Sonderdruck
aus
ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Die Verlustwahrscheinlichkeit einstufiger Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik mit Extern- und Internverkehr

von DIETRICH BOTSCH *

Mitteilung aus dem Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung der Universität Stuttgart

(A.E.Ü. **22** [1968], Heft 3, 127–132; eingegangen am 11. August 1967)

DK 621.395.12

In der Fernsprechverkehrstheorie ist eine Anzahl von Verfahren bekannt, um Koppelanordnungen verschiedener Art zu berechnen. Mit idealisierenden Annahmen über die Art des angebotenen Verkehrsflusses liefern solche Verfahren bei einfachen Anordnungen (wie z. B. Abnehmerbündel mit vollkommener Erreichbarkeit) exakte Ergebnisse und bei komplizierteren Anordnungen (wie z. B. Abnehmerbündel mit unvollkommener Erreichbarkeit oder mehrstufige Linksysteme) für die Praxis ausreichend genaue Näherungslösungen.

In der vorliegenden Arbeit wird für einstufige Koppelanordnungen ein Berechnungsverfahren erweitert für den Fall, daß außer dem Normalverkehr, der die Koppelanordnung in nur einer Richtung durchläuft, eine zweite Art von Verkehr auftritt, der die Anordnung zweimal durchläuft. Für diesen gemischten Verkehr werden zunächst die Zustandswahrscheinlichkeiten für die Gleichzeitigkeitsbelegung im Abnehmerbündel errechnet. Aus den Zustandswahrscheinlichkeiten können dann die gesuchten Verlustwahrscheinlichkeiten gewonnen werden. Es werden Formeln für vollkommene und unvollkommene Erreichbarkeit, endliche und unendliche Quellenzahl angegeben.

Loss Probability of Single-Stage Switching Arrangements Carrying External and Internal Traffic

A number of methods is known to calculate switching arrangements of different types. These methods yield exact results for simple arrangements (such as trunk groups with full availability) and yield approximate results of sufficient accuracy for more sophisticated arrangements (such as trunk groups with limited availability or multi-stage link systems).

This publication will extend a method for single-stage arrangements, so that the special case of mixed external and internal traffic is included. External traffic is traffic, that flows only once through the arrangement, internal traffic flows twice through the arrangement. At first, the probabilities of state for the simultaneous seizing in the trunk group are derived. From the probabilities of state, the desired loss probabilities can then be found. Formulas are given for full and limited availability, finite and infinite number of sources.

Einleitung

In allen üblichen Berechnungsverfahren der Fernsprechverkehrstheorie wird angenommen, daß jede Verbindung pro Stufe einer Koppelanordnung nur *ein* Schaltglied und *eine* Leitung belegt. Diese Annahme ist richtig, wenn der Verkehr nur in einer Richtung durch eine Koppelanordnung läuft (sogenannter Externverkehr).

Es gibt jedoch zahlreiche Fälle der Praxis, in denen eine Verbindung *zwei* Schaltglieder und *zwei* Leitungen pro Stufe einer Koppelanordnung belegt. Bei solchen Anordnungen läuft der Verkehr zweimal zumindest durch einen Teil dieser Anordnung (sogenannter Internverkehr), siehe Bild 1.

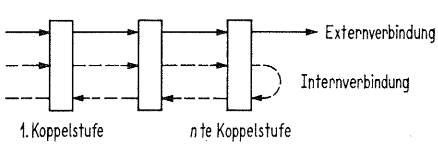

Bild 1. Zur Definition von Extern- und Internverkehr.

Beispiele für das gleichzeitige Vorhandensein von Extern- und Internverkehr sind in der herkömmlichen Technik die Wählsternschalter und in modernen elektronisch gesteuerten Systemen diejenigen Teilnehmerwahlstufen und/oder Gruppenwahlstufen, die wechselseitig betrieben werden. Außerdem können die gleichen Probleme auch bei künftigen Vermittlungssystemen nach dem Zeitmultiplexverfahren auftreten.

In dieser Arbeit wird ein Berechnungsverfahren angegeben, das die besonderen statistischen Eigenschaften des Internverkehrs bei einstufigen Koppelanordnungen berücksichtigt. Aus der Annahme stationären Verkehrs erhält man Zustandswahrscheinlichkeiten für die Gleichzeitigkeitsbelegungen im Abnehmerleitungsbündel bei beliebigem Verhältnis von Intern- zu Externverkehr. Die Zustandswahrscheinlichkeiten ermöglichen dann die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeiten. Aus dem allgemeinen Fall endlicher Quellenzahl und unvollkommener Erreichbarkeit können die Sonderfälle unendlicher Quellenzahl und vollkommener Erreichbarkeit abgeleitet werden. Die altbekannten Lösungen für Externverkehr sind gleichfalls als Sonderfall enthalten.

1. Voraussetzungen

Zur Beschreibung des Verkehrsablaufes muß zunächst eine Anzahl von Voraussetzungen getroffen werden.

Der Verkehr sei „Zufallsverkehr zweiter Art". Für den Fall reinen Externverkehrs bedeutet dies:

* Dr. D. BOTSCH, 8 München 49, Forstenrieder Allee 6.

Es ist jetzt also $\mu(x)\mu(x+1)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Internanruf, der während des Zustandes x einfällt, insgesamt noch zwei freie Leitungen findet: eine Leitung intern gehend und eine Leitung intern kommend.

Damit wird die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Übergang aus dem Zustand x in den Zustand $x+2$ durch eine Internverbindung:

$$w_{1\mathrm{i}} = \alpha_\mathrm{i}(q-x)\,p(x)\,\mu(x)\,\mu(x+1)\,. \tag{3}$$

2.2. *Ende von Belegungen*

Es sei ε die einheitliche Wahrscheinlichkeitsdichte für das Enden einer Verbindung, gleichgültig ob Extern- oder Internverbindung. Diese Annahme bedeutet, daß Extern- und Internverbindungen gleiche mittlere Belegungsdauern haben. Bei Externverbindungen ist ε die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Freiwerden *einer* Leitung, bei Internverbindungen ist ε die Wahrscheinlichkeitsdichte für das gleichzeitige Freiwerden von *zwei* Leitungen.

Es sei ferner $f(x)$ der Anteil der intern belegten Leitungen, wenn gerade x Leitungen belegt sind, also $x f(x)$ der Erwartungswert für die Anzahl der intern belegten Leitungen.

a) Externverkehr

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Enden des Zustandes $x+2$ durch Enden einer Externverbindung ist

$$w_{4\mathrm{e}} = \varepsilon[1-f(x+2)]\,(x+2)\,p(x+2)\,. \tag{4}$$

b) Internverkehr

Bei Internverkehr beansprucht jede Verbindung zwei Leitungen. Es kann demnach, wenn nur Internverkehr fließt, immer nur eine gerade Anzahl von Leitungen belegt sein: $0, 2, 4, \ldots, n$ (bzw. $n-1$ bei einer ungeraden Gesamtzahl von Leitungen im Bündel). Dann bedeuten $x+2$ belegte Leitungen $(x+2)/2$ Verbindungen. Die Wahrscheinlichkeitsdichte für das Ende des Zustandes $x+2$ durch Enden einer Internverbindung ist dann

$$w_{4\mathrm{i}} = \varepsilon f(x+2)\,\frac{x+2}{2}\,p(x+2)\,. \tag{5}$$

2.3. *Statistisches Gleichgewicht*

Nach Gl. (1b) gilt für das statistische Gleichgewicht

$$w_{1\mathrm{e}} + w_{1\mathrm{i}} = w_{4\mathrm{e}} + w_{4\mathrm{i}}\,.$$

Also

$$\begin{aligned}\varepsilon[1-f(x+2)]\,(x+2)\,p(x+2) &+ \\ &+ \varepsilon f(x+2)\,\frac{x+2}{2}\,p(x+2) = \\ = \alpha_\mathrm{e}(q-x-1)\,p(x+1)\,\mu(x+1) &+ \\ &+ \alpha_\mathrm{i}(q-x)\,p(x)\,\mu(x)\,\mu(x+1)\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Zur Berechnung der Durchlaßwahrscheinlichkeiten $\mu(x)$ siehe Abschnitt 4. Zur Berechnung des Aufteilungsfaktors $f(x)$ siehe Abschnitt 2.5.

Die Funktion $f(x)$ kann zur Berechnung der Belegungswahrscheinlichkeiten $p(x)$ eliminiert werden, wenn man folgendes berücksichtigt:

Extern- und Internverkehr müssen, auch wenn sie gemischt auf einem Leitungsbündel vorkommen, dennoch jeder für sich allein die Bedingungen des statistischen Gleichgewichts erfüllen. Es müssen nämlich sowohl beim Extern- als auch beim Internverkehr über eine unendlich lange Zeit hinweg betrachtet gleichviel Gespräche enden wie neu beginnen, wenn stationärer Verkehr vorausgesetzt wird.

Gl. (6) kann demnach in zwei Teile zerlegt werden:
Extern-Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}\varepsilon[1-f(x+2)]\,(x+2)\,p(x+2) &= \\ &= \alpha_\mathrm{e}(q-x-1)\,p(x+1)\,\mu(x+1)\,,\end{aligned} \tag{7}$$

Intern-Gleichgewicht:

$$\begin{aligned}\varepsilon f(x+2)\,\frac{x+2}{2}\,p(x+2) &= \\ &= \alpha_\mathrm{i}(q-x)\,p(x)\,\mu(x)\,\mu(x+1)\end{aligned} \tag{8}$$

und man erhält schließlich als Rekursionsformel für $p(x)$

$$\begin{aligned}p(x+2) = \frac{q-x-1}{x+2}\,\frac{\alpha_\mathrm{e}}{\varepsilon}\,p(x+1)\,\mu(x+1) &+ \\ + \frac{q-x}{x+2}\,\frac{2\alpha_\mathrm{i}}{\varepsilon}\,p(x)\,\mu(x)\,\mu(x+1)&\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Zur Auswertung dieser Formel benötigt man noch die Randbedingungen, daß der Übergang vom Zustand $x=0$ in den Zustand $x=1$ nur von Externverkehr verursacht werden kann, also

$$p(1) = \frac{q\alpha_\mathrm{e}}{\varepsilon}\,p(0)\,\mu(0)\,, \tag{10}$$

und daß die Summe aller möglichen Zustandswahrscheinlichkeiten eins sein muß, also

$$\sum_{x=0}^{n} p(x) = 1\,. \tag{11}$$

Eine geschlossene Lösung für $p(x)$ konnte bei Zufallsverkehr 2. Art nicht gefunden werden.

2.4. *Sonderfälle*

Für den Sonderfall „Zufallsverkehr 1. Art", d.h. für den Grenzfall der unendlichen Quellenzahl ($q \to \infty$, $\alpha \to 0$, $q\alpha = A$), geht man analog vor wie in den Abschnitten 2.1 bis 2.3 für Zufallsverkehr 2. Art beschrieben, stellt also die Formel für das statistische Gleichgewicht auf, trennt Extern- und Internanteile und erhält als Rekursionsformel für $p(x)$

$$\begin{aligned}p(x+2) = \frac{A_\mathrm{e}}{x+2}\,p(x+1)\,\mu(x+1) &+ \\ + \frac{2A_\mathrm{i}}{x+2}\,p(x)\,\mu(x)\,\mu(x+1)&\,.\end{aligned} \tag{12}$$

In diesem Fall läßt sich für $p(x)$ die geschlossene Lösung

$$p(x) = \frac{\displaystyle\prod_{\xi=0}^{x-1}\mu(\xi)\sum_{r=0}^{[x/2]}\frac{A_\mathrm{i}^r A_\mathrm{e}^{x-2r}}{r!\,(x-2r)!}}{1+\displaystyle\sum_{x=1}^{n}\prod_{\xi=0}^{x-1}\mu(\xi)\sum_{r=0}^{[x/2]}\frac{A_\mathrm{i}^r A_\mathrm{e}^{x-2r}}{r!\,(x-2r)!}} \tag{13}$$

Summe in den Gl. (17), (18), (19) beitragen, zu Null werden.

Die Gesamtverkehrsbelastung Y, die in allen Verlustformeln steht, wird zweckmäßigerweise direkt aus der zuvor berechneten Verteilung $p(x)$ als Erwartungswert der Anzahl gleichzeitig belegter Leitungen berechnet, also

$$Y = \sum_{x=0}^{n} x\, p(x)\,. \tag{20}$$

Die Verkehrsangebote A_e und A_i an die Koppelanordnung erhält man zu

$$A_\mathrm{e} = (1-c)\,\alpha(q-Y)\,,\quad A_\mathrm{i} = c\,\alpha(q-Y) \tag{21}$$

und die Verkehrsbelastungen Y_e und Y_i zu

$$Y_\mathrm{e} = A_\mathrm{e} - B_\mathrm{e} A\,, \tag{22}$$
$$Y_\mathrm{i} = 2(A_\mathrm{i} - B_\mathrm{i} A) = 2[A_\mathrm{i} - (B_\mathrm{ig} + B_\mathrm{ik})A]\,.$$

3.2. Blockierzeitwahrscheinlichkeiten (Time congestion)

Die Blockierzeitwahrscheinlichkeit E ist die Wahrscheinlichkeit, mit der das System für Anrufe blockiert ist. E kann berechnet werden als jener Anteil an der Beobachtungszeit pro Zeiteinheit, während der das System blockiert ist.

Wie bei den Verlustrufwahrscheinlichkeiten ist auch bei den Blockierzeitwahrscheinlichkeiten eine Aufteilung in drei verschiedene Arten denkbar. Man erhält dann

a) Blockierzeitwahrscheinlichkeit extern

$$E_\mathrm{e} = (1-c)\sum_{x=k}^{n} p(x)\,\sigma(x)\,, \tag{23}$$

b) Blockierzeitwahrscheinlichkeit intern gehend

$$E_\mathrm{ig} = c\sum_{x=k}^{n} p(x)\,\sigma(x)\,, \tag{24}$$

c) Blockierzeitwahrscheinlichkeit intern kommend

$$E_\mathrm{ik} = c\sum_{x=k-1}^{n-1} p(x)\,\mu(x)\,\sigma(x+1)\,. \tag{25}$$

Für eine unendlich große Zahl von Verkehrsquellen $q = \infty$ gehen die Verlustrufwahrscheinlichkeiten aus Abschnitt 3.1 in die hier angegebenen Blockierzeitwahrscheinlichkeiten über.

4. Durchlaß- und Sperrwahrscheinlichkeiten

Es wurde bisher noch nichts darüber gesagt, wie die Durchlaß- und Sperrwahrscheinlichkeiten zu berechnen sind, die beim unvollkommenen Bündel zur Berechnung von Verteilung und Verlusten benutzt werden. Dazu sollen zwei Möglichkeiten angegeben werden.

4.1. Analog zu Erlangs Interconnexionsformel (EIF) [3]

Mit idealisierenden Annahmen über die Art der Mischung kann die Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)$ berechnet werden zu

$$\sigma(x) = \binom{x}{k}\Big/\binom{n}{k}\,. \tag{26}$$

Diese Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)$ wird zur Berechnung der Verluste verwendet, siehe Abschnitt 3. In der Rekursionsformel für $p(x)$ wird das Komplement von $\sigma(x)$, die Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu(x) = 1 - \sigma(x)$, eingesetzt, siehe Abschnitt 2.3.

4.2 Analog zur modifizierten Palm Jacobäus-Formel (MPJ) [4], [5]

Bei der modifizierten Palm-Jacobäus-Formel, die für reinen Externverkehr gilt und für hochwertige Mischungen mit Staffeln und Übergreifen sehr wirklichkeitstreue Werte liefert, wird die Verteilung eines vollkommenen Bündels gegebener Belastung Y der Berechnung der Verluste zugrunde gelegt.

Bei der Berechnung der Verteilung braucht dann keine Durchlaßwahrscheinlichkeit eingesetzt zu werden, vielmehr gilt für $q = \infty$

$$p(x) = \frac{A_0^x/x!}{\sum\limits_{i=0}^{n} A_0^i/i!}\,. \tag{27}$$

Dabei wird A_0 so gewählt, daß sich die vorgegebene Belastung Y einstellt (A_0 wird deshalb auch „erzeugendes Angebot" genannt.):

$$A_0 = \frac{Y}{1 - p(n)}\,. \tag{28}$$

Zur Berechnung des Verlusts aus der Verteilung wird die Sperrwahrscheinlichkeit

$$\sigma(x) = \binom{x-k}{n-k}\Big/\binom{n}{x} = \binom{x}{k}\Big/\binom{n}{k} \tag{29}$$

benutzt. Diese Formel gilt exakt für die sogenannte „ideale Erlangmischung" — siehe Gl. (26) — und für beliebige Mischungen gilt sie unter der Näherungsannahme, daß zwar nicht alle $\binom{n}{x}$ Muster eines Zustandes x gleichwahrscheinlich auftreten wie bei Erlangs „idealer Mischung", daß jedoch der *Erwartungs*wert der Sperrwahrscheinlichkeit $\sigma(x)$ der Gl. (26) bzw. (29) hinreichend gut entspricht.

Bei reinem Externverkehr ergab sich dadurch eine einfache Formel für die Verlustwahrscheinlichkeit B_k

$$B_k = \sum_{x=k}^{n} p(x)\,\sigma(x) = \tag{30}$$
$$= \sum_{x=k}^{n} \frac{\dfrac{A_0^x}{x!}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{A_0^i}{i!}} \frac{\binom{x}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{E_{1,n}(A_0)}{E_{1,n-k}(A_0)}\,.$$

Dabei sind $E_{1,n}(A_0)$ bzw. $E_{1,n-k}(A_0)$ die Blockierzeitwahrscheinlichkeiten (und wegen $q = \infty$ auch die Verlustrufwahrscheinlichkeiten) zweier vollkommener Bündel mit n bzw. $n-k$ Leitungen, denen jeweils das erzeugende Angebot A_0 zugeführt wird. Die Ablesung kann beispielsweise aus [5] oder [6] erfolgen. Das wirkliche Angebot A_k an das un-