappa} = \sum_{\sigma=\nu}^{\varkappa} \beta_n^{\varkappa-\sigma} = \sum_{\sigma=0}^{\varkappa-\nu} \beta_n^{\sigma}$$

Die Grundfunktion $\phi_{\nu,\varkappa}$ hängt für $\nu \geq n$ nur von der Differenz $\varkappa-\nu$ ab; deshalb führen wir eine zweite (spezielle) Grundfunktion ein:

$$\phi_{\nu,\nu+\rho} = \Psi_\rho = \sum_{\sigma=0}^{\rho} \beta_n^\sigma \qquad \{38\}$$

Aus dem bisher Gesagten leitet man leicht die folgenden Formeln ab:

$$\phi_{\nu,\varkappa} = \frac{\varkappa!}{A^\varkappa} \sum_{\sigma=\nu}^{\varkappa} \frac{A^\sigma}{\sigma!} \qquad \varkappa \leq n \qquad \{39\}$$

$$\Psi_\rho = \begin{cases} \dfrac{1}{A^\rho} \dfrac{n^{\rho+1} - A^{\rho+1}}{n-A} = \dfrac{A}{n-A} \left(\dfrac{n^{\rho+1}}{A^{\rho+1}} - 1 \right) & A \neq n \\ \rho + 1 & A = n \end{cases} \qquad \{40\}$$

$$\phi_{\nu+1,\varkappa} \leq \phi_{\nu,\varkappa} \qquad . \qquad \phi_{\nu,\varkappa} \leq \phi_{\nu,\varkappa+1}$$

$$\Psi_\rho = 1 + \frac{n}{A} \Psi_{\rho-1} \qquad 1 \leq \rho \leq \varkappa-n \qquad \{41\}$$

$$\phi_{n+s} = \Psi_{n+s-\sigma-1} + \left(\frac{n}{A}\right)^{n+s-\sigma} \phi_\sigma \qquad n-1 \leq \sigma < n+s \qquad \{42\}$$

$$\phi_{\nu,\varkappa} = \Psi_{\varkappa-n-1} + \left(\frac{n}{A}\right)^{\varkappa-n} \phi_{\nu,n} \qquad \nu \leq n \leq \varkappa \qquad \{43\}$$

$$\Psi_s = \Psi_{k-1} + \left(\frac{n}{A}\right)^{k} \Psi_{s-k} \qquad 0 < k \leq s \qquad \{44\}$$

ANHANG 4

DAS CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNGSSYSTEM DES PREEMPTIVEN WARTEVERLUSTSYSTEMS BEI UNENDLICHER QUELLENZAHL

Die folgenden Formeln werden wir im Verlaufe der Herleitung immer wieder benötigen:

$$\sum_{\nu=0}^{s} x^\nu = \frac{1-x^{s-1}}{1-x} \qquad \{45\}$$

$$\sum_{\nu=1}^{s} \nu = \frac{1}{2} s(s+1) \qquad \{46\}$$

$$\sum_{\nu=0}^{s} \nu x^{\nu-1} = \frac{1-x^{s+1}}{(1-x)^2} - (s+1)\frac{x^s}{1-x} = \frac{1-x^s}{(1-x)^2} - s\frac{x^s}{1-x} \qquad \{47\}$$

Einige Formeln über die Vertauschung von Summen:

$$\sum_{k=1}^{n} X_{k-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} Y_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} Y_\nu \sum_{k=\nu}^{n-1} X_k = \sum_{\nu=1}^{n-1} Y_\nu \sum_{k=0}^{n-\nu-1} X_{k+\nu} \qquad \{48\}$$

$$\sum_{k=1}^{n} X_{k-1} \sum_{\nu=k}^{n} Y_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu \sum_{k=0}^{\nu-1} X_k = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu \sum_{k=1}^{\nu} X_{k-1} \qquad \{49\}$$

$$\sum_{k=1}^{s} X_{k-1} \sum_{\nu=n+k}^{n+s} Y_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n+s} Y_\nu \sum_{k=0}^{\nu-n-1} X_k = \sum_{\nu=n+1}^{n+s} Y_\nu \sum_{k=1}^{\nu-n} X_{k-1} \qquad \{50\}$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} X_{k-1} \sum_{\sigma=0}^{k-1} Y_\nu = \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} Y_\sigma \sum_{k=\sigma}^{\nu-1} X_k = \sum_{\sigma=0}^{\nu-1} Y_\sigma \sum_{k=0}^{\nu-\sigma-1} X_{k+\sigma} \qquad \{51\}$$

$$\sum_{k=1}^{s} X_{k-1} \sum_{\nu=n+1}^{n+k-1} Y_\nu = \sum_{\nu=n+1}^{n+s-1} Y_\nu \sum_{k=\nu-n}^{s-1} X_k = \sum_{\nu=n+1}^{n+s-1} Y_\nu \sum_{k=\nu-n-1}^{s} X_{k-1} \qquad \{52\}$$

Das charakteristische Gleichungssystem des preemptiven Warteverlustsystems lautet bei unendlicher Quellenzahl:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (\mu_1 + \omega i \lambda)\, X_1 - \omega i \lambda \, X_2 & = & i C_1 \\ -\mu_{k-1} X_{k-1} + (\mu_k + \omega i \lambda)\, X_k - \omega i \lambda \, X_{k+1} & = & i C_k \\ -\mu_{n+s-1} X_{n+s-1} + (\mu_{n+s} + \omega i \lambda)\, X_{n+s} & = & i C_{n+s} \end{array}} \qquad \{53\}$$

Dabei läuft k von k=2,3,... bis (n+s-1).

Addieren wir diese Gleichungen von 1 bis zu einem beliebigen Wert k auf, dann erhalten wir ein vereinfachtes Gleichungssystem. Dabei benutzen wir {29} und führen die folgende Abkürzung ein:

$$ {}_{i}C_{k} = \frac{1}{{}_{<i}\lambda} \sum_{\nu=1}^{k} {}_{i}C_{\nu} \qquad \{54\} $$

Das neue Gleichungssystem lautet:

$$ \begin{aligned} X_1 &+ {}_{<i}\beta_k \cdot X_k - X_{k+1} = {}_{i}C_k \qquad k = 1,2,\dots,n+s-1 \\ X_1 &+ {}_{<i}\beta_{n+s} \cdot X_{n+s} = {}_{i}C_{n+s} \end{aligned} \qquad \{55\} $$

Dieses Gleichungssystem lösen wir nach der Regel von CRAMER. Deshalb berechnen wir zunächst die Systemdeterminante:

$$ \begin{vmatrix} 1+{}_{<i}\beta_1 & -1 & & 0 & 0 \\ 1 & {}_{<i}\beta_2 & & 0 & 0 \\ 1 & & {}_{<i}\beta_3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & & {}_{<i}\beta_{n+s-1} & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & {}_{<i}\beta_{n+s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & {}_{<i}\beta_1 & -1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & {}_{<i}\beta_2 & -1 & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & {}_{<i}\beta_3 & & \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & & {}_{<i}\beta_{n+s-1} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & & & {}_{<i}\beta_{n+s} \end{vmatrix} = {}_{<i}\phi_{n+s} $$

Die Systemdeterminante des Gleichungssystems {55} ist gleich der Grundfunktion ${}_{<i}\phi_{n+s}$ gemäß Definition {32}. Um diese Oberein - stimmung zu zeigen, addiert man in der Determinante ${}_{<i}\phi_{n+s}$ die 1-te Spalte zur 2-ten Spalte hinzu und entwickelt dann nach der 1-ten Zeile.

Um nach der Regel von CRAMER die Unbekannte X_k zu berechnen, ersetzt man in der Systemdeterminante die k-te Spalte durch die "rechte Seite" des Gleichungssystems und dividiert diese neue Determinante durch die Systemdeterminante. Damit erhält man die folgende Lösung:

$$ {}_{<i}\phi_{n+s}\, X_k = \begin{vmatrix} 1+{}_{<i}\beta_1 & -1 & 0 & & {}_{i}C_1 & & 0 \\ 1 & {}_{<i}\beta_2 & -1 & & {}_{i}C_2 & & 0 \\ 1 & & {}_{<i}\beta_3 & & {}_{i}C_3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & {}_{<i}\beta_{k-1} & {}_{i}C_{k-1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & {}_{i}C_k & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & {}_{i}C_{k+1} & {}_{<i}\beta_{k+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & & & & {}_{<i}\beta_{n+s-1} \quad -1 \\ 1 & 0 & \dots & & & & 0 \quad {}_{<i}\beta_{n+s} \end{vmatrix} \qquad \{56\} $$

Entwickelt man diese Determinante nach der k-ten Spalte, dann ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems {55}:

$$ X_k = \frac{1}{{}_{<i}\phi_{n+s}} \left\{ {}_{<i}\phi_{k-1} \sum_{\nu=k}^{n+s} {}_{i}C_{\nu} \prod_{\rho=\nu+1}^{n+s} {}_{<i}\beta_{\rho} - {}_{<i}\phi_{k,n+s} \sum_{\nu=1}^{k-1} {}_{i}C_{\nu} \prod_{\rho=\nu+1}^{n+s} {}_{<i}\beta_{\rho} \right\} \qquad \{57\} $$

Um die Lösung des Gleichungssystems {53} in Abhängigkeit von der ursprünglichen "rechten Seite" ${}_{i}C_{k}$ zu erhalten, setzen wir {54} ein. Nach einer Reihe von Umformungen erhält man als Lösung des charakteristischen Gleichungssystems bei unendlicher Quellenzahl die folgende Formel:

$$ \boxed{ X_k = \frac{1}{{}_{<i}\lambda\, {}_{<i}\phi_{n+s}} \left\{ {}_{<i}\phi_{k,n+s} \sum_{\nu=1}^{k-1} {}_{i}C_{\nu}\, {}_{<i}\phi_{\nu-1} \prod_{\rho=\nu}^{k-1} {}_{<i}\beta_{\rho} + {}_{<i}\phi_{k-1} \sum_{\nu=k}^{n+s} {}_{i}C_{\nu}\, {}_{<i}\phi_{\nu,n+s} \right. } \qquad \{58\} $$

Der Index k der Kenngröße X_k bezieht sich auf den Startplatz k eines i-Rufes. Uns interessiert die über alle Startplätze gemittelte Kenngröße X:

$$ X = \sum_{k=1}^{n+s} {}_{i}F_{k}\, X_k \qquad \{59\} $$

Die Wahrscheinlichkeit ${}_{i}F_{k}$, daß ein i-Ruf auf Platz k startet, ergibt sich aus [334] mit [328]:

$$ {}_{i}F_{k} = \frac{{}_{\le i}A^{k-1}}{(k-1)!}\, {}_{\le i}P_0 \qquad k = 1,2,\dots,n $$

$$ {}_{i}F_{n+k} = \frac{{}_{\le i}A^{k-1}}{n^{k-1}}\, {}_{\le i}P_n \qquad k = 1,2,\dots,s $$

Nach Gleichung {327} haben wir:

$$ {}_{\le i}P_0 = \frac{n^s\, n!}{{}_{\le i}A^{n+s}} \frac{1}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} \qquad\qquad {}_{\le i}P_n = \frac{n^s}{{}_{\le i}A^s} \frac{1}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} $$

Setzt man die Lösung {58} des charakteristischen Gleichungssystems in {59} ein, so erhält man zunächst einen recht unübersichtlichen Ausdruck, der sich aber nach umfangreicher Zwischenrechnung auf die folgende einfache Form bringen läßt:

$$\boxed{{}_i\lambda \cdot {}_i X = \sum_{\nu=1}^{n+s} {}_i C_\nu \left\{ \frac{{}_{\le i}\phi_{\nu,n+s}}{{}_{\le i}\phi_{n+s}} - \frac{{}_{<i}\phi_{\nu,n+s}}{{}_{<i}\phi_{n+s}} \right\}} \qquad \{60\}$$

Dieses Ergebnis ist grundlegend für die Behandlung des preemptiven Warteverlustsystems. Es ermöglicht viele geschlossene Lösungen und führt zu einleuchtenden physikalischen Interpretationen der Ergebnisse.

Bei der Berechnung der Unterbrechungswahrscheinlichkeiten ${}_iU_k$ in in Abschnitt V.10 tritt das folgende Gleichungssystem auf:

$$\begin{aligned}
(\mu_1 + {}_{<i}\lambda)\, X_1 - {}_{<i}\lambda\, X_2 &= {}_i C_1 \\
-\mu_{\nu-1} X_{k-1} + (\mu_k + {}_{<i}\lambda)\, X_k - {}_{<i}\lambda\, X_{k+1} &= {}_i C_k \\
-\mu_{n-1} X_{n-1} + (\mu_n + {}_{<i}\lambda)\, X_n &= {}_i C_n \\
-\mu_{n+s-1} X_{n+s-1} + (\mu_n + {}_{<i}\lambda)\, X_{n+s} &= {}_i C_{n+s}
\end{aligned} \qquad \{61\}$$

Dabei läuft k von 1,2,.. bis (n-1) und von n+1,... bis n+s. Dieses Gleichungssystem kann mit denselben Methoden gelöst werden wie das charakteristische Gleichungssystem {53}. Seine allgemeine Lösung lautet:

Für k=1,2,... bis n:

$$X_k = \frac{1}{{}_{<i}\lambda \cdot {}_{<i}\phi_n} \left\{ {}_{<i}\phi_{k,n} \sum_{\nu=1}^{k-1} {}_i C_\nu\, {}_{<i}\phi_{\nu-1} \prod_{\rho=\nu}^{k-1} {}_{<i}\beta_\rho + {}_{<i}\phi_{k-1} \sum_{\nu=k}^{n} {}_i C_\nu\, {}_{<i}\phi_{\nu,n} \right. \qquad \{62\}$$

Für k=1,2,... bis s:

$$\begin{aligned}
X_k = {} & \frac{{}_{<i}\beta_n^{\,k}\, {}_{<i}\psi_{s-k}}{\psi_s} \frac{1}{{}_{<i}\lambda\, {}_{<i}\phi_n} \sum_{\kappa=1}^{n} {}_i C_\kappa\, {}_{<i}\phi_{\kappa-1} \prod_{\rho=\kappa}^{n-1} {}_{<i}\beta_\rho \; + \\
& + \frac{1}{{}_{<i}\lambda\, {}_{<i}\psi_s} \left\{ {}_{<i}\psi_{s-k} \sum_{\kappa=1}^{k-1} {}_i C_{n+\kappa}\, {}_{<i}\beta_n^{\,k-\kappa}\, {}_{<i}\psi_{\kappa-1} + {}_{<i}\psi_{k-1} \sum_{\kappa=k}^{s} {}_i C_{n+\kappa}\, {}_{<i}\psi_{s-\kappa} \right\}
\end{aligned} \qquad \{63\}$$

ANHANG 5
DAS CHARAKTERISTISCHE GLEICHUNGSSYSTEM DES PREEMPTIVEN WARTEVERLUSTSYSTEMS BEI ENDLICHER QUELLENZAHL

Das charakteristische Gleichungssystem bei endlicher Quellenzahl wurde in Abschnitt IV.6 aufgestellt. Es taucht - zum Teil in etwas abgewandelter Form - im Verlauf des Kapitels IV immer wieder auf. Das charakteristische Gleichungssystem ist ein lineares, inhomogenes Gleichungssystem mit $\frac{1}{2}(n+s+1)(n+s+2)-1$ Unbekannten. Die Zahl der Unbekannten wächst quadratisch mit(n+s).
Im folgenden werden zwei Methoden zur numerischen Berechnung vorgeschlagen, die es beide erlauben, das Gleichungssystem auch für große Werte von (n+s) zu lösen.

(1) REDUKTIONSALGORITHMUS

Die Struktur des charakteristischen Gleichungssystems verdeutlichen wir uns an Figur 2 in Abschnitt IV.3. Dort fassen wir jetzt jeden Punkt als Gleichung auf. Der Punkt bzw. die Gleichung (k,j) stellt das stationäre Gleichgewicht für den Zustand (k,j) dar. In dieser Gleichung (k,j) kommen neben der Wahrscheinlichkeit $P_{k,j}$ die Wahrscheinlichkeiten $P_{k-1,j-1}$, $P_{k,j-1}$, $P_{k,j+1}$ und $P_{k+1,j+1}$ vor. Wir fassen diese Gleichung (k,j) als Bestimmungsgleichung für die Wahrscheinlichkeit $P_{k+1,j+1}$ auf.
Um zu einer rekursiven Berechnung der Wahrscheinlichkeiten zu kommen, beginnen wir bei den Gleichungen der Zeile k=0. Aus diesen berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten $P_{1,j}$ als (lineare) Funktionen der $P_{o,j}$. Im 2-ten Schritt berechnen wir mit Hilfe der Gleichungen aus Zeile 1 die Wahrscheinlichkeiten $P_{2,j}$. Setzen wir jetzt das Ergebnis des 1-ten Schrittes ein, dann haben wir die Wahrscheinlichkeiten $P_{2,j}$ dargestellt als Linearkombination der $P_{o,j}$. Dieses Verfahren setzen wir Zeile für Zeile fort bis wir alle Wahrscheinlichkeiten $P_{k,j}$ als Linearkombination aus den Wahrscheinlichkeiten $P_{o,j}$ berechnen können.
Die Gleichungen des rechten Randes haben wir in den beschriebenen Schritten noch nicht benutzt. Setzen wir die Ergebnisse unseres rekursiven Berechnungsverfahrens in die (n+s+1) Gleichungen des rechten Randes ein, dann erhalten wir ein Gleichungssystem zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P_{o,j}$. Setzen wir das aus Glei-

chung (198) bekannte $P_{o,o}$ ein, dann ergibt sich - nachdem eine beliebige der (n+s+1) Gleichungen weggelassen wurde - ein lineares, inhomogenes Gleichungssystem für die Wahrscheinlichkeiten $P_{o,j}$ mit j=1,2,... bis (n+s).

Die Lösung des charakteristischen Gleichungssystems bei endlicher Quellenzahl wurde damit auf die Lösung eines linearen, inhomogenen Gleichungssystems mit (n+s) Unbekannten zurückgeführt. Damit steht der numerischen Berechnung von Warteverlustsystemen mit großer Zahl s von Speicherplätzen auch bei endlicher Quellenzahl keine Schwierigkeit im Wege.

Nachdem die Wahrscheinlichkeiten $P_{o,j}$ berechnet sind, können die übrigen Wahrscheinlichkeiten $P_{k,j}$ nach dem obigen Verfahren durch Linearkombination aus den $P_{o,j}$ berechnet werden.

(2) BANDMATRIXVERFAHREN

In der Systemmatrix des Gleichungssystems (206) (das mit Hilfe des schon bekannten Wertes $P_{o,o}$ inhomogenisiert wurde) treten zwar in jeder Zeile nur maximal fünf von Null verschiedene Terme auf; diese von Null verschiedenen Terme sind aber völlig unsymmetrisch angeordnet. Durch einen Trick erweitern wir dieses Gleichungssystem zu einem sehr einfach aufgebauten System.

Zu den Gleichungen (k,j) für k=0,1,...,j und j=1,2,...n+s fügen wir für j=1,2,...,n+s und k=j+1,j+2,...,n+s die "Gleichungen"

$$P_{k,j} = 0$$

hinzu. Wir ordnen jetzt a l l e Unbekannten zunächst nach wachsendem j und innerhalb einer Gruppe mit gleichem j nach wachsendem k an:

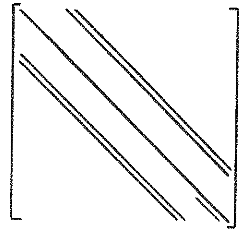
$P_{o,1}\ P_{1,1}\ \cdots\ P_{n+s,1}\ P_{o,2}\ \cdots\ P_{n+s,2}\ \cdots\ P_{o,n+s}\ \cdots\ P_{n+s,n+s}$

Die Systemmatrix dieses neuen Gleichungssystems ist eine Bandmatrix, in welcher nur die folgenden Positionen von Null verschieden sein können:

Die Hauptdiagonale und in der Gruppe j=n+s die untere Nebendiagonale. Außerdem vier weitere, symmetrisch liegende Diagonalen, die von der Hauptdiagonalen (n+s) bzw. (n+s+1) Stellen Abstand haben.

Diese Systemmatrix hat die folgende symbolische Gestalt:

SYSTEMMATRIX:



Wegen der oben eingeführten "sinnlosen" Unbekannten sind viele Terme der 4 Außendiagonalen gleich Null.

Für die Berechnung der Ergebnisse durch Rechenprogramme wurde der Methode (2) zur numerischen Auflösung des charakteristischen Gleichungssystems der Vorzug gegeben, da sich hier Bibliotheksprogramme des Rechenzentrums der Universität Stuttgart sehr vorteilhaft verwenden lassen.

ABKÜRZUNGEN

Im Allgemeinen sind die Abkürzungen in jenen Kapiteln erläutert, in denen sie auftreten. Hier werden nur jene Abkürzungen aufgeführt, die in der Arbeit laufend gebraucht werden und auf deren Bedeutung nicht jedesmal hingewiesen wird.

n	Zahl der Bedienungseinheiten
s	Zahl der Warteplätze
r	Zahl der Prioritätsklassen
${}_{i}p$	Anteil der Klasse i am Verkehrsangebot
h	mittlere Belegungsdauer
λ_j	bedingte Anrufrate, wenn j Rufe im System
λ	(mittlere) Anrufrate
μ_j	bedingte Enderate, wenn j Rufe im System
μ	(mittlere) Enderate
A	Angebot
P_j	Wahrscheinlichkeit, daß sich j Rufe im System befinden
${}_{\le i}P_{k,j}$	Wahrscheinlichkeit, daß sich j Rufe im System befinden, und davon k der Klasse $\le i$ angehören
${}_{\le i}P_{k}$	Wahrscheinlichkeit, daß sich k Rufe der Klasse $\le i$ im System befinden

Die Bedeutung der Grundfunktion $\phi_{\nu,\mu}$ bzw. Ψ_{ρ} wird in den Abschnitten II.2 und V.1 erläutert.

Im preemptiven Warteverlustsystem wird durch einen "Unten-Links-Index" gekennzeichnet, auf welche Prioritätsklasse sich eine Verkehrsgröße bezieht (Vergleiche Abschnitt I.4).

Die Gleichungen der Arbeit werden folgendermaßen gekennzeichnet:

[ ] Gleichungen, die nur bei unendlicher Quellenzahl gültig sind
( ) Gleichungen, die bei endlicher und unendlicher Quellenzahl gültig sind
{ } Gleichungen des Anhangs

LITERATUR

/1/ LOTZE, A.: Die Theorie des Fernsprechverkehrs
Vorlesung an der Universität Stuttgart

/2/ WAGNER, W.: Über ein kombiniertes Warte-Verlust-System mit Prioritäten
Dissertation, Universität Stuttgart, 1968

/3/ STÖRMER, H. u.a.: Verkehrstheorie
R. Oldenbourg Verlag, 1966

/4/ FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and Its Applications
John Wiley & Sons, Inc., 1966

/5/ PRABHU, N. U.: Stochastic Processes
The Macmillan Company, 1965

Weitere Literatur über Warte- und Verlustsysteme findet sich in /2/ und /3/.