Institut für Nachrichtenvermittlung und Datenverarbeitung

Universität Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

17. Bericht über verkehrstheoretische Arbeiten

Die Berechnung der Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit vollkommener Bündel für geglättete Verkehrsangebote 1. oder 2. Art

von

ALFRED BÄCHLE

Institute for Switching and Data Technics

University of Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. A. Lotze

17th Report on Studies in Congestion Theory

On the Calculation of Full Available Groups with Offered Smoothed Traffic

by

ALFRED BÄCHLE

1973

SUMMARY

In this paper an exact and an approximate method for the calculation of full available groups with offered smoothed traffic are presented.

In telephone systems connections between the subscribers are usually switched via several switching stages in an exchange or via several trunk groups in a telephone network. Therefore the traffic offered to the various trunk groups has not the same statistical properties. Traffic, which is originated by the subscribers, is usually called pure chance traffic. Two types of pure chance traffic are distinguished:

a) Pure chance traffic of type 1 (PCT 1):
An infinite number of sources produces the offered traffic. The calling rate λ is constant and independent from the number of occupied sources (Poisson Traffic).

b) Pure chance traffic of type 2 (PCT 2):
A finite number of sources produces the offered traffic. Each idle source has a calling rate α, the total calling rate is proportional to the number of simultaneous idle sources.

In both cases the distribution of the holding time is assumed to be negative exponential with a mean value h.

If pure chance traffic is offered to a first trunk group and the successful calls are offered to a second group, then the traffic offered to this second group is called a smoothed traffic. Because of the finite number of incoming trunks it can occur, that all incoming trunks are occupied and no further call can arrive at the second group. In this case the traffic peaks of the pure chance traffic are clipped off, and therefore the variance of the smoothed traffic is smaller than its mean, as will be shown later.

Structure of the investigated system

For the investigation of smoothed traffic a structure shown in fig. 1 is considered. In K nodes pure chance traffic is offered to K trunk groups, each with N_i trunks (i=1, 2,...K). This offered traffic may be PCT 1 or PCT 2. On each of these K trunk groups one traffic parcel with a calling rate λ_{im} occupies only trunks on the incoming group N_i, whereas a second traffic parcel with a calling rate λ_{in} occupies simultaneously trunks in the incoming group N_i and in a second common trunk group with N_m trunks.

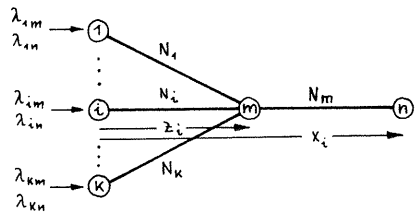


Fig.1: Structure for the investigation of smoothed traffic

This structure is typical for local exchanges or telephone networks. In a local exchange the K trunk groups N_1 ... N_K may be the outlets of K subscriber stages, from which a smoothed traffic is offered to a common route selection stage. In a tandem exchange (node m) smoothed traffic from K local exchanges is offered to a common outgoing trunk group.

It should be mentioned here, that this structure has already been investigated by A. K. Erlang [7]. For the special case, that the total traffic in the nodes 1 ... K is switched via node m to node n the state probabilities have been calculated by A. Jensen [7] and J. P. Dartois [15]. The smoothing of pure chance traffic which occurs in this structure has, however, not been discussed by these authors.

EXACT CALCULATION

The state probabilities

For calculating the state probabilities of the system it must be taken into account that the random variables, which describe the number of occupied trunks in the different groups, are not independent. This is caused by the traffic parcels which occupy simultaneously trunks in the incoming groups N_i and in the common group N_m. To describe the behaviour of the system states are introduced in which x_i connections are existing from node i via node m to node n and furthermore z_i connections from node i which end in node m. These states are denoted $\{x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_K, z_K\}$. In each of the states the following conditions must be satisfied:

$$0 \leqq x_i + z_i \leqq N_i \qquad i = 1, 2, \ldots K \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{K} x_i \leqq N_m \qquad (2)$$

For the calculation of the state probabilities the following assumptions are made:

1) The offered traffic is stationary and the system is assumed to be in "statistical equilibrium".
2) All trunks are full accessible.
3) A connection from node i via node m to node n is only switched, if there exists at least one idle trunk both in group N_i and in group N_m.
4) The offered traffic in the nodes 1 ... K may be either PCT 1 or PCT 2.

The following abbreviations are used:

q_i number of sources in node i
α_{im} calling rate of an idle source in node i for calls which end in node m
α_{in} calling rate of an idle source in node i to node n
h mean holding time
ε termination rate $\varepsilon = 1/h$

A_{im} Offered traffic (PCT 1) for calls which end in node m
A_{in} Offered traffic (PCT 1) for calls which end in node n
x_i Number of simultaneous connections between node i and node n
z_i Number of simultaneous connections from node i which end in node m
g_i Total number of occupied trunks in group N_i

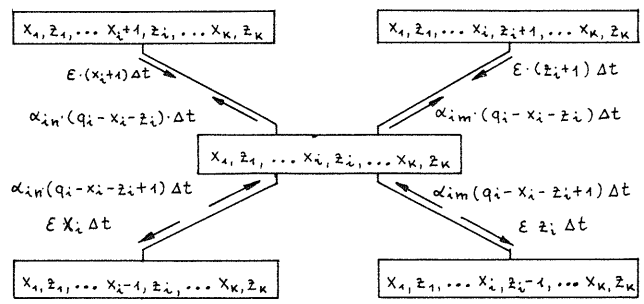


Fig. 2: Transition possibilities of state $\{x_1, z_1 \ldots x_i, z_i \ldots x_K, z_K\}$

Fig. 2 shows the transition possibilities of the state $\{x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_K, z_K\}$. As stationary traffic is assumed, the probability that a certain state appears, is equal to the probability that it disappears. This property can be described by a system of linear equations for the state probabilities, for which the following solution is found, if PCT 2 is offered in the nodes 1 ... K:

$$p(x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_K, z_K) = \frac{1}{C_2} \prod_{i=1}^{K} \binom{q_i}{x_i} \alpha_{in}^{x_i} \binom{q_i - x_i}{z_i} \alpha_{im}^{z_i} \qquad (3a)$$

The constant C_2 can be determined by the normalizing condition

$$\sum_{M} p(x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_K, z_K) = 1 \qquad (4)$$

where M comprises all states, for which eq. (1) and (2) hold.

If in the nodes 1 ... K PCT 1 is offered with the mean values A_{im} and A_{in}, then the following solution for the state probabilities is found:

$$p(x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K) = \frac{1}{C_1} \prod_{i=1}^{K} \frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!} \frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!} \qquad (3b)$$

The constant C_1 can be determined by means of eq. (4).

The blocking probability

The probability $p_m(g_m)$ that g_m trunks are busy in group N_m can be calculated by eq. (3a,b) and (4). The blocking probability (time congestion) E_m of trunk group N_m, to which smoothed traffic is offered, is equal to the probability $p_m(N_m)$, that all trunks in group N_m are occupied:

$$E_m = p_m(N_m) = \sum_{M^*} p(x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K) \qquad (5)$$

where M^* comprises all states for which the following conditions hold:

$$0 \leqq x_i + z_i \leqq N_i \qquad (6a)$$

$$\sum_{i=1}^{K} x_i = N_m \qquad (6b)$$

The loss probability

The individual loss probability B_{mi} for calls from node i, which arrive in node m, is equal to the conditional probability, that all trunks of group N_m are occupied, under the condition that a call from node i arrives at node m. The probability, that g_i trunks are busy in the incoming group N_i and simultaneously g_m trunks in the common group N_m is called $p_i(g_i, g_m)$ and its marginal distributions are $p_i(g_i)$ and $p_m(g_m)$ respectively. Using these probabilities which can be calculated by means of eq. (3a,b) and (4) one finds the individual loss probability in the case of PCT 2:

$$B_{mi} = \frac{\sum_{g_i=0}^{N_i-1} (q_i - g_i)\, p_i(g_i, N_m)}{\sum_{g_i=0}^{N_i-1} (q_i - g_i)\, p_i(g_i)} \qquad i = 1, 2, \dots K \qquad (7a)$$

If PCT 1 is offered in the nodes 1 ... K the following equation holds for the loss probability:

$$B_{mi} = \frac{p_m(N_m) - p_i(N_i, N_m)}{1 - p_i(N_i)} \qquad i = 1, 2, \dots K \qquad (7b)$$

Regarding the total smoothed traffic offered in node m one can determine the average loss probability:

$$B_m = \frac{\sum_{i=1}^{K} \sum_{g_i=0}^{N_i-1} (q_i - g_i)\, p_i(g_i, N_m)}{\sum_{i=1}^{K} \sum_{g_i=0}^{N_i-1} (q_i - g_i)\, p_i(g_i)} \qquad (PCT\ 2) \qquad (8a)$$

$$B_m = \frac{\sum_{i=1}^{K} [p_m(N_m) - p_i(N_i, N_m)]}{\sum_{i=1}^{K} [1 - p_i(N_i)]} \qquad (PCT\ 1) \qquad (8b)$$

As the calling rate of the calls arriving in node m is not constant, the blocking probability E_m is always greater than the loss probability B_m.

MEAN AND VARIANCE OF THE OFFERED SMOOTHED TRAFFIC

For the calculation of mean and variance of the smoothed traffic, which is offered in node m, the number of outlets in node m is chosen in such a way, that every call which arrives in node m finds a free trunk. This is possible if the number of outlets is

$$N_m^* = \sum_{i=1}^{K} N_i \qquad (9)$$

If this condition is satisfied, no call in node m is lost and mean and variance of the offered smoothed traffic are equal to mean and variance of the carried traffic in the outgoing group N_m^*.

It should be remarked here, that the mean of the smoothed traffic depends on the number of trunks N_m of the common group. If N_m decreases then the mean of the offered traffic increases.

Furthermore the traffic parcels offered from the nodes 1 ... K do not influence each other in this common group with N_m^* trunks. The random variables with the values x_i ($0 \leq x_i \leq N_i$, $1 \leq i \leq K$) are now independent. Therefore mean and variance of the total smoothed traffic are equal to the sum of the corresponding values of the different traffic parcels. In order to determine mean and variance of the individual traffic parcels a structure shown in fig. 3 is considered.

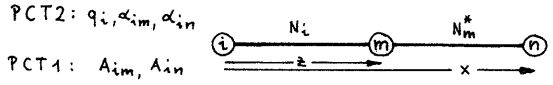


Fig. 3: Structure for the calculation of mean and variance of the smoothed traffic

In this structure a state with x connections from node i via node m to node n and z connections from node i which end in node m is denoted as $\{x,z\}$. The probabilities $p(x,z)$ of these states can be obtained from eq. (3a,b) and (4) setting K = 1:

$$p(x,z) = \frac{1}{C_2} \binom{q_i}{x} \alpha_{in}^{x} \binom{q_i - x}{z} \alpha_{im}^{z} \quad (PCT\,2) \qquad (10a)$$

$$p(x,z) = \frac{1}{C_1} \frac{A_{in}^{x}}{x!} \frac{A_{im}^{z}}{z!} \quad (PCT\,1) \qquad (10b)$$

The distribution $p_m(x)$ on the group N_m^* is:

$$p_m(x) = \sum_{z=0}^{N_i - x} p(x,z) \qquad (11)$$

Mean and variance of this distribution can be expressed using the mean Y_i and the variance V_i of the distribution on the group N_i, which is an "Erlang"-distribution in the case of PCT 1 or an "Erlang-Bernoulli"-distribution if PCT 2 is offered in node i. For mean and variance of the distribution of $p_m(x)$ one obtains:

Mean: $$A_{Si} = \gamma Y_i \qquad (12)$$

Variance: $$V_{Si} = A_{Si} - \gamma^2 (Y_i - V_i) \qquad (13)$$

where $$\gamma = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{in}}{\alpha_{im} + \alpha_{in}} & (PCT\,2) \qquad (14a) \\[2ex] \dfrac{A_{in}}{A_{im} + A_{in}} & (PCT\,1) \qquad (14b) \end{cases}$$

Mean and variance of the total smoothed traffic is equal to the sum of the corresponding values of the various traffic parcels:

$$A_{SG} = \sum_{i=1}^{K} A_{Si} \qquad (15)$$

$$V_{SG} = \sum_{i=1}^{K} V_{Si} \qquad (16)$$

THE APPROXIMATE CALCULATION

The number of possible states of the system (fig. 1) may be very large. For a system with only 4 incoming trunk groups, with 50 trunks each, more than 300 million different states must be distinguished. Therefore an approximate calculation method is necessary for investigating large systems, which can be found in practice.

Similar to the Equivalent Random Theory [14] the basic idea of the approximate calculation is, that the K incoming trunk groups are replaced by one equivalent trunk group (fig. 4). Two traffic parcels are offered to this equivalent group. They are chosen so that mean and variance of the smoothed traffic in node m have the same values as the smoothed traffic, which is offered from the K incoming groups in the real structure. Higher moments of the smoothed traffic are not regarded. Formulae for mean and variance of the smoothed traffic in the real structure have been derived in the preceding section.

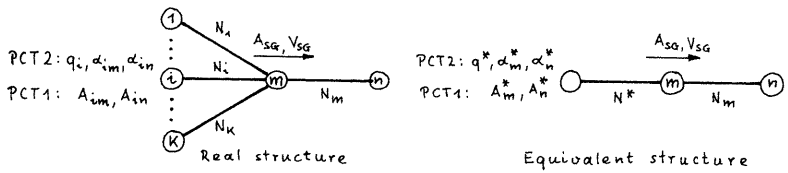


Fig. 4: Equivalent structure for the investigation of smoothed traffic

The approximate calculation consists of two parts. In the first part the parameters of the equivalent structure are determined so that a smoothed traffic with prescribed values for mean and variance is generated. In the second part the blocking probability and the loss probabilities are calculated, if smoothed traffic is offered by the equivalent structure to the trunk group N_m.

Parameters of the equivalent structure

The type of the offered traffic (PCT 1 or PCT 2) is both the same in equivalent and real structure. The number of trunks N^* of the equivalent group is equal to the sum

of incoming trunks in the real structure:

$$N^* = \sum_{i=1}^{K} N_i \tag{17}$$

If PCT 2 is offered in the initial nodes then the same holds for the number of traffic sources:

$$q^* = \sum_{i=1}^{K} q_i \tag{18}$$

These conditions are very important for the accuracy of the approximate calculation.

Mean and variance of the smoothed traffic in the equivalent structure can be determined in the same way, as described in the preceding section for the real structure. For K = 1 in eq. (15) and (16) one finds:

$$A_s^* = \gamma\, Y^* \tag{19}$$

$$V_s^* = A_s^* - \gamma^2 (Y^* - V^*) \tag{20}$$

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{\alpha_n^*}{\alpha_m^* + \alpha_n^*} & (\text{PCT } 2) \\[2ex] \dfrac{A_n^*}{A_m^* + A_n^*} & (\text{PCT } 1) \end{cases} \tag{21}$$

Y^* and V^* are mean and variance of the distribution on the equivalent group N^*, which is an "Erlang"-distribution in the case of PCT 1 or an "Erlang-Bernoulli"-distribution, if PCT 2 is offered.

A_S^* and V_S^* must be equal to the prescribed values A_{SG} and V_{SG} of the real structure determined by eq. (15) and (16). By means of eq. (17) ... (21) we can now determine the calling rates α_m^* and α_n^* in the case of PCT 2 or the offered traffic values A_m^* and A_n^*, if PCT 1 is offered.

Blocking probability and loss probability

The equivalent structure shown in fig. 4 can be used to determine the blocking probability of the common group with N_m trunks. In order to determine the individual loss probability B_{mj} of the traffic parcel offered from the initial node j this structure cannot be applied. In this case the trunk size N_j and the traffic characteristics in node j (q_j, α_{jm}, α_{jn} or A_{jm}, A_{jn}) must be taken into account. Therefore an equivalent structure with two incoming groups (fig. 5) is employed to determine the individual loss probability. The blocking probability obviously can also be calculated by means of this equivalent structure.

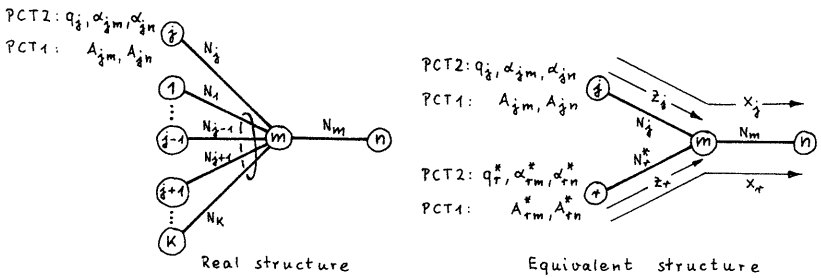


Fig. 5: Equivalent structure for the approximate calculation of the individual loss probability B_{mj}

In order to calculate the individual loss probability B_{mj}, one incoming group in the equivalent structure is identical with the trunk group N_j in the real structure. The offered traffic to this group has the same characteristics (q_j, α_{jm}, α_{jn} or A_{jm}, A_{jn}). The second group N_r^* is the equivalent group, which substitutes all other incoming groups of the real structure. The parameters of this group N_r^* are determined such that the smoothed traffic offered via group N_r^* has the same mean and variance as the traffic which is offered in the real structure via the groups N_i (i=1...K, i≠j).

The parameters of the equivalent group can be calculated by means of eq. (15)...(21). It must be regarded, that now in eq. (15)...(18) the term of the sums with the subscript j is omitted, because the equivalent structure contains directly the data of node j.

The state probabilities of the equivalent structure can be derived from eq. (3a,b) setting K = 2. One obtains in the case of PCT 2:

$$p(x_j, z_j, x_r, z_r) = \frac{1}{C_2} \binom{q_j}{x_j} \alpha_{jn}^{x_j} \binom{q_j - x_j}{z_j} \alpha_{jm}^{z_j} \binom{q_r^*}{x_r} \alpha_{rn}^{*x_r} \binom{q_r^* - x_r}{z_r} \alpha_{rm}^{*z_r} \qquad (22a)$$

and in the case of PCT 1:

$$p(x_j, z_j, x_r, z_r) = \frac{1}{C_1} \frac{A_{jn}^{x_j}}{x_j!} \frac{A_{jm}^{z_j}}{z_j!} \frac{A_{rn}^{*x_r}}{x_r!} \frac{A_{rm}^{*z_r}}{z_r!} \qquad (22b)$$

One gets the constants C_1 and C_2 by means of the normalizing condition of eq. (4).

Using eq. (22a,b) the probability $p_j(g_j, g_m)$ can be determined, that in group N_j $g_j = x_j + z_j$ trunks and in group N_m simultaneously g_m trunks are busy.

$$p_j(g_j, g_m) = \sum_{x_j = a}^{b} \sum_{z_r = 0}^{N_r^* - g_m + x_j} p(x_j, g_j - x_j, g_m - x_j, z_r) \qquad (23)$$

$$a = \mathrm{Max}(0, g_m - N_r^*)$$

$$b = \mathrm{Min}(g_j, g_m)$$

The marginal distributions of this distribution are $p_j(g_j)$ and $p_m(g_m)$. The blocking probability of trunk group N_m is:

$$E_m = p_m(N_m) = \sum_{g_j = 0}^{N_j} p_j(g_j, N_m) \qquad (24)$$

and the individual loss probability is:

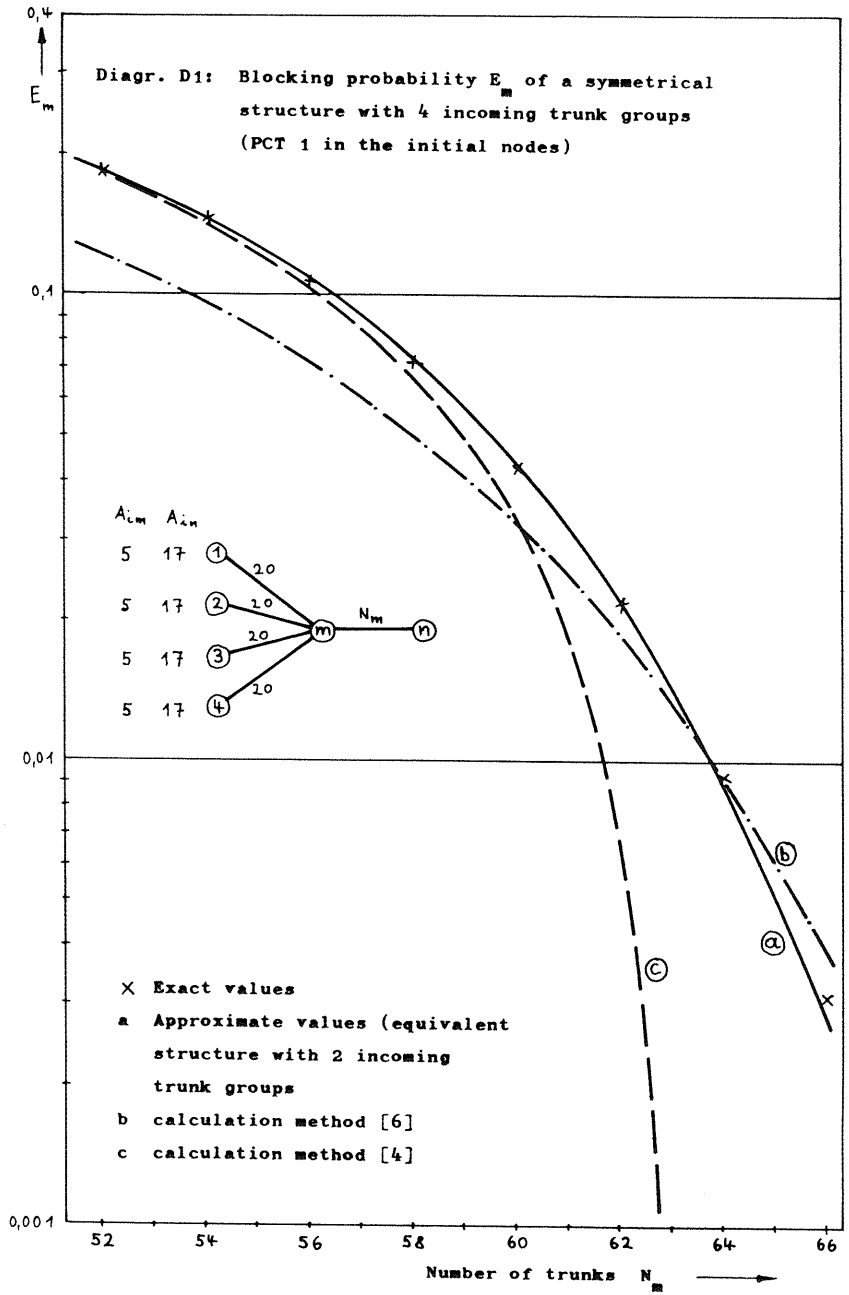
$$B_{mj} = \begin{cases} \dfrac{\sum_{g_j=0}^{N_j-1} (q_j - g_j) \cdot p_j(g_j, N_m)}{\sum_{g_j=0}^{N_j-1} (q_j - g_j)\, p_j(g_j)} & \text{(PCT 2)} \quad (25a) \\[2ex] \dfrac{p_m(N_m) - p_j(N_j, N_m)}{1 - p_j(N_j)} & \text{(PCT 1)} \quad (25b) \end{cases}$$

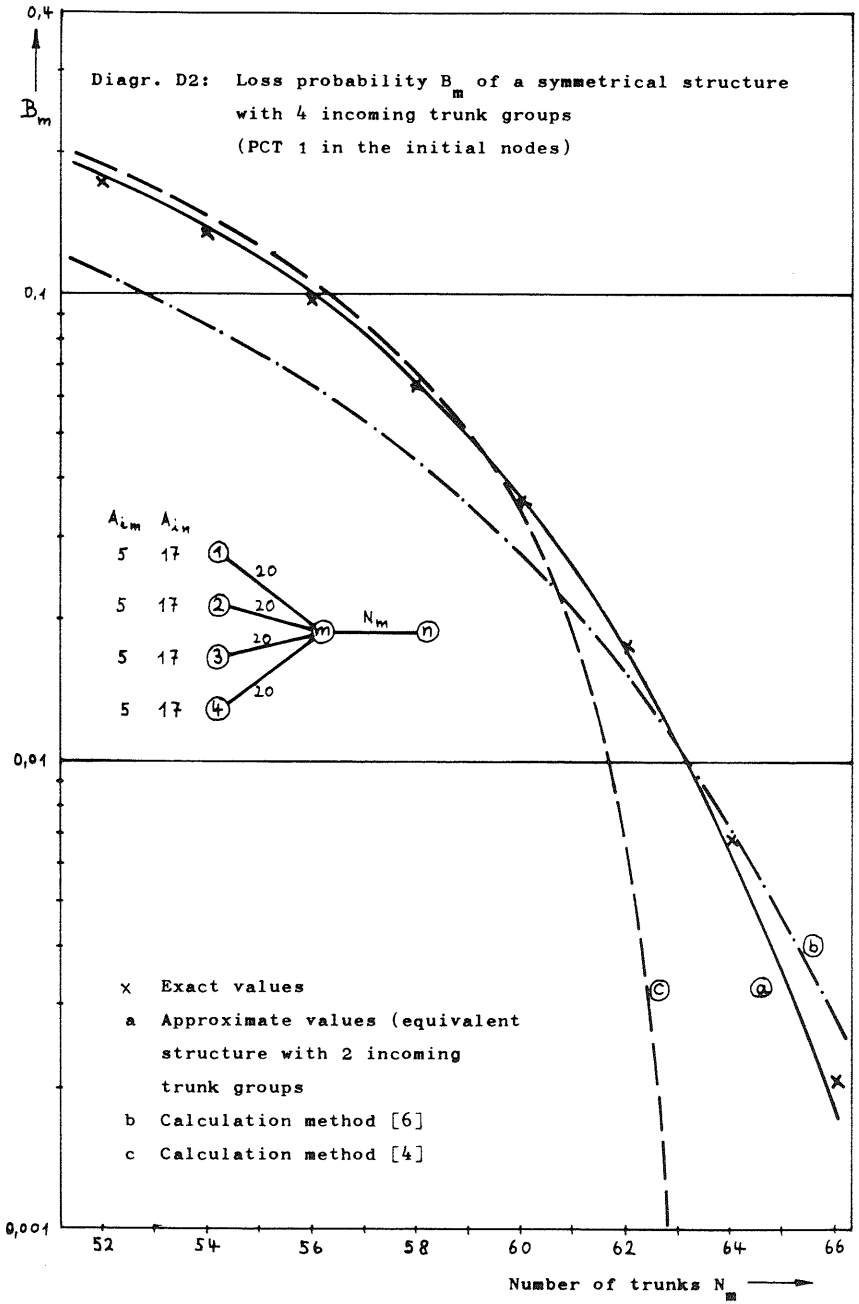
EXAMPLES

In diagr. D1 and D2 the blocking probability and the loss probability of a structure with four incoming trunk groups is shown. Further examples are shown in diagr 12 - 54 (page 129 - 171). Besides the exact and the approximate values according to the methods derived above the results of two further calculation methods ([4] and [6]) are shown. In these calculation methods the variance of the offered smoothed traffic is taken into account too.

The calculation method described in [4] can be applied to non-hierarchical networks with an arbitrary structure. Thus an approximate formula is used for the variance of the smoothed traffic. The equivalent structure given in [4] does not regard the total number of trunks of the incoming groups.

An approximation of smoothed traffic by PCT 2 is proposed in [6], if mean and variance of the smoothed traffic is known. Because, in [6] no formulae for these quantities are given, the formulae derived above are used.




Diagr. D2: Loss probability B_m of a symmetrical structure with 4 incoming trunk groups (PCT 1 in the initial nodes)
B_m
0,4
0,1
0,01
0,001
A_{im} A_{in}
5 17
5 17
5 17
5 17
20
20
20
20
N_m
m
n
1
2
3
4
x Exact values
a Approximate values (equivalent structure with 2 incoming trunk groups
b Calculation method [6]
c Calculation method [4]
52
54
56
58
60
62
64
66
Number of trunks N_m

Inhaltsverzeichnis

Seite

Schrifttumsverzeichnis 5

Abkürzungen 7

1. Einleitung 9

2. Das exakte Berechnungsverfahren für angebotenen Zufallsverkehr 1. oder 2. Art in den Startknoten 14
   2.1 Erläuterung der Struktur und des angebotenen Verkehrs 14
   2.2 Definition von Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit 16
   2.3 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten 19
   2.4 Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit 23
   2.5 Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit 24
   2.6 Vergleich der Blockierungs- mit der Verlustwahrscheinlichkeit bei geglättetem ZV1 26

3. Exakte Berechnung von Mittelwert und Varianz eines geglätteten Angebots im Knoten m für den allgemeinen Fall von angebotenem ZV1 oder ZV2 in den Startknoten 28

4. Das Zweimomentenverfahren zur näherungsweisen Berechnung von geglättetem ZV1 und ZV2 35
   4.1 Die Ersatzanordnung zur Erzeugung eines geglätteten Verkehrs mit vorgegebenen Parametern 36
   4.2 Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und der pauschalen Verlustwahrscheinlichkeit B_m mit einer Ersatzstruktur, die ein Ersatzzubringerbündel verwendet 39
   4.3 Berechnung der Einzelverlustwahrscheinlichkeiten B_{mi} 42

Seite

   4.4 Grenzfälle für die Ersatzanordnung mit einem Zubringerbündel 48
   4.5 Beispiel für das Näherungsverfahren 52

5. Untersuchung von Verkehr, der sich aus Zufallsverkehr 1. Art und geglättetem Verkehr zusammensetzt 57
   5.1 Anpassung an die vorhandene Struktur 57
   5.2 Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit 58
   5.3 Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m mit einem Ersatzzubringerbündel bei zusätzlichem Zufallsverkehr im Knoten m 59
   5.4 Exakte Berechnung für einen Sonderfall 61

6. Beschreibung der in der Literatur bisher bekannten Verfahren zur Berechnung von geglättetem Verkehr 63
   6.1 Das Näherungsverfahren von S. Katz, bei dem dem Zubringerbündel ZV1 angeboten wird 64
   6.2 Das Näherungsverfahren von R. Mina 70

7. Beispiele für geglätteten Verkehr und Diskussion der verschiedenen Näherungsverfahren 73
   7.1 Das Näherungsverfahren mit einem Ersatzzubringerbündel 73
   7.2 Das Näherungsverfahren mit zwei Ersatzzubringerbündeln 75
   7.3 Das Berechnungsverfahren von S. Katz 76
   7.4 Das Berechnungsverfahren von R. Mina 78
   7.5 Berechnung mit Zufallsverkehr 1. Art 79

8. Zusammenfassung 81

Anhang: Seite

A1: Lösung des linearen Gleichungssystems für die Zustandswahrscheinlichkeiten 83
A2: Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeiten für geglätteten Zufallsverkehr 1. Art 85
A3: Berechnung von Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots bei Zufallsverkehr 2. Art 86
A4: Berechnung von Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots bei Zufallsverkehr 1. Art 90
A5: Bestimmung der Grenzwerte der Varianz des geglätteten Angebots 95
A6: Berechnung von Grenzwerten für die zweidimensionale Verteilung $[g_i, g_m]$ 99
A7: Erweiterung des exakten Berechnungsverfahrens auf Leitungsbündel mit unvollkommener Erreichbarkeit bei geglättetem Zufallsverkehr 1. Art 101

Tabellen und Diagramme 107

Schrifttumsverzeichnis

[1] U. Herzog und A. Lotze: Das RDA-Verfahren, ein Streuwertverfahren für unvollkommene Bündel. NTZ 19 (1966), S. 640 - 646

[2] U. Herzog: Die Bemessung ein- und mehrstufiger Koppelanordnungen der Vermittlungstechnik für angebotenen Überlaufverkehr. Dissertation an der Universität Stuttgart (1968)

[3] U. Herzog: Die exakte Berechnung des Streuwerts von Überlaufverkehr hinter Koppelanordnungen beliebiger Stufenzahl mit vollkommener bzw. unvollkommener Erreichbarkeit. AEÜ 20 (1966), S. 180 - 184

[4] S. Katz Statistical Performance Analysis of a Switched Communications Network. 5. ITC New York 1967, S. 566 - 575

[5] R. Mina Some practical Applications of Teletraffic Theory. 5. ITC New York 1967, S. 428 - 434

[6] R. Mina Modification of the Input Process used in Classical Traffic Theory. 6. ITC München 1970

[7] E. Brockmeyer, H. Halstrom, A. Jensen: The Life and Works of A. K. Erlang Acta Polytechnica Scandinavica, 1960, Copenhagen

[8] R. Rothe Höhere Mathematik Band 1 B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart

[9] G. F. O'Dell: Theoretical Principles of the Traffic Capacity of Automatic Switches.
P. O. Elect. Engrs. J. 13, 1920, S. 209

[10] G. F. O'Dell: An Outline of the Trunking Aspect of Automatic Telephony.
J. Inst. Elect. Engrs. 65, 1927, S. 185-222

[11] W. F. Newland: A Method of Approach and Solution of some fundamental Traffic Problems.
P. O. Elect. Engrs. J. 25, 1932 - 33, S. 119 - 131

[12] K. Lundkvist: General Theory for Telephone Traffic.
Ericsson Techn. 9,1953, Nr.2, S. 111 - 140

[13] K. Lundkvist: Analysis of general Theory for Telephone Traffic.
Ericsson Techn.2, 1955, Nr.1, S. 3 - 32

[14] R. I. Wilkinson: Theories for toll traffic engineering in the U.S.A.
Bell Syst. Tech. J.35, 1956, S.421 - 514

[15] R. Schehrer: On the Calculation of Overflow Systems with a Finite Number of Sources and Full Available Groups.
Symposium on Computer Communications Networks and Teletraffic, Polytechnic Institute of Brooklyn, 4. - 6. April 1972

[16] J. P. Dartois: Verlustsysteme mit unterschiedlich belasteten Verkehrsquellen
Elektr. Nachrichtenwesen 46, 1971, Nr.1 S. 41 - 49

Abkürzungen

A_{ij}	Angebot von Knoten i zum Knoten j in der realen Struktur
A^*_m, A^*_n	Angebote in der Ersatzstruktur mit einem Zubringerbündel
A^*_{rm}, A^*_{rn}	Angebote in der Ersatzstruktur mit zwei Zubringerbündeln
A_{SG}	Mittelwert des gesamten, im Knoten m angebotenen geglätteten Verkehrs
A_{Si}	Mittelwert des über das Zubringerbündel N_i im Knoten m angebotenen geglätteten Verkehrs
B_m	Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit des gesamten im Knoten m angebotenen geglätteten Verkehrs
B_{mi}	Einzelverlustwahrscheinlichkeit des über Bündel N_i im Knoten m angebotenen geglätteten Verkehrs
c_{Ai}	Mittlere Anzahl der Anrufe, die von Knoten i kommend im Knoten m eintreffen
c_{Vi}	Mittlere Anzahl der Verlustrufe, die von Knoten i kommend im Knoten m abgewiesen werden
E_i	Blockierungswahrscheinlichkeit von Bündel N_i
g_i	Gesamtzahl der Belegungen im Bündel N_i
K	Anzahl der Zubringerbündel in der realen Struktur
N_i	Anzahl der Leitungen des Bündels zwischen Knoten i und Knoten m
N_m	Anzahl der Leitungen des Bündels zwischen Knoten m und Knoten n
N^*	Anzahl der Leitungen des Ersatzzubringerbündels
q_i	Anzahl der Verkehrsquellen im Knoten i
q^*	Anzahl der Verkehrsquellen in der Ersatzstruktur
t_m	Mittlere Belegungsdauer
x_i	Anzahl der Belegungen, die von Knoten i über Knoten m bis zum Knoten n führen
V(N)	Varianz der Verteilung auf einem vollkommenen Bündel N bei angebotenem ZV1

$V(q,N)$	Varianz der Verteilung auf einem vollkommenen Bündel N bei einem von q Quellen angebotenen ZV2
V_{SG}	Varianz des gesamten, im Knoten m angebotenen geglätteten Verkehrs
V_{Si}	Varianz des über das Zubringerbündel N_i im Knoten m angebotenen geglätteten Verkehrs
Y_i	Belastung des Bündels N_i
$Y(N)$	Belastung eines vollkommenen Bündels bei angebotenem ZV1
$Y(q,N)$	Belastung eines vollkommenen Bündels bei einem von q Quellen angebotenen ZV2
z_i	Anzahl der Belegungen im Bündel N_i, die im Knoten m enden
ZV1	Zufallsverkehr 1. Art
ZV2	Zufallsverkehr 2. Art
α_{ij}	Anrufrate einer freien Quelle im Knoten i für Anrufe zum Knoten j
λ_{ij}	Anrufrate aller q_i Quellen im Knoten i für Anrufe zum Knoten j
$[g_i]$	Wahrscheinlichkeit für g_i Belegungen im Bündel N_i
$[g_i,g_m]$	Wahrscheinlichkeit für g_i Belegungen im Bündel N_i und gleichzeitig g_m Belegungen im Bündel N_m
$[g_i\|g_m]$	Bedingte Wahrscheinlichkeit für g_i Belegungen im Bündel N_i unter der Voraussetzung, daß gleichzeitig g_m Belegungen im Bündel N_m bestehen
$[x_1,z_1, \ldots x_i,z_i, \ldots x_K,z_K]$	Wahrscheinlichkeit, daß gleichzeitig $x_1,z_1, \ldots x_i,z_i, \ldots x_K,z_K$ Belegungen in der betrachteten Struktur bestehen

Verwendete Indizes:

i	kennzeichnet Startknoten, laufender Index i = 1...K
m	kennzeichnet Durchgangsknoten
n	kennzeichnet Endknoten

1. Einleitung

In Fernsprechsystemen werden Verbindungen zwischen den Fernsprechteilnehmern im allgemeinen nicht direkt hergestellt, sondern sie werden über mehrere Wahlstufen innerhalb einer Vermittlung oder über mehrere Vermittlungen in einem Fernsprechnetz aufgebaut. Deshalb besitzt der den einzelnen Wahlstufen angebotene Verkehr nicht überall die gleichen statistischen Eigenschaften wie der von den Teilnehmern erzeugte Verkehr.

Zur Beschreibung der statistischen Eigenschaften des von den Fernsprechteilnehmern erzeugten Verkehrs werden in der Regel in der Verkehrstheorie für Verlustsysteme zwei mathematische Modelle angewandt, der Zufallsverkehr 1. Art und der Zufallsverkehr 2. Art. Bei Zufallsverkehr 1. Art (ZV1) ist die Zahl der Verkehrsquellen unendlich groß. Man wendet dieses Modell im allgemeinen bei Ortsvermittlungen an, wo die Zahl der Fernsprechteilnehmer groß gegenüber der Zahl der ihnen zur Verfügung stehenden Leitungen ist. Charakteristisch für ZV1 ist, daß Mittelwert und Varianz seiner Verteilung gleich groß sind (Poisson-Anrufprozeß). Bei Zufallsverkehr 2. Art (ZV2) ist die Zahl der Verkehrsquellen endlich. Man verwendet dieses Modell bei der Dimensionierung von Nebenstellenanlagen oder Konzentratoren. Bei ZV1 und bei ZV2 wird eine negativ exponentielle Verteilung der Belegungsdauern angenommen.

In Fernsprech-Vermittlungssystemen unterscheidet man außerdem zwei Arten von "deformiertem Zufallsverkehr" nämlich Überlaufverkehr und "geglätteten Verkehr":

a) Überlaufverkehr

Überlaufverkehr ist jener Anteil angebotenen Zufallsverkehrs, der von einem Leitungsbündel nicht aufgenommen werden kann, wenn Anrufe keine freie Leitung erreichen. Dieser Verkehrsanteil kann einem zweiten oder nachfolgenden Bündeln zur Verarbeitung angeboten werden. Charakteristisch für solchen Überlaufverkehr ist, daß die Varianz seiner Verteilung bei ZV1 stets,

bei ZV2 in der Regel größer ist als ihr Mittelwert. Für die Berechnung von Bündeln, denen Überlaufverkehr angeboten wird, gibt es bereits exakte Verfahren sowie Näherungsverfahren, die seine besonderen statistischen Eigenschaften gut berücksichtigen ([1] bis [3] und [15]).

b) Geglätteter Verkehr
Geglätteter Verkehr entsteht dann, wenn Zufallsverkehr bereits ein oder mehrere Bündel durchlaufen hat, bevor er einem bestimmten Leitungsbündel angeboten wird. Dies kann innerhalb einer Vermittlungsstelle auftreten, bei der die Verbindungen über mehrere Wahlstufen aufgebaut werden oder in einem Fernsprechnetz, bei dem die Verbindungen über mehrere Leitungsbündel nacheinander führen. Eine Eigenschaft dieses Verkehrs ist, daß die Anzahl der gleichzeitig möglichen Anrufe an das betrachtete Bündel begrenzt ist. Diese Begrenzung, die als Glättung des Zufallsverkehrs bezeichnet wird, entsteht durch die endliche Anzahl von Leitungen der zuvor durchlaufenen Bündel. Bei geglättetem Verkehr ist die Varianz seiner Verteilung kleiner als deren Mittelwert.

Ziel dieser Arbeit ist es, Berechnungsverfahren für Leitungsbündel zu entwickeln, denen geglätteter Verkehr angeboten wird. Für die Untersuchung wird eine Struktur nach Abb.1 gewählt, bei der zunächst in den Knoten 1 bis K den einzelnen Leitungsbündeln N_1 bis N_K ZV1 oder ZV2 angeboten wird. Der durch die endliche Leitungszahl geglättete Verkehr wird dann, ganz oder teilweise, im Knoten m einem gemeinsamen weiterführenden Bündel N_m angeboten.

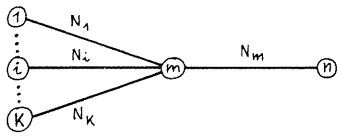


Abb.1: Struktur zur Untersuchung von geglättetem Verkehr bei vollkommener Erreichbarkeit

Diese Struktur ist typisch für die in Ortsvermittlungen oder im Fernwahlnetz bestehenden Strukturen, bei denen geglätteter Verkehr auftritt. In Ortsvermittlungen können die K Knoten am Eingang der Zubringerbündel K Anrufsuchergruppen oder K Vorwählergruppen darstellen, deren Ausgänge auf eine gemeinsame erste Gruppenwahlstufe führen, die hier durch Knoten m dargestellt ist. Im Fernwahlnetz können entsprechend K Endämter ihren Verkehr einem gemeinsamen Knotenamt, hier dem Knoten m, anbieten.

In Verlustsystemen verwendet man zur Charakterisierung der Verkehrsleistung eines Leitungsbündels die Begriffe "Blockierungswahrscheinlichkeit" und "Verlustwahrscheinlichkeit". Die Blockierungswahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle erreichbaren Leitungen des betrachteten Bündels belegt sind. Die Verlustwahrscheinlichkeit ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, daß alle erreichbaren Leitungen belegt sind, wenn ein Anruf eintrifft. Sie ist gleich dem Quotienten aus der mittleren Zahl der Verlustrufe pro Zeiteinheit (d.h. der vom Bündel nicht verarbeiteten Anrufe) bezogen auf die mittlere Zahl der Anrufe pro Zeiteinheit. Während bei ZV1 beide Größen gleich sind, ist bei ZV2 und bei dem hier untersuchten geglätteten Verkehr die Verlustwahrscheinlichkeit kleiner als die Blockierungswahrscheinlichkeit. Diese beiden Größen werden in Kapitel 2 für die Struktur nach Abb.1 exakt berechnet. Dabei kann der Verkehr, der den Zubringerbündeln angeboten wird, ZV1 oder ZV2 sein.

Für die Berechnungen wird vorausgesetzt, daß die Intensität des angebotenen Verkehrs zeitunabhängig ist. Diese Annahme ist, wie Messungen ergaben, während der Hauptverkehrsstunde eines Tages erfüllt. Wenn man jetzt das eingeschwungene System betrachtet, d.h. wenn man sich nur für die zeitunabhängigen Zustandswahrscheinlichkeiten interessiert, dann gilt bei Geburts- und Todprozessen allgemein, daß für jeden Zustand die Wahrscheinlichkeit,

daß er entsteht, so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit, daß er verschwindet. Diese Tatsache wurde von A.K.Erlang das Prinzip von der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts genannt. Man kann mit diesem Prinzip, wie in Kap.2 gezeigt wird, ein lineares Gleichungssystem für die Zustandswahrscheinlichkeiten aufstellen und hier auch eine geschlossene Lösung angeben. Aus diesen Zustandswahrscheinlichkeiten läßt sich dann in einfacher Weise die Blockierwahrscheinlichkeit und die Verlustwahrscheinlichkeit berechnen.

Da trotz der geschlossenen Lösung für die Zustandswahrscheinlichkeiten die Berechnung bei großen Systemen sehr aufwendig werden kann, wird außerdem ein Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit und der Verlustwahrscheinlichkeit entwickelt. Dabei wird, ähnlich wie beim Streuwertverfahren ([1] bis [3] und [15]) zur Berechnung von Überlaufverkehr, davon ausgegangen, daß es für eine hinreichend genaue Berechnung genügt, neben dem Mittelwert des geglätteten Angebots seine Varianz zu berücksichtigen.

Dazu werden in Kap.3 Formeln für Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots hergeleitet, wenn ZV1 oder ZV2 den Zubringerbündeln angeboten wird. Das Näherungsverfahren selbst, das sich aus zwei Teilen zusammensetzt, wird in Kap.4 beschrieben. Im ersten Teil wird analog zur Ersatzprimärmischung beim Streuwertverfahren eine Ersatzanordnung bestimmt, die einen geglätteten Verkehr mit vorgegebenen Werten für Mittelwert und Varianz erzeugt. Mit dieser Ersatzanordnung werden dann im zweiten Teil Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit berechnet.

Im fünften Kapitel wird der Sonderfall untersucht, daß einem Leitungsbündel gleichzeitig geglätteter Verkehr und Zufallsverkehr 1.Art angeboten wird. Einige in der Literatur bereits bekannte Verfahren zur Berechnung von geglättetem Verkehr werden in Kapitel 6 beschrieben. Die Verfahren von S.Katz [4] und R.Mina [5] berücksichtigen zwar ebenfalls Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots, sie verwenden jedoch andere Ersatzanordnungen zur Erzeugung dieses Angebots. Die verschiedenen Näherungsverfahren werden in Kap.7 mit dem exakten Verfahren und mit Simulationsergebnissen verglichen.

Die in Abb. 1 (Seite 10) dargestellte Struktur wurde bereits von A. K. Erlang [7] für den Fall mit einem und zwei Zubringerbündeln diskutiert. A. Jensen gibt in [7] eine Lösung für die Zustandswahrscheinlichkeiten bei angebotenem ZV1 an, allerdings für den Sonderfall, daß der ganze über die Zubringerbündel N_i im Knoten m eintreffende Verkehr dem Bündel N_m angeboten wird, während hier angenommen wird, daß ein Teil der Belegungen bereits im Knoten m endet. Dieser Sonderfall wird auch von J. P. Dartois in [16] für eine Untersuchung von Koppelanordnungen bei einem schiefen Verkehrsangebot (ZV1 oder ZV2) betrachtet. Das Problem des geglätteten Verkehrs, der in der Struktur auftritt, wird jedoch in diesen Veröffentlichungen nicht diskutiert.

2. Das exakte Berechnungsverfahren für angebotenen Zufallsverkehr 1. oder 2. Art in den Startknoten

2.1 Erläuterung der Struktur und des angebotenen Verkehrs

In diesem Kapitel wird ein Verfahren zur exakten Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit und der Verlustwahrscheinlichkeit angegeben, wenn einem Leitungsbündel geglätteter Verkehr angeboten wird. Dazu wird die Struktur nach Abb.2 betrachtet.

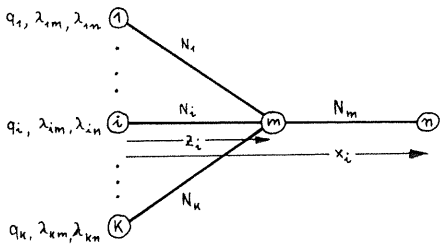


Abb.2: Struktur zur exakten Berechnung

Über K Zubringerbündel N_i (i=1,2,...K) werden einem gemeinsamen Leitungsbündel N_m geglättete Verkehre angeboten. Den Zubringerbündeln N_i selbst wird Zufallsverkehr angeboten und zwar ein Anteil mit einer Anrufintensität λ_{im}, der nur Belegungen auf dem Zubringerbündel erzeugt, während der zweite Anteil mit der Intensität λ_{in} gleichzeitig Leitungen auf dem Zubringerbündel N_i und auf dem gemeinsamen Bündel N_m belegt. Es werden im folgenden die beiden Fälle untersucht, daß der in den Knoten 1 bis K angebotene Verkehr Zufallsverkehr 1.Art oder Zufallsverkehr 2.Art ist. Bei beiden Zufallsverkehren sind die Belegungsdauern negativ exponentiell verteilt mit einem Mittelwert t_m. Die mittlere Belegungsdauer t_m wird im folgenden

als Zeiteinheit gewählt, d.h. $t_m = 1$. Die beiden Verkehrsarten unterscheiden sich in der Anzahl ihrer Verkehrsquellen q und deren Anrufintensität (Anrufrate) λ.
Bei Zufallsverkehr 2.Art nimmt man an, daß jede freie Quelle eine Anrufintensität α besitzt. Bei g belegten Quellen ist also die gesamte Anrufintensität aller freien Quellen:

$$\lambda(g) = \alpha \cdot (q - g)$$

Bei Zufallsverkehr 1.Art betrachtet man eine unendlich große Quellenzahl mit einer konstanten, vom Zustand des Systems unabhängigen Anrufintensität λ. Das Produkt

$$A = \lambda \cdot t_m$$

wird hier Angebot der Verkehrsquellen genannt.

Für die Berechnungen wird noch vorausgesetzt, daß alle Leitungsbündel vollkommen erreichbar sind. Außerdem soll eine Durchschaltung zwischen Startknoten i und Endknoten n nur dann erfolgen, wenn in den beiden Bündeln N_i und N_m je mindestens eine Leitung frei ist, d.h. Anrufe, die zwar im Bündel N_i eine freie Leitung finden, dagegen keine im Bündel N_m, sollen "zeitlos" verschwinden.

2.2 Defintion von Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit

Bevor das Berechnungsverfahren im einzelnen beschrieben wird, werden die Begriffe Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeit genauer formuliert. Die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m eines Bündels wird definiert als die Wahrscheinlichkeit, daß alle Leitungen des betrachteten Bündels belegt sind. Es sei $[g_m]$ die Wahrscheinlichkeit, daß auf Bündel N_m gleichzeitig g_m Belegungen bestehen. Dann ist die Blockierungswahrscheinlichkeit:

$$E_m = [N_m] \qquad (1)$$

Die Verlustwahrscheinlichkeit B_{mi} ist der Quotient aus der mittleren Zahl der Verlustrufe pro Zeiteinheit bezogen auf die mittlere Zahl der Anrufe pro Zeiteinheit. Es wird hier die Verlustwahrscheinlichkeit des Verkehrs berechnet, der über das Bündel N_i im Knoten m dem Bündel N_m angeboten wird, und nicht die Verlustwahrscheinlichkeit für den gesamten Weg von Knoten i über m nach n. Betrachtet man den Verkehr über das Zubringerbündel N_i, dann kann am Eingang des Bündels N_m ein Anruf nur dann eintreffen, wenn nicht alle N_i Leitungen des Zubringers belegt sind. Bezeichnet man mit $\lambda_{in}(g_i)$ die mittlere Anzahl der Anrufe bei g_i belegten Zubringerleitungen und die Wahrscheinlichkeit für g_i belegte Leitungen mit $[g_i]$, dann ist die mittlere Zahl der Anrufe, die am Eingang von Bündel N_m eintreffen:

$$C_{Ai} = \sum_{g_i=\sigma}^{N_i-1} \lambda_{in}(g_i)\,[g_i]$$

Ein Verlustruf entsteht dann, wenn ein Anruf zwar eine freie Zubringerleitung in N_i aber keine freie Leitung im Bündel N_m findet. Es sei $[g_i, g_m]$ die Wahrscheinlichkeit, daß g_i Leitungen im Bündel N_i und gleichzeitig g_m Leitungen

im Bündel N_m belegt sind. Dann ist die mittlere Zahl der Verlustrufe pro Zeiteinheit:

$$C_{vi} = \sum_{g_i=\sigma}^{N_i-1} \lambda_{in}(g_i)\,[g_i, N_m]$$

Damit erhält man für die Verlustwahrscheinlichkeit jenes Verkehrsanteils, der über Bündel N_i dem Bündel N_m angeboten wird:

$$B_{mi} = \frac{C_{vi}}{C_{Ai}} = \frac{\sum_{g_i=\sigma}^{N_i-1} \lambda_{in}(g_i)\,[g_i, N_m]}{\sum_{g_i=\sigma}^{N_i-1} \lambda_{in}(g_i)\,[g_i]} \qquad (2)$$

Neben diesen Einzelverlusten B_{mi} der einzelnen Verkehrsanteile kann man auch eine pauschale Verlustwahrscheinlichkeit für den gesamten Verkehr berechnen, der dem Bündel N_m über alle Zubringerbündel N_1 bis N_K zusammen angeboten wird. Für diesen Verlust gilt:

$$B_m = \frac{\sum_{i=1}^{K} C_{vi}}{\sum_{i=1}^{K} C_{Ai}} \qquad (3)$$

Wenn der im Knoten i angebotene Verkehr Zufallsverkehr 1.Art ist, dann ist dessen Anrufintensität λ_{in} unabhängig vom Zustand des Systems, d.h.

$$\lambda_{in}(g_i) = \lambda_{in} = \text{konst.}$$

Damit erhält man aus Gl. (2):

$$B_{mi} = \frac{\sum_{g_i=\sigma}^{N_i-1} [g_i, N_m]}{\sum_{g_i=\sigma}^{N_i-1} [g_i]}$$

$$B_{mi} = \frac{[N_m] - [N_i, N_m]}{1 - [N_i]}$$

$$= [N_m] \frac{1 - [N_i | N_m]}{1 - [N_i]} \qquad i = 1, 2, \ldots K \qquad (4a)$$

Wenn im Knoten i von q_i Verkehrsquellen Zufallsverkehr 2.Art angeboten wird, dann gilt für die Anrufintensität:

$$\lambda_{in}(g_i) = \alpha_{in}(q_i - g_i)$$

Dabei ist α_{in} die Anrufrate einer freien Quelle für Anrufe von i nach n. Die Verlustwahrscheinlichkeit ist dann:

$$B_{mi} = \frac{\sum_{g_i=\sigma}^{N_i-1} (q_i - g_i)\,[g_i, N_m]}{\sum_{g_i=\sigma}^{N_i-1} (q_i - g_i)\,[g_i]} \qquad (4b)$$

$$= [N_m] \frac{q_i - y_i(|N_m) - (q_i - N_i)\,[N_i | N_m]}{q_i - y_i - (q_i - N_i)\,[N_i]}$$

Dabei ist Y_i die Belastung der N_i Leitungen (Erwartungswert der Zahl der belegten Leitungen) und Y_i $(|N_m)$ der bedingte Erwartungswert der Zahl der belegten Leitungen während jener Zeit pro Zeiteinheit, in der alle Leitungen im Bündel N_m belegt sind.

$$y_i(|N_m) = \sum_{g_i=\sigma}^{N_i} g_i \cdot [g_i | N_m] \qquad (5)$$

2.3 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten

Aus den Gl.(1),(4a) und (4b) ist ersichtlich, daß zur Bestimmung der Blockierungs- und Verlustwahrscheinlichkeiten die K zweidimensionalen Verteilungen $[g_i, g_m]$ (i=1,2,...K) und die Verteilungen auf den Bündeln $[g_i]$ und $[g_m]$ zu berechnen sind. Dazu werden die Wahrscheinlichkeiten für die Zustände $\{x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_K, z_K\}$ des gesamten Systems nach Abb.2 berechnet. Es ist z_i die Anzahl der gleichzeitig bestehenden Belegungen durch den Verkehrsanteil λ_{im} zwischen Startknoten i und Mittelknoten m. Ferner ist x_i die Anzahl der durch den Verkehrsanteil λ_{in} verursachten Belegungen, die vom Startknoten i über Mittelknoten m zum Zielknoten n führen. Damit ein Zustand existieren kann, darf die Gesamtzahl der Belegungen auf einem Bündel die entsprechende Leitungszahl nicht überschreiten. Es gilt also

$$\sigma \leq x_i + z_i \leq N_i \qquad i = 1, 2, \ldots K \qquad (6a)$$

$$\sum_{i=1}^{K} x_i \leq N_m \qquad (6b)$$

Die Herleitung der Formeln für die Zustandswahrscheinlichkeiten wird nur für ZV2 angegeben. Die entsprechenden Ergebnisse für ZV1 erhält man daraus, wie in Anhang 2 gezeigt wird, durch einen Grenzübergang.

Bei z_i Belegungen von Knoten i bis Knoten m und gleichzeitig x_i Belegungen von i über m bis Knoten n gilt für die Anrufintensität eines neuen Anrufs zum Knoten m:

$$\lambda_{im}(x_i, z_i) = \alpha_{im} \cdot (q_i - x_i - z_i)$$

Für Anrufe zum Knoten n erhält man entsprechend:

$$\lambda_{in}(x_i, z_i) = \alpha_{in} \cdot (q_i - x_i - z_i)$$

Dabei sind α_{im} und α_{in} die Anrufraten einer freien Quelle im Knoten i für Belegungen zum Knoten m bzw. Knoten n.

Nach dem Prinzip von der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts bei stationärem Verkehr gilt, daß die Wahrscheinlichkeit für das Entstehen eines Zustands $\{x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K\}$ gleich ist wie die Wahrscheinlichkeit für sein Verschwinden.

In Abb.3 sind die Übergangsmöglichkeiten dargestellt, in die dieser Zustand in einem Zeitintervall Δt durch Eintreffen eines neuen Anrufs oder durch Enden einer bestehenden Belegung übergehen oder aus denen er entstehen kann.

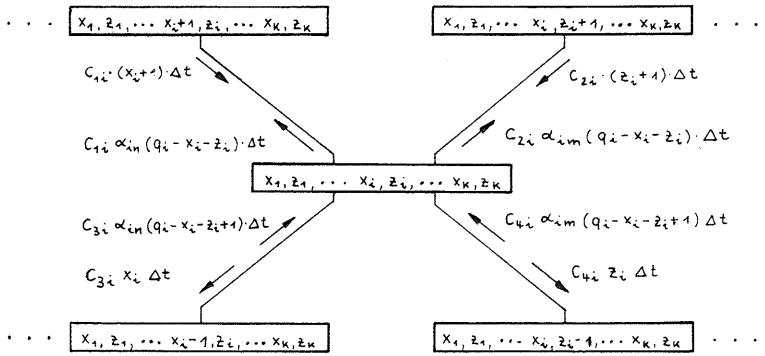


Abb.3: Übergangsmöglichkeiten für den Zustand $\{x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K\}$

Nach dem Prinzip von der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts erhält man damit folgendes lineare Gleichungssystem für die Zustandswahrscheinlichkeiten $[x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K]$:

$$\sum_{i=1}^{K} [x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K] \left\{ C_{1i}\, \alpha_{in} (q_i - x_i - z_i) + C_{2i}\, \alpha_{im} (q_i - x_i - z_i) + C_{3i} x_i + C_{4i} z_i \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{K} C_{1i} \cdot (x_i+1) \cdot [x_1, z_1, \dots x_i+1, z_i, \dots x_K, z_K]$$

$$+ \sum_{i=1}^{K} C_{2i} \cdot (z_i+1) \cdot [x_1, z_1, \dots x_i, z_i+1, \dots x_K, z_K]$$

$$+ \sum_{i=1}^{K} C_{3i} \cdot \alpha_{in} \cdot (q_i - x_i - z_i + 1) \cdot [x_1, z_1, \dots x_i-1, z_i, \dots x_K, z_K]$$

$$+ \sum_{i=1}^{K} C_{4i} \cdot \alpha_{im} \cdot (q_i - x_i - z_i + 1) \cdot [x_1, z_1, \dots x_i, z_i-1, \dots x_K, z_K] \qquad (7)$$

Dabei ist:

$$C_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{falls Zustand } \{x_1, z_1, \dots x_i+1, z_i, \dots x_K, z_K\} \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad i=1,2,\dots K$$

$$C_{2i} = \begin{cases} 1 & \text{falls Zustand } \{x_1, z_1, \dots x_i, z_i+1, \dots x_K, z_K\} \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad i=1,2,\dots K$$

$$C_{3i} = \begin{cases} 1 & \text{für } x_i > 0 \\ 0 & \text{für } x_i = 0 \end{cases} \qquad i=1,2,\dots K$$

$$C_{4i} = \begin{cases} 1 & \text{für } z_i > 0 \\ 0 & \text{für } z_i = 0 \end{cases} \qquad i=1,2,\dots K$$

Außerdem gilt, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller im System möglichen Zustände, d.h. aller Zustände, die die Bedingungen (6a) und (6b) erfüllen, gleich 1 ist.

$$\sum_{M} [x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K] = 1 \qquad (8)$$

Wie in Anhang 1 gezeigt wird, wird das Gleichungssystem (7) bis auf einen konstanten Faktor S_2 durch folgenden Ansatz gelöst:

$$[x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K] = \frac{1}{S_2} \prod_{i=1}^{K} \binom{q_i}{x_i} \alpha_{in}^{x_i} \binom{q_i - x_i}{z_i} \alpha_{im}^{z_i} \qquad (9a)$$

Die Konstante S_2 wird aus Gl.(8) berechnet.

Aus Gl.(9a) kann man durch einen Grenzübergang die Lösung für angebotenen Zufallsverkehr 1.Art bestimmen. Der Grenzübergang wird so durchgeführt, daß die Werte q_i gegen unendlich und gleichzeitig die Werte α_{im} und α_{in} gegen 0 gehen, so daß die Anrufintensitäten λ_{im} und λ_{in} d.h. die Produkte $\alpha_{im} \cdot q_i$ und $\alpha_{in} \cdot q_i$ konstant bleiben. Man bezeichnet mit

$$A_{im} = \lambda_{im} \cdot t_m$$

$$A_{in} = \lambda_{in} \cdot t_m$$

die Angebote von Knoten i zum Knoten m bzw. Knoten n.

Wie in Anhang 2 gezeigt wird, erhält man für ZV1:

$$[x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K] = \frac{1}{S_1} \prod_{i=1}^{K} \frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!} \frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!} \qquad (9b)$$

Die Konstante S_1 kann wieder mit Gl.(8) bestimmt werden.

2.4 Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit

Zur Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m des Bündels N_m werden zunächst die Wahrscheinlichkeiten $[x_1, \dots x_i, \dots x_K]$ bestimmt, daß über die K Zubringerbündel x_i Belegungen (i=1,2,...K) gleichzeitig auf Bündel N_m bestehen, unabhängig davon, wieviele Belegungen z_i zusätzlich zwischen den Knoten i und dem Knoten m vorhanden sind. Durch Summation über alle Werte z_i (i=1,2,...K) erhält man aus Gl.(9a):

$$[x_1, \dots x_i, \dots x_K] = \sum_{z_1=\sigma}^{N_1-x_1} \dots \sum_{z_i=\sigma}^{N_i-x_i} \dots \sum_{z_K=\sigma}^{N_K-x_K} [x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K]$$

$$= \frac{1}{S_2} \prod_{i=1}^{K} \left\{ \binom{q_i}{x_i} \alpha_{in}^{x_i} \sum_{z_i=\sigma}^{N_i-x_i} \binom{q_i - x_i}{z_i} \alpha_{im}^{z_i} \right\} \qquad (10a)$$

Entsprechend erhält man aus Gl.(9b) für ZV1:

$$[x_1, \dots x_i, \dots x_K] = \frac{1}{S_1} \prod_{i=1}^{K} \left\{ \frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!} \sum_{z_i=\sigma}^{N_i-x_i} \frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!} \right\} \qquad (10b)$$

Damit kann man die Wahrscheinlichkeit $[g_m]$ für g_m belegte Leitungen auf Bündel N_m bestimmen. Es ist

$$[g_m] = \sum_M [x_1, \dots x_i, \dots x_K] \qquad (11)$$

Die Summe $\sum_M$ erstreckt sich über alle diejenigen M Zustände $\{x_1, \dots x_i, \dots x_K\}$, die genau g_m Belegungen auf Bündel N_m verursachen, d.h. für die gilt:

$$g_m = \sum_{i=1}^{K} x_i \quad \text{mit} \quad \sigma \leq x_i \leq \text{Min}(N_i, g_m) \qquad (12)$$

Für $g_m = N_m$ erhält man dann für die Blockierwahrscheinlichkeit:

$$E_m = [N_m]$$

2.5 Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit

Für die Verlustwahrscheinlichkeit B_{mi} des Verkehrsanteils, der über Bündel N_i dem Bündel N_m im Knoten m angeboten wird, gilt nach Gl.(2):

$$B_{mi} = \frac{\sum_{q_i=\sigma}^{N_i-1} \lambda(q_i)\,[q_i, N_m]}{\sum_{q_i=\sigma}^{N_i-1} \lambda(q_i)\,[q_i]} \qquad i = 1,2,\dots K \qquad (2)$$

Wie daraus ersichtlich ist, muß man also zunächst die Wahrscheinlichkeiten $[g_i, g_m]$ bestimmen, daß auf Bündel N_i g_i Belegungen bestehen und gleichzeitig g_m Belegungen auf dem Bündel N_m. Diese Wahrscheinlichkeiten kann man aus den bereits berechneten Zustandswahrscheinlichkeiten $[x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_k, z_k]$ durch Summation über alle diejenigen Zustände bestimmen, die gerade g_i Belegungen auf Bündel N_i und g_m Belegungen auf Bündel N_m enthalten. Die Summation wird in zwei Schritten ausgeführt; zunächst wird über alle z_ν ($\nu = 1,2,\dots K$, $\nu \neq i$) summiert, dann über alle x_ν ($\nu = 1 \dots K$), die zum Zustand $\{g_i, g_m\}$ einen Beitrag liefern. Für ZV2 erhält man aus Gl.(9a):

$$[x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i, z_i, x_{i+1}, \dots x_K]$$

$$= \frac{1}{S_2} \binom{q_i}{x_i} \alpha_{in}^{x_i} \binom{q_i - x_i}{z_i} \alpha_{im}^{z_i} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{K} \binom{q_\nu}{x_\nu} \alpha_{\nu n}^{x_\nu} \sum_{z_\nu=\sigma}^{N_\nu - x_\nu} \binom{q_\nu - x_\nu}{z_\nu} \alpha_{\nu m}^{z_\nu} \qquad (13a)$$

Entsprechend erhält man aus Gl.(9b) für ZV1:

$$[x_1, x_2, \dots x_i, z_i, \dots x_K] = \frac{1}{S_1} \frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!} \frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!} \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{K} \frac{A_{\nu n}^{x_\nu}}{x_\nu!} \sum_{z_\nu=\sigma}^{N_\nu - x_\nu} \frac{A_{\nu m}^{z_\nu}}{z_\nu!} \qquad (13b)$$

Durch eine weitere Summation erhält man dann aus Gl.(13a) bzw. Gl.(13b):

$$[q_i, g_m] = \sum_{M} [x_1, x_2, \dots x_{i-1}, x_i, z_i, x_{i+1}, \dots x_K] \qquad (14)$$

Diese Summe enthält alle Zustände, für die gilt:

$$g_m = \sum_{i=1}^{K} x_i$$

$$\sigma \leq x_i \leq \mathrm{Min}(q_i, g_m) \qquad i = 1,2,\dots K$$

$$\sigma \leq x_\nu \leq \mathrm{Min}(N_\nu, g_m) \qquad \nu = 1,2,\dots K, \ \nu \neq i$$

Für die Randverteilung $[g_i]$ gilt:

$$[q_i] = \sum_{q_m=\sigma}^{N_m} [q_i, g_m] \qquad (15)$$

Mit Gl.(2), (14) und (15) kann man jetzt die gesuchten Verlustwahrscheinlichkeiten B_{mi} berechnen.

2.6 Vergleich der Blockierungs- mit der Verlust-wahrscheinlichkeit bei geglättetem ZV1

Wie in Abschnitt 2.2 hergeleitet wurde, gilt für die Verlustwahrscheinlichkeit des Verkehrs über das Zubringerbündel N_i:

$$B_{mi} = [N_m] \frac{1 - [N_i | N_m]}{1 - [N_i]}$$

Die Blockierungswahrscheinlichkeit ist:

$$E_m = [N_m]$$

Wegen des durchgehenden Verkehrs Y_{in}, der gleichzeitig in den Bündeln N_i und N_m Leitungen belegt, sind die Verteilungen $[g_i]$ auf Bündel N_i und $[g_m]$ auf Bündel N_m nicht unabhängig. Deshalb ist, wie in Anhang 6 gezeigt wird,

$$[N_i] \leq [N_i | N_m] \leq 1$$

und

$$B_{mi} \leq [E_m]$$

An einigen Beispielen wird nachstehend gezeigt, um wieviel die Verlustwahrscheinlichkeit B_m kleiner sein kann als die zugehörige Blockierungswahrscheinlichkeit E_m.
Da in diesen Beispielen symmetrische Strukturen mit gleichen Angeboten A_{im} und A_{in} und gleicher Leitungszahl N_i für jeden Zubringer betrachtet werden, ist der pauschale Verlust B_m gleich den Einzelverlusten B_{mi}. In den Diagrammen 1 und 2 Seite 116 ist dazu der Quotient B_m/E_m in Abhängigkeit von der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m aufgetragen.
Typisch für alle Kurven ist, daß der Quotient B_m/E_m mit zunehmendem E_m ansteigt. Dies beruht darauf, daß bei kleinen Blockierungen E_m der durchgehende Verkehrsanteil A_{in} eines Startknotens i, der ja die Abhängigkeit von $[g_i]$ und $[g_m]$

verursacht, sich im Knoten m besser "durchsetzen" kann als bei großen Blockierungen E_m.

In Diagramm 1 ist die Zahl K der Zubringerbündel der Parameter der Kurvenschar. Man sieht, daß die Abhängigkeit der Verteilungen $[g_i]$ und $[g_m]$ von kleinen zu größeren Werten K hin abnimmt. Dies beruht darauf, daß mit zunehmendem K der "Eigenbeitrag" der Belegungen eines Zubringerbündels an der Gesamtzahl g_m der Belegungen auf Bündel N_m abnimmt ($B_m/E_m \rightarrow 1$, für $K \rightarrow \infty$).

In Diagramm 2 ist der durchgehende Verkehrsanteil A_{in} Parameter der Kurvenschar. Man sieht, daß bei einem großen durchgehenden Verkehrsanteil dessen Verlustwahrscheinlichkeit B_{mi} beachtlich kleiner sein kann als die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m. Wenn

$$N_m = \sum_{i=1}^{K} N_i$$

ist, tritt der Sonderfall auf, daß bei $E_m > 0$ dennoch $B_m = 0$ ist. Es sind dann bei Vollbelegung (Blockierung) aller N_m Leitungen auch alle Bündel N_i ($1 \leq i \leq K$) gleichzeitig voll belegt, sodaß kein Anruf bis zum Knoten m gelangen und dort "verloren" gehen kann.

3. Exakte Berechnung von Mittelwert und Varianz eines geglätteten Angebots im Knoten m für den allgemeinen Fall von angebotenem ZV1 oder ZV2 in den Startknoten

Beim Streuwertverfahren zur Verlustberechnung von Bündeln mit angebotenem Überlaufverkehr (siehe [1], [2] und [3]) verwendet man zu einer hinreichend genauen Charakterisierung dieses Verkehrsangebots neben seinem Mittelwert noch dessen Varianz. In Kap. 4 und 5 werden auch für die näherungsweise Verlustberechnung von Bündeln mit einem geglätteten Angebot die exakt berechneten ersten beiden Momente von dessen Verteilung - für eine "Ersatzstruktur" - berücksichtigt. In diesem Kapitel werden deshalb für die Ersatzstruktur nach Abb.3 exakte Formeln für Mittelwert und Varianz hergeleitet.

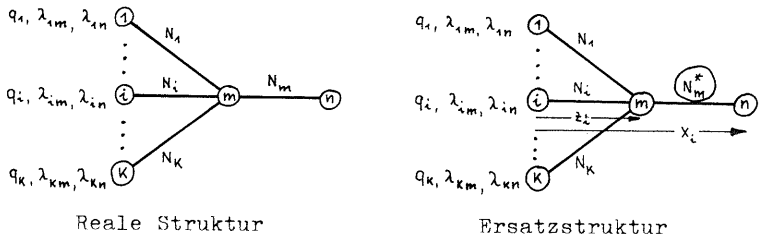


Abb.3: Ersatzstruktur mit N_m^* Leitungen anstelle der realen Leitungszahl N_m zur Berechnung von Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots

Zur Berechnung von Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots muß das Leitungsbündel N_m^*, dem dieser Verkehr angeboten wird (siehe Abb.3), so gewählt werden, daß <u>jeder</u> Anruf, der im Knoten m eintrifft, im Bündel N_m^* eine freie Leitung findet. Dies ist dann möglich, wenn gilt:

$$N_m^* = \sum_{i=1}^{K} N_i \qquad (16)$$

wobei real $N_m < N_m^*$ angenommen wird.

Da im Bündel N_m^* keine Verlustrufe entstehen, ist der Mittelwert der Verteilung auf Bündel N_m^* gleich dem Mittelwert des Gesamtangebots, das über alle Bündel N_i (i = 1,2, ... K) im Knoten m ankommt; die Varianz der Verteilung auf Bündel N_m^* ist gleich der Varianz des geglätteten Gesamtangebots im Knoten m. Es soll hier darauf hingewiesen werden, daß dieses Angebot sich im realen Falle mit $N_m < N_m^*$ Leitungen nicht einstellt. Dies beruht darauf, daß die Blockierungswahrscheinlichkeit E_i auf den Zubringerbündeln N_i und E_m auf Bündel N_m dann voneinander abhängig sind. Wenn bei gegebenen Anrufintensitäten α_{in} der Quellen in den Startknoten die reale Leitungszahl N_m reduziert wird, nimmt E_m zu und wegen der dadurch eingeschränkten Gleichzeitigkeit x_i die Blockierungswahrscheinlichkeit E_i am Eingang eines Startknotens i ab. Das reale geglättete Angebot an Bündel N_m steigt dadurch an!

Eine für die Berechnung von Mittelwert und Varianz wesentliche Eigenschaft ist, daß sich bei N_m^* Leitungen die Teilverkehre über die Zubringerbündel N_i auf dem Bündel N_m^* gegenseitig nicht beeinflussen. Die Zufallsvariablen, die die Werte x_i ($0 \leq x_i \leq N_i$, $1 \leq i \leq K$) annehmen, sind also gegenseitig statistisch unabhängig. Deshalb kann man nicht nur den Mittelwert, sondern auch die Varianz des Gesamtangebots durch <u>Summation</u> der Werte der Teilangebote berechnen. Es genügt also, für jedes Zubringerbündel N_i getrennt Mittelwert und Varianz seines geglätteten Angebots zu berechnen. Dazu wird eine Struktur nach Abb.4 betrachtet.

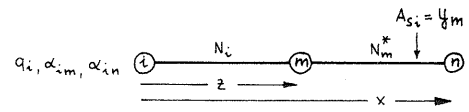


Abb.4: Ersatzstruktur zur Berechnung des geglätteten Angebots <u>eines</u> Zubringerbündels

Für die Wahrscheinlichkeit [x,z], daß z Belegungen zwischen den Knoten i und m bestehen, und gleichzeitig x Belegungen zwischen den Knoten i und n, erhält man für angebotenen Zufallsverkehr 2.Art aus Gl.(9a) für den Sonderfall K = 1 (Seite 22):

$$[x,z] = \frac{1}{S_2} \binom{q_i}{x} \alpha_{in}^{x} \binom{q_i - x}{z} \alpha_{im}^{z} \qquad (17a)$$

Entsprechend erhält man aus Gl.(9b) bei ZV1 mit den Angeboten A_{im} und A_{in} im Knoten i (Seite 22):

$$[x,z] = \frac{1}{S_1} \frac{A_{in}^{x}}{x!} \frac{A_{im}^{z}}{z!} \qquad (17b)$$

Für die Zustände {x,z} gelten folgende Bedingungen:

$$0 \leq x + z \leq N_i$$
$$x \leq N_m^*$$

Die zweite Bedingung ist für die Ersatzstruktur nach Abb.4 immer dann erfüllt, wenn auch die erste erfüllt ist, da nach Gl.(16) für Abb.4 $N_m^* = N_i$ ist.

Durch Summation über alle Werte z kann man die Verteilung [x] auf Bündel N_m^* bestimmen. Mit Gl.(17a) erhält man für ZV2:

$$[x] = \frac{1}{S_2} \binom{q_i}{x} \alpha_{in}^{x} \sum_{z=0}^{N_i - x} \binom{q_i - x}{z} \alpha_{im}^{z} \qquad (18a)$$

Für die Verteilung auf dem Zubringerbündel N_i erhält man, wenn man die Gesamtzahl der Belegungen mit $g_i = x + z$ bezeichnet:

$$[q_i] = \sum_{x=0}^{q_i} [x, q_i - x]$$

Mit Gl.(17a): $$[q_i] = \frac{1}{S_2} \sum_{x=0}^{q_i} \binom{q_i}{x} \alpha_{in}^{x} \binom{q_i - x}{q_i - x} \alpha_{im}^{q_i - x}$$

$$= \frac{1}{S_2} \binom{q_i}{q_i} (\alpha_{im} + \alpha_{in})^{q_i}$$

Aus $$\sum_{q_i=0}^{N_i} [q_i] = 1$$

erhält man: $$S_2 = \sum_{q_i=0}^{N_i} \binom{q_i}{q_i} (\alpha_{im} + \alpha_{in})^{q_i}$$

Damit ist: $$[q_i] = \frac{\binom{q_i}{q_i} (\alpha_{im} + \alpha_{in})^{q_i}}{\sum_{j=0}^{N_i} \binom{q_i}{j} (\alpha_{im} + \alpha_{in})^{j}} \qquad (19a)$$

Für den Fall $N_m^* > N_i$ ist die Verteilung auf dem Zubringerbündel N_i eine "Erlang-Bernoulli"-Verteilung [7].

Für ZV1 erhält man in entsprechender Weise aus Gl.(17b) für die Verteilung auf Bündel N_m^*:

$$[x] = \frac{1}{S_1} \frac{A_{in}^{x}}{x!} \sum_{z=0}^{N_i - x} \frac{A_{im}^{z}}{z!} \qquad (18b)$$

und für die Verteilung auf dem Zubringerbündel N_i eine "Erlang"-Verteilung:

$$[q_i] = \frac{\dfrac{(A_{im} + A_{in})^{q_i}}{q_i!}}{\sum_{j=0}^{N_i} \dfrac{(A_{im} + A_{in})^{j}}{j!}} \qquad (19b)$$

Wie in Anhang 3 gezeigt wird, erhält man aus Gl.(18a) für den Mittelwert der Verteilung auf Bündel N_m^*:

$$A_{si} = \sum_{x=\sigma}^{N_i} x \cdot [x]$$

$$= \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{im} + \alpha_{in}} \; Y(q_i, N_i) \qquad (20a)$$

Dabei ist $Y(q_i, N_i)$ der Mittelwert der Verteilung auf dem einzigen Zubringerbündel N_i. Für die Varianz der Verteilung [x] im Bündel N_m^* erhält man nach Anhang 3 (Seite 86):

$$V_{si} = \sum_{x=\sigma}^{N_i} x^2 [x] - A_{si}^2$$

$$= A_{si} \left\{ 1 + \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{im} + \alpha_{in}} \; Y(q_i - 1, N_i - 1) - A_{si} \right\} \qquad (21a)$$

$Y(q_i-1, N_i-1)$ ist der Mittelwert einer "Erlang-Bernoulli"-Verteilung mit q_i-1 Quellen und N_i-1 Leitungen.

Wenn dem Zubringerbündel N_i Zufallsverkehr erster Art angeboten wird, erhält man die in Anhang 4 hergeleiteten Formeln für Mittelwert A_{Si} und Varianz V_{Si} der Verteilung im Bündel N_m^*:

$$A_{si} = \frac{A_{in}}{A_{im} + A_{in}} \; Y(N_i) = A_{in} \cdot (1 - E_i) \qquad (20b)$$

$Y(N_i)$ ist die Belastung des Zubringerbündels N_i mit dem Angebot $A_{im} + A_{in}$, und E_i seine Blockierwahrscheinlichkeit:

$$E_i = \frac{\dfrac{(A_{im} + A_{in})^{N_i}}{N_i!}}{\displaystyle\sum_{j=\sigma}^{N_i} \frac{(A_{im} + A_{in})^j}{j!}}$$

Die Varianz der Verteilung im Bündel N_m^*, im Falle angebotenen ZV1 im Startknoten, ist:

$$V_{si} = A_{si} \left\{ 1 + \frac{A_{in}}{A_{im} + A_{in}} \; Y(N_i - 1) - A_{si} \right\} \qquad (21b)$$

$$= A_{si} - A_{in} \cdot E_i \cdot \left(\frac{A_{in}}{A_{im} + A_{in}} \; N_i - A_{si} \right)$$

Dabei ist $Y(N_i-1)$ die Belastung eines Bündels mit N_i-1 Leitungen und einem Angebot $A_{im} + A_{in}$ bei ZV1.

Wie in Anhang 4 gezeigt wird, besteht bei ZV2 folgender Zusammenhang zwischen Mittelwert A_{Si} und Varianz V_{Si} des geglätteten Verkehrs auf N_m^* einerseits und Mittelwert $Y(q_i, N_i)$ und Varianz $V(q_i, N_i)$ des Gesamtverkehrs von i nach m und von i nach n auf dem einzigen Zubringerbündel N_i andererseits:

$$A_{si} - V_{si} = \gamma^2 \left\{ Y(q_i, N_i) - V(q_i, N_i) \right\} \qquad (22a)$$

$$\frac{A_{si} - V_{si}}{A_{si}} = \gamma \; \frac{Y(q_i, N_i) - V(q_i, N_i)}{Y(q_i, N_i)} \qquad (23a)$$

$$\text{mit} \qquad \gamma = \frac{\alpha_{in}}{\alpha_{im} + \alpha_{in}} \qquad (24a)$$

Bezeichnet man bei ZV1 mit $Y(N_i)$ den Mittelwert der Verteilung auf Bündel N_i und mit $V(N_i)$ ihre Varianz, dann gilt bei ZV1 entsprechend:

$$A_{si} - V_{si} = \gamma^2 \left\{ Y(N_i) - V(N_i) \right\} \qquad (22b)$$

$$\frac{A_{si} - V_{si}}{A_{si}} = \gamma \; \frac{Y(N_i) - V(N_i)}{Y(N_i)} \qquad (23b)$$

$$\text{mit} \qquad \gamma = \frac{A_{in}}{A_{im} + A_{in}} \qquad (24b)$$

Aus dem Zufallsverkehrsangebot ($\alpha_{im} + \alpha_{in}$, q_i) an ein Bündel N_i kann also in einfacher Weise Mittelwert A_{Si} und Varianz V_{Si} jenes geglätteten Verkehrs berechnet werden, welcher von diesem Bündel im Mittelknoten m einem verlustfreien Ersatzbündel N_m^* angeboten wird.

Mit der in Gl.(16) Seite 28 genannten Bedingung für die Größe des verlustfreien Ersatzbündels

$$N_m^* = \sum_{i=1}^{K} N_i \qquad (16)$$

kann man nun - wegen der statistischen Unabhängigkeit der einzelnen Teilverkehre A_{Si} im verlustfreien Bündel N_m^* - auch Mittelwert A_{SG} des Gesamtangebots an N_m^* und dessen Varianz V_{SG} sofort angeben:

$$A_{SG} = \sum_{i=1}^{K} A_{Si} \qquad (25)$$

$$V_{SG} = \sum_{i=1}^{K} V_{Si} \qquad (26)$$

4. Das Zweimomentenverfahren zur näherungsweisen Berechnung von geglättetem ZV1 und ZV2

Das Näherungsverfahren zur Berechnung von geglättetem Zufallsverkehr setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Im ersten Teil werden die Parameter von Ersatzstrukturen bestimmt, mit denen ein geglätteter Verkehr mit vorgegebenen Werten für Mittelwert und Varianz erzeugt werden kann. Die erste Ersatzstruktur verwendet anstelle der $K > 1$ Zubringerbündel ein Ersatzzubringerbündel mit N^* Leitungen. Diese Struktur liefert in vielen aber nicht allen Fällen bereits ausreichend gute Näherungswerte für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und für die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m des Gesamtverkehrs, der im Mittelknoten m dem realen weiterführenden Bündel mit N_m Leitungen angeboten wird.

Bei der zweiten Ersatzstruktur werden $K > 1$ reale Zubringerbündel ersetzt durch zwei Zubringerbündel. Eines der Ersatzbündel ist identisch mit dem betrachteten realen Bündel N_i, das zweite Ersatzbündel repräsentiert den Summenverkehr, die Summenvarianz und die Leitungszahl

$$N_\tau = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i}}^{K} N_i$$

der übrigen Zubringerbündel. Diese Struktur liefert etwas genauere Werte für E_m und B_m, außerdem auch sehr gute Näherungswerte für die Einzelverlustwahrscheinlichkeiten B_{mi} jedes Einzelangebots im Mittelknoten m an das reale weiterführende Bündel mit N_m Leitungen.

Bei beiden Ersatzstrukturen wird die Gesamtzahl der Leitungen aller realen Zubringerbündel, über die geglätteter Verkehr dem Mittelknoten m angeboten wird, berücksichtigt.

Dies ist für die Genauigkeit der beiden Verfahren sehr wesentlich.

Im zweiten Teil des Näherungsverfahrens werden dann die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und die Verlustwahrscheinlichkeiten B_m bzw. B_{mi} für das reale Bündel mit N_m Leitungen berechnet.

4.1 Die Ersatzstruktur mit einem Ersatzzubringerbündel zur Erzeugung eines geglätteten Verkehrs mit vorgegebenen Parametern

Zur Erzeugung des nach Gl. (25) und (26) bereits berechneten Angebots (A_{SG}, V_{SG}) wird nach Abb. 5 eine Ersatzstruktur gewählt, bei der dem Bündel N_m^* über ein Zubringerbündel N^* geglätteter Verkehr angeboten wird.

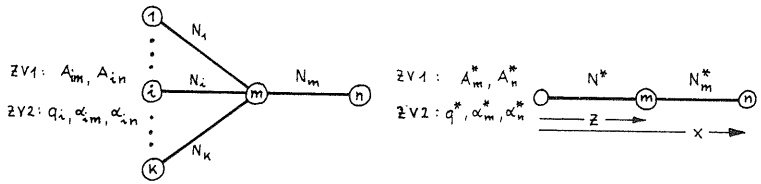


Abb.5: Reale Struktur und Struktur der Ersatzanordnung des Näherungsverfahrens

Bei geglättetem ZV1 im Knoten m werden dem Zubringerbündel N^* zwei Zufallsverkehre 1. Art A_m^* und A_n^* angeboten. Für die Berechnung von geglättetem ZV2 wird angenommen, daß dem Zubringerbündel N^* Zufallsverkehr 2. Art von q^* Quellen mit den Anrufraten α_m^* und α_n^* pro freier Quelle angeboten wird.

Die Parameter der Ersatzanordnung werden in folgender Weise bestimmt. Die Leitungszahl N^* wird bei geglättetem ZV1 und ZV2 gleich der Summe der tatsächlich vorhandenen Zubringerleitungen der realen Struktur nach Abb. 2 Seite **14** gewählt:

$$N^* = \sum_{i=1}^{K} N_i \qquad (27)$$

Dadurch ist die maximale Anzahl der gleichzeitig möglichen Anrufe bei der Ersatzanordnung und der allgemeinen Anordnung gleich. Diese Eigenschaft des geglätteten Verkehrs würde allein durch die Angabe von Mittelwert und Varianz nicht genau genug beschrieben. Bei ZV2 gilt für die Quellenzahl q^* entsprechend:

$$q^* = \sum_{i=1}^{K} q_i \qquad (28)$$

Die "Ersatzangebote" A_m^* und A_n^* bzw. die Anrufraten α_m^* und α_n^* müssen so gewählt werden, daß Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots an das Bündel N_m^* die bereits berechneten Werte A_{SG} und V_{SG} besitzen. Wie bereits in Kap. 3 Seite 28 beschrieben wurde, sind diese beiden Parameter gleich dem Mittelwert und der Varianz auf Bündel N_m^*, solange $N_m^* = N^*$ ist. Da dieser Fall bereits in Kap. 2 untersucht wurde, kann man die dort hergeleiteten Formeln auch hier anwenden. Bei geglättetem ZV1 erhält man aus Gl. (20b) Seite 32 für den Mittelwert des geglätteten Angebots:

$$A_{SG} = \frac{A_n^*}{A_m^* + A_n^*} \; y(N^*) \qquad (29a)$$

und für die Varianz aus Gl. (21b):

$$V_{SG} = A_{SG} \left\{ 1 + \frac{A_n^*}{A_m^* + A_n^*} \; y(N^*-1) - A_{SG} \right\} \qquad (30a)$$

Dabei ist $Y(N^*)$ die Belastung des Ersatz-Zubringerbündels mit N^* Leitungen bei ZV1 mit dem Angebot $A_m^* + A_n^*$.

Wenn dem Bündel N_m^* geglätteter ZV2 angeboten wird, erhält man aus Gl.(20a):

$$A_{SG} = \frac{\alpha_n^*}{\alpha_m^* + \alpha_n^*} \; Y(q^*, N^*) \qquad (29b)$$

und aus Gl.(21a) für die Varianz:

$$V_{SG} = A_{SG} \left\{ 1 + \frac{\alpha_n^*}{\alpha_m^* + \alpha_n^*} \; Y(q^*-1, N^*-1) - A_{SG} \right\} \qquad (30b)$$

$Y(q^*, N^*)$ ist der Mittelwert der Verteilung auf dem Ersatz-Zubringerbündel N^*, dem ZV2 von q^* Quellen, je mit einer Anrufrate $\alpha_m^* + \alpha_n^*$ angeboten wird.

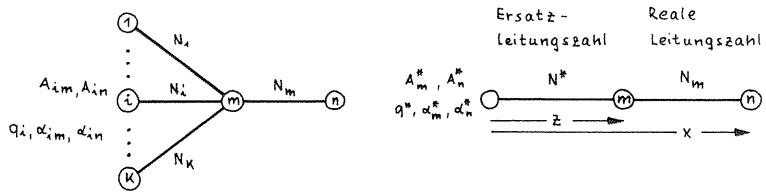
Bei vorgegebenen Werten für q^*, N^*, A_{SG} und V_{SG} kann man aus Gl.(29a) und (30a) die "Ersatz-Angebote" A_m^* und A_n^* durch ein Iterationsverfahren bestimmen. Entsprechend kann man aus Gl.(29b) und (30b) die Anrufraten α_m^* und α_n^* berechnen.

Dieses Verfahren mit einer Ersatzstruktur mit <u>einem</u> Bündel N^* nach Abb. 5 führt nicht immer zum Erfolg, weil nicht für alle denkbaren, vorzuschreibenden Wertetripel (A_{SG}, V_{SG}, N^*) die Gleichungen (29) und (30) durch Iteration der Ersatzangebote A_m^* und A_n^* bzw. α_m^* und α_n^* erfüllt werden können (siehe Kap. 4.4).

4.2 Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und der pauschalen Verlustwahrscheinlichkeit B_m mit einer Ersatzstruktur, die ein Ersatzzubringerbündel verwendet

4.2.1 Die Zustandswahrscheinlichkeiten für die Ersatzstruktur

In Kap. 4.1 wurde eine Ersatzanordnung vorgestellt, die einen geglätteten Verkehr mit vorgegebenen Parametern (A_{SG}, V_{SG}) erzeugt. In diesem Kapitel werden jetzt die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m berechnet, wenn man den von der Ersatzanordnung erzeugten geglätteten Verkehr einem realen Leitungsbündel mit N_m Leitungen anbietet. Dabei wird die in Abb.6 dargestellte Struktur verwendet. Für die folgenden Berechnungen wird nur der Fall $N_m \leq N^*$ betrachtet, da bei $N_m > N^*$ Leitungen Blockierung E_m und Verlust B_m Null sind .



Reale Struktur Ersatzstruktur

Abb. 6: Struktur zur Berechnung der Blockierung E_m und des Pauschalverlusts B_m

Zunächst sind wieder - für die Ersatzstruktur - die Zustandswahrscheinlichkeiten [x,z] exakt zu berechnen. Dabei ist z die Anzahl der Belegungen, die nur Leitungen im Zubringerbündel N^* belegen, während x die Anzahl der

über beide Bündel durchgehenden Belegungen ist. Aus Gl. (9a) für die exakte Lösung bei K Zubringerbündeln erhält man bei dem hier vorliegenden Fall mit K = 1 für die Zustandswahrscheinlichkeiten bei geglättetem ZV2:

$$[x,z] = \frac{\binom{q^*}{x} \alpha_n^{*x} \binom{q^*-x}{z} \alpha_m^{*z}}{\sum_{i=0}^{N_m} \binom{q^*}{i} \alpha_n^{*i} \sum_{j=0}^{N^*-i} \binom{q^*-i}{j} \alpha_m^{*j}} \qquad (31a)$$

Entsprechend erhält man für geglätteten ZV1 aus Gl.(9b) (Seite 22):

$$[x,z] = \frac{\frac{A_n^{*x}}{x!} \frac{A_m^{*z}}{z!}}{\sum_{i=0}^{N_m} \frac{A_n^{*i}}{i!} \sum_{j=0}^{N^*-i} \frac{A_m^{*j}}{j!}} \qquad (31b)$$

Durch Summation über alle Werte z kann man die Verteilung auf Bündel N_m bestimmen.

$$[x] = \sum_{z=0}^{N^*-x} [x,z] \qquad (32)$$

4.2.2 Die Blockierungswahrscheinlichkeit

Mit $x = N_m$ erhält man aus Gl.(32) für die gesuchte Blockierungswahrscheinlichkeit:

$$E_m = [N_m]$$

Mit Gl.(31a) und (32) erhält man bei geglättetem ZV2:

$$E_m = \frac{\binom{q^*}{N_m} \alpha_n^{*N_m} \sum_{z=0}^{N^*-N_m} \binom{q^*-N_m}{z} \alpha_m^{*z}}{\sum_{i=0}^{N_m} \binom{q^*}{i} \alpha_n^{*i} \sum_{j=0}^{N^*-i} \binom{q^*-i}{j} \alpha_m^{*j}} \qquad (33a)$$

Bei geglättetem ZV1 ist nach Gl.(31b) und (32):

$$E_m = \frac{\frac{A_n^{*N_m}}{N_m!} \sum_{z=0}^{N^*-N_m} \frac{A_m^{*z}}{z!}}{\sum_{i=0}^{N_m} \frac{A_n^{*i}}{i!} \sum_{j=0}^{N^*-i} \frac{A_m^{*j}}{j!}} \qquad (33b)$$

4.2.3 Die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit

Für die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit erhält man aus Gl.(4b) bei geglättetem ZV2 (Seite 18):

$$B_m = \frac{\sum_{g=0}^{N^*-1} (q^*-g)\,[g,N_m]}{\sum_{g=0}^{N^*-1} (q^*-g)\,[g]} \qquad (34a)$$

Dabei ist g die Gesamtzahl der Belegungen auf Bündel N^*

$$g = x + z$$

und $[g,x]$ die Wahrscheinlichkeit, daß insgesamt g Belegungen auf Bündel N^* und gleichzeitig x Belegungen auf Bündel N_m bestehen. Aus Gl.(31a) erhält man mit $z = (g-x)$:

$$[g,x] = \frac{\binom{q^*}{x} \alpha_n^{*x} \binom{q^*-x}{g-x} \alpha_m^{*(g-x)}}{\sum_{i=0}^{N_m} \binom{q^*}{i} \alpha_n^{*i} \sum_{j=0}^{N^*-i} \binom{q^*-i}{j} \alpha_m^{*j}} \qquad (35a)$$

Bei geglättetem ZV1 ist nach Gl.(4a) (Seite 18):

$$B_m = \frac{[N_m] - [N^*,N_m]}{1 - [N^*]} \qquad (34b)$$

Aus Gl.(31b) erhält man für die Wahrscheinlichkeit $[g,x]$:

$$[g,x] = \frac{\dfrac{A_n^{*x}}{x!}\,\dfrac{A_m^{*(g-x)}}{(g-x)!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{N_m}\frac{A_n^{*i}}{i!}\sum_{j=0}^{N^*-i}\frac{A_m^{*j}}{j!}} \qquad (35\,b)$$

Die Verteilung auf dem Zubringerbündel N^* ist:

$$[g] = \sum_{x=0}^{g}[g,x] \qquad (36)$$

Mit den Gl.(34a,b), (35a,b) und (36) kann man jetzt die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m berechnen.

4.3 Berechnung der Einzelverlustwahrscheinlichkeiten

4.3.1 Die Ersatzstruktur mit zwei Zubringerbündeln

Für die Verlustwahrscheinlichkeit B_{mi} des Verkehrsanteils, der über Bündel N_i dem Bündel N_m angeboten wird, wurde in Kap. 2 folgende Formel hergeleitet (Seite 17):

$$B_{mi} = \frac{\displaystyle\sum_{q_i=0}^{N_i-1}\lambda_{in}(q_i)\cdot[q_i,N_m]}{\displaystyle\sum_{q_i=0}^{N_i-1}\lambda_{in}(q_i)\cdot[q_i]} \qquad i = 1, 2, \ldots K \qquad (2)$$

Dabei ist:

$$\lambda_{in}(q_i) = \begin{cases} \alpha_{in}(q_i - q_i) & \text{für ZV2} \\ A_{in} & \text{für ZV1 (mit } t_m = 1) \end{cases}$$

Aus Gl.(2) ist ersichtlich, daß bei ungleichen Anrufraten α_{in} oder bei ungleichen Leitungszahlen N_i auch die Einzelverlustwahrscheinlichkeiten B_{mi} unterschiedlich sind. Dies beruht darauf, daß der Verlust B_{mi} nicht nur vom Zustand des Bündels N_m abhängt, sondern auch vom Verkehr von Knoten i über m nach n, der seinerseits wieder beeinflußt wird von jenem Verkehr mit der Anrufrate α_{im} pro Quelle, der nur Leitungen zwischen i und m auf dem Bündel N_i belegt.

Um diese Tatsache auch beim Näherungsverfahren berücksichtigen zu können, wird bei der Berechnung der Einzelverluste B_{mi} stets eine Ersatzstruktur mit zwei Zubringerbündeln (Abb. 7) gewählt (vgl. Kap. 4.1).

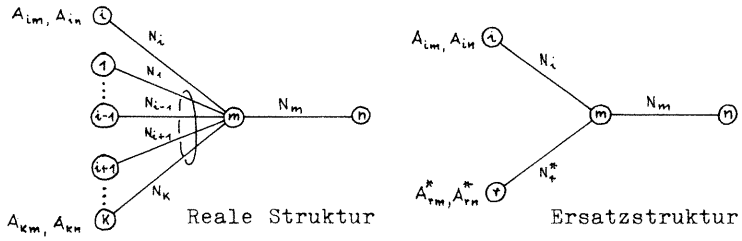


Abb. 7: Reale Struktur und Ersatzstruktur zur Berechnung der Einzelverluste B_{mi}

Das eine Zubringerbündel N_i der Ersatzanordnung ist identisch mit demjenigen Zubringerbündel der allgemeinen Struktur nach Abb. 2, für dessen Verkehrsanteil man die Verlustwahrscheinlichkeit berechnen will. Dadurch werden dessen Parameter N_i, α_{im}, α_{in} und q_i bzw. A_{im} und A_{in} exakt erfaßt. Die übrigen (K-1) Zubringerbündel der allgemeinen Struktur werden zu einem zweiten Ersatzzubringerbündel zusammengefaßt. Zur Bestimmung seiner Parameter q_r^*, α_{rm}^*, α_{rn}^* bzw. A_{rm}^* und A_{rn}^* werden zunächst Mittelwert und Varianz des über diese Bündel im Knoten m angebotenen Verkehrs berechnet (vgl. Kap. 3 Seite 28). Dazu wird ein Ersatzabnehmerbündel mit

$$N_m^* = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{K} N_j$$

Leitungen verwendet.

Es ist:

$$N_r^* = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^{K} N_\mu \qquad (37)$$

$$q_r^* = \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq i}}^{K} q_\mu \qquad (38)$$

Die Angebote A_{rm}^* und A_{rn}^* bzw. die Anrufraten α_{rm}^* und α_{rn}^* werden so bestimmt, daß dem Ersatzabnehmerbündel N_m^* ein geglätteter Verkehr mit gleichem Mittelwert und gleicher Varianz angeboten wird, wie er von den übrigen (K-1) Zubringerbündeln der allgemeinen Struktur angeboten wird.

4.3.2 Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten

Zur Berechnung der Einzelverlustwahrscheinlichkeiten B_{mi} müssen zunächst die Zustandswahrscheinlichkeiten für die Ersatzstruktur mit dem realen Abnehmerbündel N_m berechnet werden.

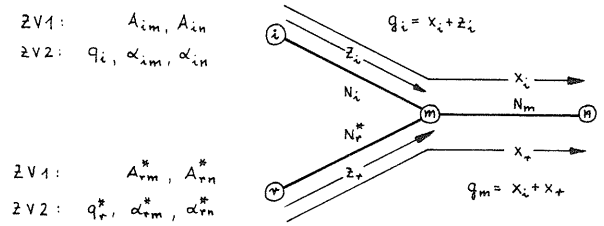


Abb. 8: Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten der Ersatzstruktur

Die hier zu untersuchende Ersatzstruktur mit zwei Ersatzzubringerbündeln N_i und N_r^* ist ein Sonderfall der in Kap. 2 exakt berechneten Struktur mit K Zubringerbündeln.

Man kann deshalb die dort hergeleiteten Formeln für die Zustandswahrscheinlichkeiten des Gesamtsystems hier übernehmen. Nach Gl.(9a) ist bei ZV2 (Seite 22):

$$[x_i, z_i, x_r, z_r] = \frac{1}{S_2} \binom{q_i}{x_i} \alpha_{in}^{x_i} \binom{q_i - x_i}{z_i} \alpha_{im}^{z_i} \binom{q_r^*}{x_r} \alpha_{rn}^{*x_r} \binom{q_r^* - x_r}{z_r} \alpha_{rm}^{*z_r} \qquad (39a)$$

Wenn den Zubringerbündeln ZV1 angeboten wird, ist nach Gl.(9b) (Seite 22):

$$[x_i, z_i, x_r, z_r] = \frac{1}{S_1} \frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!} \frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!} \frac{A_{rn}^{*x_r}}{x_r!} \frac{A_{rm}^{*z_r}}{z_r!} \qquad (39b)$$

Dabei ist:

$$0 \leq x_i \leq N_i \qquad 0 \leq z_i \leq N_i - x_i$$
$$0 \leq x_r \leq N_r^* \qquad 0 \leq z_r \leq N_r^* - x_r$$
$$0 \leq x_i + x_r \leq N_m$$

Daraus kann man jetzt die Wahrscheinlichkeiten $[g_i, g_m]$, daß g_i Belegungen auf Bündel N_i und gleichzeitig g_m Belegungen auf Bündel N_m bestehen, berechnen.

Mit $z_i = g_i - x_i$
und $x_r = g_m - x_i$
erhält man:

$$[g_i, g_m] = \sum_{x_i = a}^{b} \sum_{z_r = 0}^{N_r^* - g_m + x_i} [x_i, g_i - x_i, g_m - x_i, z_r] \qquad (40)$$

Dabei ist:

$$a = \mathrm{Max}(0, g_m - N_r^*)$$
$$b = \mathrm{Min}(g_i, g_m)$$

Für geglätteten ZV2, der an Bündel N_m angeboten wird, erhält man aus Gl.(39a):

$$[g_i, g_m] = \frac{\binom{q_i}{g_i}}{S_2} \sum_{x_i = a}^{b} \binom{g_i}{x_i} \alpha_{in}^{x_i} \alpha_{im}^{g_i - x_i} \binom{q_r^*}{g_m - x_i} \alpha_{rn}^{*(g_m - x_i)} \sum_{z_r = 0}^{N_r^* - g_m + x_i} \binom{q_r^* - g_m + x_i}{z_r} \alpha_{rm}^{*z_r} \qquad (41a)$$

Entsprechend erhält man aus Gl.(39b) für geglätteten ZV1:

$$[q_i, g_m] = \frac{1}{S_1 \cdot g_i!} \sum_{x_i=a}^{b} \binom{g_i}{x_i} A_{in}^{x_i} A_{im}^{(q_i-x_i)} \frac{A_{rn}^{*(g_m-x_i)}}{(g_m-x_i)!} \sum_{z_r=\sigma}^{N_r^*-g_m+x_i} \frac{A_{rm}^{*z_r}}{z_r!} \qquad (41b)$$

4.3.3 Die Einzelverlustwahrscheinlichkeit

Für die Einzelverlustwahrscheinlichkeit B_{mi} eines geglätteten Angebots, das von q_i Quellen mit den Anrufraten α_{im} und α_{in} über Bündel N_i im Knoten m eintrifft, gilt nach Gl.(4b) S. 18:

$$B_{mi} = \frac{\sum_{g_i=\sigma}^{N_i-1} (q_i - g_i)\,[g_i, N_m]}{\sum_{g_i=\sigma}^{N_i-1} (q_i - g_i)\,[g_i]} \qquad (4b)$$

Bei geglättetem ZV1 ist nach Gl.(4a) (Seite 18):

$$B_{mi} = \frac{[N_m] - [N_i, N_m]}{1 - [N_i]} \qquad (4a)$$

Zur Bestimmung von B_{mi} benötigt man also neben der im vorigen Abschnitt 4.3.2 bereits berechneten Verteilung $[g_i, g_m]$ noch die Verteilungen auf den Bündeln N_i und N_m. Für die Wahrscheinlichkeit, daß g_m Belegungen auf Bündel N_m bestehen, gilt:

$$[g_m] = \sum_{g_i=\sigma}^{N_i} [g_i, g_m] \qquad (42)$$

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, daß auf dem Zubringerbündel N_i gerade g_i Leitungen belegt sind:

$$[g_i] = \sum_{g_m=\sigma}^{N_m} [g_i, g_m] \qquad (43)$$

Mit Gl.(4a,b), (41a,b), (42) und (43) kann man die Einzelverlustwahrscheinlichkeit B_{mi} der Teilverkehre über die einzelnen Zubringerbündel näherungsweise berechnen.

Aus Gl.(43) kann man auch die Verlustwahrscheinlichkeit des im Zubringerknoten i angebotenen Verkehrs bestimmen. Bei angebotenem ZV1 ist:

$$B_i = [N_i]$$

und bei angebotenem ZV2:

$$B_i = [N_i] \frac{q_i - N_i}{q_i - Y_i}$$

Dabei ist Y_i die gesamte Belastung des Zubringerbündels durch den Verkehr von i nach m und nach n.

4.3.4 Blockierungswahrscheinlichkeit und pauschale Verlustwahrscheinlichkeit

Mit der Ersatzstruktur mit zwei Ersatzzubringerbündeln kann man auch die Blockierungswahrscheinlichkeit und die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit näherungsweise berechnen. Mit $g_m = N_m$ erhält man aus Gl.(41a,b) und (42) für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m des Abnehmerbündels N_m, das von m nach n führt:

$$E_m = [N_m] = \sum_{g_i=\sigma}^{N_i} [g_i, N_m] \qquad (44)$$

Außerdem kann man auch einen Näherungswert für die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m bestimmen.
Es gilt nach Gl.(3) Seite 17 :

$$B_m = \frac{\sum_{i=1}^{K} \sum_{q_i=\sigma}^{N_i-1} \lambda_{in}(q_i) \cdot [q_i, N_m]}{\sum_{i=1}^{K} \sum_{q_i=\sigma}^{N_i-1} \lambda_{in}(q_i) \, [q_i]} \qquad (45)$$

Dabei ist:

$$\lambda_{in}(q_i) = \begin{cases} \alpha_{in} \cdot (q_i - q_i) & \text{bei ZV2} \\ A_{in} & \text{bei ZV1} \quad (\text{mit } t_m = 1) \end{cases}$$

4.4 Grenzfälle für die Ersatzanordnung mit einem Zubringerbündel

In Kap. 4.1 Seite 38 war bei der Behandlung der Ersatzstruktur mit einem Ersatzzubringerbündel N^* und einem Ersatzabnehmerbündel N_m^* bemerkt worden, daß nicht in allen Fällen für das gewünschte Wertepaar A_{SG}, V_{SG} für das geglättete Angebot im Knoten m eine entsprechende Ersatzstruktur gefunden werden kann, die diesen geglätteten Verkehr erzeugt. Dies hat folgende Ursache:

Bei festen Werten für A_{SG} und N^* gibt es eine untere und eine obere Schranke für die Varianz des geglätteten Angebots, zwischen denen der vorgegebene Wert liegen muß, damit eine Lösung der Gl.(29a), (30a) bzw. (29b), (30b)

Seite 37 möglich ist. Wie in Anhang 5 Seite 95 gezeigt wird, erhält man bei geglättetem Zufallsverkehr 1.Art als obere Schranke für die Varianz:

$$V_{Smax} = A_{SG} - (A^* - A_{SG}) \, (N^* - A_{SG}) \qquad (46)$$

Dabei ist A^* das Zufallsangebot, das auf den N^* Zubringerleitungen eine Belastung $Y(N^*)$ erzeugt, die gerade gleich dem Mittelwert A_{SG} des geglätteten Angebots ist.

$$Y(N^*) = A_{SG} \qquad (47)$$

Die untere Schranke für die Varianz V_{SG} erhält man beim Grenzübergang $A_m^* + A_n^* \longrightarrow \infty$. Wie in Anhang 5 Seite 95 gezeigt wird, erhält man:

$$V_{Smin} = A_{SG} \left(1 - \frac{A_{SG}}{N^*}\right) \qquad (48)$$

Entsprechende Schranken ergeben sich auch bei geglättetem Zufallsverkehr 2. Art.

Bei der Untersuchung verschiedener Beispiele zeigte sich, daß bei realen Strukturen mit sehr unterschiedlichen Angeboten A_{im} und A_{in} und sehr unterschiedlichen Leitungszahlen N_i der Zubringerbündel der Fall auftreten kann, daß die Varianz V_{SG} kleiner als die untere Schranke V_{Smin} ist. Wie aus Gl.(48) ersichtlich ist, könnte man unter Verzicht auf die Bedingung Gl.(27) Seite 37 eine Leitungszahl N^{**} kleiner als N^* so wählen, daß die untere Schranke V_{Smin} kleiner als der vorgegebene Wert V_{SG} wird. Es zeigt sich jedoch, daß dies die Genauigkeit des Verfahrens stark beeinträchtigen würde. Dies ist aus den Diagrammen 3 bis 8 ersichtlich, bei denen die relative Abweichung des Näherungswertes mit einem Ersatzzubringerbündel vom exakten Wert der Blockierungswahrscheinlichkeit

$$\varrho = \frac{E_m(\text{Näherung}) - E_m(\text{exakt})}{E_m(\text{exakt})}$$

in Abhängigkeit von der Leitungszahl N^{**} bei festen Werten

für A_{SG} und V_{SG} dargestellt ist. Die Leitungszahl N_m ist Parameter der Kurvenschar.

In Diagr. 3 bis 5 (Seite 118) ist $\varrho = f(N^{**})$ dargestellt für Fälle, bei denen die Ersatzanordnung die gewünschten Wertepaare A_{SG}, V_{SG} unter Einhaltung der Bedingung

$$N^{**} = N^{*} = \sum_{i=1}^{K} N_i$$

liefert. Andere Werte N^{**} führen - besonders bei $N^{**} < N^{*}$ zu sehr ungenauen Werten für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m.

In den Diagrammen 6 bis 8 ist $\varrho = f(N^{**})$ dargestellt für Fälle, bei denen mit

$$N^{*} = \sum_{i=1}^{K} N_i$$

kein Wertepaar A_m^*, A_n^* bzw. α_m^*, α_n^* gefunden werden kann, welches mit Gl.(29) und (30) die Sollwerte A_{SG} und V_{SG} liefert. Eine notwendigerweise willkürliche Wahl von $N^{**} < N^{*}$ liefert je nach Größe des realen Bündels N_m ganz unterschiedliche, oft völlig falsche Werte für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m. Entsprechend schlechte Werte ergeben sich auch für die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m, die eine Funktion von $[N_m]$ und $[N^{**}]$ ist (vgl. Gl.(4a) Seite 18).

Es zeigte sich jedoch, daß man in diesen Fällen durch eine Ersatzanordnung mit <u>zwei</u> Zubringerbündeln (Abb. 7) Seite 43, wie sie auch ähnlich zur Berechnung der Einzelverluste verwendet wird, ebenfalls gute Ergebnisse für E_m und B_m erhält. Die beiden Ersatzzubringerbündel der Ersatzanordnung werden hier jedoch in anderer Weise gebildet, wofür sich aus einer Reihe von Untersuchungen folgende Gesichtspunkte ergaben:

a) Es sind solche realen Zubringerbündel zu <u>einem</u> Ersatzzubringerbündel zusammenzufassen, bei denen der Quotient $\frac{V_{si}}{A_{si}}$ ähnliche Werte hat. Zubringerbündel mit stark geglättetem Angebot werden also zweckmäßigerweise zu einem der beiden Ersatzzubringerbündel zusammengefaßt und Bündel mit schwach geglättetem Angebot zum anderen Ersatzzubringerbündel.

b) Wenn über ein Bündel ein relativ großer Anteil des Gesamtverkehrs angeboten wird, dann ist es günstig, dieses Bündel als eines der Ersatzbündel zu wählen und alle anderen Bündel zum zweiten Ersatzbündel zusammenzufassen.

c) Für die Genauigkeit des Verfahrens ist es ferner zweckmäßig, die Zusammenfassung so durchzuführen, daß bei jedem Ersatzbündel dessen

$$\sum_i V_{si} \gg V_{s\,min} \quad \text{(s. Gl.(48), Seite 49}$$

ist.

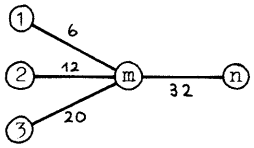
Die nachstehend besprochenen Untersuchungen ergaben, daß die Genauigkeit des Näherungsverfahrens mit zwei Zubringerbündeln, die nach obigen Gesichtspunkten gebildet wurden, stets besser ist, auch dort, wo das Näherungsverfahren mit einem Zubringerbündel noch möglich wäre.

Dies zeigen die numerischen Ergebnisse in den Tab. 1 bis 8, Seite 107. Hier sind die Werte für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m dargestellt. Angegeben sind die exakten Werte, die Werte des Näherungsverfahrens mit zwei Ersatzzubringern und, falls eine Realisierung mit einem Ersatzzubringerbündel möglich war, auch dessen Ergebnisse.

4.5 Beispiel für das Näherungsverfahren

Als Beispiel für das Näherungsverfahren wird folgende reale Struktur gewählt:

i	A_{im}	A_{in}
1	0,5	3
2	1,5	9
3	3,0	18



4.5.1 Das exakte Berechnungsverfahren

Nach Kap. 2 Seite 14 erhält man bei der exakten Berechnung folgende Ergebnisse:

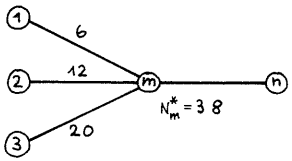
Blockierungswahrscheinlichkeit	$E_m = 1{,}877\ \%$
Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit	$B_m = 1{,}312\ \%$
Einzelverlustwahrscheinlichkeiten	$B_{m1} = 1{,}516\ \%$
	$B_{m2} = 1{,}255\ \%$
	$B_{m3} = 1{,}143\ \%$

4.5.2 Die Momente des geglätteten Angebots

Für die Berechnung der Momente des geglätteten Angebots wird eine Struktur mit einem Ersatzabnehmerbündel mit

$$N_m^* = \sum_{i=1}^{3} N_i = 38$$

Leitungen betrachtet.



Mit Gl. (20b) und (21b) Seite 32 erhält man:

i	A_{Si}	V_{Si}
1	2,75	2,16
2	7,75	4,57
3	14,69	6,54

Für das Gesamtangebot erhält man mit Gl. (25) und (26) Seite 34 :

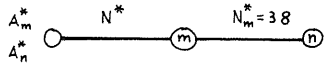
$$A_{SG} = 25{,}19 \quad \text{und} \quad V_{SG} = 13{,}27$$

4.5.3 Die Ersatzstruktur mit einem Zubringerbündel

Zur Berechnung der Parameter des Ersatzzubringerbündels wird ein Ersatzabnehmerbündel mit

$$N_m^* = \sum_{i=1}^{3} N_i = 38$$

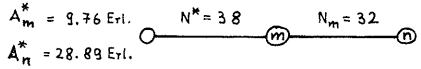
Leitungen betrachtet.



Mit den in Abschnitt 4.5.2 berechneten Werten für A_{SG} und V_{SG} erhält man für die Parameter der Ersatzstruktur:

$$N^* = 38$$
$$A_m^* = 9{,}76 \text{ Erl.}$$
$$A_n^* = 28{,}89 \text{ Erl.}$$

Für die Berechnung von E_m und B_m wird das Ersatzzubringerbündel N^* zusammen mit dem realen Abnehmerbündel N_m betrachtet.



Für die Blockierungswahrscheinlichkeit des Bündels N_m erhält man aus Gl. (33b) Seite 41 :

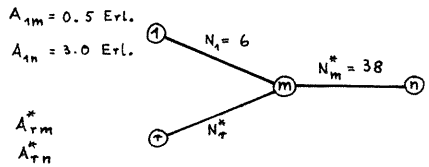
$$E_m = 1{,}763\ \%$$

und für die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit aus Gl. (34b) Seite 41 :

$$B_m = 1{,}055\ \%$$

4.5.4 Das Näherungsverfahren mit zwei Zubringerbündeln

Zur Berechnung der Einzelverlustwahrscheinlichkeit B_{m1} des Verkehrs über Bündel N_1 müssen zunächst die Parameter A^*_{rm}, A^*_{rn} und N^*_r der Ersatzstruktur bestimmt werden.



Nach Abschnitt 4.5.2 hat der über die realen Zubringerbündel N_2 und N_3 zusammen angebotene Verkehr folgende Parameter:

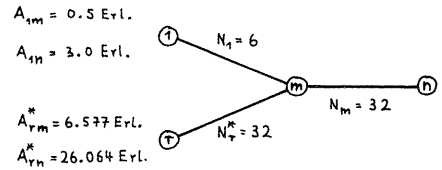
Mittelwert: $A_{S2,3} = A_{S2} + A_{S3} = 22{,}44$

Varianz: $V_{S2,3} = V_{S2} + V_{S3} = 11{,}11$

Aus Gl. (27), (29a) und (30a) erhält man damit für das Ersatzzubringerbündel N^*_r:

$$N^*_r = N_2 + N_3 = 32$$
$$A^*_{rm} = 6{,}577 \text{ Erl.}$$
$$A^*_{rn} = 26{,}064 \text{ Erl.}$$

Struktur zur Berechnung von E_m und B_{m1}:



Für die Blockierungswahrscheinlichkeit erhält man aus Gl. (44) (Seite 47):

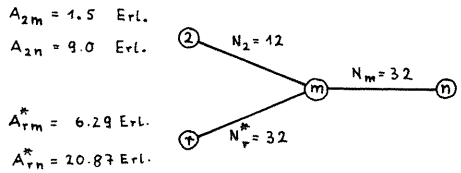
$$E_m = 1{,}787\ \%$$

Aus Gl. (4a) erhält man für die Einzelverlustwahrscheinlichkeit (Seite 46):

$$B_{m1} = 1{,}408\ \%$$

In entsprechender Weise werden die Einzelverlustwahrscheinlichkeiten B_{m2} und B_{m3} berechnet.

Struktur zur Berechnung von B_{m2}:



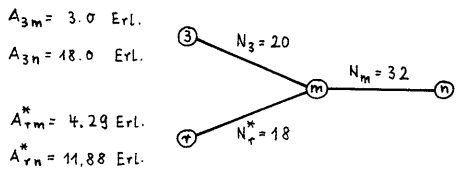
Die Blockierungswahrscheinlichkeit des Bündels N_m ist:

$$E_m = 1{,}870\ \%$$

Die Verlustwahrscheinlichkeit des Verkehrsanteils, der über Bündel N_2 im Knoten m angeboten wird, ist:

$$B_{m2} = 1{,}232\ \%$$

Struktur zur Berechnung von B_{m3}:



Die Blockierungswahrscheinlichkeit des Bündels N_m ist:

$$E_m = 1{,}875\ \%$$

Die Verlustwahrscheinlichkeit des Verkehrsanteils, der über Bündel N_3 im Knoten m angeboten wird, ist:

$$B_{m3} = 1{,}125\ \%$$

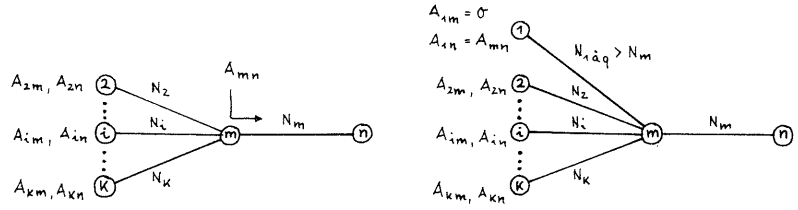
Für die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit des gesamten im Knoten m angebotenen Verkehrs erhält man:

$$B_m = 1{,}261\ \%$$

5. Untersuchung von Verkehr, der sich aus Zufallsverkehr 1. Art und geglättetem Verkehr zusammensetzt

5.1 Anpassung an die vorhandene Struktur

Im folgenden wird der Fall betrachtet, daß einem Bündel mit N_m Leitungen über die Zubringerbündel N_2 bis N_K geglätteter Verkehr und im Knoten m zusätzlich ein Zufallsverkehr A_{mn} angeboten wird.



Reale Struktur

Äquivalente Struktur für die Berechnung

Abb. 9: Struktur mit geglättetem Verkehr und Zufallsverkehr

Dieser Fall kann auf die bisher betrachtete Struktur (Abb.1 Seite 10) zurückgeführt werden, wenn man auch den Verkehr A_{mn} über ein vorgeschaltetes Bündel mit $N_{1äq}$ Leitungen dem Bündel N_m anbietet. Damit dieser Verkehr auf dem Zubringerbündel $N_{1äq}$ nicht geglättet wird ($E_i = 0$), müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

1.) $N_{1äq} > N_m$

2.) $A_{1m} = 0$

$A_{1n} = A_{mn}$

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann können im Bündel $N_{1äq}$ maximal nur $N_m < N_{1äq}$ Belegungen bestehen und damit kann auch keine Blockierung des Zubringerbündels auftreten. Der Verkehr A_{1n} wird also dem Bündel N_m ohne Glättung angeboten.

5.2 Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit

Bei der Berechnung der Einzelverlustwahrscheinlichkeiten B_{mi} für Rufe, die in Bündel N_i ankommend eine Durchschaltung nach n wünschen, wird sowohl bei der exakten Berechnung als auch bei der Näherung von Gl.(4a) Seite 18 ausgegangen. Es gilt:

$$B_{mi} = \frac{[N_m] - [N_i, N_m]}{1 - [N_i]}$$

In beiden Fällen werden bei der Berechnung von B_{mi} die realen Parameter A_{im}, A_{in} und N_i berücksichtigt (vgl. Kap. 4.3 Seite 42). Wenn über Bündel $N_{1äq}$ nichtgeglätteter Zufallsverkehr im Knoten m angeboten wird, dann ist gemäß der im vorigen Abschnitt beschriebenen Betrachtungsweise:

$$A_{1m} = 0$$

und $N_{1äq} > N_m$

Daraus folgt, daß $[N_{1äq}] = 0$

und $[N_{1äq}, N_m] = 0$

Damit erhält man für den im Knoten m angebotenen Zufallsverkehr nicht nur bei der exakten Lösung sondern auch beim Näherungsverfahren:

$$B_{m1} = [N_m]$$

Es genügt deshalb, im folgenden das Näherungsverfahren für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m genauer zu untersuchen.

5.3 Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m mit einem Ersatzzubringerbündel bei zusätzlichem Zufallsverkehr im Knoten m

Bei der Berechnung von Mittelwert und Varianz der Teilverkehre über die einzelnen Zubringerbündel nach Kap. 3 (Seite 28) muß jetzt der Fall, daß $A_{1m} = 0$, $A_{1n} > 0$ und gleichzeitig $N_{1äq} > N_m$ ist, besonders berücksichtigt werden. Da der Verkehrsanteil A_{1n} nicht geglättet wird, gilt:

$$A_{S1} = A_{1n} \qquad (50a)$$
$$V_{S1} = A_{1n} \qquad (50b)$$

Bei der praktischen Realisierung eines Zufallsangebots an Knoten m würde es genügen, $N_{1äq} = N_m + 1$ Leitungen zu schalten, sofern man den Verlustrufen keine Belegungsdauer zumißt. Alle $A_{1n} \cdot [N_m]$ Verlustrufe ($t_m = 1$) könnten dann über die $(N_m + 1)$-te Leitung zum Knoten m durchgreifen (Abb.9). Für die Festlegung der Ersatzleitungszahl N^* des Ersatzzubringerbündels muß $N_{1äq}$ jedoch (als Teil der Gesamtleitungszahl N^*) so groß gewählt werden, daß das gewünschte Wertepaar A_{SG}, V_{SG} mit Hilfe der Ersatzangebote A_m^*, A_n^* bzw. α_m^*, α_n^* rechnerisch realisiert werden kann. Aus einer Reihe von Untersuchungen, die im folgenden noch genauer diskutiert werden, ergab sich, daß man die Leitungszahl $N_{1äq}$ so wählt, daß

$$E_{N_{1äq}}(A_{1n}) \leq 1\%$$

ist. Die Bedingung $N_{1äq} > N_m$ muß natürlich auch erfüllt sein.

Die Genauigkeit des Näherungsverfahrens mit einem Ersatzzubringerbündel N^* wurde bei verschiedenen Strukturen mit zwei und drei realen Zubringerbündeln untersucht. In Tab. 9 bis 16(Seite 111 bis 115) sind die exakten Werte und die Näherungswerte für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m

in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m des gemeinsamen Bündels dargestellt. Zusätzlich ist noch die nach den oben beschriebenen Bedingungen bestimmte Leitungszahl $N_{1äq}$ des Zubringerbündels angegeben, über das der Zufallsverkehr A_{1n} im Knoten m angeboten wird. Es wurden Beispiele gewählt, bei denen bei konstanten Angeboten A_{2m} und A_{2n} der im Knoten m außerdem angebotene Zufallsverkehr A_{1n} variiert wurde (Tab. 9 und 10 bzw. 12 und 13). Andererseits wurden auch Beispiele untersucht, bei denen bei konstantem Zufallsangebot A_{1n} der geglättete Verkehrsanteil über Bündel N_2 geändert wurde (Tab. 9 und 11 bzw. 12 und 14).

Aus Tab. 9 und 10 bzw. 12 und 13 (Seite 111 bis 113) sieht man, daß die Größe des Zufallsangebots nur einen geringen Einfluß auf die Genauigkeit des Näherungsverfahrens besitzt. Dagegen ist, wie man aus Tab. 9 und 11 bzw. 12 und 14 (Seite 111 bis 113) entnehmen kann, die Genauigkeit des Näherungsverfahrens bei schwach geglättetem Verkehr besser als bei stark geglättetem Verkehr. Außerdem ist die Genauigkeit bei den Beispielen mit drei Zubringerbündeln (Tab. 15 und 16, Seite 114) nicht schlechter als bei den Beispielen mit zwei Zubringerbündeln. Bei allen Beispielen sind die Abweichungen zwischen Näherungswerten und exakten Werten für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m kleiner als für die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m. Der Grund dafür ist, daß bei der Berechnung von B_m nach Gl. (34b) Seite 41 nicht nur die Verteilung auf dem Abnehmerbündel N_m sondern auch die Verteilung auf dem Ersatzzubringerbündel N^* berücksichtigt werden muß.

Es zeigt sich also, daß das Näherungsverfahren mit einem Ersatzzubringerbündel für die Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit und der pauschalen Verlustwahrscheinlichkeit auch dann mit sehr zufriedenstellender Genauigkeit angewandt werden kann, wenn einem Bündel N_m gleichzeitig geglätteter Verkehr und Zufallsverkehr angeboten wird.

5.4 Exakte Berechnung für einen Sonderfall

Wenn über alle Zubringerbündel N_i im Knoten m K Zufallsverkehre A_{in} (i = 1,2 ... K) angeboten werden, gilt nach Kap. 5.1 Seite 57 :

$$\left.\begin{array}{l} A_{im} = 0 \\ N_i > N_m \end{array}\right\} \quad i = 1, 2 \ldots K$$

In diesem Falle geht die Verteilung auf dem gemeinsamen Bündel N_m in eine Erlang-Verteilung über. Im folgenden wird gezeigt, daß dieser Fall als Sonderfall in der allgemeinen Lösung (Kap. 2 Seite 14) enthalten ist.

Aus Gl. (9b) Seite 22 erhält man für die exakte Lösung:

$$[x_1, x_2, \ldots x_K] = \frac{1}{S_1} \prod_{i=1}^{K} \frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!}$$

Dabei gilt: $0 \leq x_i \leq N_m$, da $N_i > N_m$, $i = 1, 2 \ldots K$

Für die Verteilung $[g_m]$ auf Bündel N_m erhält man:

$$[g_m] = \sum_M [x_1, x_2, \ldots x_K]$$

$$= \frac{1}{S_1} \sum_M \prod_{i=1}^{K} \frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!} \qquad (49)$$

Die Summe $\sum_M$ erstreckt sich über alle Zustände $\{x_1, x_2, \ldots x_K\}$, für die gilt:

$$g_m = \sum_{i=1}^{K} x_i$$

Nach dem polynomischen Lehrsatz [8] ist:

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} \frac{a^\alpha}{\alpha!} \cdot \frac{b^\beta}{\beta!} \cdot \frac{c^\gamma}{\gamma!} \cdots = \frac{(a+b+c+\cdots)^n}{n!} \qquad \text{mit } \alpha+\beta+\gamma+\cdots = n$$

Die Summation erstreckt sich über alle natürlichen Zahlen einschließlich 0, deren Summe gleich n ist. Damit erhält man aus Gl.(49):

$$[g_m] = \frac{1}{S_1} \frac{A^{g_m}}{g_m!} \qquad \text{mit} \quad A = \sum_{i=1}^{K} A_{in}$$

Für die Konstante S_1 erhält man aus der Bedingung $\sum_{g_m=0}^{N_m} [g_m] = 1$:

$$S_1 = \sum_{i=0}^{N_m} \frac{A^i}{i!}$$

Damit ist:

$$[g_m] = \frac{\frac{A^{g_m}}{g_m!}}{\sum_{i=0}^{N_m} \frac{A^i}{i!}}$$

6. Beschreibung der in der Literatur bekannten Verfahren zur Berechnung von geglättetem Verkehr

Die Tatsache, daß Fernsprechverkehr, der bereits ein oder mehrere Leitungsbündel durchlaufen hat, andere statistische Eigenschaften als Zufallsverkehr hat, wird in einer Reihe von Veröffentlichungen beschrieben([9] bis [14]). Dagegen gibt es nur wenige Berechnungsverfahren für geglätteten Verkehr. In vielen Fällen wird mit Zufallsverkehr gerechnet, dessen Angebot gleich der Summe der Belastungen der Zubringerbündel ist, d.h. es wird zwar der Mittelwert des geglätteten Angebots berücksichtigt, seine Varianz wird dagegen vernachlässigt. Die Ergebnisse, die man mit dieser Näherung erhält, werden im nächsten Kapitel diskutiert.

Eine der ersten Untersuchungen, die sich auch mit geglättetem Verkehr befaßt, wurde von O' Dell durchgeführt. Er gibt in [10] ein empirisches Verfahren an, mit dem man bei vorgegebener Verlustwahrscheinlichkeit die zulässige unterschiedliche Belastung eines unvollkommenen Bündels bestimmen kann, wenn diesem Bündel Zufallsverkehr bzw. geglätteter Verkehr angeboten wird. Da dieses Verfahren im wesentlichen eine Abschätzung von Grenzwerten für die Belastung darstellt und durch die Vernachlässigung der Varianz die Eigenschaften des geglätteten Verkehrs nur sehr pauschal erfaßt, wird es hier nicht weiter untersucht.

Zwei Verfahren, die bereits Mittelwert und Varianz des geglätteten Verkehrs berücksichtigen, werden im folgenden genauer untersucht. Es sind dies die Berechnungsverfahren von S. Katz [4] und R. Mina [5].

6.1 Das Näherungsverfahren von S. Katz zur Berechnung von geglättetem Verkehr, wenn den Zubringerbündeln ZV1 angeboten wird

Von S. Katz wird in [4] ein Näherungsverfahren zur Berechnung von nichthierarchischen Fernsprechnetzen angegeben. Da in diesen Netzen neben Zufallsverkehr auch Überlaufverkehr und geglätteter Verkehr auftreten, werden bei der Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeiten E_i der in den Knoten abgehenden Leitungsbündel neben dem Mittelwert A_i auch die Varianz V_i ihrer Angebote berücksichtigt. Katz nimmt allgemein an, daß Blockierungswahrscheinlichkeit und Verlustwahrscheinlichkeit gleich groß sind. Die Werte A_i und V_i werden mit einem Iterationsverfahren berechnet, das für die in Abb. 1 dargestellte Struktur im folgenden erläutert wird.

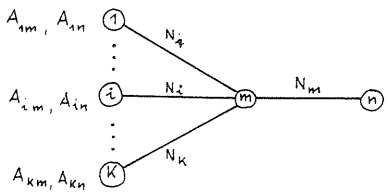


Abb. 1: Struktur zur Berechnung von geglättetem Verkehr mit dem Verfahren von S. Katz

Zunächst werden Anfangswerte $E_i^{(o)}$ für die Blockierungswahrscheinlichkeiten der Leitungsbündel berechnet. Es ist:

$$E_i^{(o)} = E_{N_i}(A_{im} + A_{in}) \qquad i = 1, 2, \ldots K$$

und mit

$$A_G = \sum_{i=1}^{K} A_{in}$$

$$E_m^{(o)} = E_{N_m}(A_G)$$

Mit diesen Werten $E_i^{(o)}$ werden jetzt verbesserte Werte für die Angebote an die einzelnen Leitungsbündel berechnet. Bei den Zubringerbündeln N_i wird berücksichtigt, daß Anrufe, die bei nicht blockiertem Bündel N_i aber bei blockiertem Bündel N_m eintreffen, keine Leitung im Bündel N_i belegen. Katz berechnet deshalb die Blockierungswahrscheinlichkeiten mit folgendem reduzierten Angebot:

$$A_i^{(r)} = A_{im} + A_{in} \cdot \{1 - (1 - E_i) \cdot E_m\} \qquad (49)$$

$$E_i = E_{N_i}(A_i^{(r)}) \qquad (50)$$

Zur Bestimmung von Mittelwert und Varianz des über Bündel N_i im Knoten m angebotenen geglätteten Verkehrs werden zunächst Mittelwert und Varianz des von Bündel N_i nicht verarbeiteten gesamten Verkehrsrests berechnet. Nach [14] ist:

$$R_i^{(r)} = A_i^{(r)} \; E_i \qquad (51\,a)$$

$$V(R_i^{(r)}) = R_i^{(r)} \left\{ 1 - R_i^{(r)} + \frac{A_i^{(r)}}{N_i + 1 + R_i^{(r)} - A_i^{(r)}} \right\} \qquad (51\,b)$$

Der nicht verarbeitete Verkehrsrest des Angebots A_{in} ist:

$$R_{in}^{(r)} = R_i^{(r)} \frac{A_{in}}{A_i^{(r)}} \{1 - (1 - E_i) E_m\} \qquad (52\,a)$$

Die Varianz dieses Verkehrsrests ist:

$$V(R_{in}^{(r)}) = \frac{R_{in}^{(r)}}{R_i^{(r)}} \; V(R_i^{(r)}) \qquad (52\,b)$$

Mittelwert und Varianz des über Bündel N_i im Knoten m ta tsächlich angebotenen geglätteten Verkehrs berechnet Katz aus der Differenz der Werte des angebotenen Zufallsverkehrs und der des nicht verarbeiteten Verkehrsrests. Man erhält:

$$A_{si} = A_{in} - R_{in}^{(r)} \qquad (53\,a)$$

$$V_{si} = A_{in} - V(R_{in}^{(r)}) \qquad (53\,b)$$

Für Mittelwert und Varianz des gesamten geglätteten Verkehrs, der dem Bündel N_m im Knoten m angeboten wird, gilt:

$$A_{SG} = \sum_{i=1}^{K} A_{Si} \qquad V_{SG} = \sum_{i=1}^{K} V_{Si}$$

Zu den Gl. (51a,b), (52a,b) und (53a,b) ist zu bemerken, daß aus der Veröffentlichung [4] von Katz nicht zu entnehmen ist, wo er mit dem echten Zufallsangebot $A_{im}+A_{in}$ und wo er mit dem reduzierten Angebot $A_i^{(r)}$ rechnet. Auf Grund umfangreicher Untersuchungen wurden für das Näherungsverfahren von Katz die hier angegebenen Formeln gewählt, mit denen man die genauesten Ergebnisse erhält.

Für die Berechnung der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m des Bündels N_m wird von Katz eine Ersatzstruktur nach Abb. 10 gewählt, bei der einem Bündel mit N^* Leitungen ein Zufallsverkehr A^* angeboten wird. Die Parameter A^* und N^* werden iterativ so bestimmt, daß die Verteilung auf Bündel N^* den Mittelwert A_{SG} und die Varianz V_{SG} besitzt. Es ist:

$$A_{SG} = A^* \cdot \{1 - E_{N^*}(A^*)\} \tag{54a}$$

$$V_{SG} = A_{SG} - A^* \cdot E_{N^*}(A^*) \{N^* - A_{SG}\} \tag{54b}$$

Es wird bei Katz also <u>nicht</u> gefordert, daß $N^* = \sum_{i=1}^{K} N_i$ ist.

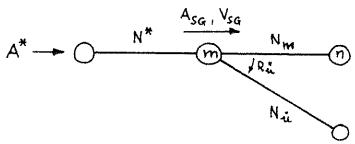


Abb. 10: Ersatzanordnung von S. Katz zur Berechnung von geglättetem Verkehr

Der vom Bündel N^* verarbeitete Verkehrsanteil (A_{SG}, V_{SG}) wird dann dem realen Abnehmerbündel N_m angeboten. Im Knoten m wird zusätzlich ein Überlaufbündel angenommen, das den gesamten von Bündel N_m nicht verarbeiteten Verkehrsrest aufnehmen kann. Seine Leitungszahl ist:

$$N_ü = N^* - N_m \tag{55}$$

Dieses Überlaufbündel $N_ü$ ist bei der Struktur von Katz erforderlich, damit sich auf dem Zubringerbündel N^* eine Verteilung mit den gewünschten Werten A_{SG} und V_{SG} einstellen kann.

Bei der Betrachtung des von Bündel N_m nicht verarbeiteten Überlaufverkehrs werden bei Katz zwei Fälle unterschieden:

a) Wenn $N^* \leq N_m$ ist, dann treten keine Verluste im Knoten m auf, da jeder im Knoten m eintreffende Anruf auch im Bündel N_m eine freie Leitung findet.

b) Wenn $N^* > N_m$ ist, dann kann man die N_m Leitungen als die ersten N_m Suchschritte eines vollkommenen Bündels mit insgesamt N^* Leitungen betrachten, weil unterstellt wird, daß es von einer festen Nullstellung geordnet abgesucht wird. Für die Belastung der ersten N_m Suchschritte erhält man:

$$y_m = A^* \cdot \{1 - E_{N_m}(A^*)\}$$

Der Überlaufverkehr, der dem Bündel $N_ü$ angeboten wird, ist:

$$R_ü = A_{SG} - y_m$$

Für die Verlustwahrscheinlichkeit des im Knoten m angebotenen geglätteten Verkehrs, die nach Katz gleich der Blockierungswahrscheinlichkeit des Bündels N_m ist, erhält man damit:

$$E_m = B_m = \frac{R_ü}{A_{SG}} \tag{56}$$

Mit diesen neu berechneten Werten für die Blockierungswahrscheinlichkeiten wird das Iterationsverfahren so lange fortgesetzt, bis sich die gewünschte Genauigkeit einstellt.

Zur Berechnung der Einzelverluste B_{mi} der über die einzelnen Zubringerbündel N_i angebotenen Verkehrsanteile wird folgende Formel angegeben, die aus Simulationsergebnissen empirisch bestimmt wurde:

$$B_{mi} = B_m \left\{ 1 + \left(\frac{V_{si}}{A_{si}} - \frac{V_{SG}}{A_{SG}} \right) \cdot k \right\} \qquad (57)$$

Dabei ist:

$$k \approx \frac{A_{si}}{V_{si}} \left\{ 4{,}1 \cdot 10^{-4} \frac{A_{si}}{V_{si}} \frac{1}{B_m^2} - 0{,}156 \frac{A_{si}}{V_{si}} \sqrt{\frac{1}{B_m}} - 0{,}0747 \frac{1}{B_m} + 0{,}693 \sqrt{\frac{1}{B_m}} \right\}$$

Vergleicht man das in Kap. 4 (Seite 35) beschriebene Näherungsverfahren mit dem Verfahren von S. Katz, dann ergeben sich folgende Unterschiede:

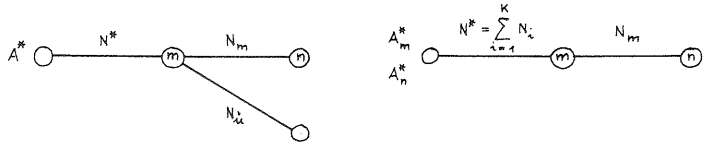
a) Katz berechnet Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots an das <u>reale</u> Abnehmerbündel N_m, während in Kap. 3 für die Berechnung ein Ersatzabnehmerbündel mit $N_m^* = \sum_{i=1}^{K} N_i$ Leitungen gewählt wird, das alle angebotenen Anrufe verarbeiten kann.

Struktur von S. Katz Ersatzstruktur nach Kap. 3

Abb. 11: Strukturen zur Berechnung von Mittelwert A_{SG} und Varianz V_{SG} des geglätteten Angebots

Die in Kap. 3 angegebene Formel für die Varianz V_{SG} ist für N_m^* Leitungen exakt. Die von Katz in Gl. (53b) (Seite 65) angegebene Näherung gibt wegen der Vernachlässigung der Kovarianz nur bei Blockierungen unter 1 % auf den Zubringerbündeln (d.h. sehr schwach geglättetem Verkehr) brauchbare Werte.

b) Bei der in Kap. 4.1 (Seite 36) beschriebenen Ersatzstruktur (Abb. 5) wird neben Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots auch die Gesamtzahl $N^* = \sum_{i=1}^{K} N_i$ der realen Zubringerleitungen berücksichtigt, beim Verfahren von Katz dagegen nicht.



Ersatzstruktur von Katz Ersatzstruktur nach Kap.4

Abb. 12: Ersatzstrukturen zur Berechnung von E_m und B_m bei einem geglätteten Angebot

c) Katz nimmt an, daß bei einem geglätteten Angebot Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und Verlustwahrscheinlichkeit B_m gleich groß sind. In Kap. 2.6 (Seite 26) wurde dagegen gezeigt, daß die Verlustwahrscheinlichkeit B_m immer kleiner ist als die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m (siehe auch Diagr. 1 und 2, Seite 116).

d) In Kap. 4.3 (Seite 42) wird ein Näherungsverfahren für die Bestimmung der Einzelverluste B_{mi} beschrieben, das die Angebote A_{im} und A_{in} und die Leitungszahl N_i des Zubringerbündels, über das der geglättete Verkehrsanteil angeboten wird, direkt berücksichtigt. Katz dagegen gibt nur eine auf empirischem Wege gefundene Approximation an, die aus Simulationen bestimmt wurde.

6.2 Das Näherungsverfahren von R. Mina

In [5] und [6] wird von R. Mina der Vorschlag gemacht, geglätteten Verkehr mit bekannten Werten für Mittelwert A_{SG} und Varianz V_{SG} durch eine Binomialverteilung zu beschreiben. Unabhängig davon, ob der geglättete Verkehr aus ZV1 oder ZV2 entstanden ist, gilt dann für die Verteilung des Angebots:

$$p(x) = \binom{q}{x} \gamma^x (1-\gamma)^{q-x} \qquad (58)$$

Der Mittelwert dieser Binomialverteilung ist:

$$A_{SG} = q \cdot \gamma \qquad (59)$$

und ihre Varianz:

$$V_{SG} = q \cdot \gamma \cdot (1-\gamma) \qquad (60)$$

Kennt man Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots, dann kann man aus Gl. (59) und (60) die Quellenzahl q und die Sprechwahrscheinlichkeit γ einer Quelle berechnen. Es ist:

$$\gamma = 1 - \frac{V_{SG}}{A_{SG}} \qquad (61)$$

$$q = \frac{A_{SG}^2}{A_{SG} - V_{SG}} \qquad (62)$$

Nach dem Vorschlag von Mina wird also ein geglättetes Angebot durch einen Zufallsverkehr 2. Art ersetzt, wobei dessen Quellenzahl q und die Sprechwahrscheinlichkeit einer Quelle γ aus den vorgegebenen Werten für Mittelwert A_{SG} und Varianz V_{SG} berechnet werden können.

Bietet man diesen Zufallsverkehr 2. Art einem vollkommenen Bündel mit N_m Leitungen an, dann erhält man die bekannten Formeln für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und die Verlustwahrscheinlichkeit B_m [7]:

$$E_m = \frac{\binom{q}{N_m} \alpha^{N_m}}{\sum_{i=0}^{N_m} \binom{q}{i} \alpha^i} \qquad (63)$$

$$B_m = \frac{\binom{q-1}{N_m} \alpha^{N_m}}{\sum_{i=0}^{N_m} \binom{q-1}{i} \alpha^i} = E_m \frac{q - N_m}{q - Y(q, N_m)} \qquad (64)$$

Dabei ist $Y(q,N_m)$ die Belastung des Bündels N_m.

Die Anrufintensität α einer freien Quelle berechnet Mina iterativ aus Gl. (64) und folgender Gleichung:

$$\alpha = \frac{\gamma}{1 - \gamma(1 - B_m)} \qquad (65)$$

Dies bedeutet, daß Mina die Anrufintensität einer freien Quelle so wählt, daß das Angebot an das <u>reale</u> Abnehmerbündel N_m den Mittelwert A_{SG} besitzt. Über die Varianz dieses Angebots bei $N_m < q$ Leitungen kann man dann keine Aussage mehr machen.

Zum Verfahren von Mina ist zu bemerken, daß er keine Angaben für die Berechnung von Mittelwert A_{SG} und Varianz V_{SG} des geglätteten Angebots macht. Um dieses Verfahren trotzdem mit dem Verfahren von S. Katz und dem in Kap. 4 beschriebenen neuen Näherungsverfahren vergleichen zu können, werden für die Berechnung von Mittelwert A_{SG} und Varianz V_{SG} die in Kap. 3 hergeleiteten Formeln (Gl. (20a,b) und (21a,b) Seite 32) verwendet. Dort wird für die Berechnung der Momente ein Bündel mit N_m^* Leitungen

gewählt, das so groß ist, daß keine Anrufe abgewiesen werden. Entsprechend werden in Kap. 4.1 (Seite 36) die Angebote A_m^* und A_n^* der Ersatzstruktur für das verlustfreie Abnehmerbündel N_m^* berechnet. Diese Angebote A_m^* und A_n^* werden dann unabhängig von der Größe des realen Abnehmerbündels N_m immer für die Berechnung beibehalten, auch wenn sich, wie in Kap. 3 (Seite 29) beschrieben wurde, bei $N_m < N_m^*$ ein reales Angebot einstellt, dessen Mittelwert größer als A_{SG} ist. Aus diesem Grund wird bei der Anwendung des Näherungsverfahrens von Mina die Anrufintensität einer freien Quelle nicht mit Gl. (65) berechnet, sondern mit derjenigen Anrufintensität, die im verlustfreien Fall ($N_m^* = q$) ein Angebot A_{SG}, V_{SG} erzeugt. Für sie gilt:

$$\alpha = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \qquad (66)$$

Wie in Kap. 7 beschrieben wird, erhält man beim Näherungsverfahren von R. Mina mit Gl. (66) genauere Werte für Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und Verlustwahrscheinlichkeit B_m als mit Gl. (65).

7 Beispiele für geglätteten Verkehr und Diskussion der verschiedenen Näherungsverfahren

An einer Reihe von Beispielen, die in den Diagrammen 12 bis 54 (Seite 129 bis 171) dargestellt sind, werden die Ergebnisse der verschiedenen Näherungsverfahren mit denen des exakten Berechnungsverfahrens verglichen. In Tab. 17 (Seite 127) sind die untersuchten Beispiele für geglätteten ZV1 und in Tab. 18 (Seite 128) die Beispiele für geglätteten ZV2 zusammengestellt. In den Diagrammen ist die Blockierungswahrscheinlichkeit bzw. die Verlustwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m aufgetragen, wobei Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots nicht geändert werden. Es werden Strukturen mit unterschiedlicher Zahl von Zubringerbündeln, mit verschiedenen Bündelgrößen und auch unsymmetrische Strukturen untersucht. Bei geglättetem ZV2 wird auch das Verhältnis der Zahl der Verkehrsquellen q_i in den Startknoten bezogen auf die Leitungszahl N_i variiert. In einigen Diagrammen sind auch Simulationsergebnisse eingetragen, wobei die Vertrauensintervalle für eine statistische Aussagesicherheit von 95 % berechnet wurden.

7.1 Das Näherungsverfahren mit einem Ersatzzubringerbündel

Aus den Diagrammen 12 bis 54 (Seite 129 bis 171) kann man für dieses Näherungsverfahren, das in Kap. 4 (Seite 35) beschrieben wurde, sowohl für geglätteten ZV1 als auch für geglätteten ZV2 folgendes typische Verhalten entnehmen. Bei großen Blockierungswahrscheinlichkeiten des Abnehmerbündels ($E_m > 0{,}2$) liefert es gegenüber den exakten Werten etwas zu kleine Werte und im Bereich $0{,}02 < E_m < 0{,}2$ etwas zu große Werte. In beiden Fällen sind die relativen Abweichungen zu den exakten

Werten kleiner als 5 %. Bei kleinen Werten der Blockierungswahrscheinlichkeiten sind die Näherungswerte zu klein, es können bei $E_m < 0{,}005$ relative Abweichungen bis zu 25 % von den exakt berechneten Werten auftreten.

Die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m, die nach Gl. (34a,b) Seite 41 berechnet wird, hat die gleiche Tendenz bezüglich der Abweichungen zu den exakten Werten. Bei mittleren Verlusten ($0{,}02 < B_m < 0{,}2$) und auch bei großen Verlusten ($B_m > 0{,}2$) sind die relativen Abweichungen kleiner als 5 %. Bei sehr kleinen Verlusten ($B_m < 0{,}005$) sind die Näherungswerte zu klein, es können hier bei stark geglättetem Verkehr Abweichungen bis zu 40 % auftreten. Der Grund für die größeren Abweichungen ist, daß bei der Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit nach Gl. (34a,b) Seite 41 die zweidimensionale Verteilung [g,x] für g Belegungen auf dem Zubringerbündel N^* und x Belegungen auf dem Abnehmerbündel N_m berücksichtigt werden muß, während die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m nur von der Verteilung [x] auf dem Abnehmerbündel abhängt. Da auch diese zweidimensionale Verteilung [g,x] in Kap.4.2 näherungsweise berechnet wird, können dadurch für die Verlustwahrscheinlichkeit B_m größere Abweichungen vom exakten Wert auftreten.

Allgemein kann festgestellt werden, daß die Zahl der Zubringerbündel und die Bündelgröße kaum einen Einfluß auf die Genauigkeit des Verfahrens haben. Auch ist die Genauigkeit bei unsymmetrischen Strukturen nicht schlechter als bei den symmetrischen. Auffallend ist jedoch, daß bei geglättetem ZV2 mit abnehmendem Quotienten q_i/N_i die Abweichungen des Näherungsverfahrens kleiner werden. Die Ursache dürfte darin bestehen, daß bei kleinen Werten q_i/N_i eine Glättung sich nur wenig auswirkt, da bei N_i belegten Zubringerleitungen die Anrufintensität

der Quellen klein ist. Bei stark geglättetem Verkehr werden die Abweichungen zu den exakten Werten im Bereich sehr kleiner Blockierungen und Verluste ($E_m, B_m < 0{,}005$) etwas größer.

7.2 Das Näherungsverfahren mit zwei Ersatzzubringerbündeln

Das Näherungsverfahren, bei dem der geglättete Verkehr über zwei Ersatzzubringerbündel dem gemeinsamen Bündel N_m angeboten wird, wird zunächst zur Berechnung der Einzelverlustwahrscheinlichkeiten B_{mi} verwendet (Kap. 4.3 Seite 42). Daneben kann man aber auch mit Gl. (45) Seite 48 die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m und mit Gl. (44) Seite 47 die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m berechnen. Dieses Verfahren zeigt bezüglich seiner Abweichungen die gleiche Tendenz wie das Näherungsverfahren mit einem Ersatzzubringerbündel, die relativen Abweichungen sind jedoch wesentlich kleiner. Bei mittleren und großen Blockierungen bzw. Verlusten liegen sie unter 2 %, bei sehr kleinen Werten (E_m, $B_m < 0{,}005$) sind die Abweichungen bei E_m kleiner als 10 %, bei B_m liegen sie unter 15 %. Bei den Einzelverlusten B_{mi} sind die Abweichungen gleich wie bei den Pauschalverlusten.

Da das geglättete Angebot durch zwei Ersatzzubringerbündel genauer nachgebildet werden kann, erhält man gegenüber dem Verfahren mit einem Ersatzzubringerbündel deutlich genauere Werte.

7.3 Das Berechnungsverfahren von S. Katz

Wie in Kap. 6.1 (Seite 64) beschrieben wurde, kann das von S. Katz angegebene Näherungsverfahren nur für geglätteten Zufallsverkehr 1. Art angewandt werden. Eine der wesentlichen Näherungen dieses Verfahrens ist, daß Blockierungswahrscheinlichkeit und Verlustwahrscheinlichkeit gleich groß sind.

Der Vergleich der Näherungswerte von Katz mit den exakt berechneten Werten für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m zeigt, daß die Näherungswerte fast immer zu klein sind. Für $E_m > 0{,}05$ tritt eine relative Abweichung von 2 % bis 10 % auf, mit abnehmendem E_m wird die relative Abweichung jedoch größer. Auffallend ist, daß dann, wenn die exakten Werte unter 0,01 liegen, die Näherungswerte 0 sind. Dies beruht darauf, daß in diesem Bereich die Leitungszahl N^* der Ersatzstruktur von Katz kleiner als die des realen Abnehmerbündels N_m ist. In diesem Falle können im Bündel N_m maximal nur $N^* < N_m$ Leitungen belegt sein, jedoch nie alle N_m Leitungen.

Vergleicht man die Näherungswerte von Katz mit den exakt berechneten Werten für die Verlustwahrscheinlichkeit B_m, dann ergeben sich bei $B_m > 0{,}2$ relative Abweichungen unter 5 %. Im Bereich $0{,}01 < B_m < 0{,}2$ sind die Näherungswerte um maximal 25 % zu hoch. Hier liegen sie oft dicht unter den exakten Werten für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m. Auffallend ist auch hier, daß bei $B_m < 0{,}01$ die Näherungswerte von Katz 0 sind. Bei stark geglättetem Verkehr (Diagr. 12 und 16 bis 18, Seite 129 und 133 bis 135) kann dies auch bei Werten über 0,01 auftreten.

Ein Vergleich der Näherungswerte von Katz für Mittelwert A_{SG} und Varianz V_{SG} des geglätteten Angebots mit den

nach Kap. 3 (Seite 28) exakt berechneten Werten ist nur bei einem verlustfreien Bündel N_m^* möglich. Der Grund dafür ist, daß in Kap. 3 für die Berechnung von A_{SG} und V_{SG} ein Ersatzabnehmerbündel mit N_m^* Leitungen betrachtet wird, das so groß ist, daß keine Verlustrufe entstehen, während Katz das reale Abnehmerbündel N_m betrachtet. Für die untersuchten Beispiele sind in Tab. 19 (S. 172) die exakten Werte und die Näherungswerte von Katz für Mittelwert A_{SG} und Varianz V_{SG} zusammengestellt. Als Leitungszahl des gemeinsamen Bündels wird $N_m = N_m^*$ gewählt, sodaß die Verlustwahrscheinlichkeit $B_m = 0$ ist. Es zeigt sich, daß die Näherungswerte und die exakten Werte für den Mittelwert A_{SG} sich nicht unterscheiden, während die Näherungswerte für die Varianz V_{SG} bis zu 40 % größer sind als die exakten Werte. Die Ursache dafür ist, daß Katz bei Gl. (53b) (Seite 66) die Varianz der Verteilung auf einem Zubringerbündel als Differenz der Varianz des Zufallsangebots und der Varianz des von diesem Zubringerbündel nicht verarbeiteten Verkehrsrests berechnet. Da der auf dem Zubringerbündel durchgesetzte Verkehr und der von ihm nicht verarbeitete Verkehr nicht unabhängig sind, vernachlässigt also Katz die Kovarianz der beiden Verkehre.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß man mit dem Näherungsverfahren von S. Katz für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und die Verlustwahrscheinlichkeit B_m im Bereich E_m, $B_m > 0{,}02$ brauchbar genaue Näherungswerte erhält. Für E_m, $B_m > 0{,}1$ sind sie oft so genau wie die des in Kap. 4 beschriebenen neuen Näherungsverfahrens. Dagegen erhält man, besonders bei stark geglättetem Verkehr, für E_m, $B_m < 0{,}02$ viel zu kleine Werte.

7.4 Das Berechnungsverfahren von R. Mina

Beim Verfahren von R. Mina, das in Kap. 6.2 Seite 70 beschrieben wurde, wird das geglättete Angebot durch Zufallsverkehr 2. Art erzeugt. Da er keine Angaben über die Berechnung von Mittelwert A_{SG} und Varianz V_{SG} macht, werden die in Kap. 3 Seite 28 berechneten Formeln benützt. Der Vergleich mit den exakten Werten zeigt, daß bei geglättetem ZV1 und geglättetem ZV2 die Näherungswerte für E_m und B_m im Bereich $0{,}02 < E_m, B_m < 0{,}25$ zu klein sind, darüber und darunter sind sie zu groß. Für $E_m, B_m > 0{,}02$ können gegenüber den exakt berechneten Werten bei geglättetem ZV1 relative Abweichungen bis zu 15 % auftreten, bei geglättetem ZV2 bis zu 10 %. Bei sehr kleinen Blockierungen ($E_m < 0{,}005$) können relative Abweichungen bis zu 80 % auftreten, bei der Verlustwahrscheinlichkeit liegen die Näherungswerte bei stark geglättetem Verkehr bis zu einem Faktor 2 bis 3 zu hoch.

Für die Berechnung der Anrufrate α einer freien Quelle wird, wie in Kap. 6.2 (Seite 71) begründet wird, nicht die von Mina angegebene Gl.(65) sondern Gl. (66) verwendet. In den Diagrammen 24 bis 29 (Seite 141 bis 146) sind auch die Werte für E_m und B_m eingezeichnet, wenn man mit der von Mina angegebenen Gl. (65) für die Anrufrate einer freien Quelle rechnet. Es zeigt sich dabei, daß man bei $E_m, B_m > 0{,}1$ mit Gl. (65) um 20 % bis 30 % zu niedrige Werte erhält, während bei Verwendung von Gl. (66) die relativen Abweichungen zu den exakten Werten nur 10 % bis 15 % betragen. Für E_m, $B_m \longrightarrow 0$ verschwinden diese Unterschiede, wie auch aus Gl. (65) und (66) unmittelbar ersichtlich ist.

7.5 Berechnung mit Zufallsverkehr 1. Art

Als weitere Vergleichsmöglichkeit ist in den Diagrammen 12 bis 34 (Seite 129 bis 151) für geglätteten ZV 1 die Blockierungswahrscheinlichkeit eines Bündels eingetragen, dem Zufallsverkehr 1. Art mit dem Mittelwert A_{SG} angeboten wird. Bei dieser Näherung wird nur der Mittelwert des geglätteten Verkehrs berücksichtigt, die Varianz wird dagegen vernachlässigt. Für die Blockierungswahrscheinlichkeit gilt:

$$E_m = E_{N_m}(A_{SG}) = \frac{\dfrac{A_{SG}^{N_m}}{N_m!}}{\sum_{i=0}^{N_m} \dfrac{A_{SG}^{i}}{i!}}$$

Diese Näherung ergibt bei großen Blockierungen ($E_m > 0{,}2$) um 20 % bis 30 % zu niedrige Werte, bei Blockierungen $E_m < 0{,}005$ bis zu einem Faktor 5 bis 10 zu große Werte. Diese Abweichungen werden durch die Vernachlässigung der Varianz des geglätteten Angebots verursacht. Betrachtet man zwei Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber verschiedener Varianz, dann treten Zustände, die nahe am Mittelwert liegen, bei der Verteilung mit der kleineren Varianz häufiger auf, als bei derjenigen mit der größeren Varianz. Zu diesen Zuständen gehört bei einer großen Blockierungswahrscheinlichkeit auch der Zustand, daß alle Leitungen belegt sind. Umgekehrt treten bekanntlich Zustände, die vom Mittelwert weiter entfernt sind, bei der Verteilung mit der kleineren Varianz seltener auf, als bei der mit der größeren Varianz. Deshalb erhält man, wenn man mit Zufallsverkehr rechnet, bei kleinen Blockierungen einen größeren Wert für E_m, als wenn man die Varianz des geglätteten Verkehrs berücksichtigt.

In den Diagrammen 12, 13, 15 und 16 (Seite 129 - 133) ist noch die Blockierungswahrscheinlichkeit eines Bündels eingezeichnet, dem ZV1 mit einem Mittelwert

$$A = \sum_{i=1}^{K} A_{in}$$

angeboten wird. Für die Blockierungswahrscheinlichkeit gilt:

$$E_m = \frac{\frac{A^{N_m}}{N_m!}}{\sum_{i=0}^{N_m} \frac{A^i}{i!}}$$

Da hier nicht nur die Varianz sondern auch der Mittelwert des geglätteten Angebots vernachlässigt wird, erhält man also viel zu große Werte für die Blockierungswahrscheinlichkeit E_m.

8 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird eine Untersuchung von geglättetem Zufallsverkehr durchgeführt. Eine Glättung von Zufallsverkehr tritt in der Vermittlungstechnik immer dort auf, wo Fernsprechverbindungen über mehr als einen Leitungsabschnitt durchgeschaltet werden. Durch die endliche Zahl von Leitungen der zuvor durchlaufenen Bündel wird die Zahl der gleichzeitig möglichen Anrufe an ein weiteres Bündel begrenzt. Charakteristisch ist, daß die Varianz des geglätteten Verkehrs kleiner ist als ihr Mittelwert.

Für die Untersuchung wird eine Struktur gewählt, bei der über K Zubringerbündel einem gemeinsamen, in Reihe geschalteten Leitungsbündel geglätteter Verkehr angeboten wird. Dabei wird angenommen, daß den Zubringerbündeln selbst Zufallsverkehr 1.Art oder Zufallsverkehr 2.Art angeboten wird. Für die Zustandswahrscheinlichkeiten dieser Struktur wird eine geschlossene Lösung angegeben, mit der dann die Blockierungswahrscheinlichkeit, die pauschale Verlustwahrscheinlichkeit des gesamten geglätteten Angebots und auch die Einzelverlustwahrscheinlichkeiten der Verkehrsanteile, die über die einzelnen Zubringerbündel angeboten werden, berechnet werden können.

Die numerische Auswertung der Formeln bei der exakten Berechnung von größeren Strukturen benötigt zum Teil sehr viel Rechenzeit. Deshalb werden zwei Näherungsverfahren angegeben, bei denen, wie beim Streuwertverfahren für Überlaufverkehr, angenommen wird, daß man geglätteten Verkehr hinreichend genau durch Mittelwert und Varianz seiner Verteilung beschreiben kann. Für die Struktur mit K Zubringerbündeln werden die Formeln für Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots hergeleitet. Es werden zwei Ersatzanordnungen beschrieben, mit denen ein geglätteter Verkehr

mit vorgegebenen Eigenschaften erzeugt werden kann. Mit diesen Ersatzanordnungen lassen sich die Blockierungswahrscheinlichkeit und die Verlustwahrscheinlichkeiten näherungsweise berechnen.

An einer Reihe von Beispielen werden die beiden Näherungsverfahren mit dem exakten Verfahren verglichen. Die Verfahren von S. Katz und R. Mina, die ebenfalls Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots berücksichtigen, und eine Näherung, bei der nur der Mittelwert berücksichtigt wird, werden in den Vergleich mit einbezogen. Wie sich dabei zeigt, führt die Vernachlässigung der Varianz zu sehr schlechten Ergebnissen, so daß ein solches Verfahren praktisch nicht verwendet werden kann. Außerdem ergibt sich, daß auch dann, wenn man beide Momente des geglätteten Angebots berücksichtigt, die Art der Ersatzanordnung, mit der der geglättete Verkehr erzeugt wird, noch einen sehr starken Einfluß auf die Genauigkeit eines Näherungsverfahrens besitzt.

Anhang 1: Lösung des linearen Gleichungssystems für die Zustandswahrscheinlichkeiten

Das zu lösende Gleichungssystem lautet nach Gl.(7):

$$\sum_{i=1}^{K} [x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K] \left\{ C_{1i}\alpha_{in}\cdot(q_i - x_i - z_i) + C_{2i}\alpha_{im}\cdot(q_i - x_i - z_i) + C_{3i}\cdot x_i + C_{4i}\cdot z_i \right\}$$

$$= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \qquad (7)$$

Dabei ist:

$$U_1 = \sum_{i=1}^{K} C_{1i}\cdot(x_i+1)\,[x_1, z_1, \dots x_i+1, z_i, \dots x_K, z_K]$$

$$U_2 = \sum_{i=1}^{K} C_{2i}\cdot(z_i+1)\,[x_1, z_1, \dots x_i, z_i+1, \dots x_K, z_K]$$

$$U_3 = \sum_{i=1}^{K} C_{3i}\cdot\alpha_{in}\cdot(q_i - x_i - z_i + 1)\,[x_1, z_1, \dots x_i-1, z_i, \dots x_K, z_K]$$

$$U_4 = \sum_{i=1}^{K} C_{4i}\,\alpha_{im}\cdot(q_i - x_i - z_i + 1)\,[x_1, z_1, \dots x_i, z_i-1, \dots x_K, z_K]$$

Es wird gezeigt, daß folgender Ansatz das Gleichungssystem erfüllt:

$$[x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K] = \frac{1}{S_2} \prod_{r=1}^{K} \binom{q_r}{x_r} \alpha_{rn}^{x_r} \binom{q_r - x_r}{z_r} \alpha_{rm}^{z_r}$$

$$= \frac{1}{S_2} \prod_{r=1}^{K} \frac{q_r!}{(q_r - x_r - z_r)!} \frac{\alpha_{rn}^{x_r}}{x_r!} \frac{\alpha_{rm}^{z_r}}{z_r!} \qquad (A1)$$

Mit (A1) erhält man für die Summe U_1:

$$U_1 = \sum_{i=1}^{K} C_{1i}\cdot(x_i+1) \frac{1}{S_2} \frac{q_i!}{(q_i - x_i - z_i - 1)!} \frac{\alpha_{in}^{x_i+1}}{(x_i+1)!} \frac{\alpha_{im}^{z_i}}{z_i!} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{K} \frac{q_r!}{(q_r - x_r - z_r)!} \frac{\alpha_{rn}^{x_r}}{x_r!} \frac{\alpha_{rm}^{z_r}}{z_r!}$$

$$= \sum_{i=1}^{K} C_{1i}\,\alpha_{in}\cdot(q_i - x_i - z_i) \frac{1}{S_2} \frac{q_i!}{(q_i - x_i - z_i)!} \frac{\alpha_{in}^{x_i}}{x_i!} \frac{\alpha_{im}^{z_i}}{z_i!} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{K} \frac{q_r!}{(q_r - x_r - z_r)!} \frac{\alpha_{rn}^{x_r}}{x_r!} \frac{\alpha_{rm}^{z_r}}{z_r!}$$

$$= \sum_{i=1}^{K} C_{1i}\,\alpha_{in}(q_i - x_i - z_i) \frac{1}{S_2} \prod_{r=1}^{K} \frac{q_r!}{(q_r - x_r - z_r)!} \frac{\alpha_{rn}^{x_r}}{x_r!} \frac{\alpha_{rm}^{z_r}}{z_r!}$$

$$= \sum_{i=1}^{K} C_{1i}\,\alpha_{in}(q_i - x_i - z_i)\,[x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K]$$

Durch eine entsprechende Umformung wie bei der Summe U_1 erhält man für die Summe U_2:

$$U_2 = \sum_{i=1}^{K} C_{2i}\, \alpha_{im} \cdot (q_i - x_i - z_i)\, [x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K]$$

Mit Gl.(A1) erhält man für die Summe U_3:

$$U_3 = \sum_{i=1}^{K} C_{3i}\, \alpha_{in} (q_i - x_i - z_i + 1) \frac{1}{S_2} \frac{q_i!}{(q_i - x_i - z_i + 1)!} \frac{\alpha_{in}^{x_i - 1}}{(x_i - 1)!} \frac{\alpha_{im}^{z_i}}{z_i!} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{K} \frac{q_r!}{(q_r - x_r - z_r)!} \frac{\alpha_{rn}^{x_r}}{x_r!} \frac{\alpha_{rm}^{z_r}}{z_r!}$$

$$= \sum_{i=1}^{K} C_{3i}\, x_i \frac{1}{S_2} \frac{q_i!}{(q_i - x_i - z_i)!} \frac{\alpha_{in}^{x_i}}{x_i!} \frac{\alpha_{im}^{z_i}}{z_i!} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq i}}^{K} \frac{q_r!}{(q_r - x_r - z_r)!} \frac{\alpha_{rn}^{x_r}}{x_r!} \frac{\alpha_{rm}^{z_r}}{z_r!}$$

$$= \sum_{i=1}^{K} C_{3i}\, x_i \frac{1}{S_2} \prod_{r=1}^{K} \frac{q_r!}{(q_r - x_r - z_r)!} \frac{\alpha_{rn}^{x_r}}{x_r!} \frac{\alpha_{rm}^{z_r}}{z_r!}$$

$$= \sum_{i=1}^{K} C_{3i} \cdot x_i \cdot [x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K]$$

Für die Summe U_4 erhält man durch eine entsprechende Umformung:

$$U_4 = \sum_{i=1}^{K} C_{4i}\, z_i\, [x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K]$$

Damit erhält man für die rechte Seite von Gl.(7):

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$= \sum_{i=1}^{K} [x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K] \left\{ C_{1i}\, \alpha_{in} (q_i - x_i - z_i) + C_{2i}\, \alpha_{im} (q_i - x_i - z_i) + C_{3i} \cdot x_i + C_{4i} \cdot z_i \right\}$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der linken Seite von Gl.(7). Damit ist gezeigt, daß Gl.(A1) die Lösung des Gleichungssystems (7) ist.

<u>Anhang 2:</u> Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeiten für geglätteten ZV1

Die Zustandswahrscheinlichkeiten für geglätteten ZV1 kann man aus der Lösung für geglätteten ZV2 (Gl.(A1)) durch einen Grenzübergang bestimmen. Der Grenzübergang wird so durchgeführt, daß

$$q_i \longrightarrow \infty \qquad \alpha_{im}, \alpha_{in} \longrightarrow \sigma \qquad i = 1, 2, \dots K$$

Dabei sollen die Anrufraten, d.h. die Produkte

$$\lambda_{im} = q_i \cdot \alpha_{im} \qquad \lambda_{in} = q_i \cdot \alpha_{in} \qquad i = 1, 2, \dots K$$

konstant bleiben.

Zunächst wird gezeigt, daß für jeden Faktor des Produkts in Gl.(A1) ein Grenzwert existiert.

$$\lim_{\substack{q_i \to \infty \\ \alpha_{in} \to \sigma}} \binom{q_i}{x_i} \alpha_{in}^{x_i} = \lim_{\substack{q_i \to \infty \\ \alpha_{in} \to \sigma}} \frac{q_i \cdot \alpha_{in} \cdot (q_i - 1)\alpha_{in} \cdot \dots \cdot (q_i - x_i + 1)\, \alpha_{in}}{x_i!} = \frac{\lambda_{in}^{x_i}}{x_i!}$$

$$\lim_{\substack{q_i \to \infty \\ \alpha_{im} \to \sigma}} \binom{q_i - x_i}{z_i} \alpha_{im}^{z_i} = \lim_{\substack{q_i \to \infty \\ \alpha_{im} \to \sigma}} \frac{(q_i - x_i)\alpha_{im} \cdot (q_i - x_i - 1)\alpha_{im} \cdot \dots \cdot (q_i - x_i - z_i + 1)\, \alpha_{im}}{z_i!} = \frac{\lambda_{im}^{x}}{z_i!}$$

Da die Zahl der Faktoren des Produkts endlich ist, und da für jeden Faktor ein endlicher Grenzwert existiert, ist nach [8] der Grenzwert des Produkts gleich dem Produkt der Grenzwerte.

$$\lim_{\substack{q_i \to \infty \\ \alpha_{im}, \alpha_{in} \to \sigma}} \prod_{i=1}^{K} \binom{q_i}{x_i} \alpha_{in}^{x_i} \binom{q_i - x_i}{z_i} \alpha_{im}^{z_i} = \prod_{i=1}^{K} \frac{\lambda_{in}^{x_i}}{x_i!} \frac{\lambda_{im}^{z_i}}{z_i!}$$

Da wegen $t_m = 1$ $A_{im} = \lambda_{im}$ und $A_{in} = \lambda_{in}$ ist, erhält man für die Zustandswahrscheinlichkeiten bei geglättetem Zufallsverkehr 1.Art:

$$[x_1, z_1, \dots x_i, z_i, \dots x_K, z_K] = \frac{1}{S_1} \prod_{i=1}^{K} \frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!} \frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!}$$

Anhang 3: Berechnung von Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots bei ZV2

Da für die Herleitung die Formeln für Mittelwert und Varianz der Verteilung auf einem vollkommen erreichbaren Bündel, dem ZV2 angeboten wird, benötigt werden, werden zunächst diese Größen hergeleitet.

Für diese Verteilung gilt:

$$[x] = \frac{1}{S} \binom{q}{x} \alpha^x$$

Dabei ist:

$$S = \sum_{i=\sigma}^{N} \binom{q}{i} \alpha^i$$

Für den Mittelwert gilt:

$$y(q,N) = \sum_{x=1}^{N} x \cdot [x] = \frac{1}{S} \sum_{x=1}^{N} x \binom{q}{x} \alpha^x \qquad (A2)$$

$$= \frac{q \cdot \alpha}{S} \sum_{i=\sigma}^{N-1} \binom{q-1}{i} \alpha^i \qquad (A3)$$

Für das zweite gewöhnliche Moment erhält man:

$$M_2 = \sum_{x=1}^{N} x^2 [x] = \frac{1}{S} \sum_{x=1}^{N} x^2 \binom{q}{x} \alpha^x$$

$$= \frac{q}{S} \sum_{x=1}^{N} x \binom{q-1}{x-1} \alpha^x$$

$$= \frac{q \cdot \alpha}{S} \sum_{i=\sigma}^{N-1} (i+1) \binom{q-1}{i} \alpha^i$$

$$= \frac{q \cdot \alpha}{S} \sum_{i=\sigma}^{N-1} i \binom{q-1}{i} \alpha^i + \frac{q \cdot \alpha}{S} \sum_{i=\sigma}^{N-1} \binom{q-1}{i} \alpha^i$$

Die zweite Summe von M_2 ist nach Gl.(A3) gleich dem Mittelwert $Y(q,N)$. Die erste Summe kann in folgender Weise umgeformt werden. Durch Ersetzen von q und N durch (q-1) und (N-1) in Gl.(A2) erhält man:

$$y(q-1,N-1) = \frac{\sum_{x=\sigma}^{N-1} x \binom{q-1}{x} \alpha^x}{\sum_{i=\sigma}^{N} \binom{q-1}{i} \alpha^i}$$

oder

$$\sum_{x=\sigma}^{N-1} x \binom{q-1}{x} \alpha^x = y(q-1,N-1) \cdot \sum_{i=\sigma}^{N-1} \binom{q-1}{i} \alpha^i \qquad (A4)$$

Mit Gl.(A3) und (A4) erhält man:

$$M_2 = \frac{q \cdot \alpha}{S} \sum_{i=\sigma}^{N-1} \binom{q-1}{i} \alpha^i \cdot y(q-1,N-1) + y(q,N)$$

Mit Gl.(A3):

$$M_2 = y(q,N) \cdot y(q-1,N-1) + y(q,N)$$

Die Varianz der Verteilung ist:

$$V(q,N) = M_2 - y^2(q,N)$$

$$= y(q,N) \cdot \left\{ 1 + y(q-1,N-1) - y(q,N) \right\} \qquad (A5)$$

Die in Kap. 3 hergeleitete Verteilung des geglätteten Angebots lautet nach Gl.(18a):

$$[x] = \frac{1}{S} \binom{q}{x} \alpha_n^x \sum_{z=0}^{N-x} \binom{q-x}{z} \alpha_m^z$$

Die Konstante S ist so zu wählen, daß

$$\sum_{x=\sigma}^{N} [x] = 1$$

Damit erhält man für S:

$$S = \sum_{x=\sigma}^{N} \binom{q}{x} \alpha_n^x \sum_{z=\sigma}^{N-x} \binom{q-x}{z} \alpha_m^z$$

$$= \sum_{r=\sigma}^{N} \sum_{x=\sigma}^{r} \binom{q}{x} \alpha_n^x \binom{q-x}{r-x} \alpha_m^{r-x}$$

mit geänderter Summationsreihenfolge und mit $r = x + z$

$$= \sum_{r=\sigma}^{N} \binom{q}{r} \sum_{x=\sigma}^{r} \binom{r}{x} \alpha_n^x \alpha_m^{r-x}$$

$$= \sum_{r=\sigma}^{N} \binom{q}{r} (\alpha_n + \alpha_m)^r \qquad (A6)$$

Berechnung desMittelwerts:

$$A_s = \sum_{x=1}^{N} x \cdot [x] = \frac{1}{S} \sum_{x=1}^{N} x \binom{q}{x} \alpha_n^x \sum_{z=\sigma}^{N-x} \binom{q-x}{z} \alpha_m^z \qquad (A7)$$

$$= \frac{1}{S} \sum_{x=1}^{N} q \binom{q-1}{x-1} \alpha_n^x \sum_{z=0}^{N-x} \binom{q-x}{z} \alpha_m^z$$

$$= \frac{q \cdot \alpha_n}{S} \sum_{i=\sigma}^{N-1} \binom{q-1}{i} \alpha_n^i \sum_{z=\sigma}^{N-1-i} \binom{q-1-i}{z} \alpha_m^z \qquad \text{mit } i = x-1 \qquad (A8)$$

$$= \frac{q \cdot \alpha_n}{S} \sum_{r=\sigma}^{N-1} \sum_{i=\sigma}^{r} \binom{q-1}{i} \alpha_n^i \binom{q-1-i}{r-i} \alpha_m^{r-i} \qquad \text{mit } r = x+z$$

$$= \frac{q \cdot \alpha_n}{S} \sum_{r=\sigma}^{N-1} \binom{q-1}{r} \alpha^r \qquad \text{mit } \alpha = \alpha_n + \alpha_m$$

Mit Gl.(A3) erhält man daraus:

$$A_s = \frac{\alpha_n}{\alpha} \, \mathcal{Y}(q, N) \qquad (A9)$$

Zweites gewöhnliches Moment:

$$M_2 = \sum_{x=1}^{N} x^2 [x] = \frac{1}{S} \sum_{x=1}^{N} x^2 \binom{q}{x} \alpha_n^x \sum_{z=\sigma}^{N-x} \binom{q-x}{z} \alpha_m^z$$

$$= \frac{1}{S} \sum_{x=1}^{N} x \cdot q \cdot \binom{q-1}{x-1} \alpha_n^x \sum_{z=\sigma}^{N-x} \binom{q-x}{z} \alpha_m^z$$

$$= \frac{q \cdot \alpha_n}{S} \sum_{i=\sigma}^{N-1} (i+1) \binom{q-1}{i} \alpha_n^i \sum_{z=\sigma}^{N-1-i} \binom{q-1-i}{z} \alpha_m^z$$

$$= \frac{q \cdot \alpha_n}{S} \sum_{i=\sigma}^{N-1} i \binom{q-1}{i} \alpha_n^i \sum_{z=\sigma}^{N-1-i} \binom{q-1-i}{z} \alpha_m^z + \frac{q \cdot \alpha_n}{S} \sum_{i=\sigma}^{N-1} \binom{q-1}{i} \alpha_n^i \sum_{z=\sigma}^{N-1-i} \binom{q-1-i}{z} \alpha_m^z$$

Die zweite Summe von M_2 ist nach Gl.(A8) gleich dem Mittelwert A_s. Die erste Summe kann man mit Gl.(A7) und (A9) umformen. Es ist:

$$\sum_{x=1}^{N} x \binom{q}{x} \alpha_n^x \sum_{z=\sigma}^{N-x} \binom{q-x}{z} \alpha_m^z = \frac{\alpha_n}{\alpha} \, \mathcal{Y}(q, N) \cdot \sum_{i=\sigma}^{N} \binom{q}{i} \alpha^i$$

Daraus erhält man durch Ersetzen von q und N durch (q-1) und (N-1):

$$\sum_{x=1}^{N-1} x \binom{q-1}{x} \alpha_n^x \sum_{z=\sigma}^{N-1-x} \binom{q-1-x}{z} \alpha_m^z = \frac{\alpha_n}{\alpha} \, \mathcal{Y}(q-1, N-1) \sum_{i=\sigma}^{N-1} \binom{q-1}{i} \alpha^i \qquad (A10)$$

Aus Gl.(A8) und (A10) erhält man damit für M_2:

$$M_2 = \frac{q \cdot \alpha_n}{S} \sum_{i=0}^{N-1} \binom{q-1}{i} \alpha^i \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha} \, \mathcal{Y}(q-1, N-1) + A_s$$

Nach Gl.(A3) ist:

$$M_2 = \frac{\alpha_n}{\alpha} \, \mathcal{Y}(q, N) \cdot \frac{\alpha_n}{\alpha} \, \mathcal{Y}(q-1, N-1) + A_s = A_s \left\{ 1 + \frac{\alpha_n}{\alpha} \, \mathcal{Y}(q-1, N-1) \right\}$$

Für die Varianz des geglätteten Angebots gilt:

$$V_s = M_2 - A_s^2 = A_s \left\{ 1 + \frac{\alpha_n}{\alpha} \, \mathcal{Y}(q-1, N-1) - A_s \right\} \qquad (A11)$$

Anhang 4: Berechnung von Mittelwert und Varianz des geglätteten Angebots bei ZV1

Für die Herleitung werden die Formeln für Mittelwert und Varianz der Verteilung auf einem vollkommenen Bündel, dem ZV1 angeboten wird, benötigt. Deshalb werden zunächst diese Größen hergeleitet.

Für die Verteilung auf einem vollkommenen Bündel gilt:

$$[x] = \frac{1}{S}\,\frac{A^x}{x!}$$

Dabei ist:

$$S = \sum_{i=0}^{N} \frac{A^i}{i!}$$

Für den Mittelwert der Verteilung gilt:

$$y(N) = \sum_{x=1}^{N} x\cdot[x] = \frac{1}{S}\sum_{x=1}^{N} x\,\frac{A^x}{x!} \qquad (A\,12)$$

$$= \frac{A}{S}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{A^i}{i!} \qquad (A\,13)$$

Für das zweite gewöhnliche Moment erhält man:

$$M_2 = \sum_{x=1}^{N} x^2[x] = \frac{1}{S}\sum_{x=1}^{N} x^2\,\frac{A^x}{x!}$$

$$= \frac{A}{S}\sum_{x=1}^{N} x\,\frac{A^{x-1}}{(x-1)!} = \frac{A}{S}\sum_{i=0}^{N-1}(i+1)\,\frac{A^i}{i!}$$

$$= \frac{A}{S}\sum_{i=0}^{N-1} i\,\frac{A^i}{i!} + \frac{A}{S}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{A^i}{i!} \qquad (A\,14)$$

Nach Gl. (A12) ist:

$$y(N) = \frac{\sum_{i=1}^{N} i\,\frac{A^i}{i!}}{\sum_{i=0}^{N}\frac{A^i}{i!}} \qquad (A\,15)$$

Durch Ersetzen von N durch (N-1) erhält man aus Gl. (A15):

$$y(N-1)\sum_{i=0}^{N-1}\frac{A^i}{i!} = \sum_{i=0}^{N-1} i\,\frac{A^i}{i!} \qquad (A\,16)$$

Mit Gl. (A13) und (A16) erhält man aus Gl. (A14):

$$M_2 = \frac{A}{S}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{A^i}{i!}\;y(N-1) + y(N)$$

$$= y(N)\left\{ y(N-1) + 1 \right\}$$

Für die Varianz der Verteilung des vollkommenen Bündels gilt dann:

$$V(N) = M_2 - y^2(N)$$

$$= y(N)\left\{ 1 + y(N-1) - y(N) \right\} \qquad (A\,17)$$

Diesen Ausdruck kann man in folgender Weise umformen (vgl. P. J. Burke, zitiert in [14] S. 498):

$$y(N) - y(N-1) = A\left\{1 - E_N(A)\right\} - A\left\{1 - E_{N-1}(A)\right\}$$

$$= A\left\{ E_{N-1}(A) - E_N(A)\right\}$$

Dabei ist:

$$E_N(A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{i=0}^{N}\frac{A^i}{i!}}$$

$$E_{N-1}(A) = E_N(A)\,\frac{N}{y(N)}$$

Man erhält jetzt:

$$y(N) - y(N-1) = A \cdot E_N(A) \frac{N - y(N)}{y(N)} \qquad (A18)$$

Mit Gl.(A18) folgt aus Gl.(A17):

$$V(N) = y(N) - A \cdot E_N(A) \{ N - y(N) \} \qquad (A19)$$

Für die Verteilung eines geglätteten Zufallsverkehrs 1.Art gilt nach Gl.(18b) in Kap. 3 :

$$[x] = \frac{1}{S_1} \frac{A_n^x}{x!} \sum_{z=\sigma}^{N-x} \frac{A_m^z}{z!}$$

Die Konstante S_1 ist so zu wählen, daß

$$\sum_{x=\sigma}^{N} [x] = 1$$

Damit erhält man für S_1:

$$S_1 = \sum_{x=0}^{N} \frac{A_n^x}{x!} \sum_{z=0}^{N-x} \frac{A_m^z}{z!}$$

$$= \sum_{r=0}^{N} \sum_{x=0}^{r} \frac{A_n^x}{x!} \frac{A_m^{r-x}}{(r-x)!}$$

mit $r = x + z$
und mit geänderter
Summationsreihenfolge

$$= \sum_{r=0}^{N} \frac{A^r}{r!}$$

mit $A = A_n + A_m$

Für den Mittelwert des geglätteten Angebots gilt:

$$A_S = \sum_{x=1}^{N} x \cdot [x] = \frac{1}{S_1} \sum_{x=1}^{N} x \frac{A_n^x}{x!} \sum_{z=0}^{N-x} \frac{A_m^z}{z!} \qquad (A20)$$

$$= \frac{A_n}{S_1} \sum_{x=1}^{N} \frac{A_n^{x-1}}{(x-1)!} \sum_{z=0}^{N-x} \frac{A_m^z}{z!}$$

$$A_S = \frac{A_n}{S_1} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A_n^i}{i!} \sum_{z=0}^{N-1-i} \frac{A_m^z}{z!} \qquad (A21)$$

$$= \frac{A_n}{S_1} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{r} \frac{A_n^i}{i!} \frac{A_m^{r-i}}{(r-i)!}$$

$$= \frac{A_n}{S_1} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(A_n + A_m)^r}{r!}$$

Mit Gl.(A13) erhält man:

$$A_S = \frac{A_n}{A} y(N) \qquad (A22)$$

Zweites gewöhnliches Moment:

$$M_2 = \sum_{x=1}^{N} x^2 [x] = \frac{1}{S_1} \sum_{x=1}^{N} x^2 \frac{A_n^x}{x!} \sum_{z=0}^{N-x} \frac{A_m^z}{z!}$$

$$= \frac{A_n}{S_1} \sum_{x=1}^{N} x \frac{A_n^{x-1}}{(x-1)!} \sum_{z=0}^{N-x} \frac{A_m^z}{z!}$$

$$= \frac{A_n}{S_1} \sum_{i=0}^{N-1} (i+1) \frac{A_n^i}{i!} \sum_{z=0}^{N-1-i} \frac{A_m^z}{z!}$$

$$= \frac{A_n}{S_1} \sum_{i=0}^{N-1} i \frac{A_n^i}{i!} \sum_{z=0}^{N-1-i} \frac{A_m^z}{z!} + \frac{A_n}{S_1} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A_n^i}{i!} \sum_{z=0}^{N-1-i} \frac{A_m^z}{z!}$$

Aus Gl.(A20) und (A22) folgt:

$$\frac{A_n}{A} y(N) = \frac{\sum_{x=1}^{N} x \frac{A_n^x}{x!} \sum_{z=0}^{N-x} \frac{A_m^z}{z!}}{\sum_{i=0}^{N} \frac{(A_m + A_n)^i}{i!}}$$

Durch Ersetzen von N durch (N-1) erhält man:

$$\sum_{x=1}^{N-1} x \frac{A_n^x}{x!} \sum_{z=0}^{N-1-x} \frac{A_m^z}{z!} = \frac{A_n}{A} \, y(N-1) \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \qquad (A\,23)$$

Mit Gl.(A21) und (A23) erhält man jetzt für M_2:

$$M_2 = \frac{A_n}{S_1} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{A^i}{i!} \; \frac{A_n}{A} \; y(N-1) + A_s$$

Mit Gl.(A13):

$$M_2 = \frac{A_n}{A} \, y(N) \; \frac{A_n}{A} \, y(N-1) + A_s$$

$$= A_s \left\{ 1 + \frac{A_n}{A} \, y(N-1) \right\}$$

Für die Varianz des geglätteten Angebots gilt:

$$V_s = M_2 - A_s^2 = A_s \left\{ 1 + \frac{A_n}{A} \, y(N-1) - A_s \right\}$$

$$= A_s \left\{ 1 - \frac{A_n}{A} \left(y(N) - y(N-1) \right) \right\} \qquad (A24)$$

Mit Gl.(A18) erhält man daraus:

$$V_s = A_s \left\{ 1 - A_n \cdot E_N(A) \, \frac{N - y(N)}{y(N)} \right\}$$

$$= A_s - A_n E_N(A) \left\{ \frac{A_s}{y(N)} N - A_s \right\}$$

Mit Gl.(A22):

$$= A_s - A_n E_N(A) \left\{ \frac{A_n}{A} N - A_s \right\} \qquad (A\,25)$$

<u>Anhang 5:</u> Bestimmung der Grenzwerte der Varianz des geglätteten Angebots

Für den Mittelwert des geglätteten Angebots gilt nach Gl.(29a):

$$A_{SG} = \frac{A_n^*}{A} \, y(N^*) \qquad (29a)$$

Die Varianz des geglätteten Angebots ist:

$$V_{SG} = A_{SG} \left\{ 1 + \frac{A_n^*}{A} \, y(N^*-1) - A_{SG} \right\} \qquad (30a)$$

Dabei ist $A = A_m^* + A_n^*$

$Y(N^*)$ ist die Belastung des Zubringerbündels mit N^* Leitungen und dem Angebot A.

Betrachtet man die Varianz V_{SG} des geglätteten Angebots in Abhängigkeit vom Gesamtangebot A bei konstantem Mittelwert A_{SG}, dann kann V_{SG} nur Werte zwischen den Grenzen $V_{S\,min}$ und $V_{S\,max}$ annehmen. Diese Grenzen werden im folgenden hergeleitet.

Zunächst wird gezeigt, daß es für das Angebot A einen kleinsten Wert gibt, mit dem ein geglättetes Angebot mit vorgegebenem Mittelwert A_{SG} aber beliebiger Varianz V_{SG} erzeugt werden kann. Nach Gl.(29a) ist:

$$\frac{A_n^*}{A} = \frac{A_{SG}}{y(N^*)} \qquad (A\,26)$$

Aus $A = A_m^* + A_n^*$ und $A_m^*, A_n^* \geq 0$ folgt:

$$0 \leq \frac{A_n^*}{A} \leq 1 \qquad (A\,27)$$

Wenn A abnimmt, dann nimmt auch $Y(N^*)$ ab und nach Gl.(A26) nimmt der Quotient A_n^*/A zu. Wegen Gl.(A27) kann A nur soweit reduziert werden, bis $A_n^*/A = 1$ ist. Dieses Angebot $A^* = A_n^*$ ist das kleinste Angebot, mit dem ein geglätteter Verkehr mit dem vorgegebenen Mittelwert A_{SG} erzeugt werden kann. Aus Gl.(A26) folgt dann, daß die Belastung $Y(N^*)$ auf dem Zubringerbündel N^* der Ersatzanordnung gleich dem Mittelwert A_{SG} ist.

$$Y(N^*) = A_{SG} \qquad (A28)$$

Aus Gl.(A28) kann man das Angebot A^* berechnen.

Für große Werte des Angebots A gilt:

$$\lim_{A \to \infty} Y(N^*) = N^*$$

Also ist

$$\lim_{A \to \infty} \frac{A_n^*}{A} = \lim_{A \to \infty} \frac{A_{SG}}{Y(N^*)} = \frac{A_{SG}}{N^*} \qquad (A29)$$

Dies bedeutet, daß im Grenzübergang sowohl A als auch A_n^* gegen unendlich gehen, dabei bleibt der Quotient A_n^*/A endlich. Da bei konstantem A_{SG} Gl.(29a) eine Nebenbedingung für Gl.(30a) darstellt, ist die Varianz V_{SG} also im Bereich $A^* \leq A < \infty$ definiert.

Als nächstes wird der Verlauf der Varianz V_{SG} nach Gl.(30a) in Abhängigkeit vom Angebot A bei konstanten Werten A_{SG} und N^* betrachtet. In den Diagrammen 9 bis 11 ist $V_{SG} = f(A)$ für verschiedene Werte A_{SG} und N^* dargestellt. Aus Gl.(A26) und (30a) erhält man:

$$V_{SG} = A_{SG} \left\{ 1 - A_{SG} + A_{SG} \frac{Y(N^*-1)}{Y(N^*)} \right\} \qquad (A30)$$

Die Ableitung der Varianz V_{SG} nach dem Angebot A ist:

$$\frac{d V_{SG}}{d A} = \frac{A_{SG}^2}{Y^2(N^*)} \left\{ Y(N^*) \frac{d Y(N^*-1)}{d A} - Y(N^*-1) \frac{d Y(N^*)}{d A} \right\} \qquad (A31)$$

Nach [2] gilt:

$$\frac{d Y(N^*)}{d A} = \frac{V(N^*)}{A}$$

Mit Gl.(A17):

$$\frac{d Y(N^*)}{d A} = \frac{Y(N^*)}{A} \left\{ 1 + Y(N^*-1) - Y(N^*) \right\}$$

Entsprechend ist:

$$\frac{d Y(N^*-1)}{d A} = \frac{Y(N^*-1)}{A} \left\{ 1 + Y(N^*-2) - Y(N^*-1) \right\}$$

Damit erhält man aus Gl.(A31):

$$\frac{d V_{SG}}{d A} = \frac{A_{SG}^2}{A} \frac{Y(N^*-1)}{Y(N^*)} \left\{ \left[Y(N^*) - Y(N^*-1) \right] - \left[Y(N^*-1) - Y(N^*-2) \right] \right\} \qquad (A32)$$

Wenn man ein vollkommenes Bündel mit N^* Leitungen und dem Angebot A betrachtet, bei dem die Leitungen in geordneter Reihenfolge abgesucht werden, dann ist $Y(N^*) - Y(N^*-1)$ die Belastung der letzten Leitung und $Y(N^*-1) - Y(N^*-2)$ die Belastung der vorletzten Leitung des Bündels. Da bei geordnetem Absuchen der Leitungen die Belastung der vorletzten Leitung größer ist als die der letzten Leitung, folgt aus Gl.(A32) für den gesamten Definitionsbereich von V_{SG}:

$$\frac{d V_{SG}}{d A} < 0$$

Dies bedeutet, daß die Funktion $V_{SG} = f(A)$ bei konstanten Werten A_{SG} und N^* monoton abnimmt. Daraus folgt, daß die Varianz ihr Maximum beim kleinsten Wert $A = A^*$ hat. Es ist also

$$V_{S\ max} = f(A^*)$$

mit Gl.(A25):

$$V_{S\ max} = A_{SG} - (A^* - A_{SG})(N^* - A_{SG}) \qquad (A33)$$

Der Wert $V_{S\ max}$ ist gleich der Varianz einer Erlang-Verteilung mit dem Mittelwert A_{SG} auf einem Bündel mit N^* Leitungen.

Wegen der monotonen Abnahme von V_{SG} erhält man den kleinsten Wert $V_{S\ min}$ für $A \rightarrow \infty$ aus Gl.(A30):

$$V_{S\,min} = \lim_{A \rightarrow \infty} V_{SG} = A_{SG}\left(1 - \frac{A_{SG}}{N^*}\right) \qquad (A34)$$

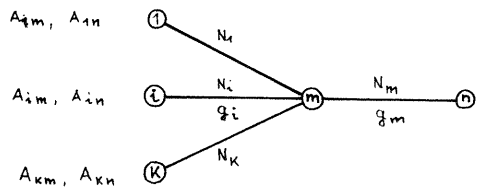
Bei festen Werten für A_{SG} und V_{SG} kann man in entsprechender Weise Grenzen für die Leitungszahl N^* des Ersatzzubringerbündels angeben. Die kleinste Leitungszahl N^*_{min} ist diejenige, bei der sich für $A^*_m = 0$ eine Erlang-Verteilung mit dem Mittelwert A_{SG} und der Varianz V_{SG} einstellt. Die größte Leitungszahl N^*_{max} erhält man aus Gl.(A34):

$$N^*_{max} = \frac{A_{SG}}{1 - \frac{V_{SG}}{A_{SG}}}$$

Die Leitungszahl N^*_{max} ist gleich der Quellenzahl bei Approximation von geglättetem Verkehr durch Zufallsverkehr 2. Art, wie es von R. Mina in [5] und [6] vorgeschlagen wird (siehe Kap. 6, Seite 70).

Anhang 6: Berechnung von Grenzwerten für die zweidimensionale Verteilung $[g_i, g_m]$

In Kap. 2.5 Seite 24 wird die Wahrscheinlichkeit $[g_i, g_m]$ berechnet, daß g_i Belegungen auf dem Zubringerbündel N_i bestehen und gleichzeitig g_m Belegungen auf dem Bündel N_m.



Für diese Verteilung werden hier zwei Grenzfälle betrachtet:

a) Das Angebot A_{in}, das gleichzeitig Belegungen auf Bündel N_i und N_m verursacht, ist Null. In diesem Falle sind die Verteilungen $[g_i]$ bzw. $[g_m]$ auf den Bündeln N_i bzw. N_m unabhängig, d.h.

$$[g_i, g_m] = [g_i] \cdot [g_m]$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist:

$$[g_i | g_m] = \frac{[g_i, g_m]}{[g_m]} = [g_i]$$

b) Die stärkste Abhängigkeit der beiden Verteilungen besteht bei $A_{in} > 0$, $A_{im} = 0$ und $A_{jn} = 0$ $(1 \leq j \leq K,\ j \neq i)$. Jetzt ist die Anzahl der Belegungen auf Bündel N_i und N_m immer gleich. Es ist:

$$[g_i, g_m] = [g_i] = [g_m]$$

$$[g_i | g_m] = \frac{[g_i, g_m]}{[g_m]} = 1$$

Für den allgemeinen Fall mit $A_{im} \geqslant 0$, $A_{in} \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \leqslant K)$ ist also:

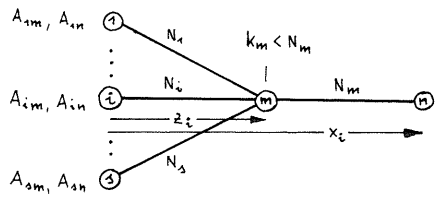
$$[g_i] \leqslant [g_i | g_m] \leqslant 1$$

Für $g_i = N_i$ und $g_m = N_m$ erhält man:

$$[N_i] \leqslant [N_i | N_m] \leqslant 1$$

Anhang 7: Erweiterung des exakten Berechnungsverfahrens auf Leitungsbündel mit unvollkommener Erreichbarkeit bei geglättetem Zufallsverkehr 1. Art

Für die Untersuchung von geglättetem Verkehr, der einem Leitungsbündel mit unvollkommener Erreichbarkeit angeboten wird, wird die Struktur nach Abb. 2 Seite 14 betrachtet. Dabei wird angenommen, daß das gemeinsame Bündel N_m eine Erreichbarkeit $k_m < N_m$ besitzt, während die Zubringerbündel N_i eine vollkommene Erreichbarkeit besitzen sollen.

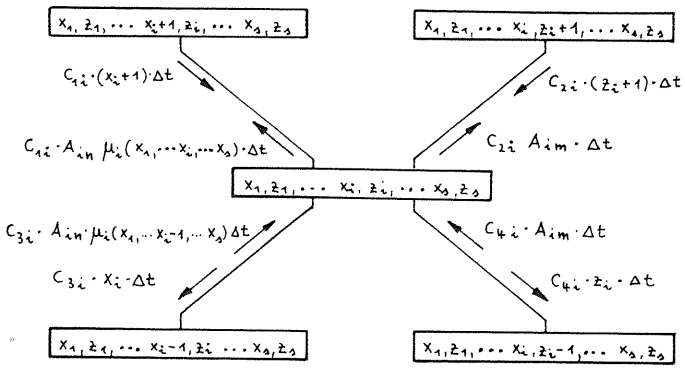


Im Knoten i $(i = 1, 2, \cdots s)$ werden zwei Zufallsverkehre 1. Art A_{im} und A_{in} angeboten. Der Angebotsanteil A_{im} belegt nur Leitungen auf dem Zubringerbündel N_i, während das Angebot A_{in} gleichzeitig Leitungen im Bündel N_i und im gemeinsamen Bündel N_m belegt. Die Zahl der Belegungen, die im Knoten m enden, sei z_i, die Zahl der Belegungen, die von Knoten i über Knoten m zum Knoten n führen, sei x_i.

Zur Berechnung der Zustandswahrscheinlichkeiten $[x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_s, z_s]$ wird eine Durchlaßwahrscheinlichkeit $\mu_i(x_1, \ldots x_i, \ldots x_s)$ eingeführt. Diese Durchlaßwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein im Zustand $\{x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_s, z_s\}$ über das Zubringerbündel N_i im Knoten m eintreffender Anruf auch im Bündel N_m eine freie Leitung erreicht. Es wird an-

genommen, daß diese Durchlaßwahrscheinlichkeit nicht nur von der Bündelgröße N_m und seiner Erreichbarkeit $k_m < N_m$ sondern auch von der Anzahl der Belegungen x_i der einzelnen Zubringerbündel abhängig ist, dagegen nicht von der Zahl z_i der zusätzlichen Belegungen auf den Zubringerbündeln.

Für die Zustände $\{x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_s, z_s\}$ im betrachteten System gibt es folgende Übergangsmöglichkeiten:



Nach dem Prinzip von der Erhaltung des statistischen Gleichgewichts erhält man folgendes lineare Gleichungssystem für die Zustandswahrscheinlichkeiten bei stationärem Verkehr:

$$\sum_{i=1}^{s} [x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_s, z_s] \cdot \left\{ C_{1i} \cdot A_{in} \cdot \mu_i(x_1, \ldots x_i \ldots x_s) + C_{2i} \cdot A_{im} + C_{3i} \cdot x_i + C_{4i} \cdot z_i \right\}$$

$$= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \qquad (A35)$$

Dabei ist:

$$U_1 = \sum_{i=1}^{s} C_{1i} \cdot (x_i+1)\, [x_1, z_1, \ldots x_i+1, z_i, \ldots x_s, z_s] \qquad (A36)$$

$$U_2 = \sum_{i=1}^{s} C_{2i} \cdot (z_i+1) \cdot [x_1, z_1, \ldots x_i, z_i+1, \ldots x_s, z_s] \qquad (A37)$$

$$U_3 = \sum_{i=1}^{s} C_{3i} \cdot A_{in} \cdot \mu_i(x_1, \ldots x_i-1, \ldots x_s) \cdot [x_1, z_1, \ldots x_i-1, z_i, \ldots x_s, z_s] \qquad (A38)$$

$$U_4 = \sum_{i=1}^{s} C_{4i} \cdot A_{im}\, [x_1, z_1, \ldots x_i, z_i-1, \ldots x_s, z_s] \qquad (A39)$$

Für die Koeffizienten C_{1i}, C_{2i}, C_{3i} und C_{4i} gilt:

$$C_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{falls Zustand } \{x_1, z_1, \ldots x_i+1, z_i, \ldots x_s, z_s\} \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots s$$

$$C_{2i} = \begin{cases} 1 & \text{falls Zustand } \{x_1, z_1, \ldots x_i, z_i+1, \ldots x_s, z_s\} \text{ existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots s$$

$$C_{3i} = \begin{cases} 1 & \text{für } x_i > 0 \\ 0 & \text{für } x_i = 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots s$$

$$C_{4i} = \begin{cases} 1 & \text{für } z_i > 0 \\ 0 & \text{für } z_i = 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots s$$

Eine weitere Bedingung für die Zustandswahrscheinlichkeiten ist, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller im System möglichen Zustände gleich eins ist.

$$\sum_{M} [x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_s, z_s] = 1 \qquad (A40)$$

Wie im folgenden gezeigt wird, kann man das Gleichungssystem (A35) bis auf einen konstanten Faktor C durch folgenden Ansatz lösen:

$$[x_1, z_1, \ldots x_i, z_i, \ldots x_s, z_s] = \frac{1}{C} \prod_{r=1}^{s} \left\{ \frac{A_{rn}^{x_r}}{x_r!} \frac{A_{rm}^{z_r}}{z_r!} \prod_{\xi_r=0}^{x_r-1} \mu_r(x_1, \ldots \xi_r, \ldots x_s) \right\} \qquad (A41)$$

Die Konstante C kann man dann mit Gl.(A40) berechnen. Im folgenden wird gezeigt, daß dieser Ansatz das Gleichungssystem (A35) erfüllt.
Mit Gl.(A41) erhält man für Gl.(A36):

$$U_1 = \sum_{i=1}^{s} c_{1i}\cdot(x_i+1)\,\frac{1}{C}\,\frac{A_{in}^{x_i+1}}{(x_i+1)!}\,\frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!}\prod_{\xi_i=\sigma}^{x_i}\mu_i(x_1,\dots\xi_i,\dots x_s)\prod_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{s}\left\{\frac{A_{rn}^{x_r}}{x_r!}\,\frac{A_{rm}^{z_r}}{z_r!}\prod_{\xi_r=\sigma}^{x_r-1}\mu_r(x_1,\dots\xi_r,\dots x_s)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} c_{1i}\,A_{in}\,\mu_i(x_1,\dots x_i,\dots x_s)\,\frac{1}{C}\,\frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!}\,\frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!}\prod_{\xi_i=\sigma}^{x_i-1}\mu_i(x_1,\dots\xi_i,\dots x_s)\,\cdot$$

$$\cdot\prod_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{s}\left\{\frac{A_{rn}^{x_r}}{x_r!}\,\frac{A_{rm}^{z_r}}{z_r!}\prod_{\xi_r=\sigma}^{x_r-1}\mu_r(x_1,\dots\xi_r,\dots x_s)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} c_{1i}\,A_{in}\,\mu_i(x_1,\dots x_i,\dots x_s)\cdot[x_1,z_1,\dots x_i,z_i,\dots x_s,z_s]$$

Entsprechend erhält man mit Gl.(A41) für Gl.(A37):

$$U_2 = \sum_{i=1}^{s} c_{2i}\cdot(z_i+1)\,\frac{1}{C}\,\frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!}\,\frac{A_{im}^{z_i+1}}{(z_i+1)!}\prod_{\xi_i=0}^{x_i-1}\mu_i(x_1,\dots\xi_i\dots x_s)\cdot\prod_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{s}\left\{\frac{A_{rn}^{x_r}}{x_r!}\,\frac{A_{rm}^{z_r}}{z_r!}\prod_{\xi_r=\sigma}^{x_r-1}\mu_r(x_1,\dots\xi_r\dots x_s)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} c_{2i}\,A_{im}\cdot[x_1,z_1,\dots x_i,z_i,\dots x_s,z_s]$$

Mit Gl.(A41) erhält man aus Gl.(A38):

$$U_3 = \sum_{i=1}^{s} c_{3i}\cdot A_{in}\,\mu_i(x_1,\dots x_i-1,\dots x_s)\,\frac{1}{C}\,\frac{A_{in}^{x_i-1}}{(x_i-1)!}\,\frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!}\prod_{\xi_i=\sigma}^{x_i-2}\mu_i(x_1,\dots\xi_i,\dots x_s)\,\cdot$$

$$\cdot\prod_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{s}\left\{\frac{A_{rn}^{x_r}}{x_r!}\,\frac{A_{rm}^{z_r}}{z_r!}\prod_{\xi_r=\sigma}^{x_r-1}\mu_r(x_1,\dots\xi_r,\dots x_s)\right\}$$

$$U_3 = \sum_{i=1}^{s} c_{3i}\cdot x_i\cdot\frac{1}{C}\,\frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!}\,\frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!}\prod_{\xi_i=\sigma}^{x_i-1}\mu_i(x_1,\dots\xi_i\dots x_s)\prod_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{s}\left\{\frac{A_{rn}^{x_r}}{x_r!}\,\frac{A_{rm}^{z_r}}{z_r!}\prod_{\xi_r=\sigma}^{x_r-1}\mu_r(x_1,\dots\xi_r,\dots x_s)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} c_{3i}\cdot x_i\cdot[x_1,z_1,\dots x_i,z_i,\dots x_s,\dots z_s]$$

Mit Gl.(A41) erhält man aus Gl.(A39):

$$U_4 = \sum_{i=1}^{s} c_{4i}\cdot A_{im}\,\frac{1}{C}\,\frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!}\,\frac{A_{im}^{z_i-1}}{(z_i-1)!}\prod_{\xi_i=0}^{x_i-1}\mu_i(x_1\dots\xi_i\dots x_s)\prod_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{s}\left\{\frac{A_{rn}^{x_r}}{x_r!}\,\frac{A_{rm}^{z_r}}{z_r!}\prod_{\xi_r=\sigma}^{x_r-1}\mu_r(x_1,\dots\xi_r\dots x_s)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} c_{4i}\cdot z_i\cdot\frac{1}{C}\,\frac{A_{in}^{x_i}}{x_i!}\,\frac{A_{im}^{z_i}}{z_i!}\prod_{\xi_i=\sigma}^{x_i-1}\mu_i(x_1,\dots\xi_i\dots x_s)\prod_{\substack{r=1\\ r\neq i}}^{s}\left\{\frac{A_{rn}^{x_r}}{x_r!}\,\frac{A_{rm}^{z_r}}{z_r!}\prod_{\xi_r=\sigma}^{x_r-1}\mu_r(x_1,\dots\xi_r\dots x_s)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{s} c_{4i}\cdot z_i\,[x_1,z_1,\dots x_i,z_i,\dots x_s,z_s]$$

Daraus folgt:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$= \sum_{i=1}^{s}[x_1,z_1,\dots x_i,z_i,\dots x_s,z_s]\cdot\left\{c_{1i}\,A_{in}\cdot\mu_i(x_1,\dots x_i,\dots x_s) + c_{2i}\cdot A_{im} + c_{3i}\cdot x_i + c_{4i}\cdot z_i\right\}$$

Dieser Ausdruck für die rechte Seite des Gleichungssystems (A35) ist identisch mit dessen linker Seite. Daraus folgt, daß Gl.(A41) die Lösung dieses Gleichungssystems ist.

Damit wären die Zustandswahrscheinlichkeiten $[x_1,z_1, \dots x_i,z_i, \dots x_s,z_s]$ des Gesamtsystems berechenbar unter der Voraussetzung, daß auch exakte Werte oder

gute Näherungswerte für die Durchlaßwahrscheinlichkeiten $\mu_i(x_1, \dots x_i, \dots x_s)$ berechnet werden können. Unter dieser Voraussetzung könnte dann wieder - analog zu Kap. 4 - auch das Näherungsverfahren durchgeführt werden, welches die s Zubringerbündel der realen Struktur durch eine Ersatzstruktur mit <u>einem</u> Zubringerbündel N^* ersetzt.

In [16] wird für die Berechnung der Verlustwahrscheinlichkeit von unvollkommen erreichbaren Bündeln bei einem schiefen Verkehrsangebot eine ähnliche Struktur untersucht. Es wird dort allerdings angenommen, daß das Angebot A_{im}, das nur Leitungen im Zubringerbündel N_i belegt, Null ist. Für die Durchlaßwahrscheinlichkeiten wird folgende Darstellung gewählt:

$$\mu_i(x_1, \dots x_i, \dots x_s) = \mu_i(x_i)\cdot\mu_m(g_m)$$

$$g_m = \sum_{i=1}^{s} x_i$$

Für die Zustandswahrscheinlichkeiten wird folgende Lösung angegeben:

bei ZV1: $$[x_1, \dots x_i, \dots x_s] = \frac{1}{C} \prod_{\ell=0}^{g_m-1} \mu_m(\ell) \prod_{i=1}^{s} \prod_{\xi_i=0}^{x_i-1} \frac{A_{in}\cdot\mu_i(\xi_i)}{(\xi_i+1)}$$

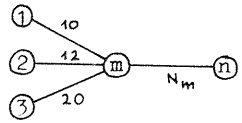
bei ZV2: $$[x_1, \dots x_i, \dots x_s] = \frac{1}{C} \prod_{\ell=0}^{g_m-1} \mu_m(\ell) \prod_{i=1}^{s} \prod_{\xi_i=0}^{x_i-1} \frac{\alpha_{in}\cdot(a_i-\xi_i)\cdot\mu_i(\xi_i)}{(\xi_i+1)}$$

Für den oben behandelten Fall mit $A_{im} > 0$ wäre dieser Lösungsweg nicht gangbar.

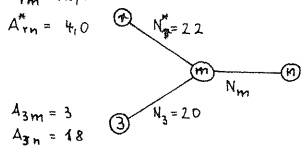
Tab.1: Näherungsverfahren mit zwei Zubringerbündeln für die Bestimmung von E_m und B_m

i	A_{im}	A_{in}
1	4	2
2	6	2
3	3	18

Reale Struktur



Ersatzstruktur

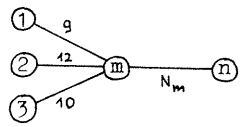


	N_m	19	21	23	24	25	26	27
E_m %	exakt	20,585	11,805	4,974	2,792	1,406	0,632	0,253
	2 Zubr.	20,582	11,807	4,978	2,795	1,407	0,631	0,252
B_m %	exakt	19,78	10,92	4,36	2,37	1,15	0,50	0,19
	2 Zubr.	19,47	10,57	4,13	2,22	1,06	0,45	0,17

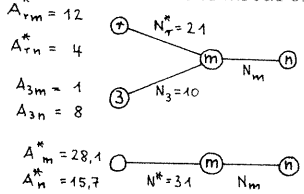
Tab. 2: Näherungsverfahren mit zwei Zubringerbündeln für die Bestimmung von E_m und B_m

i	A_{im}	A_{in}
1	3	1
2	5	3
3	1	8

Reale Struktur



Ersatzstrukturen

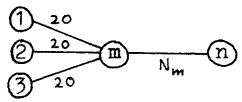


	N_m	11	13	14	15	16	17	18
E_m %	exakt	22,476	11,095	6,811	3,751	1,834	0,789	0,297
	2 Zubr.	22,478	11,091	6,806	3,749	1,833	0,790	0,299
	1 Zubr.	21,895	10,677	6,657	3,787	1,944	0,893	0,365
B_m %	exakt	21,62	10,19	6,07	3,23	1,52	0,62	0,22
	2 Zubr.	21,23	9,78	5,74	3,00	1,39	0,56	0,20
	1 Zubr.	20,13	9,24	5,53	2,99	1,45	0,63	0,24

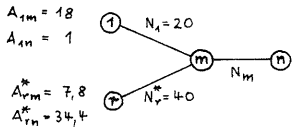
Tab. 3: Näherungsverfahren mit zwei Zubringerbündeln für die Bestimmung von E_m und B_m

i	A_{im}	A_{in}
1	18	1
2	3	18
3	3	18

Reale Struktur



Ersatzstruktur

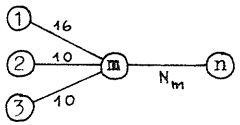


	N_m	28	30	32	34	36	38	40
E_m %	exakt	26,58	20,48	14,23	8,29	3,58	0,97	0,13
	2 Zubr.	26,26	20,79	14,72	8,50	3,49	0,85	0,10
B_m %	exakt	25,94	19,61	13,16	7,20	2,80	0,65	0,074
	2 Zubr.	25,98	20,22	13,84	7,55	2,84	0,62	0,067

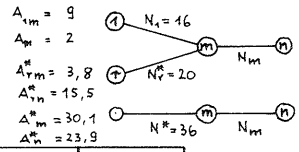
Tab. 4: Näherungsverfahren mit zwei Zubringerbündeln für die Bestimmung von E_m und B_m

i	A_{im}	A_{in}
1	9	2
2	1	8
3	1	8

Reale Struktur



Ersatzstrukturen

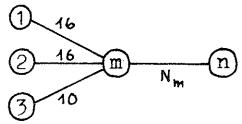


	N_m	15	17	19	21	23	25
E_m %	exakt	24,43	14,94	7,01	2,13	0,357	0,031
	2 Zubr.	24,57	15,32	7,09	2,04	0,319	0,026
	1 Zubr.	24,30	14,18	6,58	2,24	0,517	0,077
B_m %	exakt	23,46	13,69	5,88	1,55	0,221	0,016
	2 Zubr.	23,96	14,30	6,12	1,58	0,219	0,015
	1 Zubr.	22,43	12,46	5,37	1,64	0,333	0,042

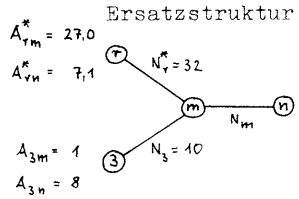
Tab. 5: Näherungsverfahren mit zwei Zubringerbündeln für die Bestimmung von E_m und B_m

i	A_{im}	A_{in}
1	9	2
2	11,8	5
3	1	8

Reale Struktur



Ersatzstruktur

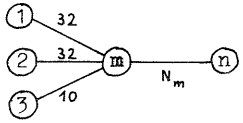


	N_m	12	14	16	18	20	22
E_m %	exakt	26,836	16,082	7,589	2,589	0,5996	0,092
	2 Zubr.	26,833	16,082	7,591	2,590	0,5991	0,091
B_m %	exakt	26,01	15,07	6,76	2,16	0,462	0,065
	2 Zubr.	25,74	14,71	6,47	2,01	0,417	0,056

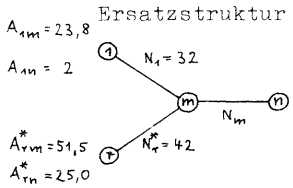
Tab. 6: Näherungsverfahren mit zwei Zubringerbündeln für die Bestimmung von E_m und B_m

i	A_{im}	A_{in}
1	23,8	2
2	27,9	8,4
3	1	8

Reale Struktur



Ersatzstruktur

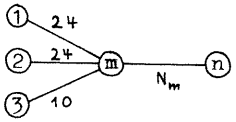


	N_m	15	17	19	21	23	25
E_m %	exakt	22,54	13,83	7,06	2,86	0,882	0,202
	2 Zubr.	22,37	13,54	6,94	2,88	0,931	0,231
B_m %	exakt	21,80	13,05	6,46	2,51	0,736	0,161
	2 Zubr.	21,84	13,07	6,59	2,68	0,848	0,205

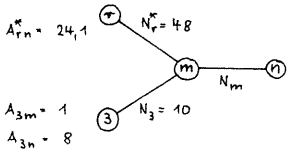
Tab. 7: **Näherungsverfahren mit zwei Zubringerbündeln** für die Bestimmung von E_m und B_m

i	A_{im}	A_{in}
1	16,3	2
2	18,1	8,4
3	1	8

Reale Struktur



Ersatzstruktur

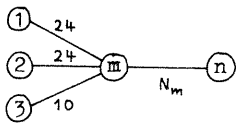


N_m		15	17	19	21	23	25
E_m	exakt	22,893	14,02	7,09	2,78	0,806	0,168
%	2 Zubr.	22,898	13,98	7,06	2,77	0,814	0,174
B_m	exakt	22,09	13,16	6,40	2,39	0,652	0,128
%	2 Zubr.	21,59	12,56	5,92	2,14	0,567	0,109

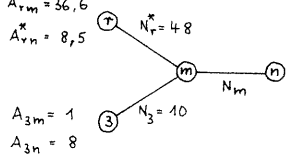
Tab. 8: **Näherungsverfahren mit zwei Zubringerbündeln** für die Bestimmung von E_m und B_m

i	A_{im}	A_{in}
1	14,3	4
2	21,5	5
3	1	8

Reale Struktur



Ersatzstruktur

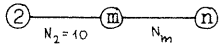


N_m		14	16	18	20	22	24
E_m	exakt	23,851	14,711	7,567	3,081	0,953	0,220
%	2 Zubr.	23,842	14,724	7,583	3,085	0,950	0,216
B_m	exakt	23,12	13,91	6,91	2,69	0,79	0,17
%	2 Zubr.	22,93	13,70	6,74	2,59	0,75	0,16

Tab. 9: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m bei Zufallsverkehr A_{1n} im Knoten m

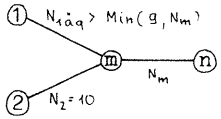
Reale Struktur

$A_{2m} = 4$ | $A_{mn} = 4$
$A_{2n} = 2$



Äquivalente Struktur

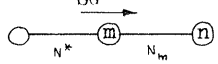
$A_{1m} = 0$
$A_{1n} = 4$



$A_{2m} = 4$
$A_{2n} = 2$

Ersatzstruktur

$A_{SG} = 5,91$
$V_{SG} = 5,79$

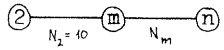


N_m		7	8	9	10	11	12	13	14
$N_{1äq}$		10	10	10	11	12	13	14	15
E_m	ex.	18,11	11,78	7,14	4,01	2,08	0,990	0,436	0,178
%	Näh.	18,09	11,83	7,22	4,08	2,11	0,996	0,426	0,165
B_m	ex.	17,94	11,62	7,00	3,90	2,00	0,948	0,413	0,167
%	Näh.	18,08	11,80	7,17	4,01	2,04	0,939	0,389	0,145

Tab. 10: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m bei Zufallsverkehr A_{1n} im Knoten m

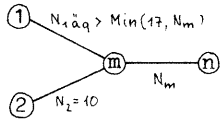
Reale Struktur

$A_{2m} = 4$ | $A_{mn} = 10$
$A_{2n} = 2$



Äquivalente Struktur

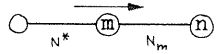
$A_{1m} = 0$
$A_{1n} = 10$



$A_{2m} = 4$
$A_{2n} = 2$

Ersatzstruktur

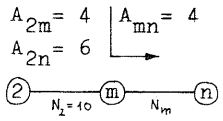
$A_{SG} = 11,91$
$V_{SG} = 11,79$



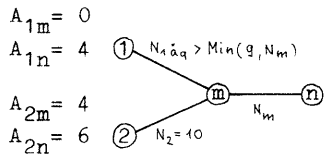
N_m		11	13	15	17	19	21	23
$N_{1äq}$		18	18	18	18	20	22	24
E_m	ex.	24,56	15,24	8,34	3,91	1,54	0,506	0,139
%	Näh.	24,47	15,22	8,36	3,95	1,57	0,510	0,130
B_m	ex.	24,46	15,14	8,25	3,85	1,51	0,491	0,133
%	Näh.	24,47	15,22	8,36	3,95	1,56	0,493	0,119

Tab. 11: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m bei Zufallsverkehr A_{1n} im Knoten m

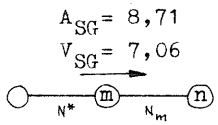
Reale Struktur



Äquivalente Struktur



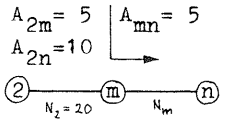
Ersatzstruktur



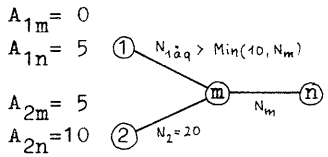
N_m		10	11	12	13	14	15	16	17
$N_{1äq}$		11	12	13	14	15	16	17	18
E_m	ex.	16,82	11,38	7,17	4,17	2,23	1,09	0,490	0,202
%	Näh.	17,18	11,88	7,55	4,35	2,26	1,05	0,436	0,163
B_m	ex.	15,92	10,60	6,55	3,74	1,96	0,938	0,413	0,167
%	Näh.	16,48	11,02	6,71	3,67	1,80	0,787	0,309	0,109

Tab. 12: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m bei Zufallsverkehr A_{1n} im Knoten m

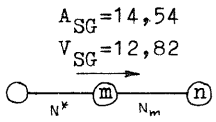
Reale Struktur



Äquivalente Struktur



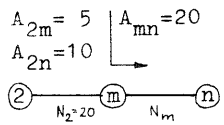
Ersatzstruktur



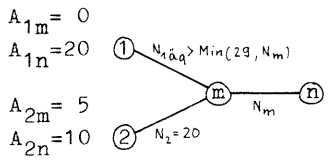
N_m		13	15	17	19	21	23	24	25
$N_{1äq}$		14	16	18	20	22	24	25	26
E_m	ex.	26,17	17,67	10,66	5,50	2,32	0,770	0,403	0,198
%	Näh.	25,92	17,59	10,69	5,55	2,35	0,777	0,406	0,199
B_m	ex.	26,09	17,51	10,43	5,27	2,16	0,694	0,357	0,172
%	Näh.	25,88	17,46	10,45	5,27	2,13	0,668	0,339	0,161

Tab. 13: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m bei Zufallsverkehr A_{1n} im Knoten m

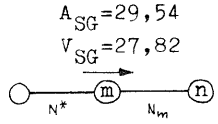
Reale Struktur



Äquivalente Struktur



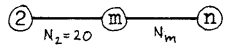
Ersatzstruktur



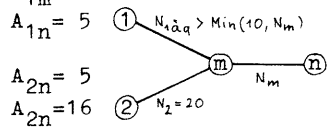
N_m		24	28	32	36	40	42	44
$N_{1äq}$		30	30	33	37	41	43	45
E_m	ex.	26,95	17,11	9,16	3,80	1,13	0,531	0,226
%	Näh.	26,49	16,84	9,16	3,95	1,17	0,518	0,195
B_m	ex.	26,89	17,01	9,03	3,70	1,08	0,502	0,211
%	Näh.	26,49	16,84	9,16	3,92	1,11	0,472	0,169

Tab. 14: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m bei Zufallsverkehr A_{1n} im Knoten m

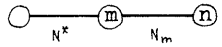
Reale Struktur



Äquivalente Struktur



Ersatzstruktur

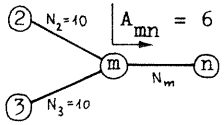


N_m		18	20	22	24	26	27	28
$N_{1äq}$		19	21	23	25	27	28	29
E_m	ex.	21,28	13,10	6,62	2,60	0,768	0,374	0,170
%	Näh.	21,09	13,01	6,63	2,67	0,824	0,413	0,193
B_m	ex.	20,48	12,25	5,97	2,25	0,639	0,305	0,136
%	Näh.	19,93	11,77	5,67	2,13	0,612	0,295	0,133

Tab. 15: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m bei Zufallsverkehr A_{1n} im Knoten m

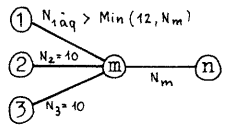
Reale Struktur

i	A_{im}	A_{in}
2	2	6
3	2	6



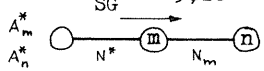
Äquivalente Struktur

i	A_{im}	A_{in}
1	0	6
2	2	6
3	2	6



Ersatzstruktur $A_{SG} = 16,54$

$V_{SG} = 13,28$

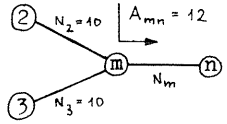


N_m		16	18	20	22	24	26	28
$N_{1äq}$		17	19	21	23	25	27	29
E_m	ex.	21,56	13,93	7,86	3,72	1,43	0,436	0,105
%	Näh.	21,34	14,11	8,08	3,82	1,43	0,413	0,093
B_m	ex.	21,01	13,33	7,33	3,35	1,24	0,360	0,083
%	Näh.	21,09	13,67	7,56	3,40	1,20	0,326	0,086

Tab. 16: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m und pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m bei Zufallsverkehr A_{1n} im Knoten m

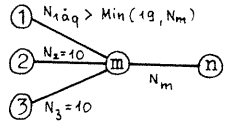
Reale Struktur

i	A_{im}	A_{in}
2	2	6
3	2	6



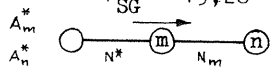
Äquivalente Struktur

i	A_{im}	A_{in}
1	0	12
2	2	6
3	2	6

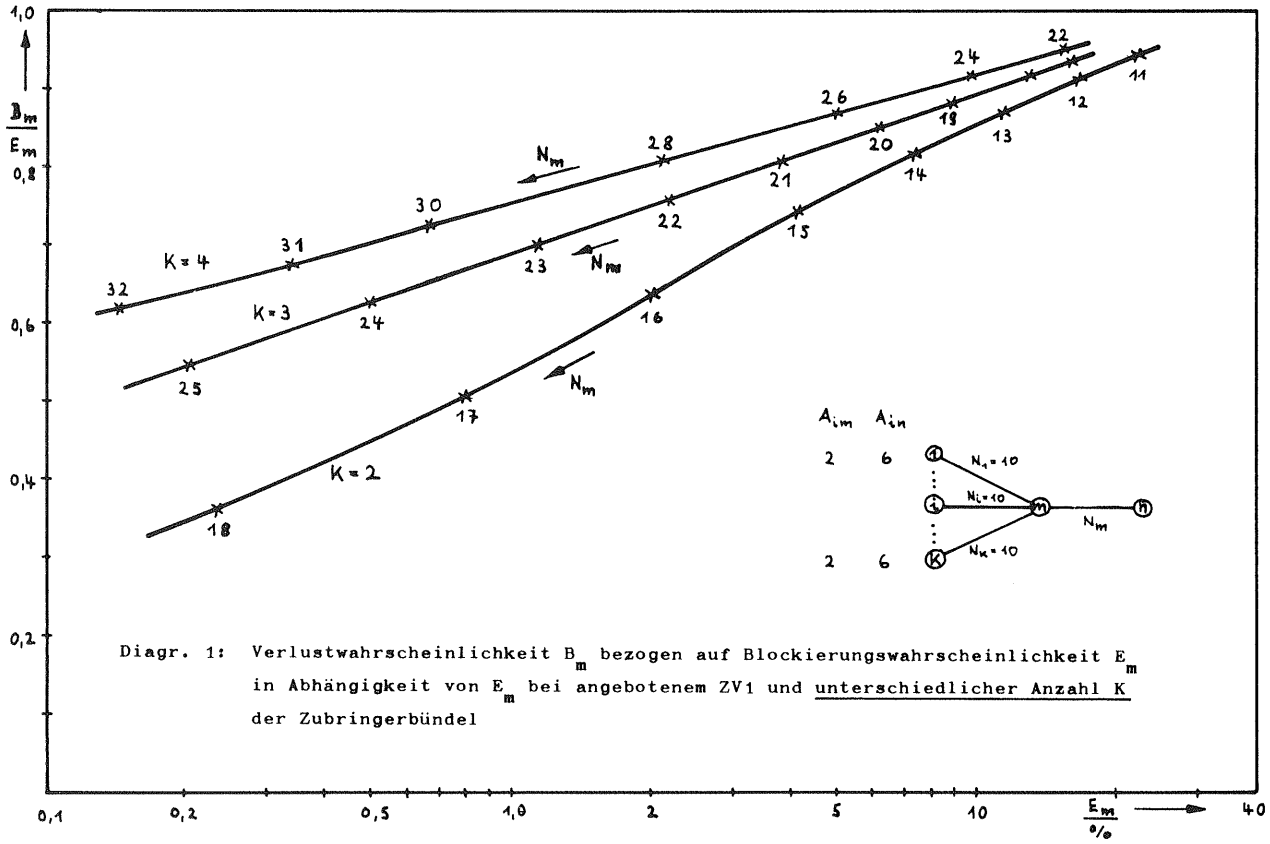


Ersatzstruktur $A_{SG} = 22,54$

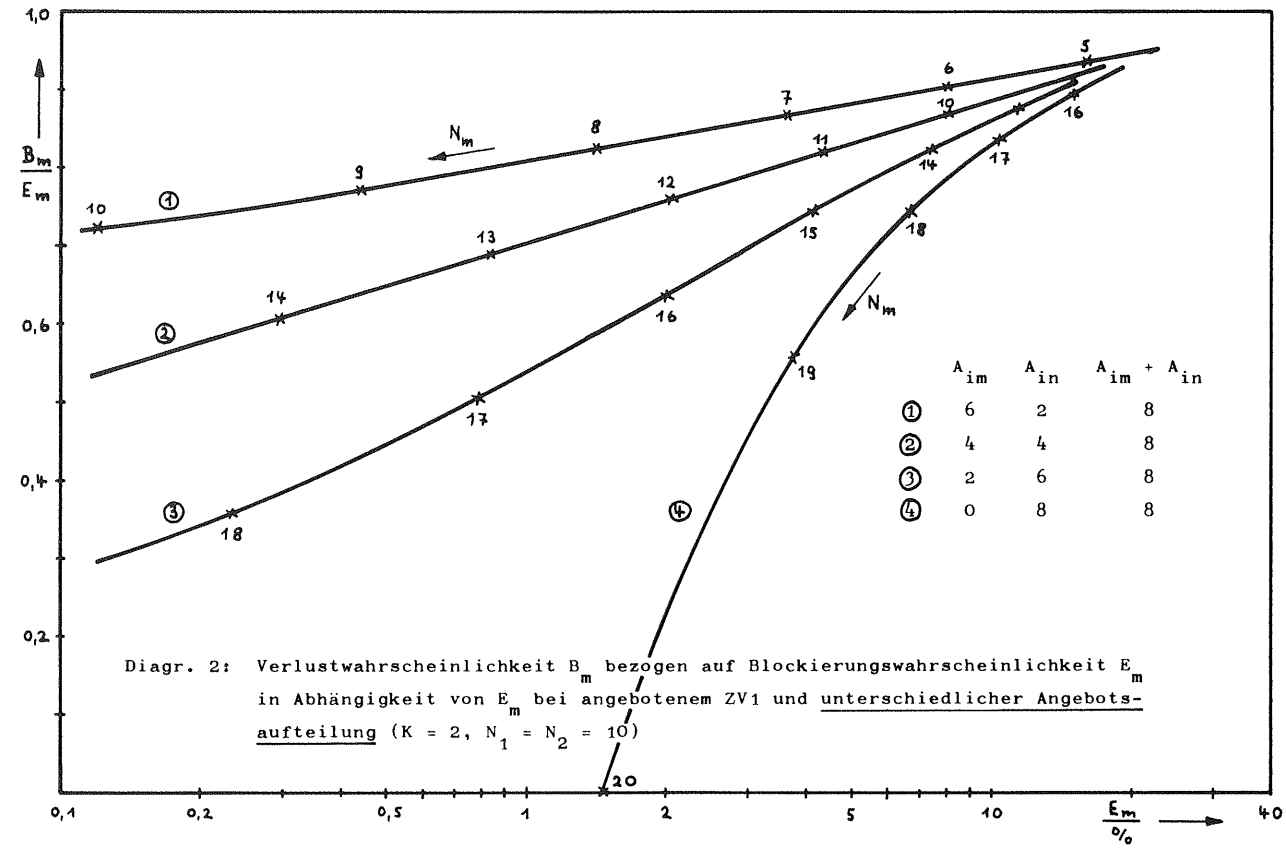
$V_{SG} = 19,28$



N_m		20	22	24	26	28	30	32	34
$N_{1äq}$		21	23	25	27	29	31	33	35
E_m	ex.	24,24	17,93	12,38	7,83	4,45	2,23	0,969	0,364
%	Näh.	23,36	17,60	12,52	8,17	4,72	2,32	0,938	0,309
B_m	ex.	23,84	17,49	11,94	7,43	4,14	2,03	0,861	0,315
%	Näh.	23,35	17,57	12,42	7,98	4,47	2,10	0,808	0,250

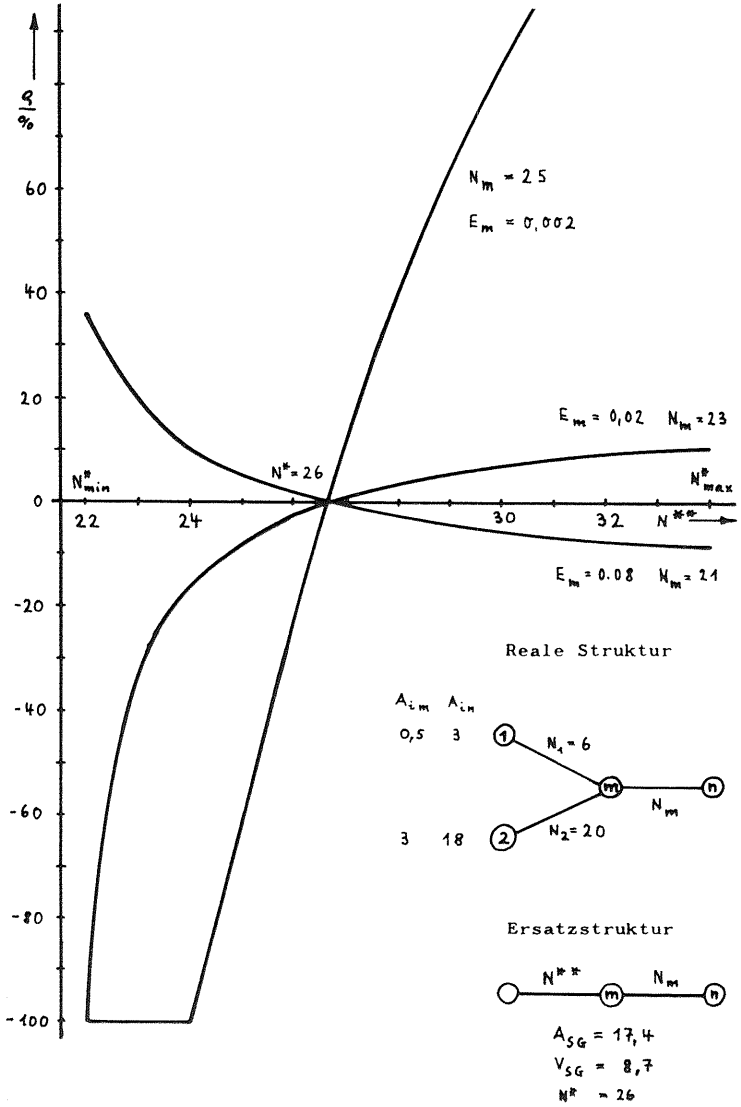


Diagr. 1: Verlustwahrscheinlichkeit B_m bezogen auf Blockierungswahrscheinlichkeit E_m in Abhängigkeit von E_m bei angebotenem ZV1 und <u>unterschiedlicher Anzahl K</u> der Zubringerbündel

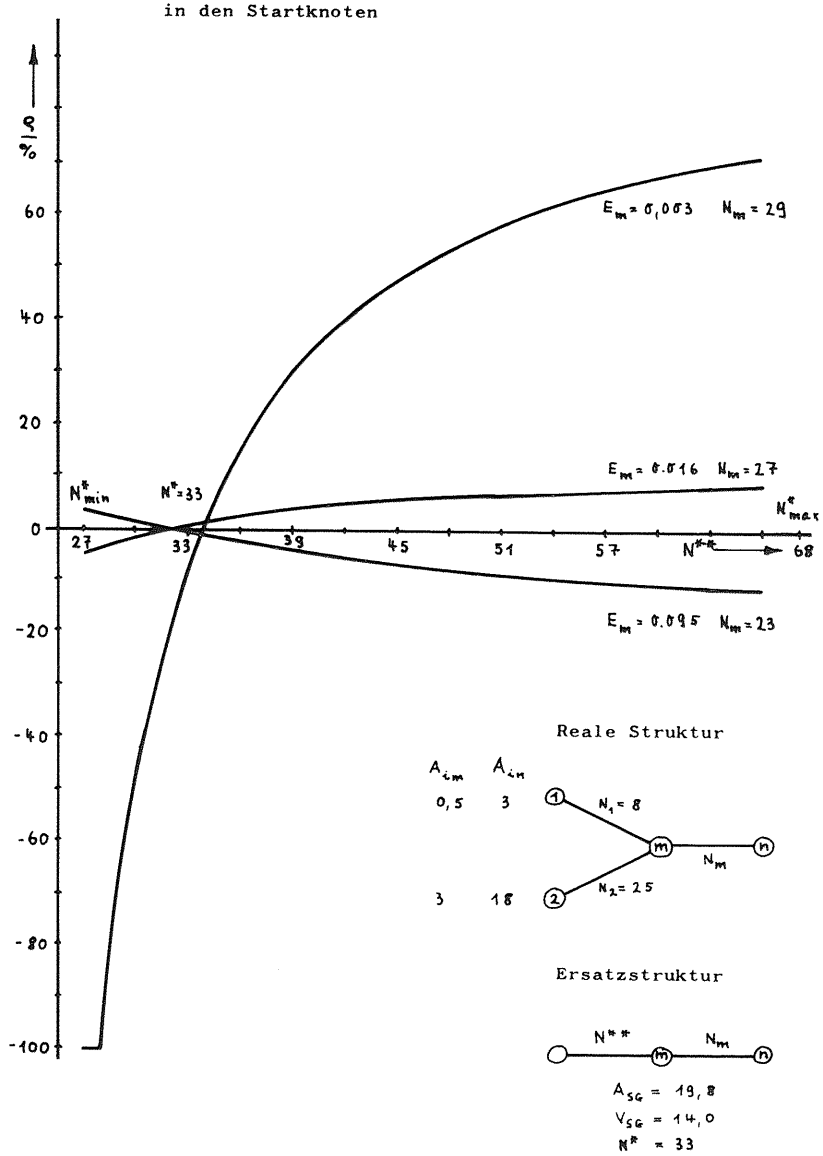


Diagr. 2: Verlustwahrscheinlichkeit B_m bezogen auf Blockierungswahrscheinlichkeit E_m in Abhängigkeit von E_m bei angebotenem ZV1 und <u>unterschiedlicher Angebotsaufteilung</u> ($K = 2$, $N_1 = N_2 = 10$)

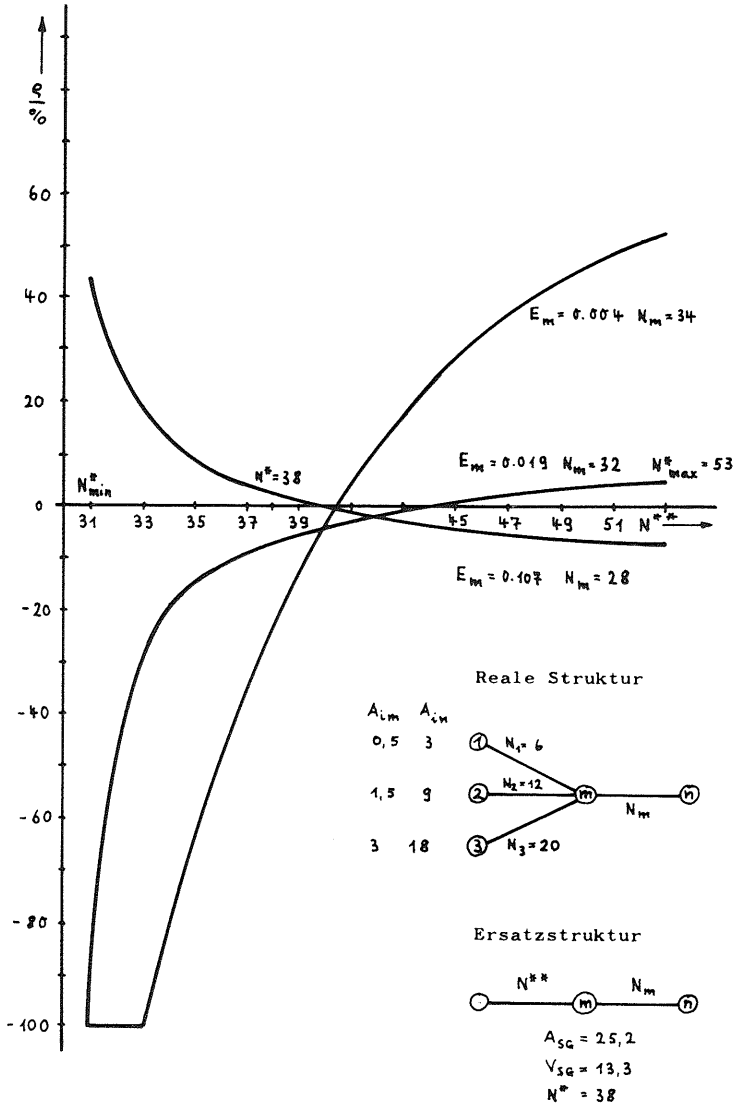
Diagr. 3: Rel. Abweichung ϱ zwischen exaktem Wert und Näherungswert der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m in Abhängigkeit von einer frei gewählten Ersatzleitungszahl $N^{**} \gtreqless N^* = \sum_{i=1}^{K} N_i$ bei konstantem A_{SG} und V_{SG} im Knoten m, sowie ZV1-Angebot in den Startknoten



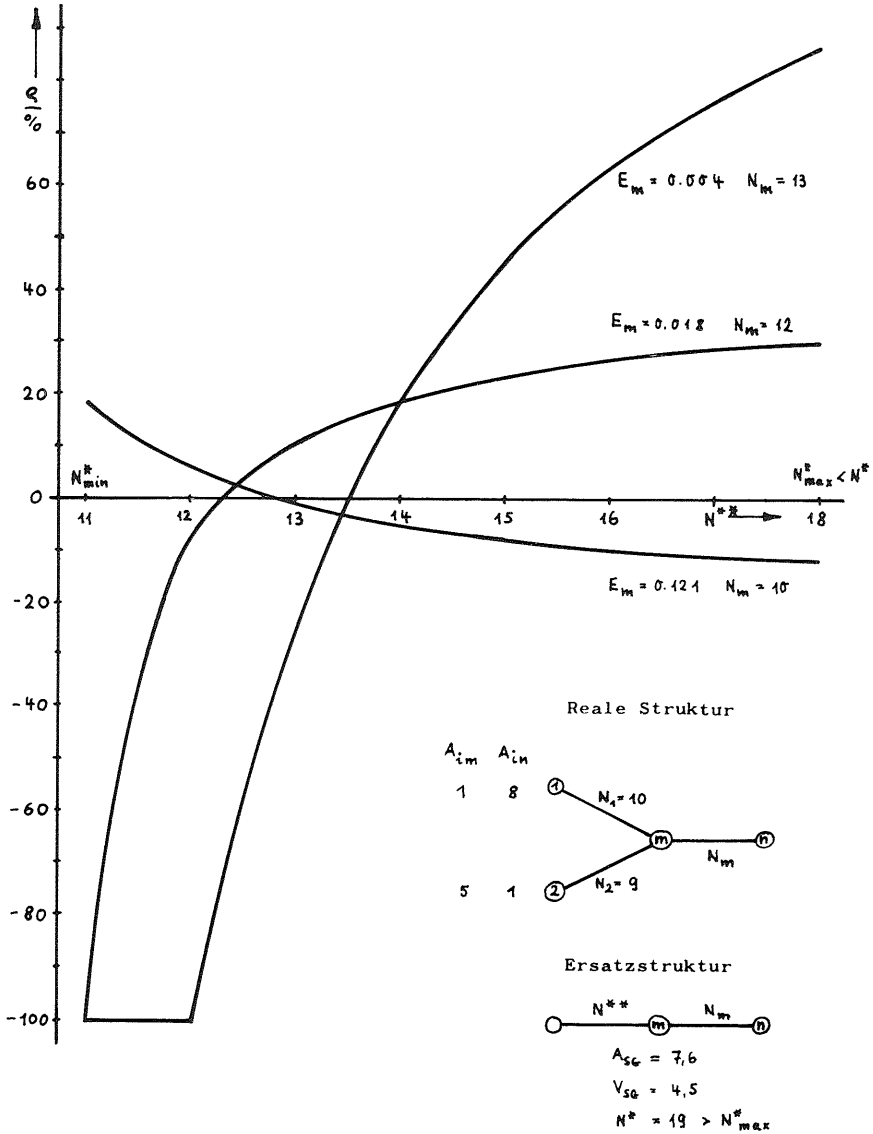
Diagr. 4: Rel. Abweichung ϱ zwischen exaktem Wert und Näherungswert der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m in Abhängigkeit von einer frei gewählten Ersatzleitungszahl $N^{**} \gtreqless N^* = \sum_{i=1}^{K} N_i$ bei konstantem A_{SG} und V_{SG} im Knoten m, sowie ZV1-Angebot in den Startknoten



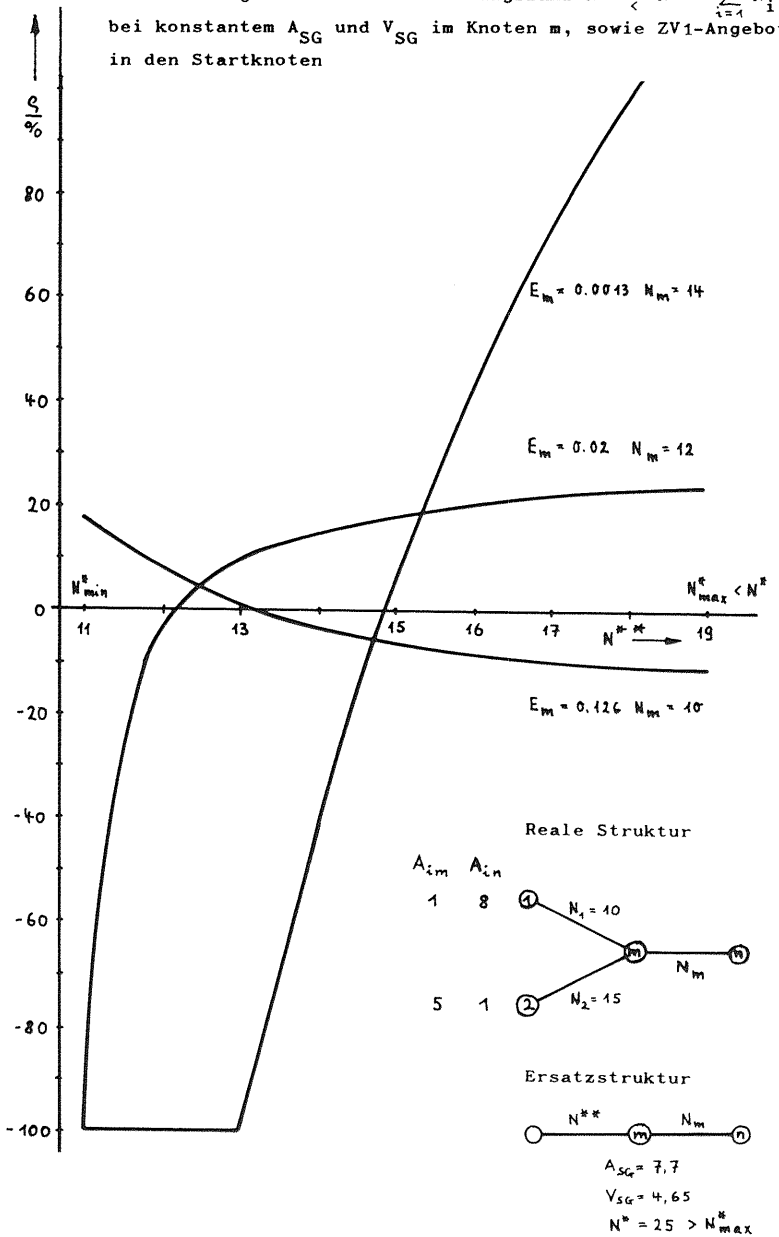
Diagr. 5: Rel. Abweichung ϱ zwischen exaktem Wert und Näherungswert der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m in Abhängigkeit von einer frei gewählten Ersatzleitungszahl $N^{**} \gtreqless N^* = \sum_{i=1}^{K} N_i$ bei konstantem A_{SG} und V_{SG} im Knoten m, sowie ZV1-Angebot in den Startknoten



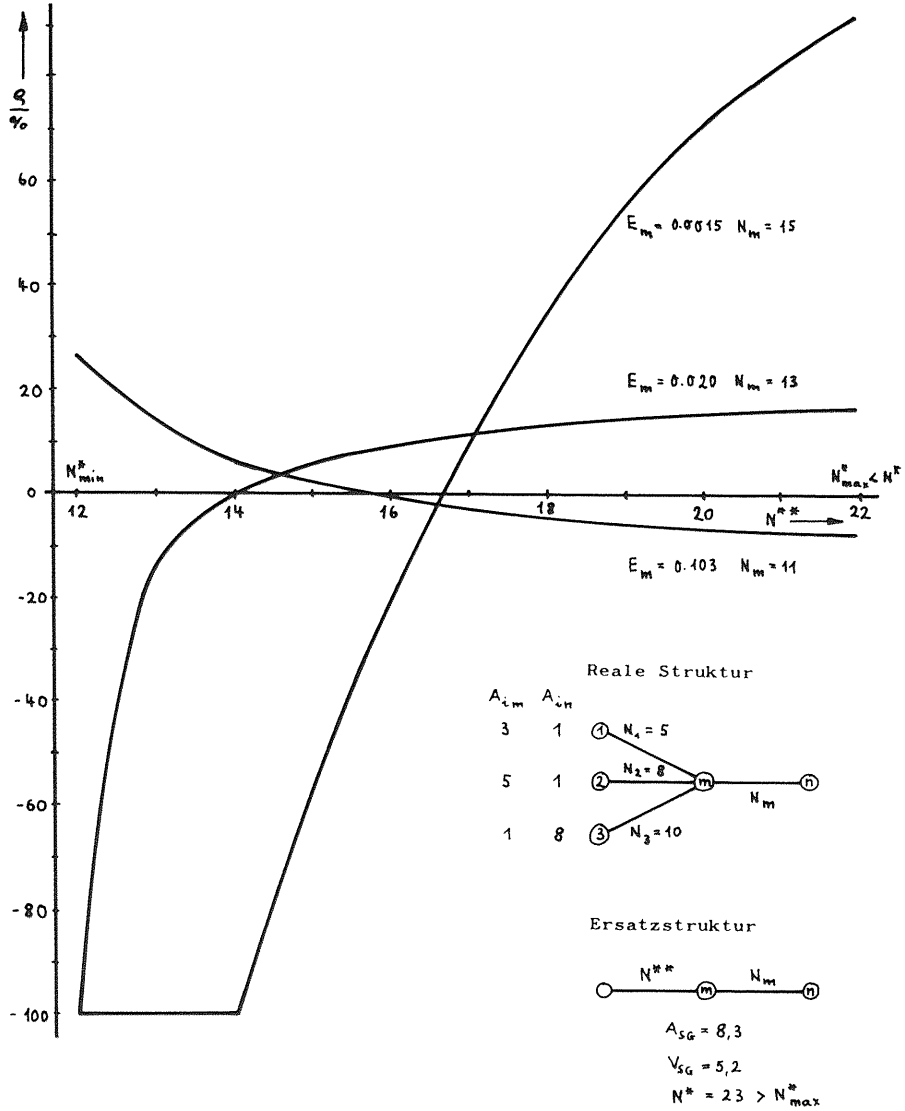
Diagr. 6: Rel. Abweichung ϱ zwischen exaktem Wert und Näherungswert der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m in Abhängigkeit von einer frei gewählten Ersatzleitungszahl $N^{**} \gtreqless N^* = \sum_{i=1}^{K} N_i$ bei konstantem A_{SG} und V_{SG} im Knoten m, sowie ZV1-Angebot in den Startknoten

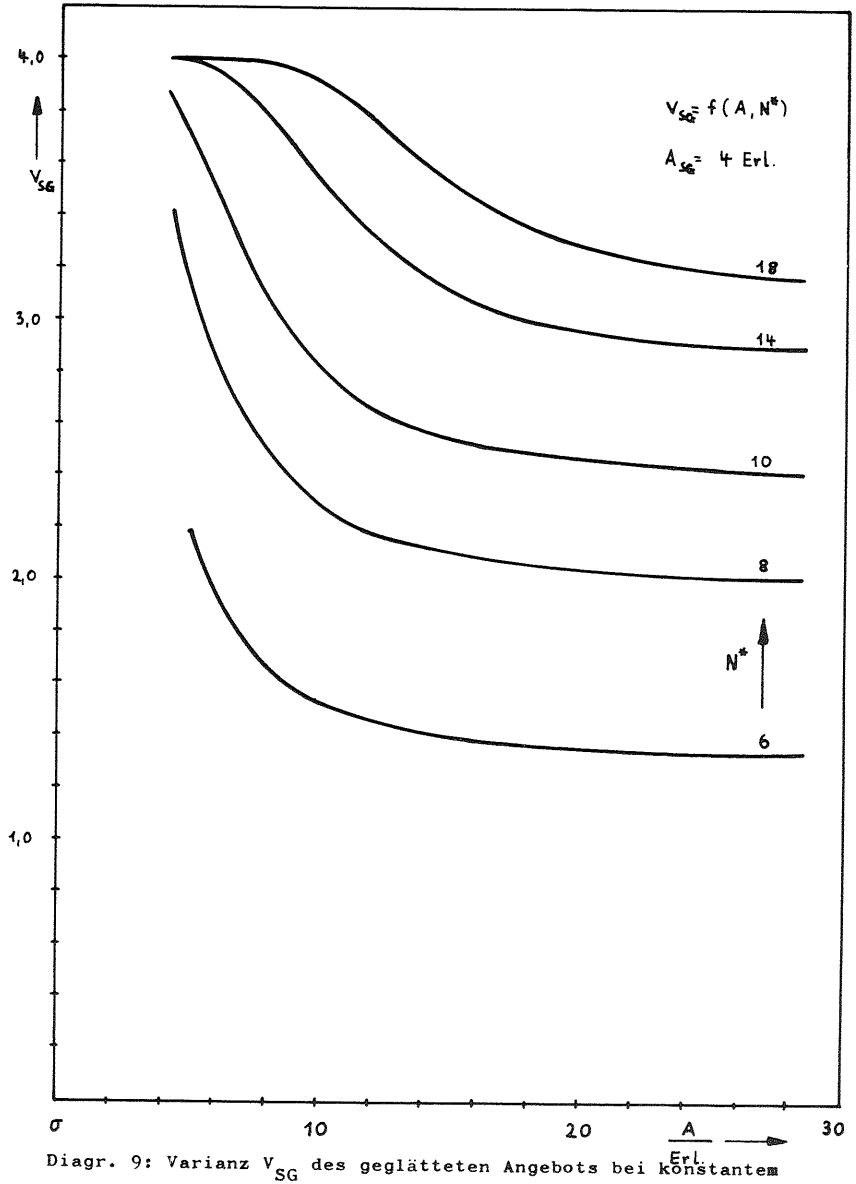


Diagr. 7: Rel. Abweichung ϱ zwischen exaktem Wert und Näherungswert der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m in Abhängigkeit von einer frei gewählten Ersatzleitungszahl $N^{**} \gtreqless N^* = \sum_{i=1}^{K} N_i$ bei konstantem A_{SG} und V_{SG} im Knoten m, sowie ZV1-Angebot in den Startknoten

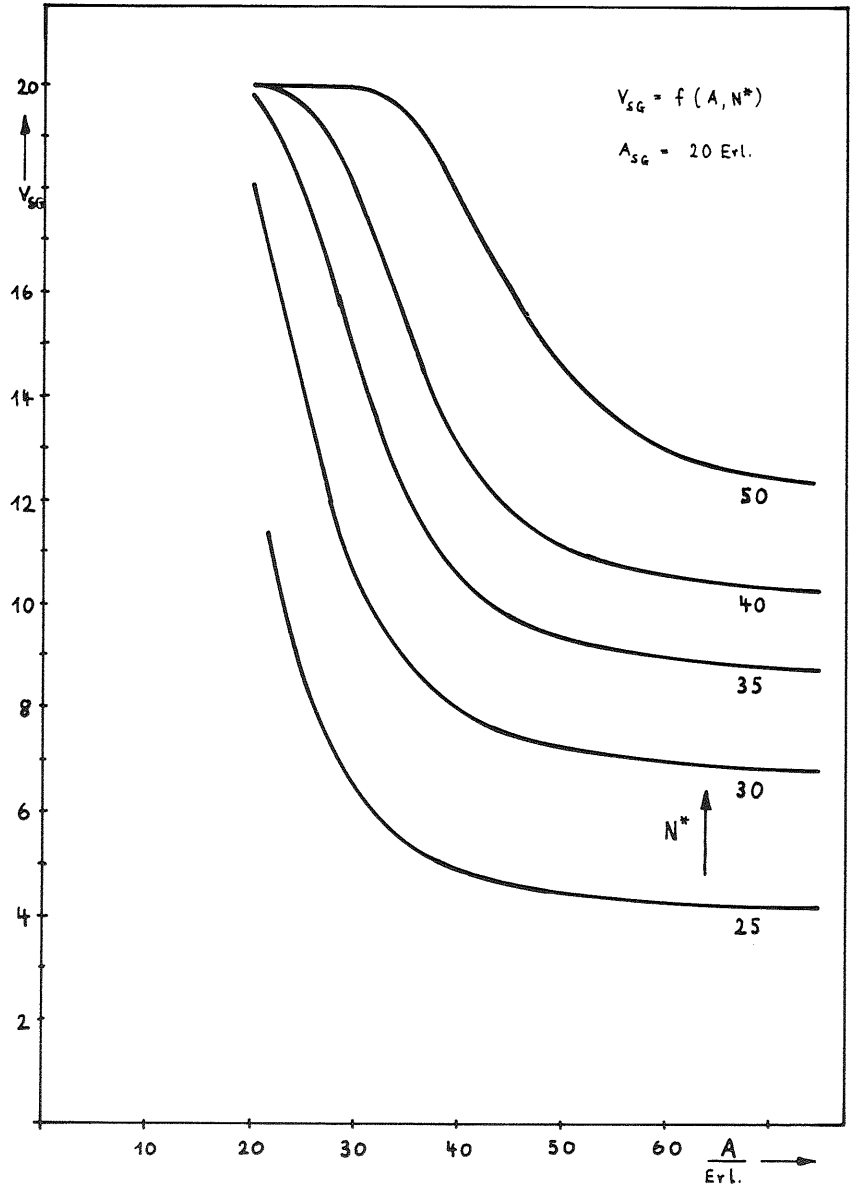


Diagr. 8: Rel. Abweichung ϱ zwischen exaktem Wert und Näherungswert der Blockierungswahrscheinlichkeit E_m in Abhängigkeit von einer frei gewählten Ersatzleitungszahl $N^{**} \gtreqless N^* = \sum_{i=1}^{K} N_i$ bei konstantem A_{SG} und V_{SG} im Knoten m, sowie ZV1-Angebot in den Startknoten

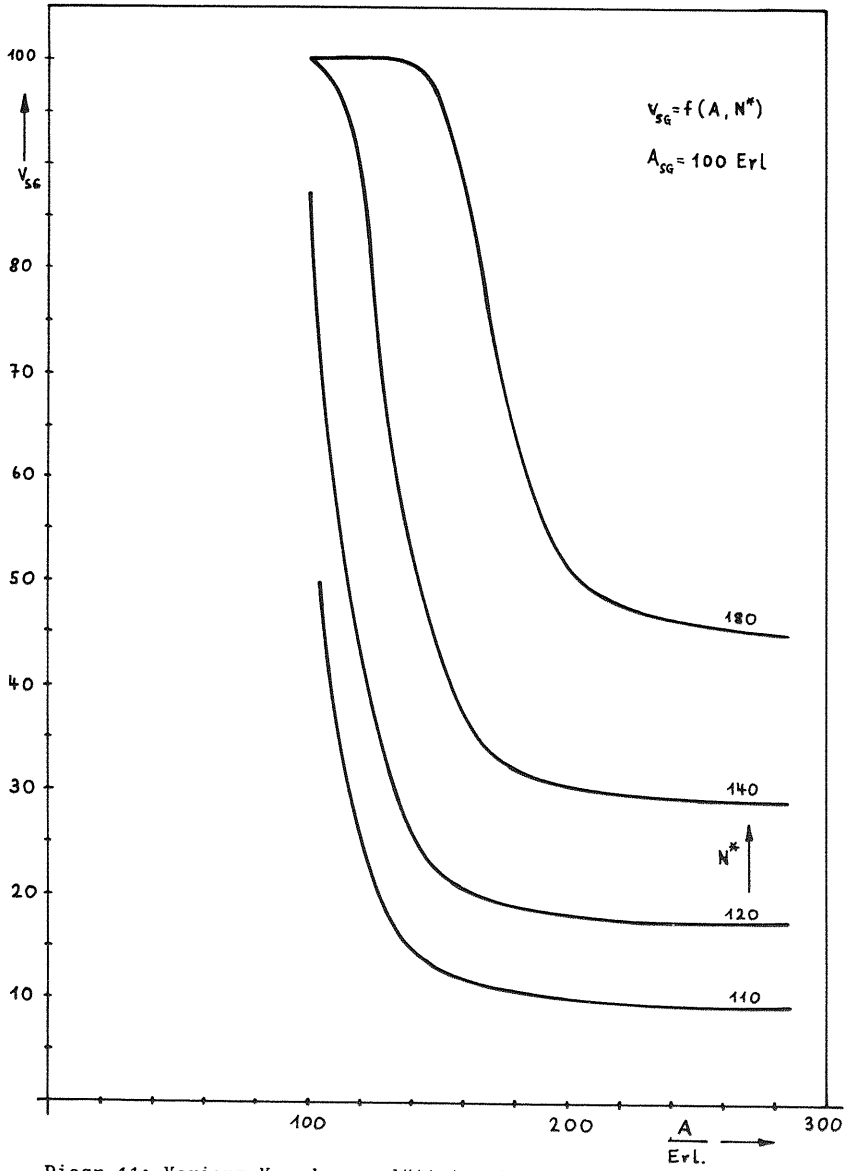




Diagr. 9: Varianz V_{SG} des geglätteten Angebots bei konstantem Mittelwert A_{SG} in Abhängigkeit vom Gesamtangebot A an das Ersatzzubringerbündel N*



Diagr. 10: Varianz V_{SG} des geglätteten Angebots bei konstantem Mittelwert A_{SG} in Abhängigkeit vom Gesamtangebot A



Diagr. 11: Varianz V_{SG} des geglätteten Angebots bei konstantem Mittelwert A_{SG} in Abhängigkeit vom Gesamtangebot A

Tab. 17: Zusammenstellung der Beispiele für geglätteten Zufallsverkehr 1. Art

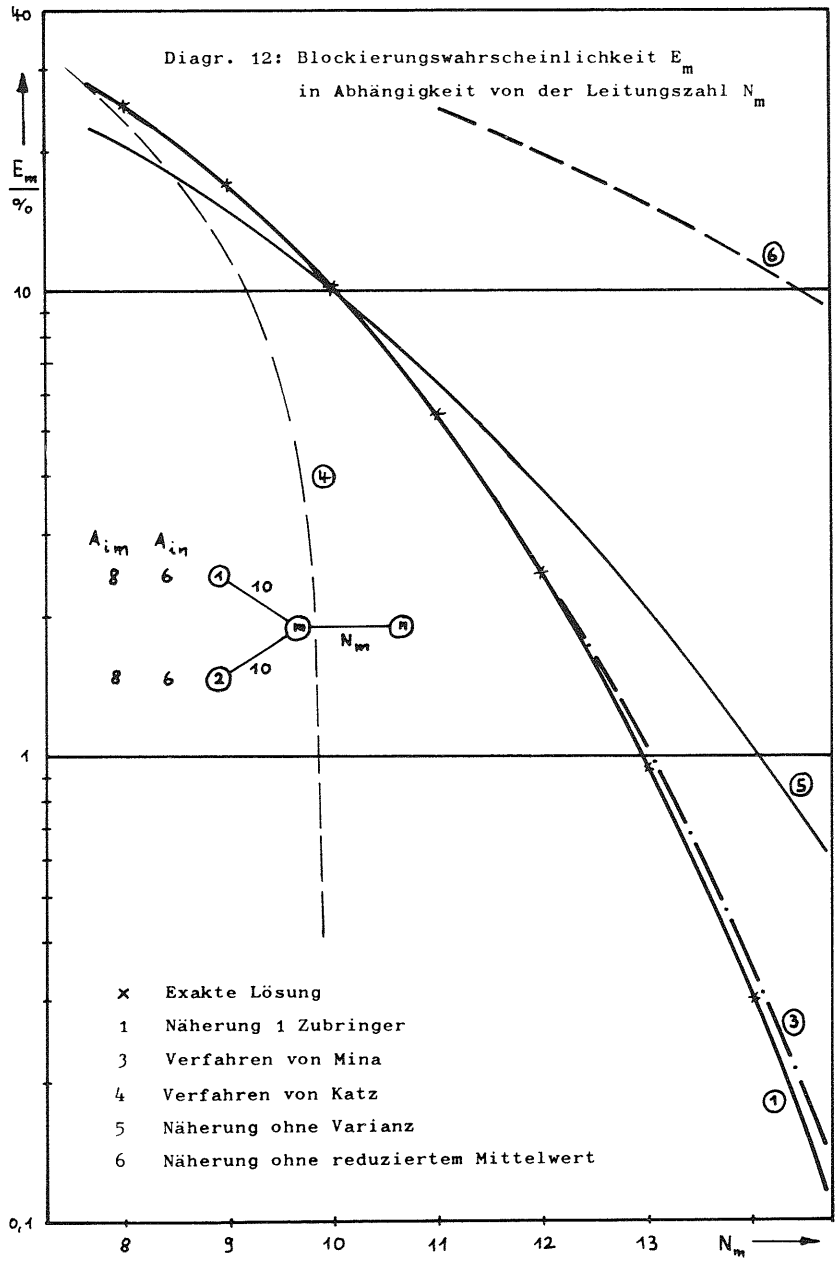
N_i	A_{im}	A_{in}	K	Diagr. Nr. für E_m	Diagr. Nr. für B_m	Bemerkung
10	8	6	2	12		Variation der Angebotsaufteilung $\frac{A_{im}}{A_{in}}$
10	2	6	2	13		
10	0	6	2	14	15	
30	10	18	2	16		Variation der Bündelgrößen N_i
30	12	24	2	17		
50	16	40	2	18		
10	2	6	3	19	20	Variation der Anzahl der Zubringerbündel
10	2	6	4	21	22	
10	2	6	5	23		
6 20	0,5 3	3 18	2	24		Unsymmetrische Strukturen bezüglich Leitungszahlen N_i und Angeboten A_{im} und A_{in}
8 25	0,5 3	3 18	2	25		
10 13	1 2	8 10	2	26	27	
6 20	0,5 3	3 15	2	28	29	
10 13 15	1 2 3	8 10 12	3	30	31	
6 12 20	0,5 1,5 3	3 9 18	3	32	33 34	

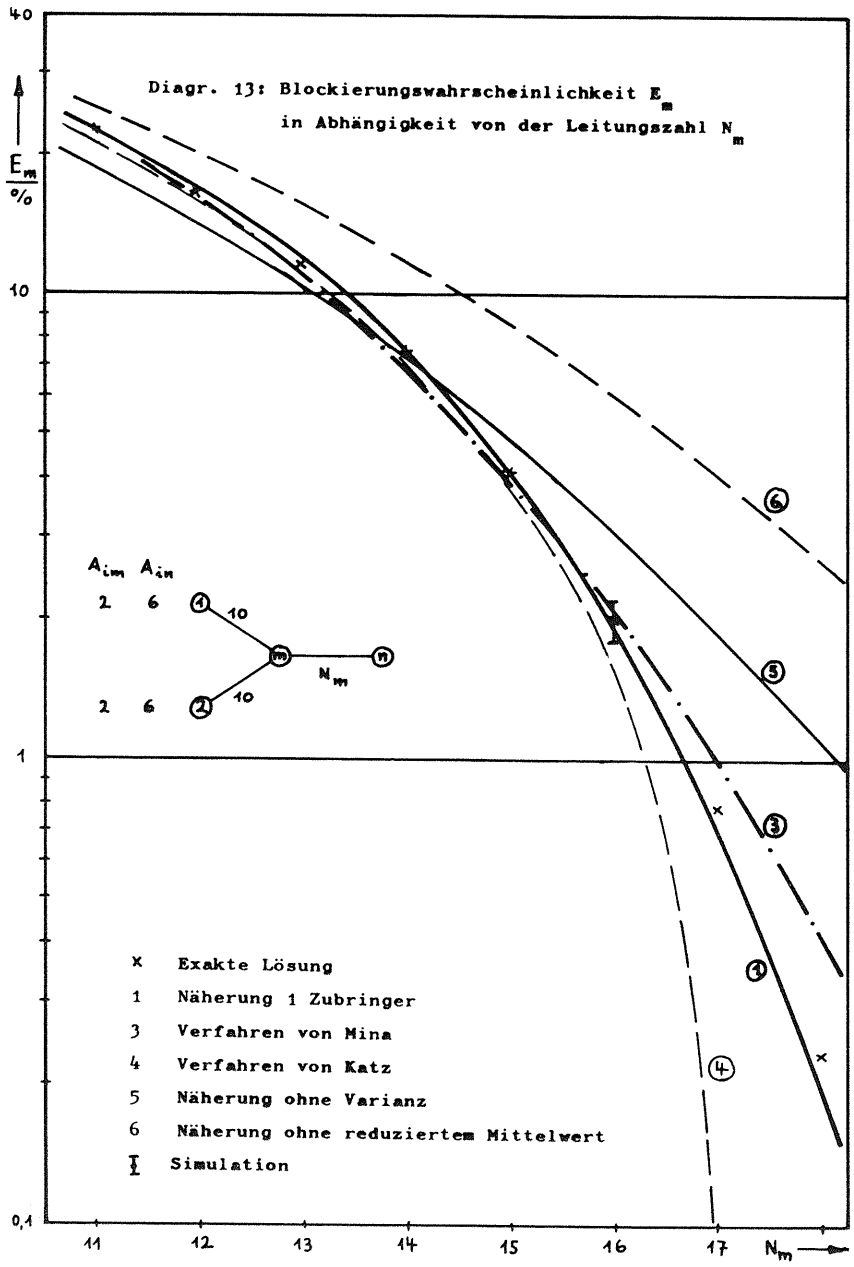
Bezeichnungen siehe Abb. 5 Seite 36

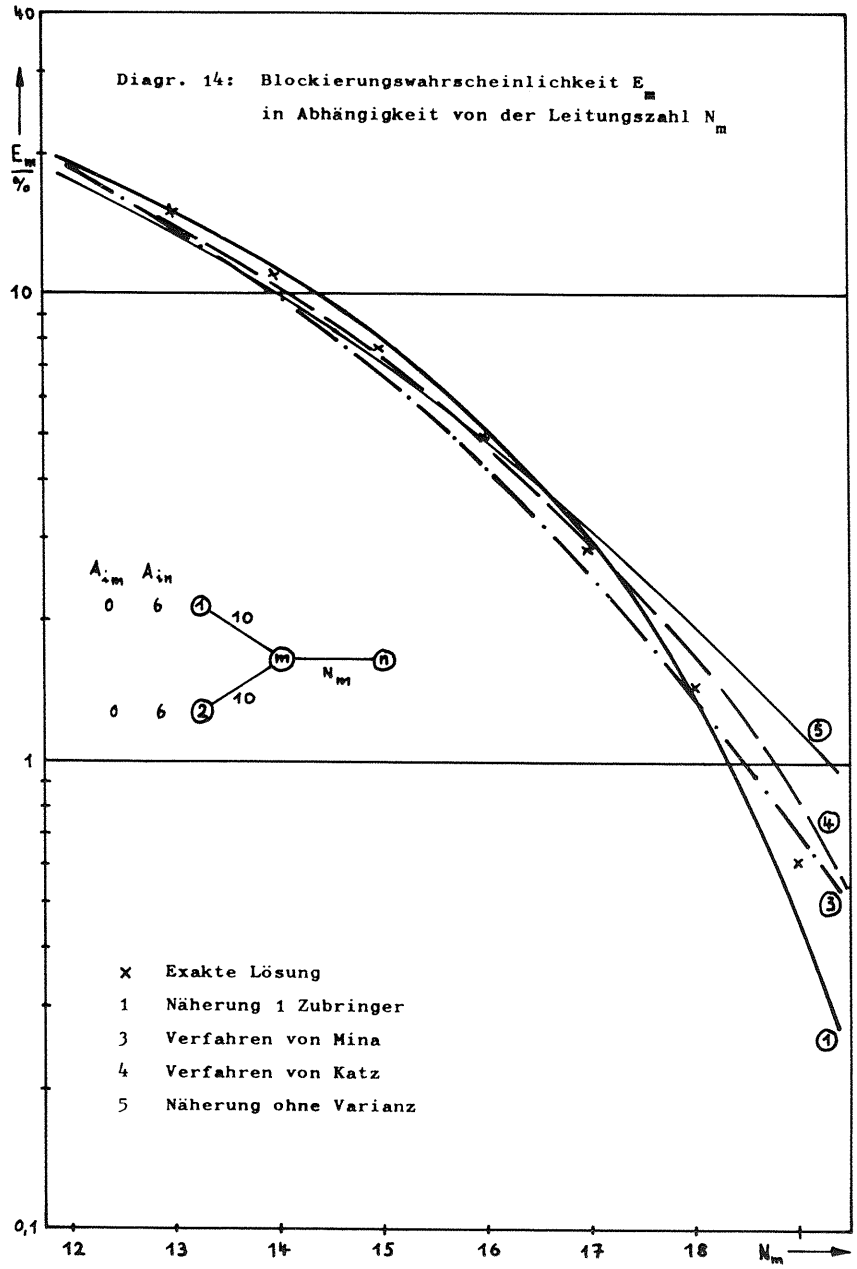
Tab. 18: Zusammenstellung der Beispiele für geglätteten Zufallsverkehr 2. Art

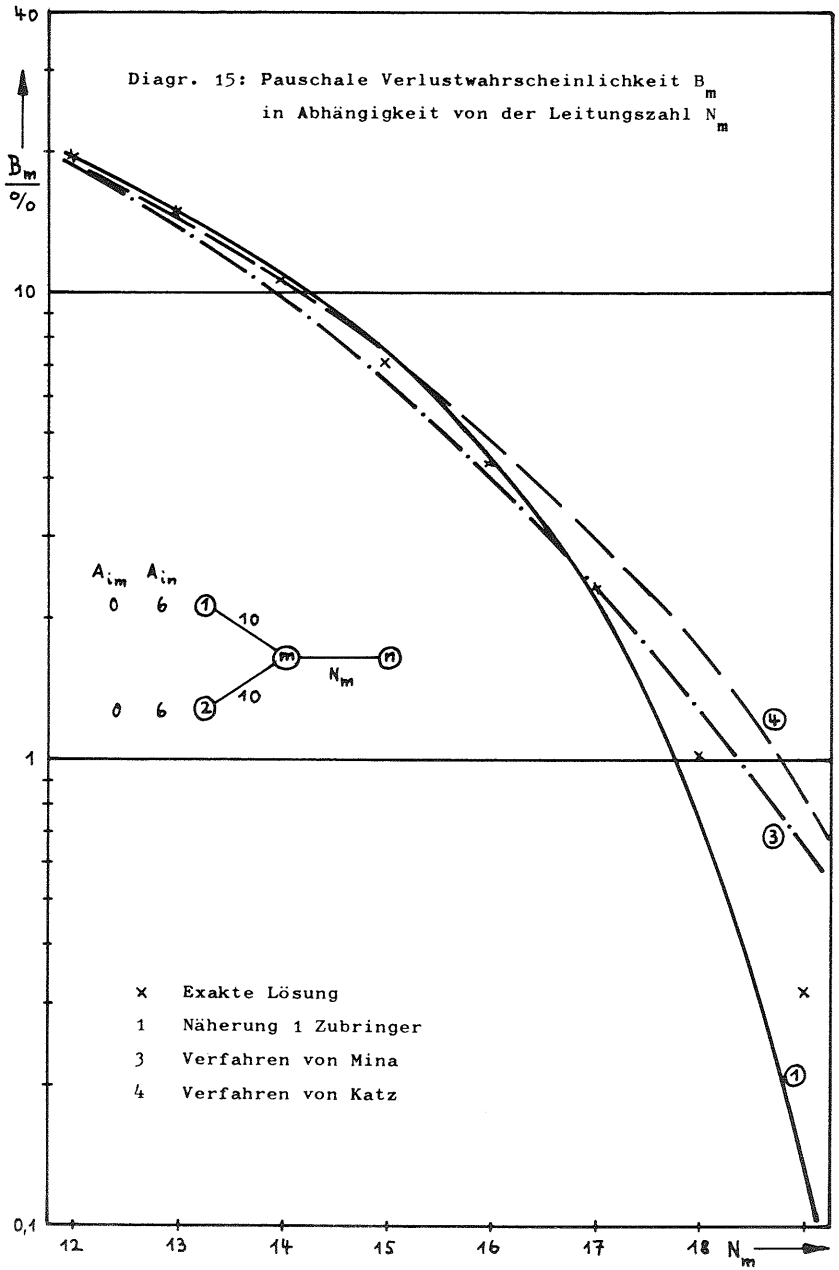
q_i	N_i	α_{im}	α_{in}	K	Diagr. Nr. für E_m	Diagr. Nr. für B_m	Bemerkung
12	10	0,3	1,5	2	35	36	Variation von $\frac{q_i}{N_i}$
20	10	0,2	0,5	2	37	38	
50	10	0,04	0,14	2	39	40	
20	10	0,2	0,5	2	37		Variation der Bündelgrößen N_i
60	30	0,1	0,7	2	41		
100	50	0,2	0,8	2	42		
20	10	0,1	0,6	2	43		Variation der Anzahl der Zubringerbündel
20	10	0,1	0,6	3	44	45	
20	10	0,1	0,6	4	46		
20	10	0,1	0,6	5	47		
20 26	10 13	0,2 0,2	0,5 0,6	2	48	49	Unsymmetrische Strukturen bezüglich Leitungszahl N_i Quellenzahl q_i und Anrufraten α_{im} und α_{in}
12 40	6 20	0,1 0,2	0,5 0,7	2	50	51	
12 24 40	6 12 20	0,1 0,1 0,2	0,5 0,6 0,7	3	52	53 54	

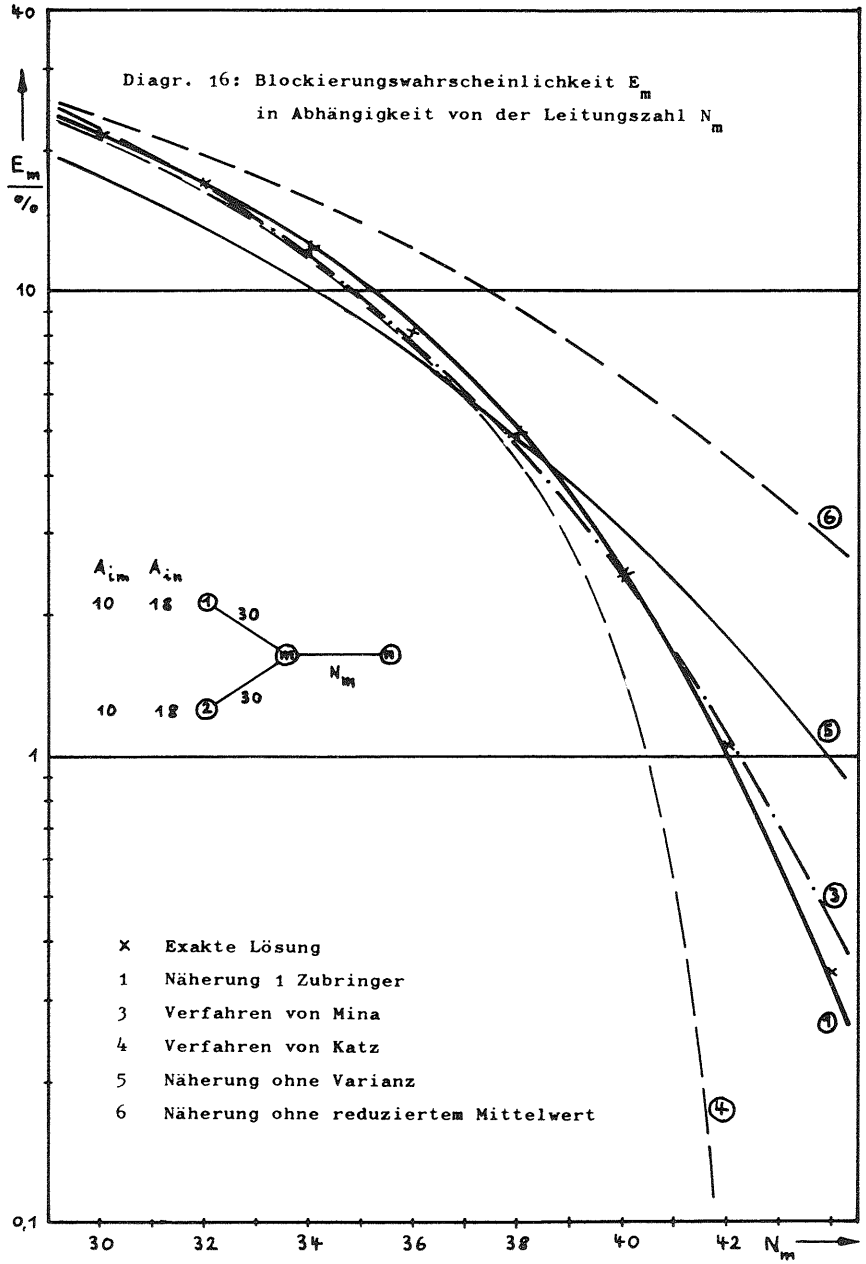
Bezeichnungen siehe Abb. 5 Seite 36

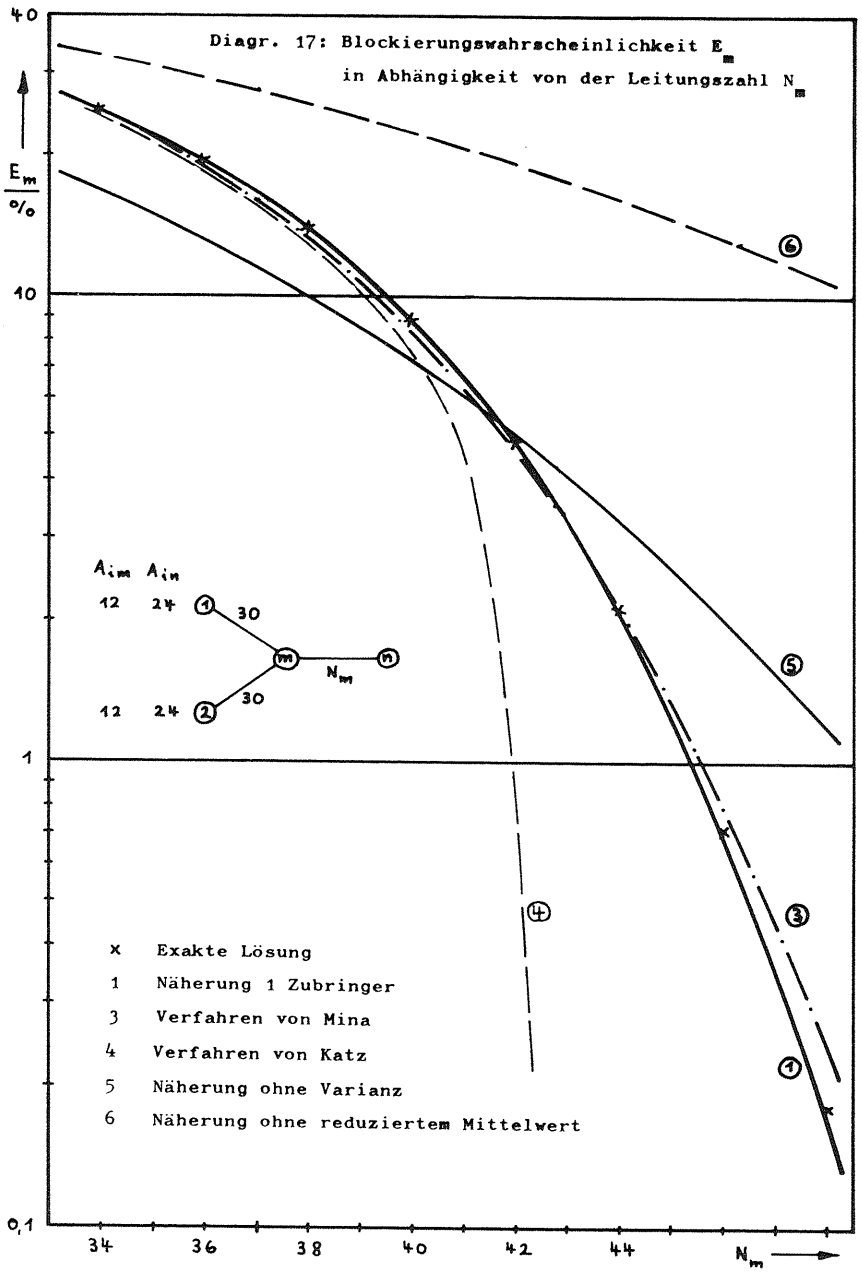


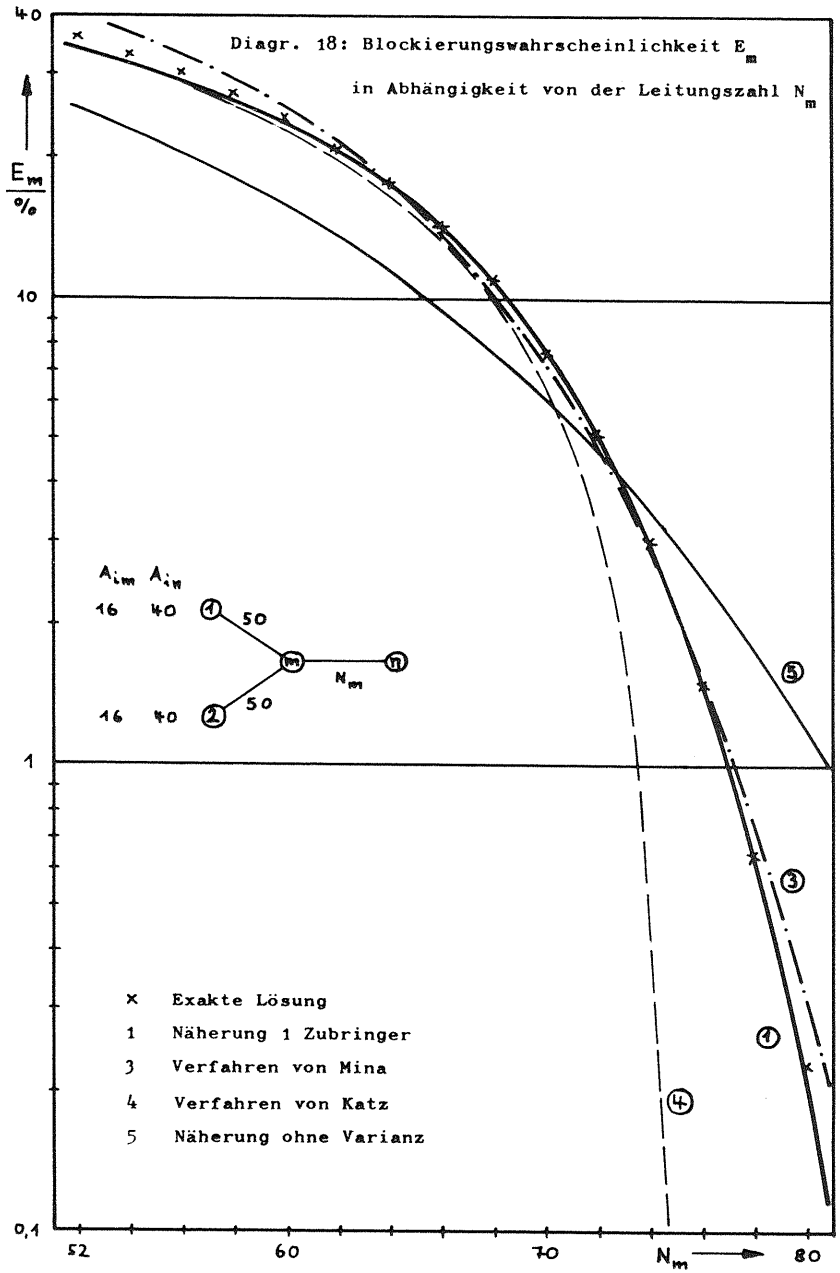

Diagr. 13: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
11
12
13
14
15
16
17
N_m
A_{im} A_{in}
2 6
2 6
10
10
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz
6 Näherung ohne reduziertem Mittelwert
Simulation

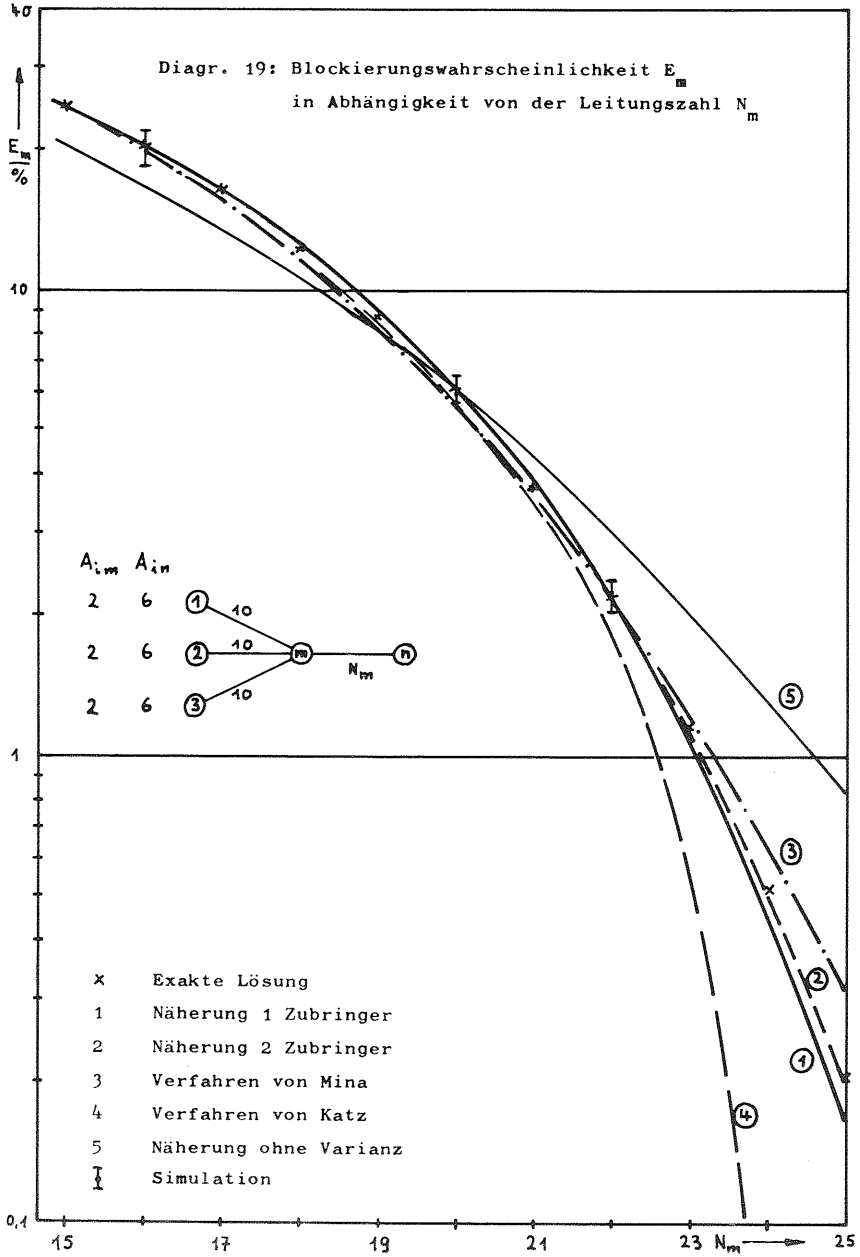

Diagr. 14: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
12
13
14
15
16
17
18
N_m
A_{im} A_{in}
0 6
0 6
10
10
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz

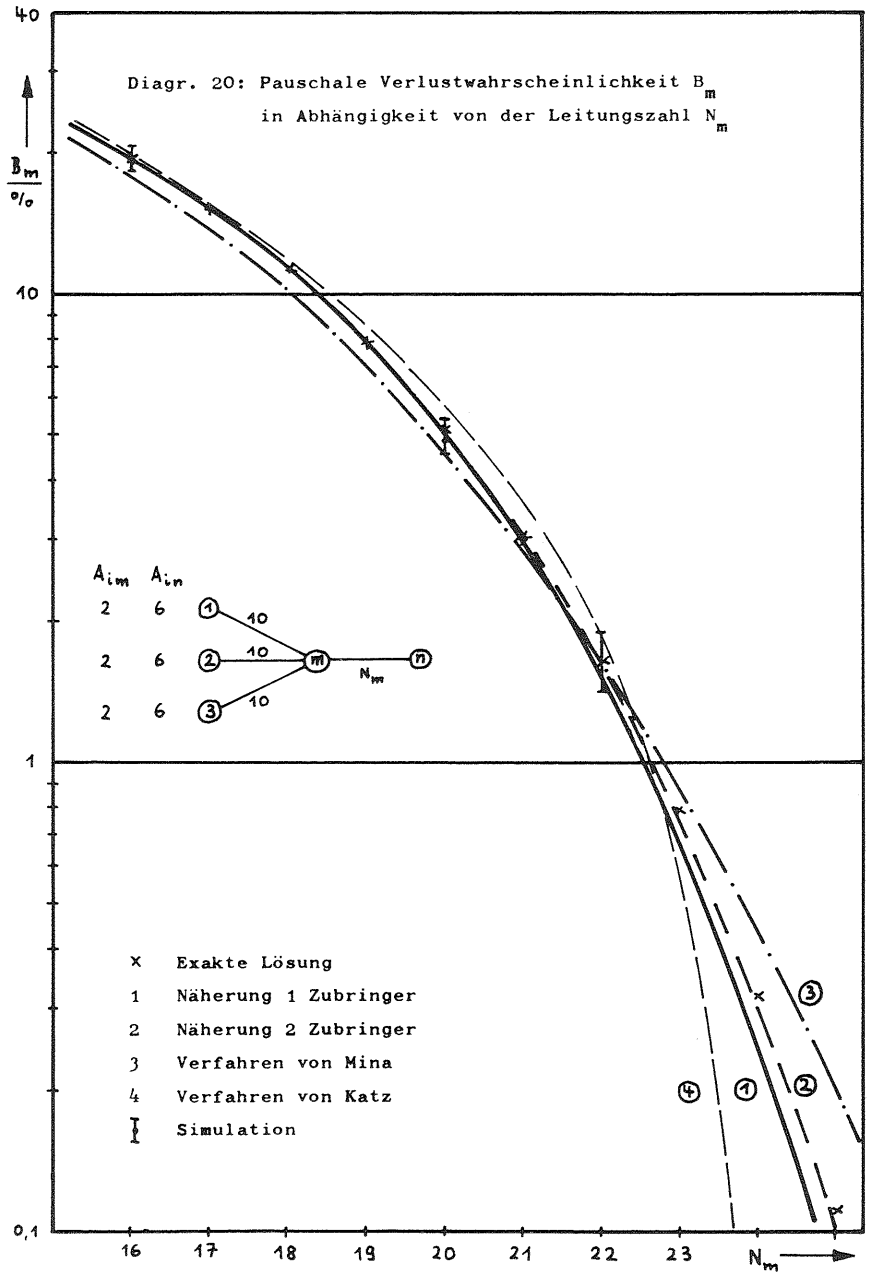

Diagr. 15: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m / %
40
10
1
0,1
12
13
14
15
16
17
18
N_m
A_{im} A_{in}
0 6
0 6
10
10
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz

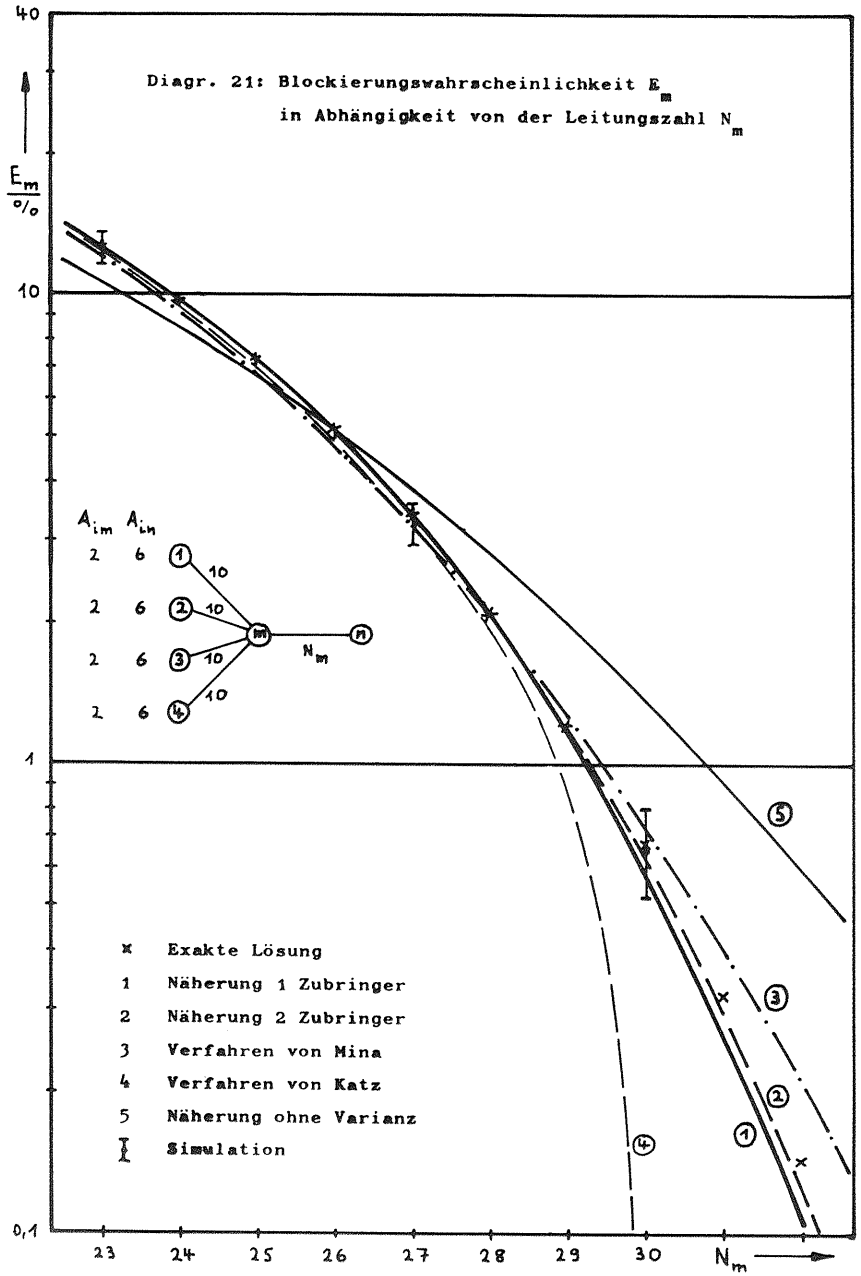

Diagr. 16: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m / %
40
10
1
0,1
30
32
34
36
38
40
42
N_m
A_{im} A_{in}
10 18
10 18
30
30
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz
6 Näherung ohne reduziertem Mittelwert

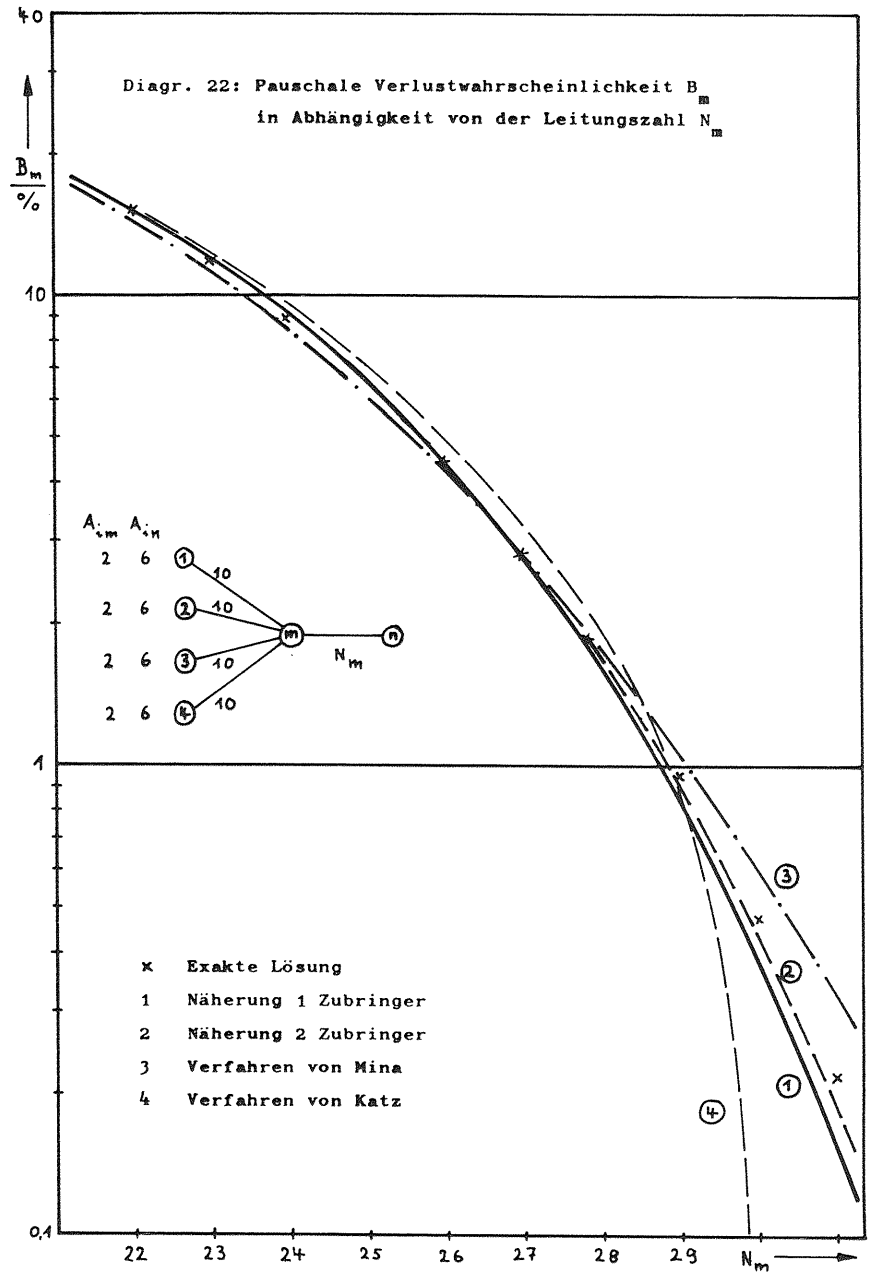

Diagr. 17: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
34
36
38
40
42
44
N_m
A_{im} A_{in}
12 24
12 24
30
30
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz
6 Näherung ohne reduziertem Mittelwert

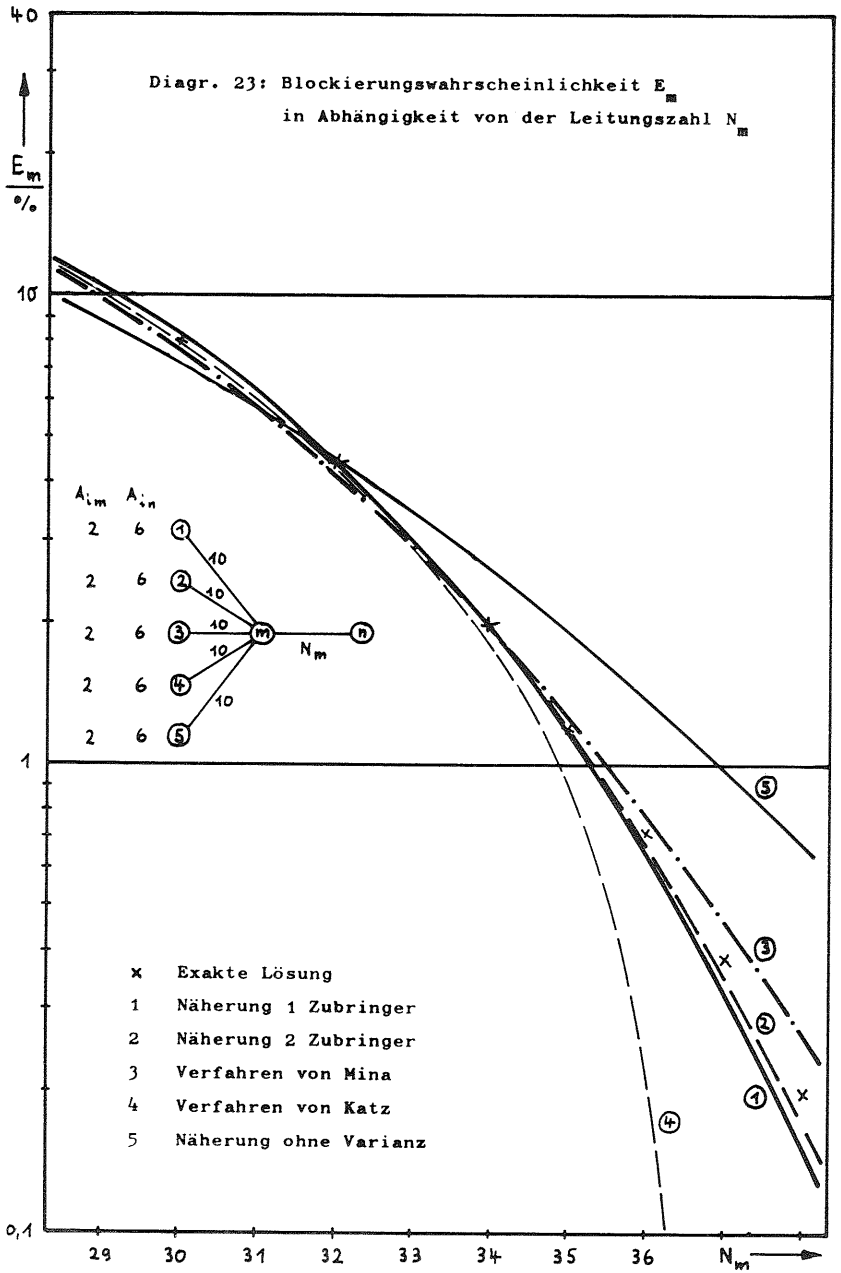

Diagr. 18: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
52
60
70
80
N_m
A_{im} A_{in}
16 40
16 40
50
50
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz

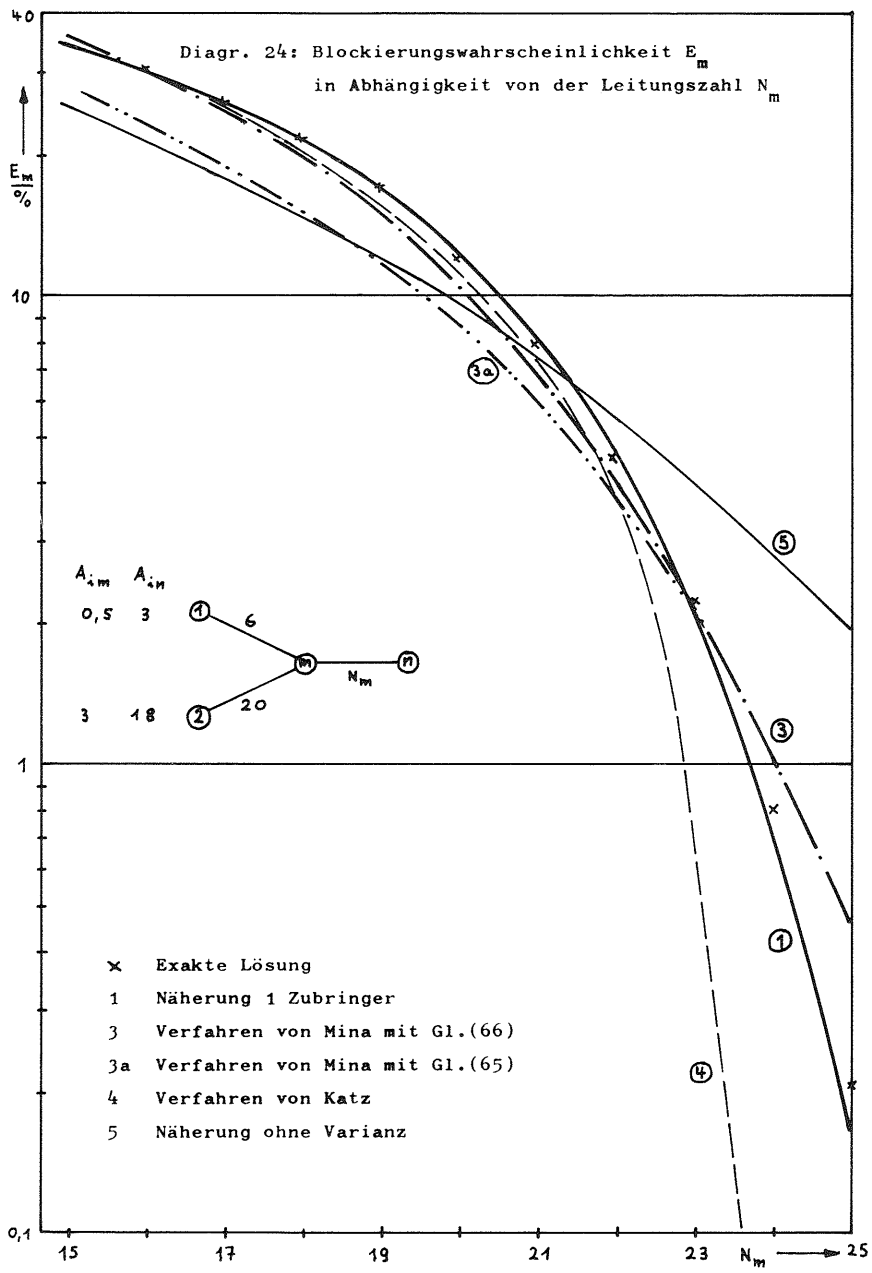

Diagr. 19: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m / %
40
10
1
0,1
15
17
19
21
23
25
N_m
A_{im} A_{in}
2 6
2 6
2 6
10
10
10
N_m
m
n
1
2
3
4
5
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz
Simulation

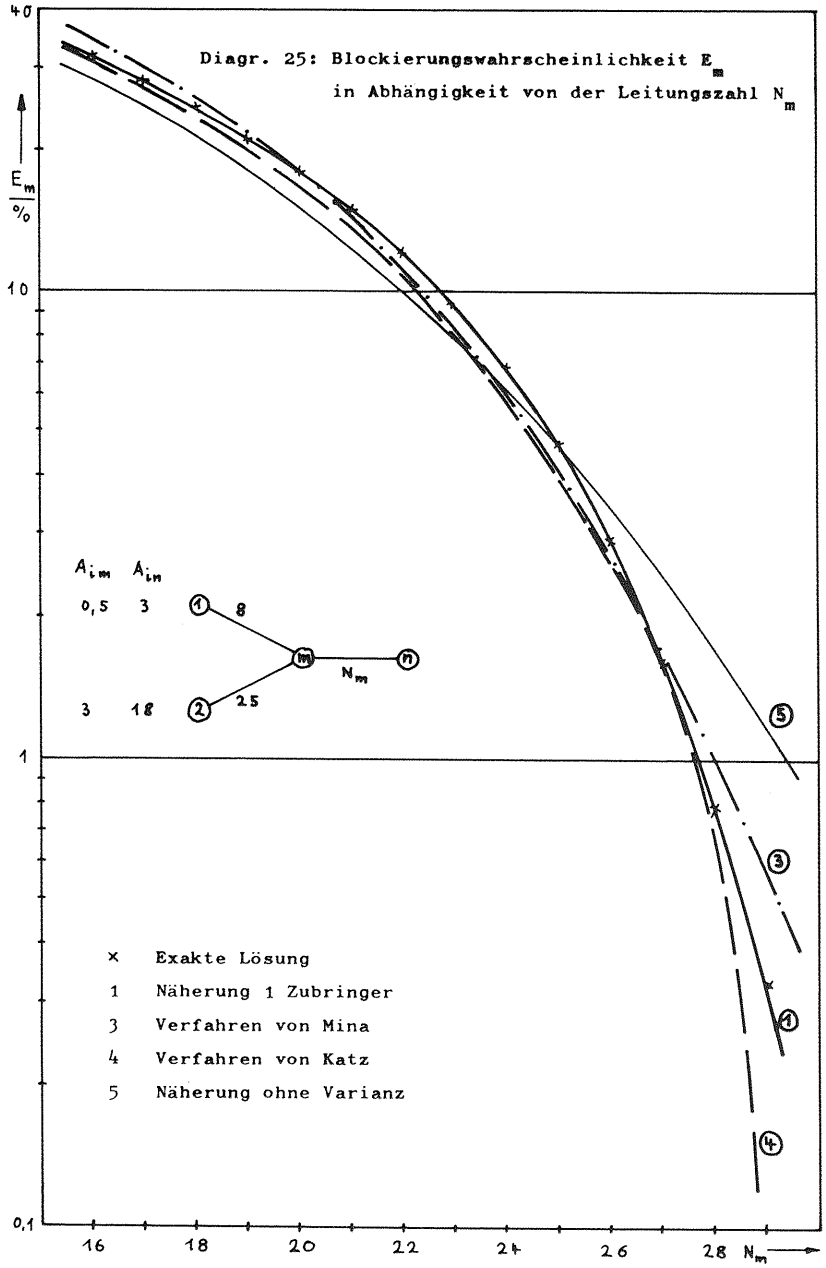

Diagr. 20: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m / %
40
10
1
0,1
16
17
18
19
20
21
22
23
N_m
A_{im} A_{in}
2 6
2 6
2 6
10
10
10
N_m
m
n
1
2
3
4
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
Simulation

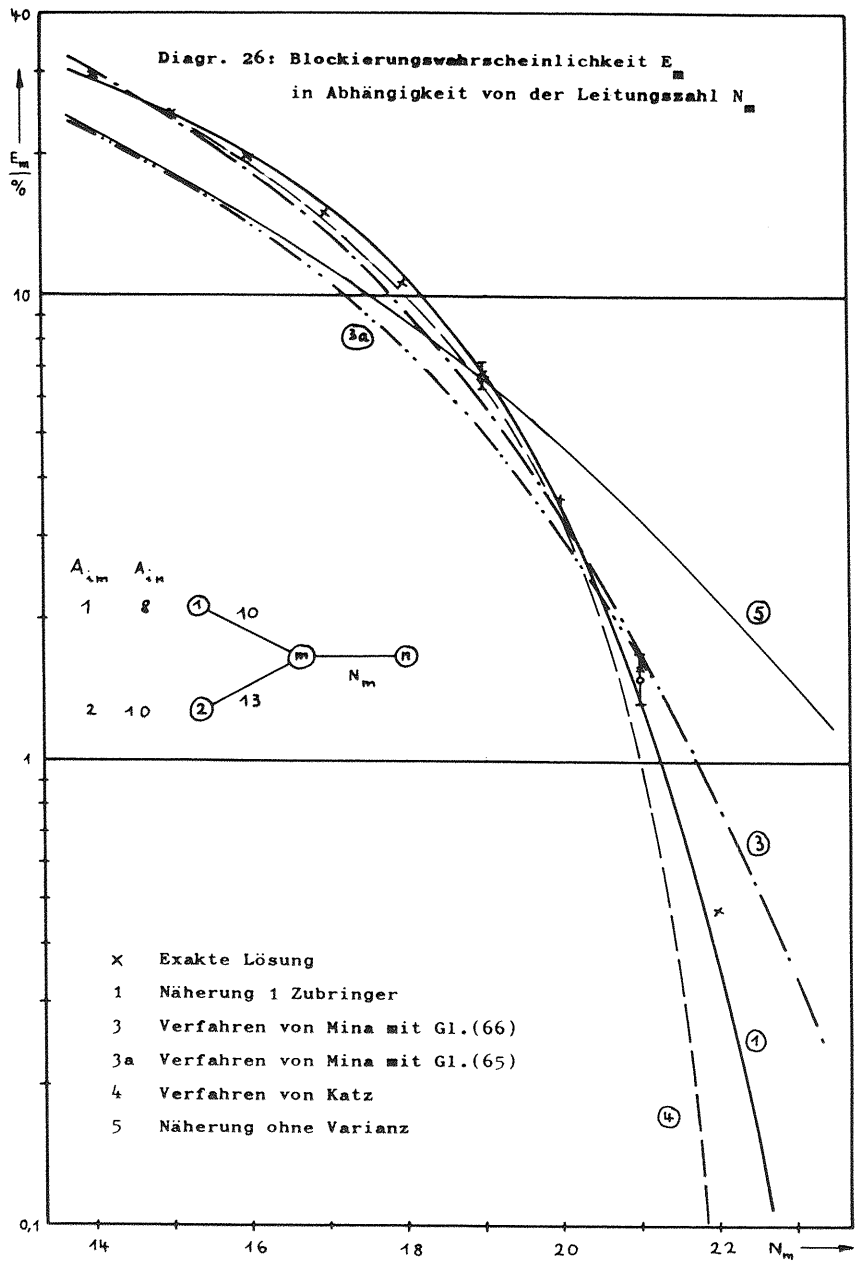

Diagr. 21: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
23
24
25
26
27
28
29
30
N_m
A_{im} A_{in}
2 6
10
N_m
Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz
Simulation

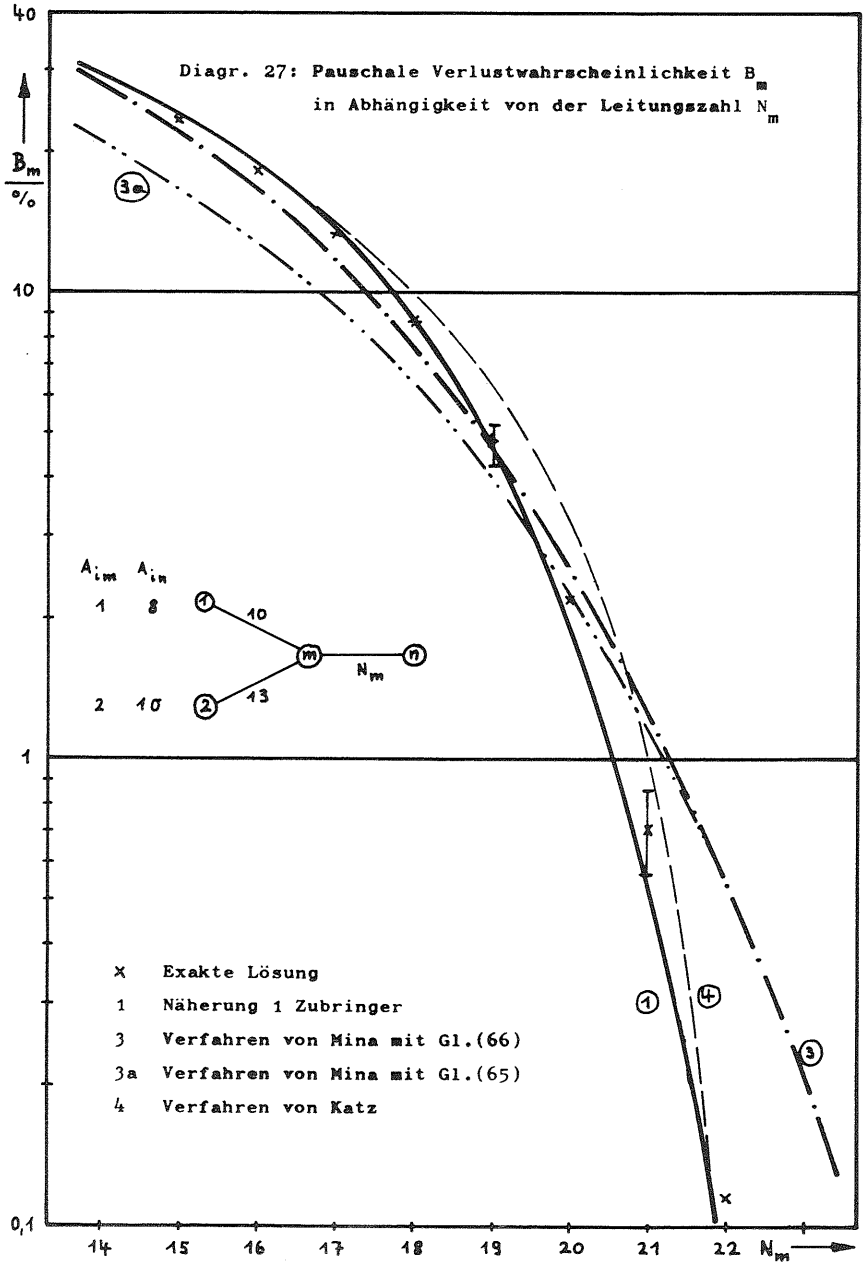

Diagr. 22: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m %
40
10
1
0,1
22
23
24
25
26
27
28
29
N_m
A_{im} A_{in}
2 6
10
N_m
Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz

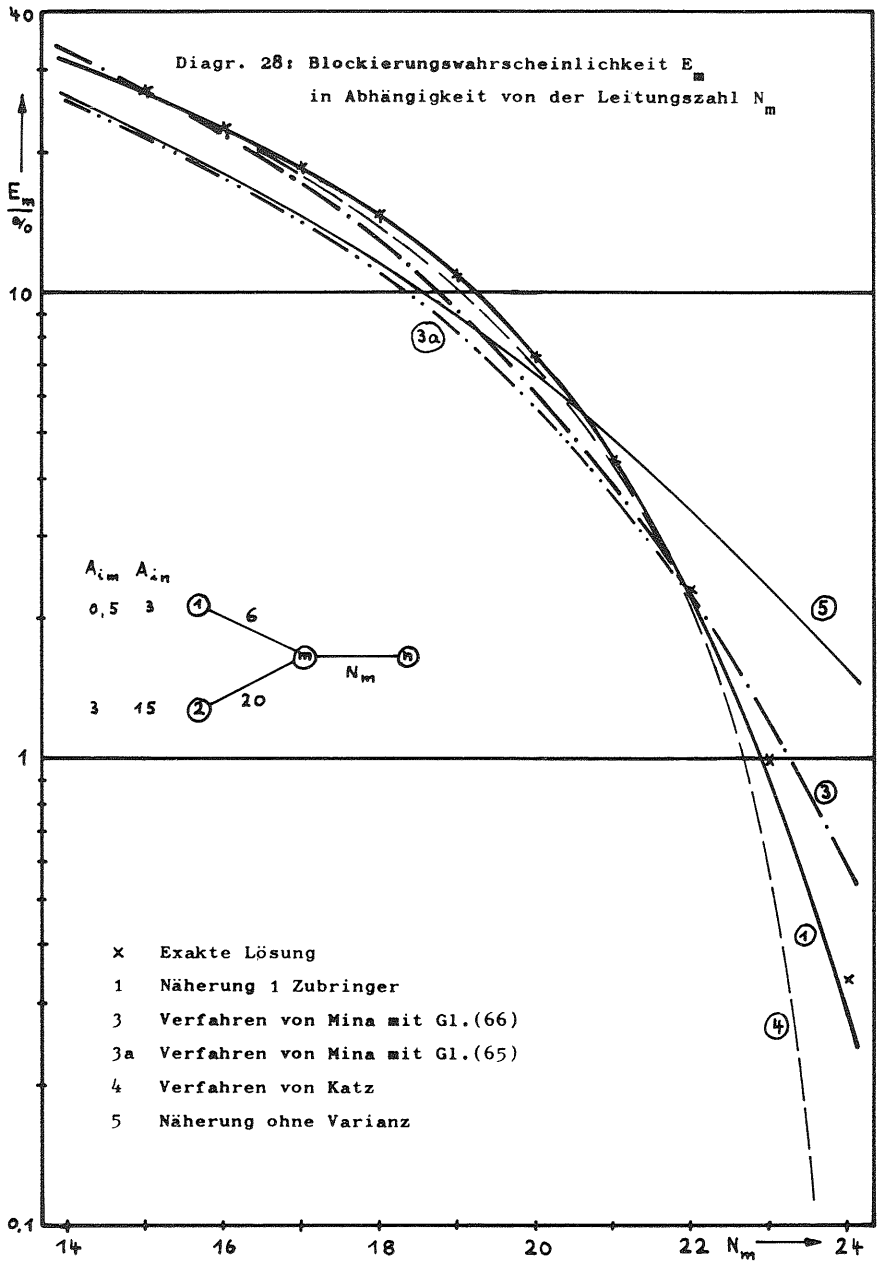

Diagr. 23: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
29
30
31
32
33
34
35
36
N_m
A_{im} A_{in}
2 6
2 6
2 6
2 6
2 6
10
10
10
10
10
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz

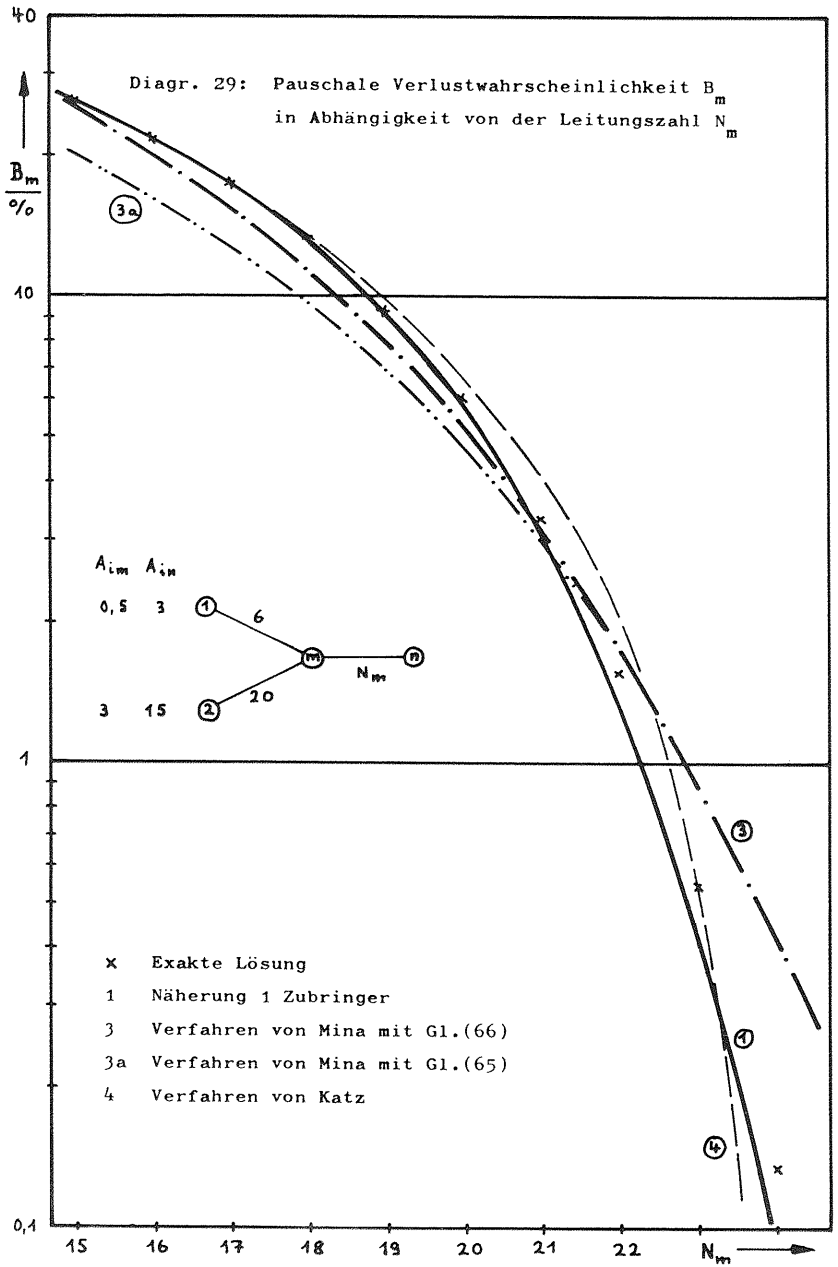

Diagr. 24: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
15
17
19
21
23
25
N_m
A_{im} A_{in}
0,5 3
3 18
6
20
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina mit Gl.(66)
3a Verfahren von Mina mit Gl.(65)
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz

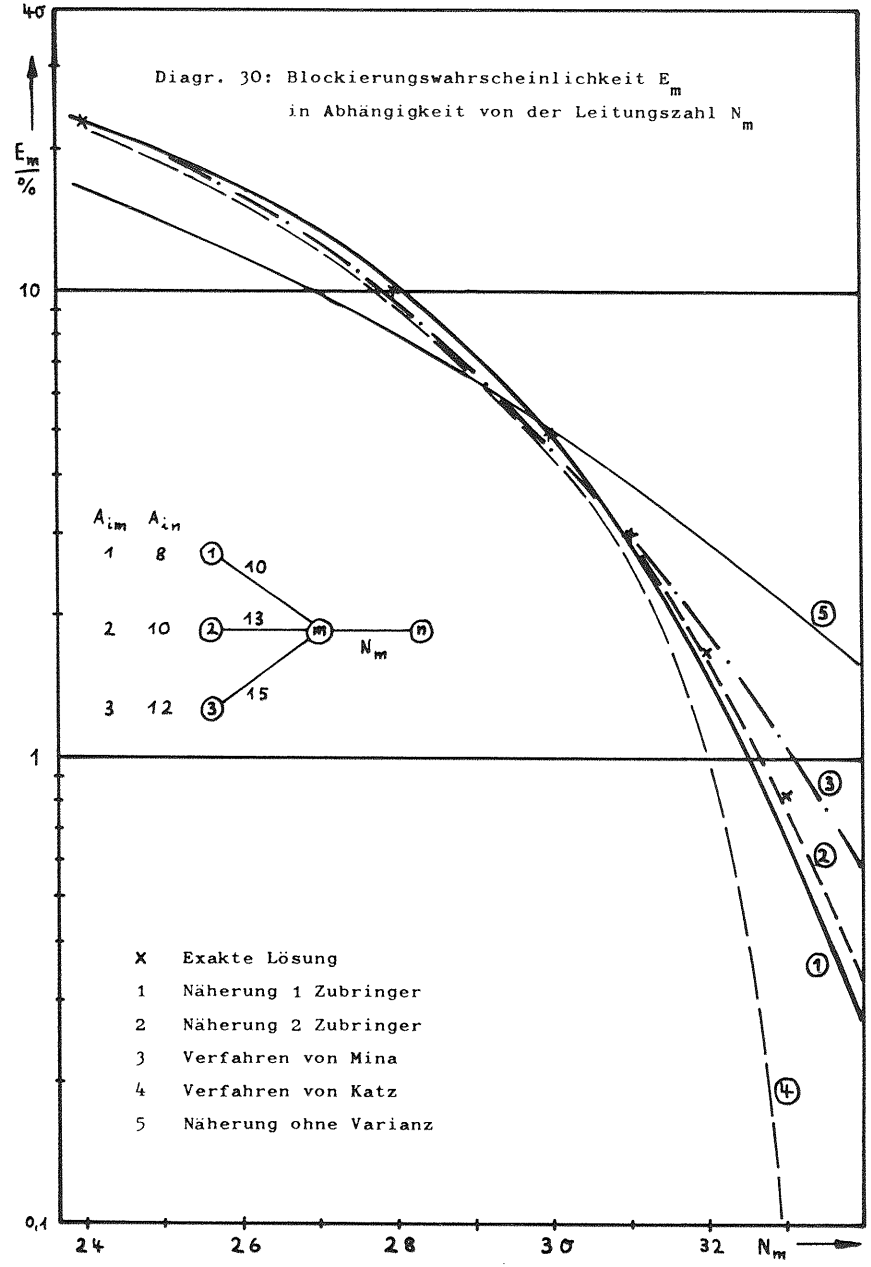

Diagr. 25: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m / %
40
10
1
0,1
16
18
20
22
24
26
28
N_m
A_{im} A_{in}
0,5 3
3 18
1
2
m
n
8
25
N_m
5
3
1
4
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz

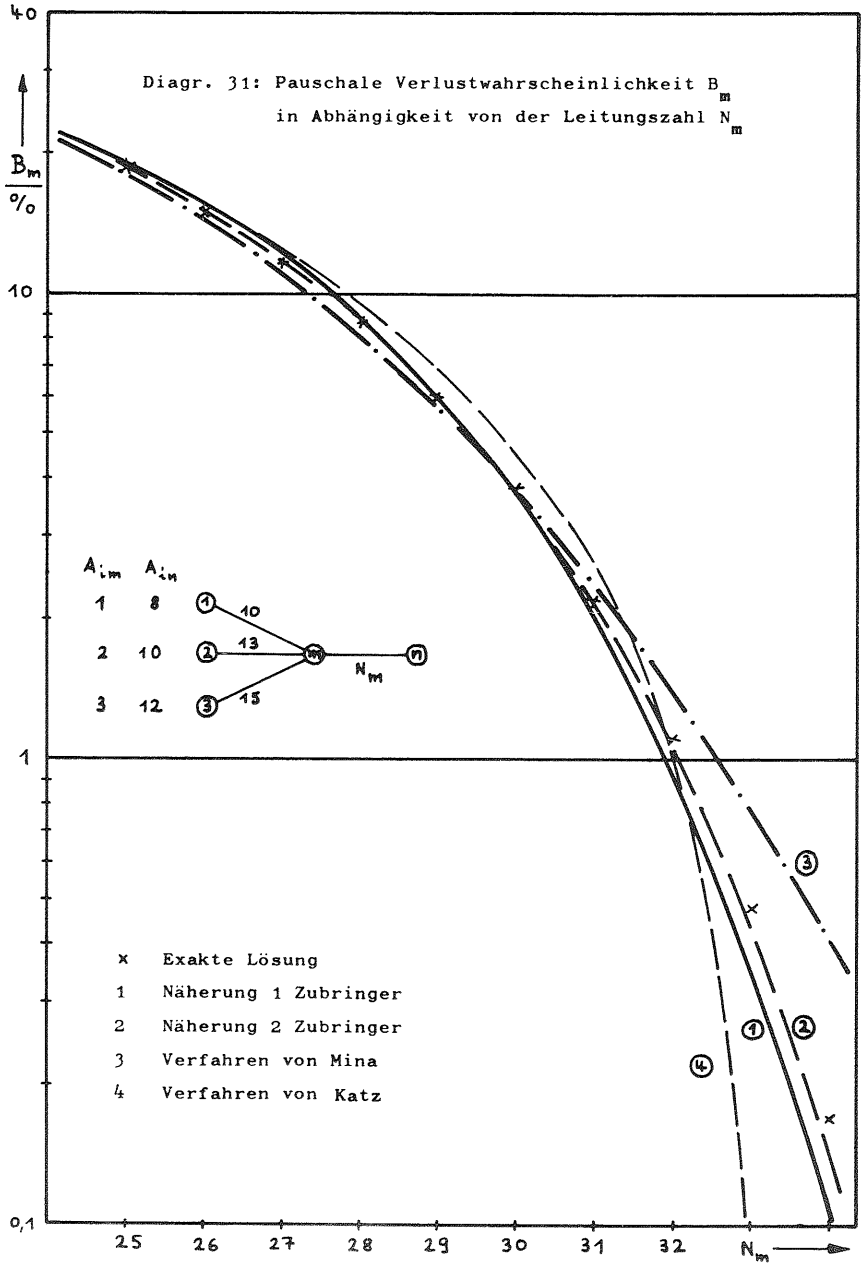

Diagr. 26: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m / %
40
10
1
0,1
14
16
18
20
22
N_m
A_{im} A_{in}
1 8
2 10
1
2
m
n
10
13
N_m
3a
5
3
1
4
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina mit Gl.(66)
3a Verfahren von Mina mit Gl.(65)
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz

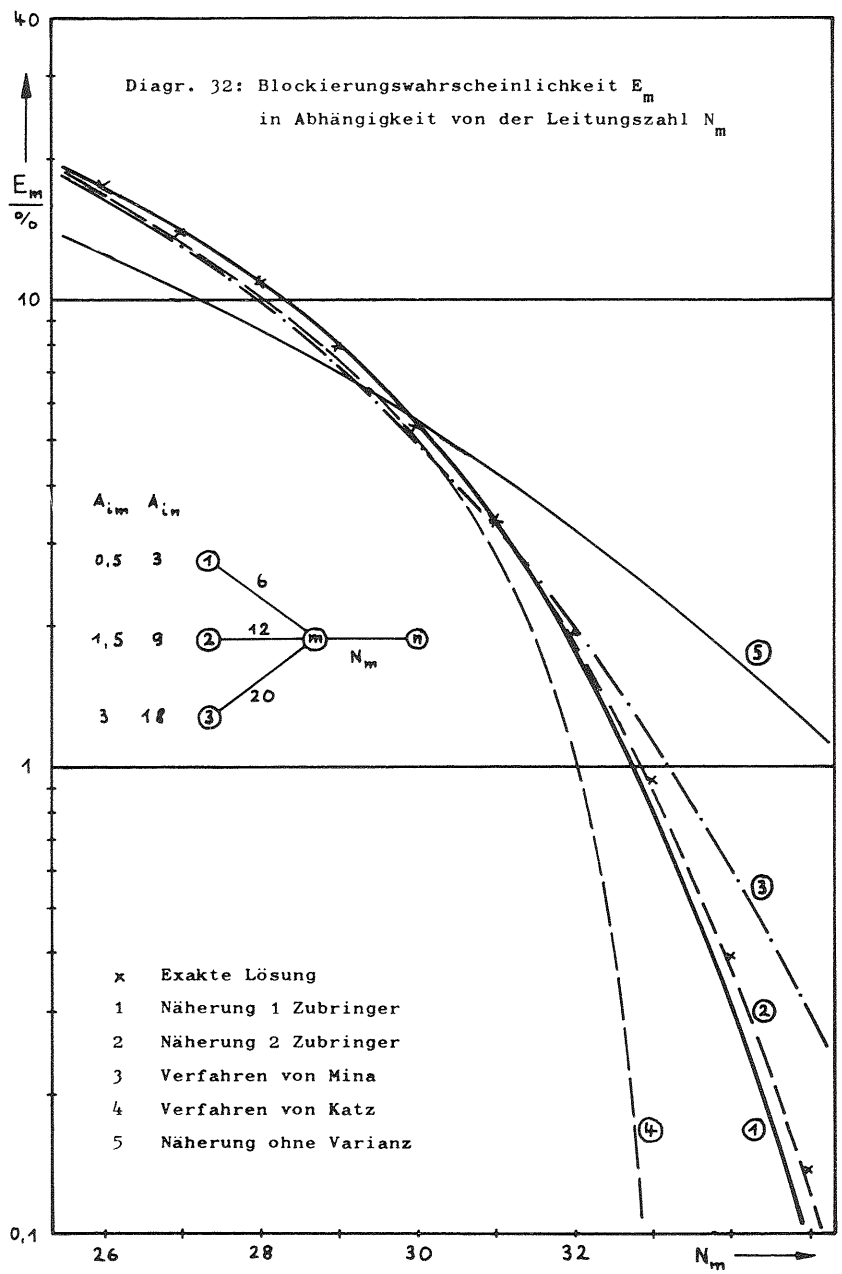

Diagr. 27: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m %
40
10
1
0,1
14
15
16
17
18
19
20
21
22
N_m
A_{im} A_{in}
1 8
2 10
10
13
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina mit Gl.(66)
3a Verfahren von Mina mit Gl.(65)
4 Verfahren von Katz

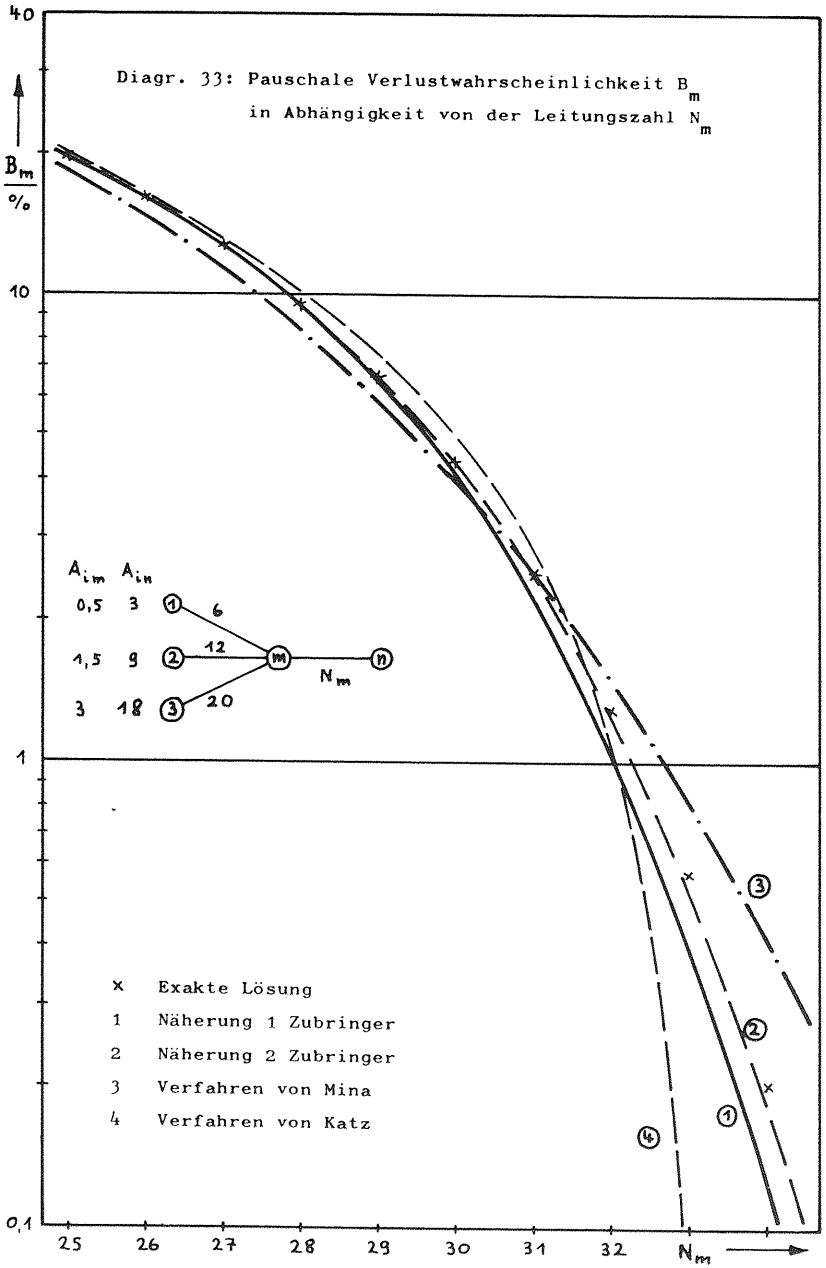

Diagr. 28: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
14
16
18
20
22
24
N_m
A_{im} A_{in}
0,5 3
3 15
6
20
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina mit Gl.(66)
3a Verfahren von Mina mit Gl.(65)
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz

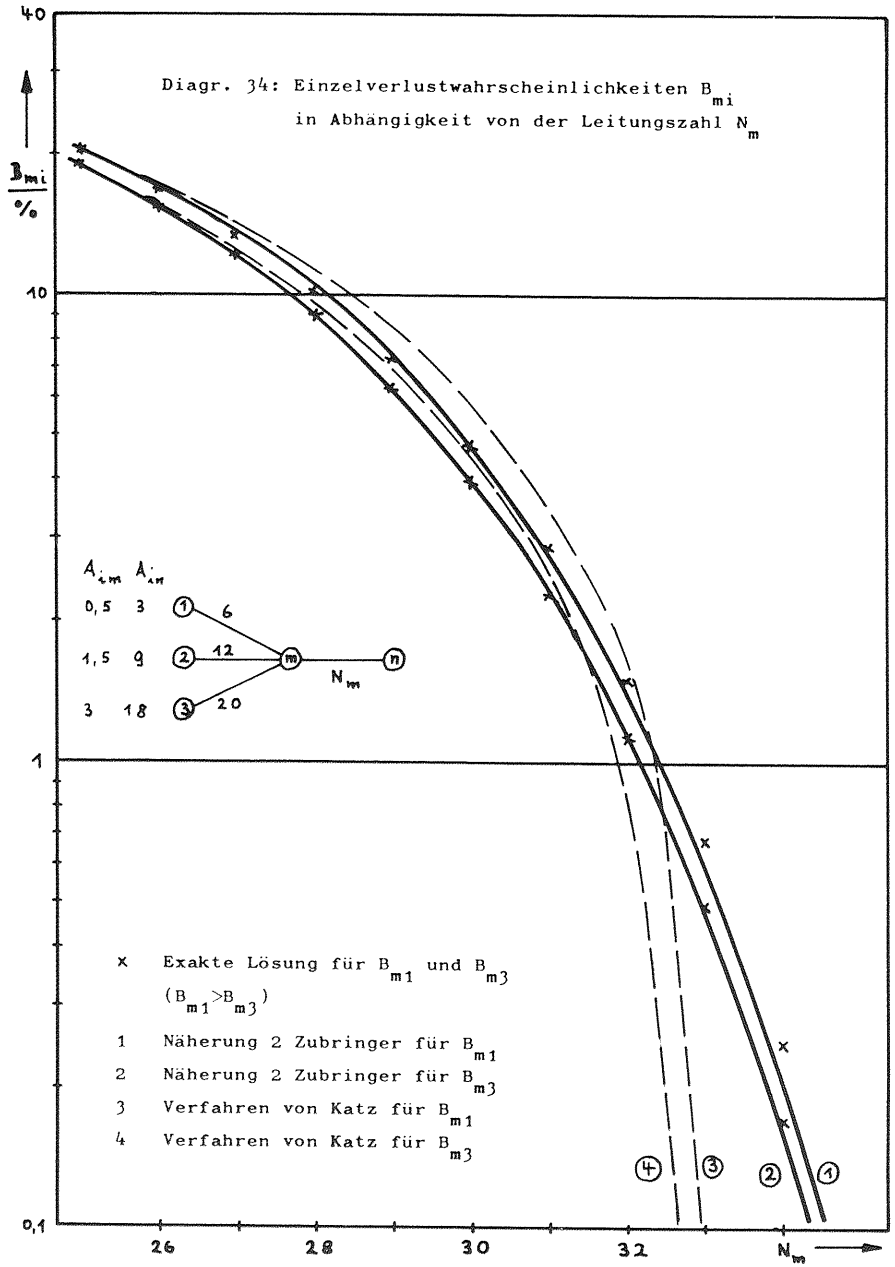

Diagr. 29: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m %
40
10
1
0,1
15
16
17
18
19
20
21
22
N_m
A_{im} A_{in}
0,5 3
3 15
6
20
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina mit Gl.(66)
3a Verfahren von Mina mit Gl.(65)
4 Verfahren von Katz

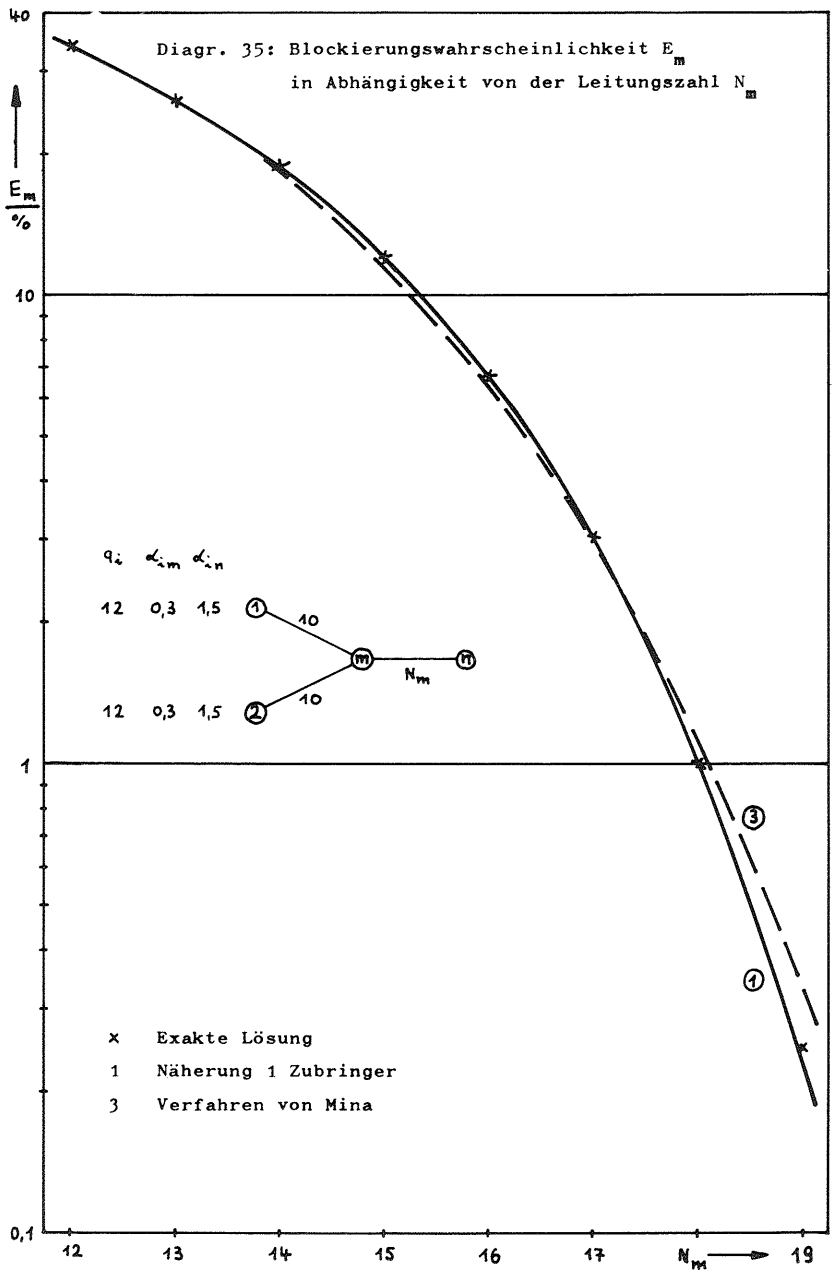

Diagr. 30: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
24
26
28
30
32
N_m
A_{im} A_{in}
1 8
2 10
3 12
10
13
15
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz

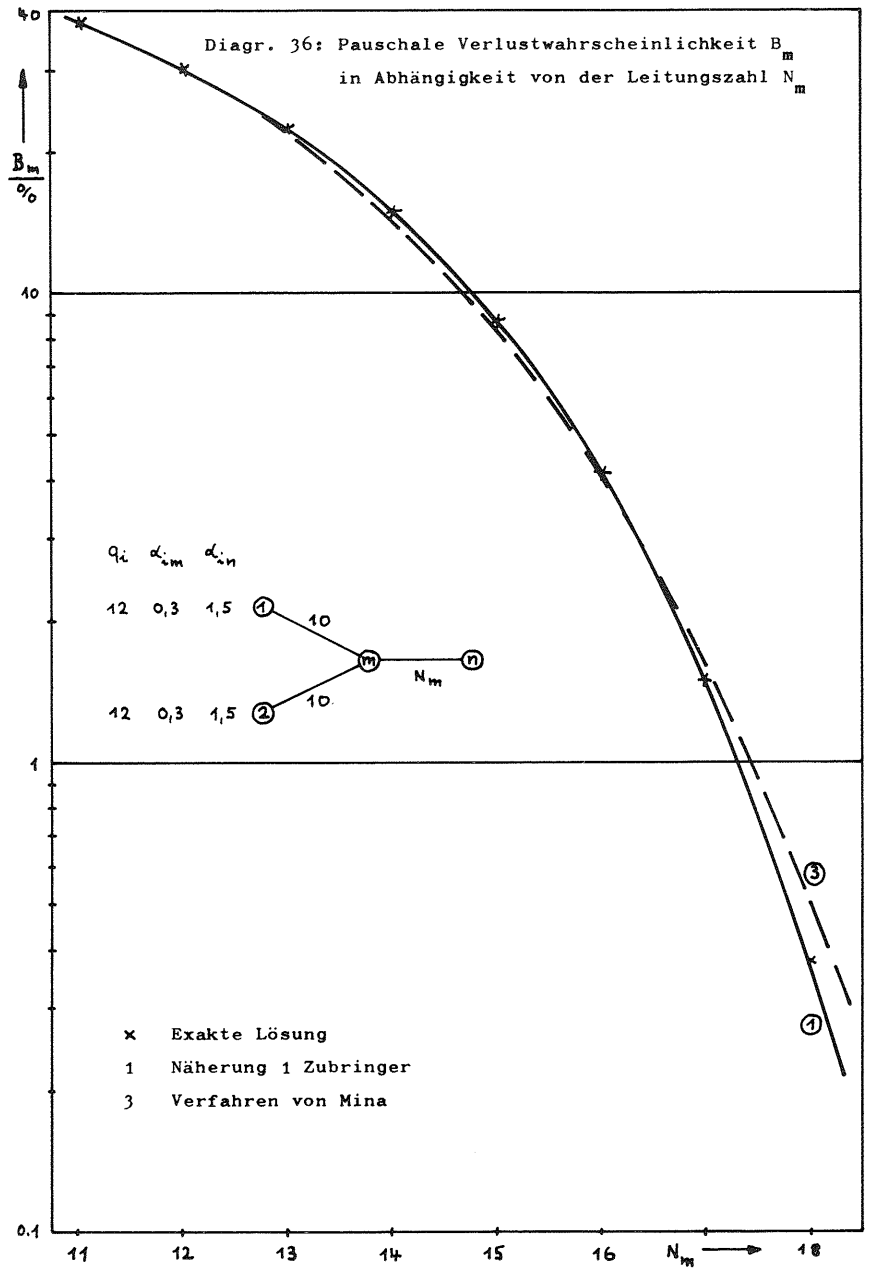

Diagr. 31: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m / %
40
10
1
0,1
25
26
27
28
29
30
31
32
N_m
A_{im} A_{in}
1 8
2 10
3 12
10
13
15
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz

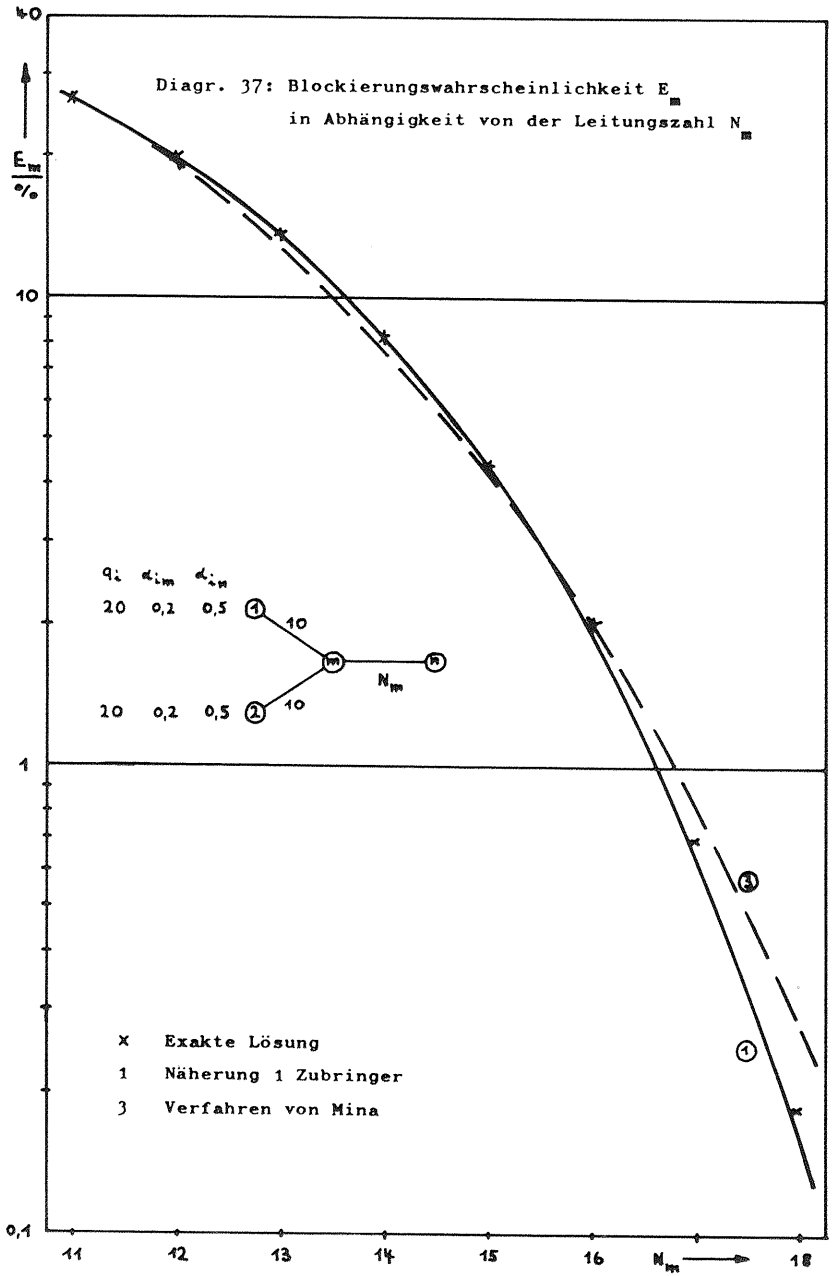

Diagr. 32: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m / %
40
10
1
0,1
26
28
30
32
N_m
A_{im} A_{in}
0,5 3
1,5 9
3 18
6
12
20
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz
5 Näherung ohne Varianz

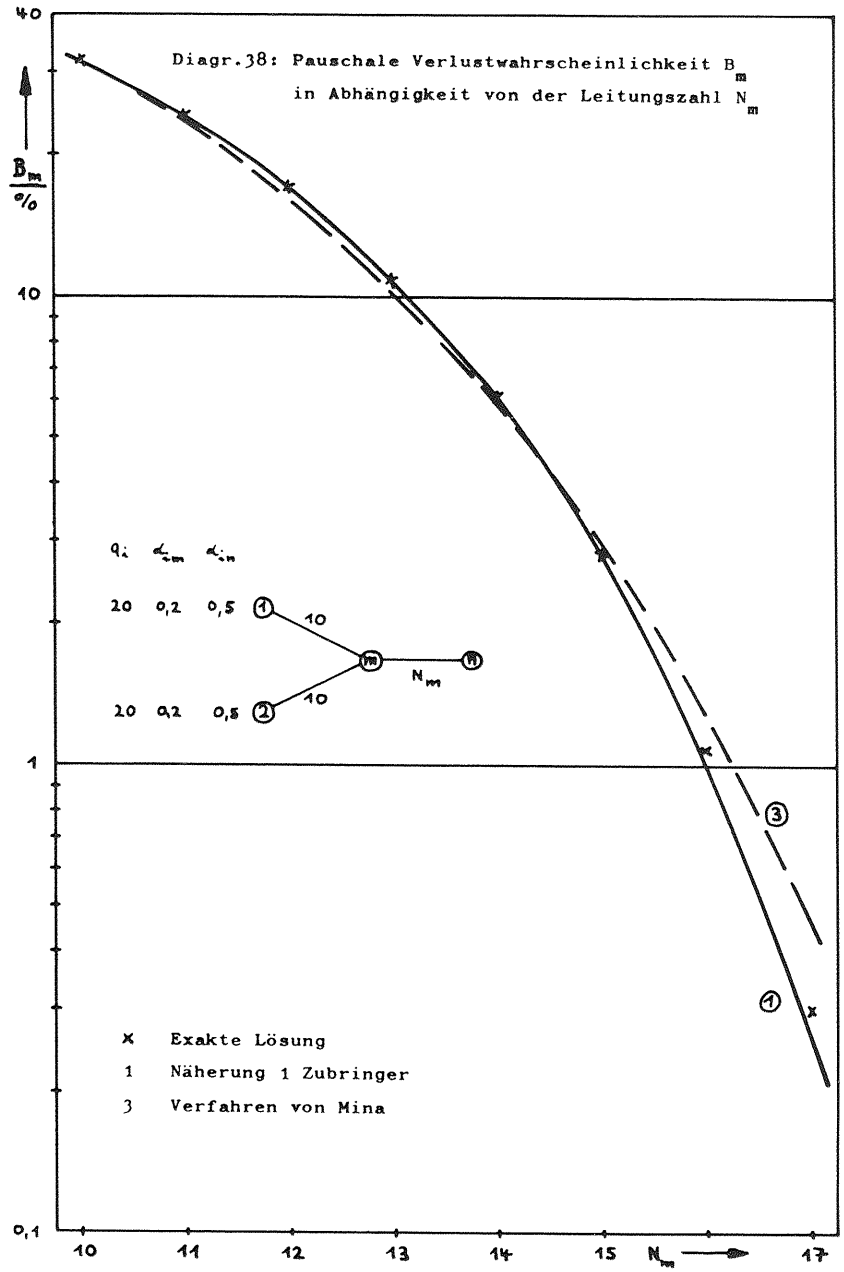

Diagr. 33: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m %
40
10
1
0,1
25
26
27
28
29
30
31
32
N_m
A_{im} A_{in}
0,5 3
1,5 9
3 18
6
12
20
m
n
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina
4 Verfahren von Katz

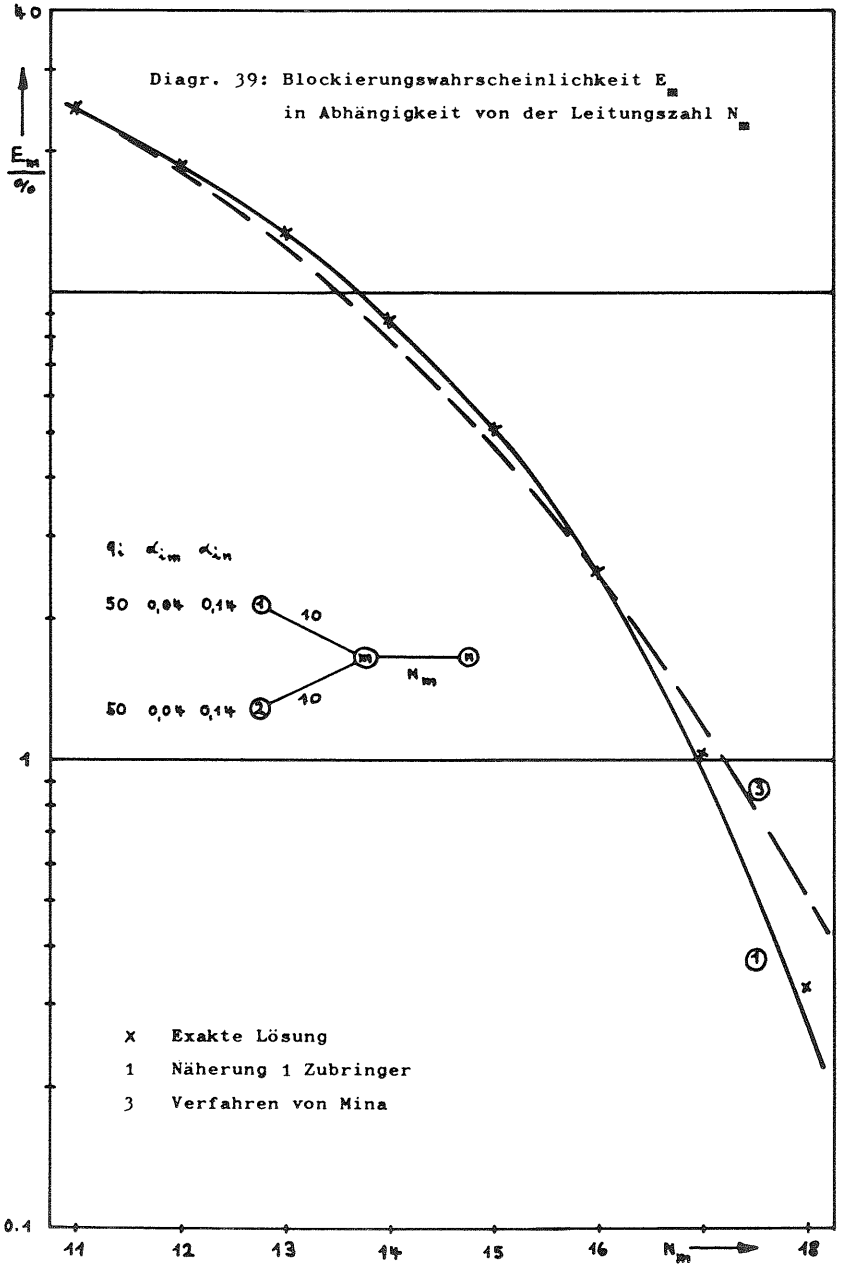

Diagr. 34: Einzelverlustwahrscheinlichkeiten B_{mi}
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_{mi} %
40
10
1
0,1
26
28
30
32
N_m
A_{im} A_{in}
0,5 3
1,5 9
3 18
6
12
20
m
n
N_m
× Exakte Lösung für B_{m1} und B_{m3}
($B_{m1} > B_{m3}$)
1 Näherung 2 Zubringer für B_{m1}
2 Näherung 2 Zubringer für B_{m3}
3 Verfahren von Katz für B_{m1}
4 Verfahren von Katz für B_{m3}

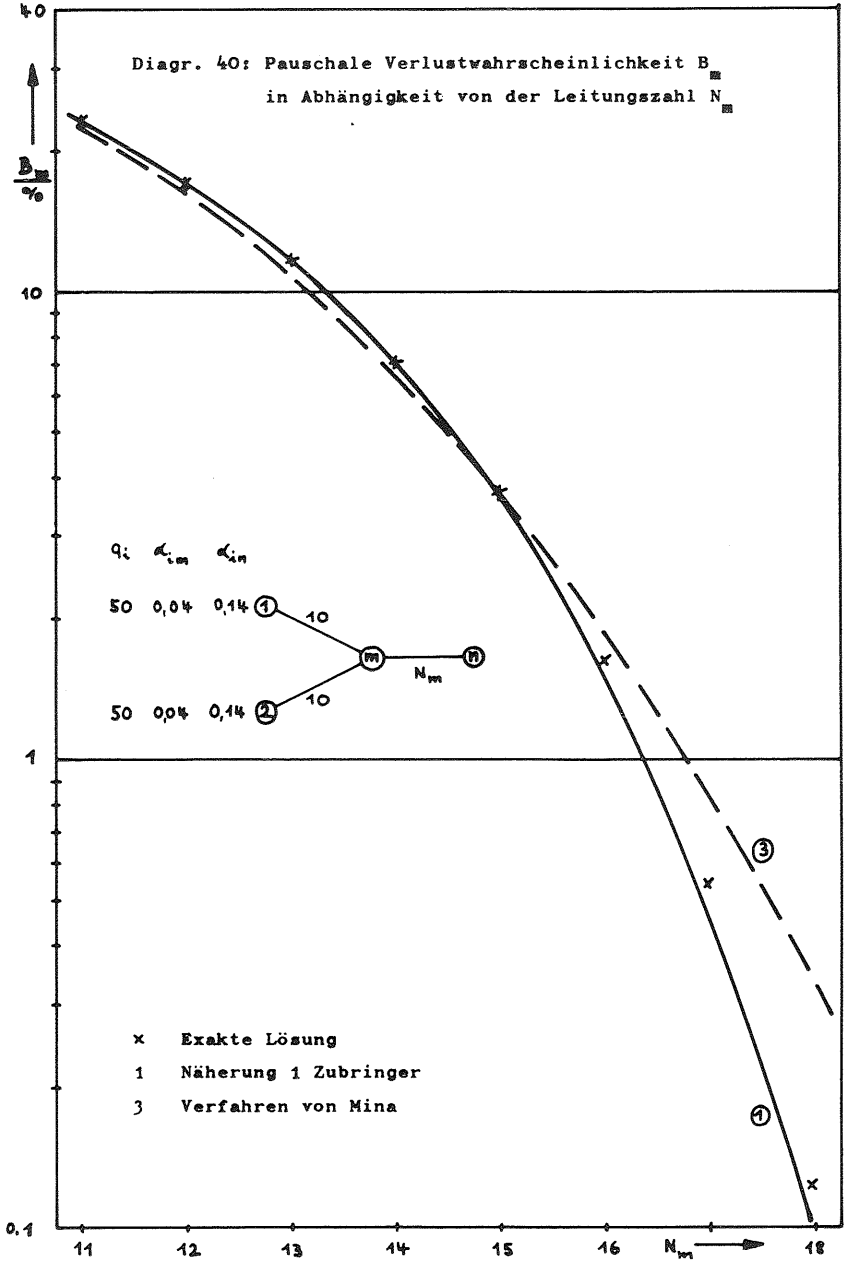

Diagr. 35: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
12
13
14
15
16
17
N_m
19
q_i α_{im} α_{in}
12 0,3 1,5
12 0,3 1,5
10
10
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina

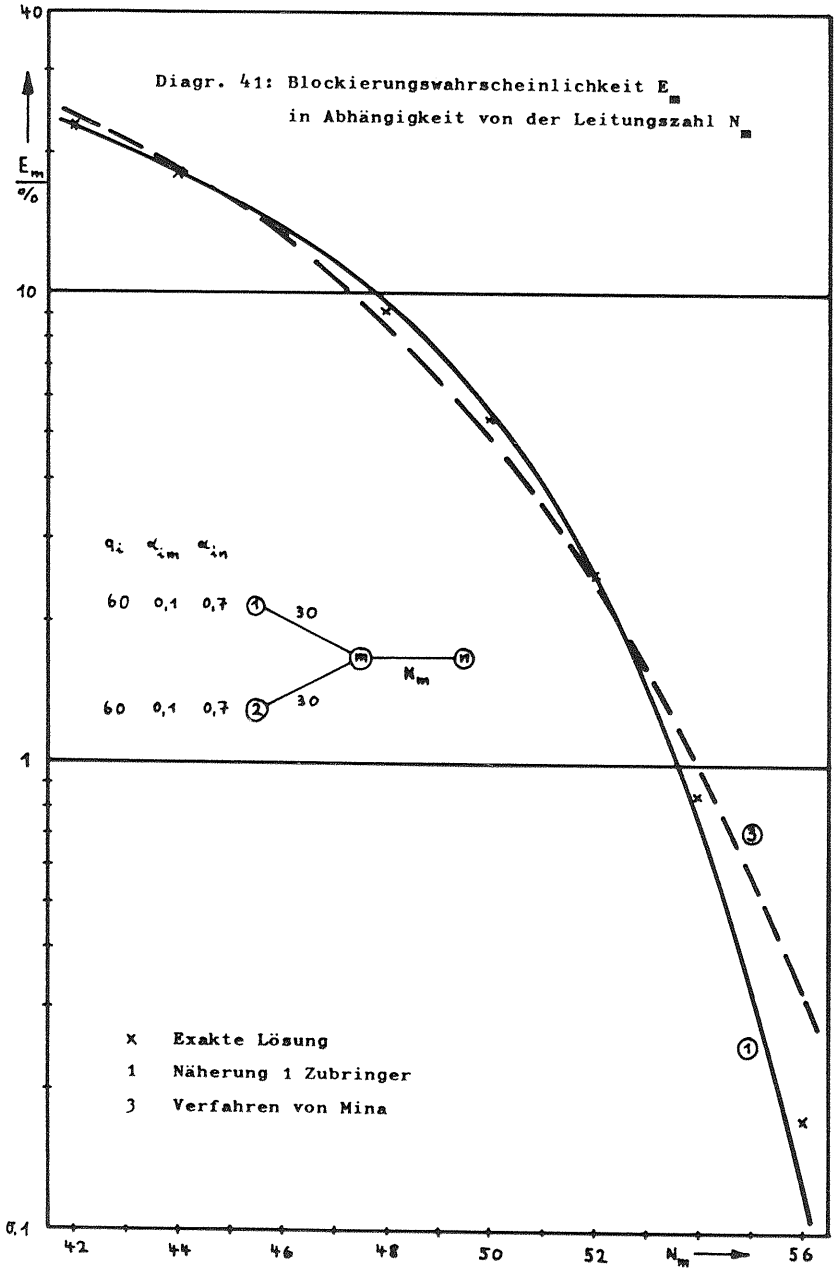

Diagr. 36: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m %
40
10
1
0.1
11
12
13
14
15
16
N_m
18
q_i α_{im} α_{in}
12 0,3 1,5
12 0,3 1,5
10
10
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina

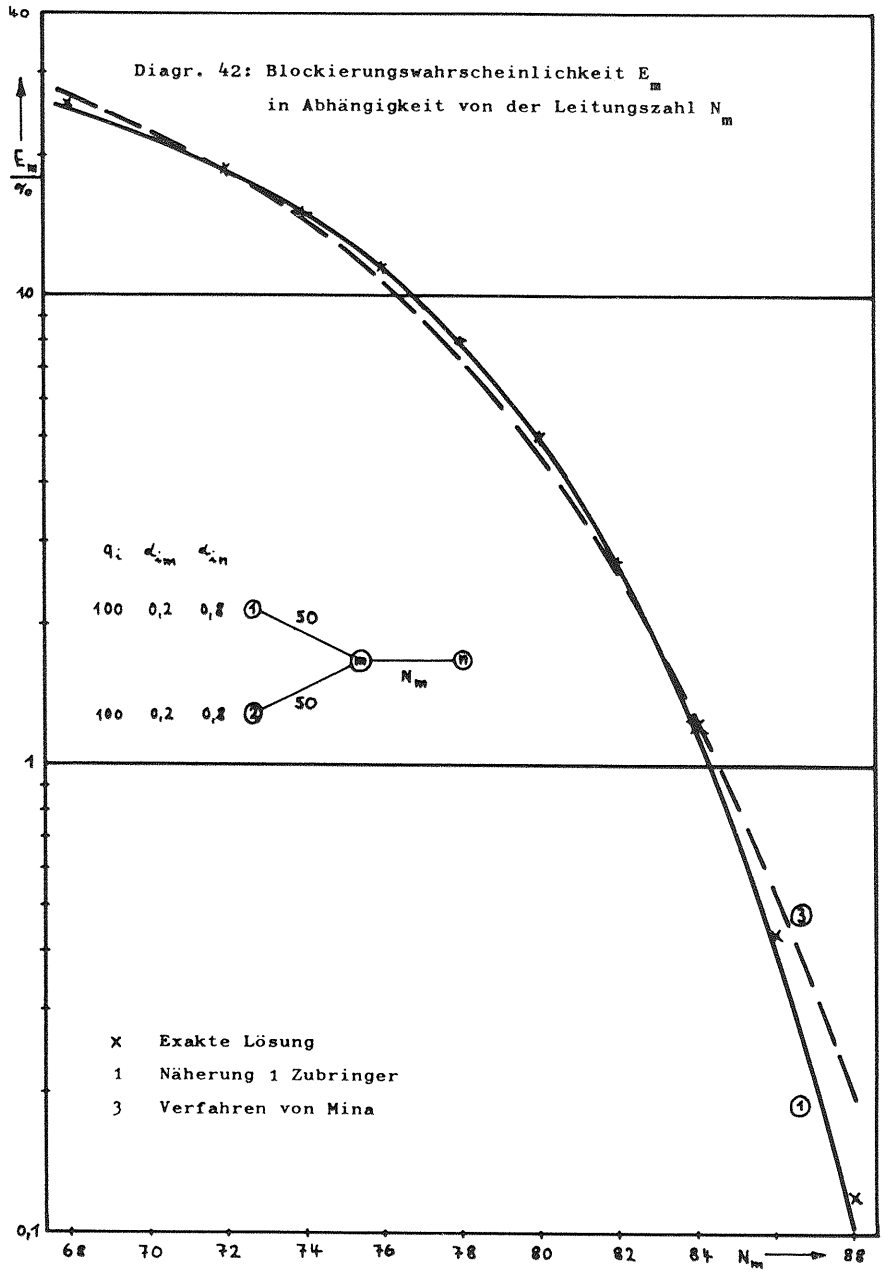

Diagr. 37: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
11
12
13
14
15
16
N_m
18
q_i d_{im} d_{in}
20 0,2 0,5
20 0,2 0,5
10
10
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina

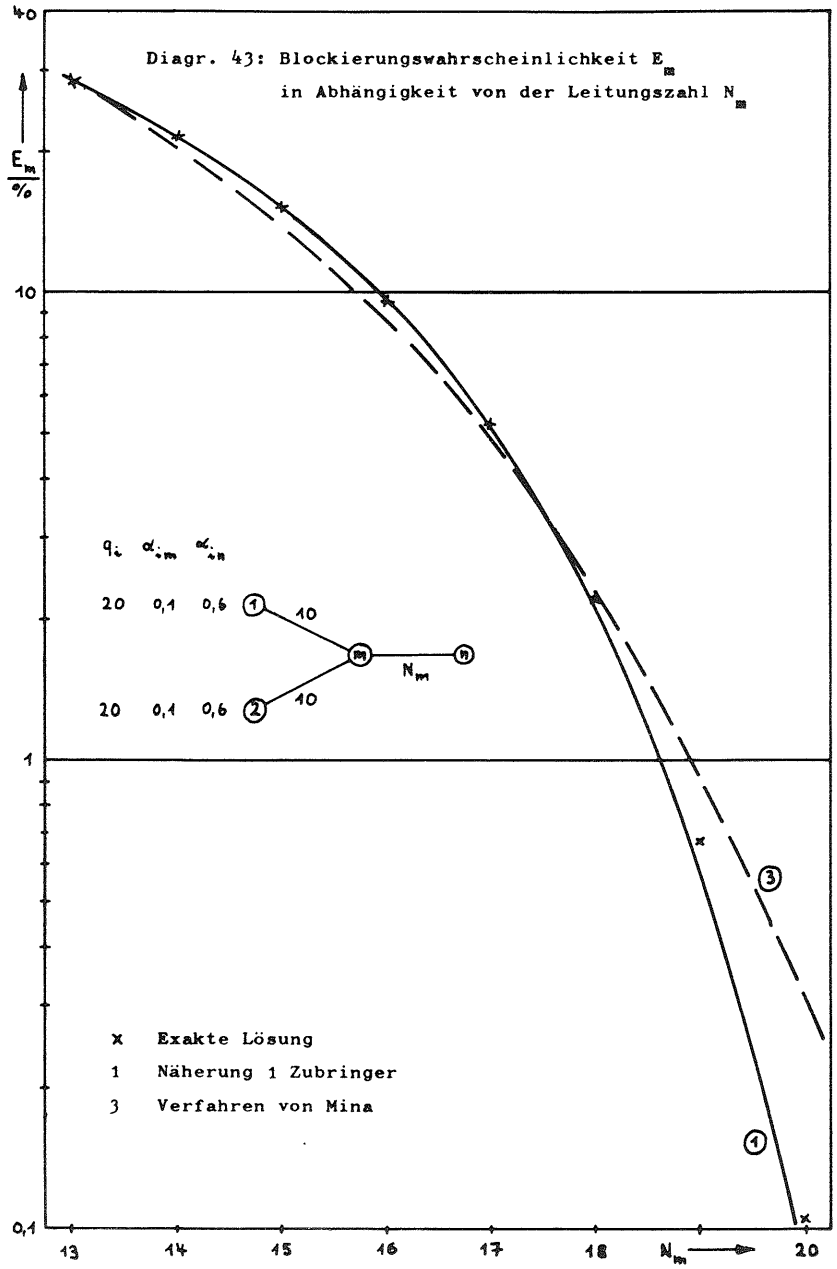

Diagr.38: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m %
40
10
1
0,1
10
11
12
13
14
15
N_m
17
q_i d_{im} d_{in}
20 0,2 0,5
20 0,2 0,5
10
10
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina

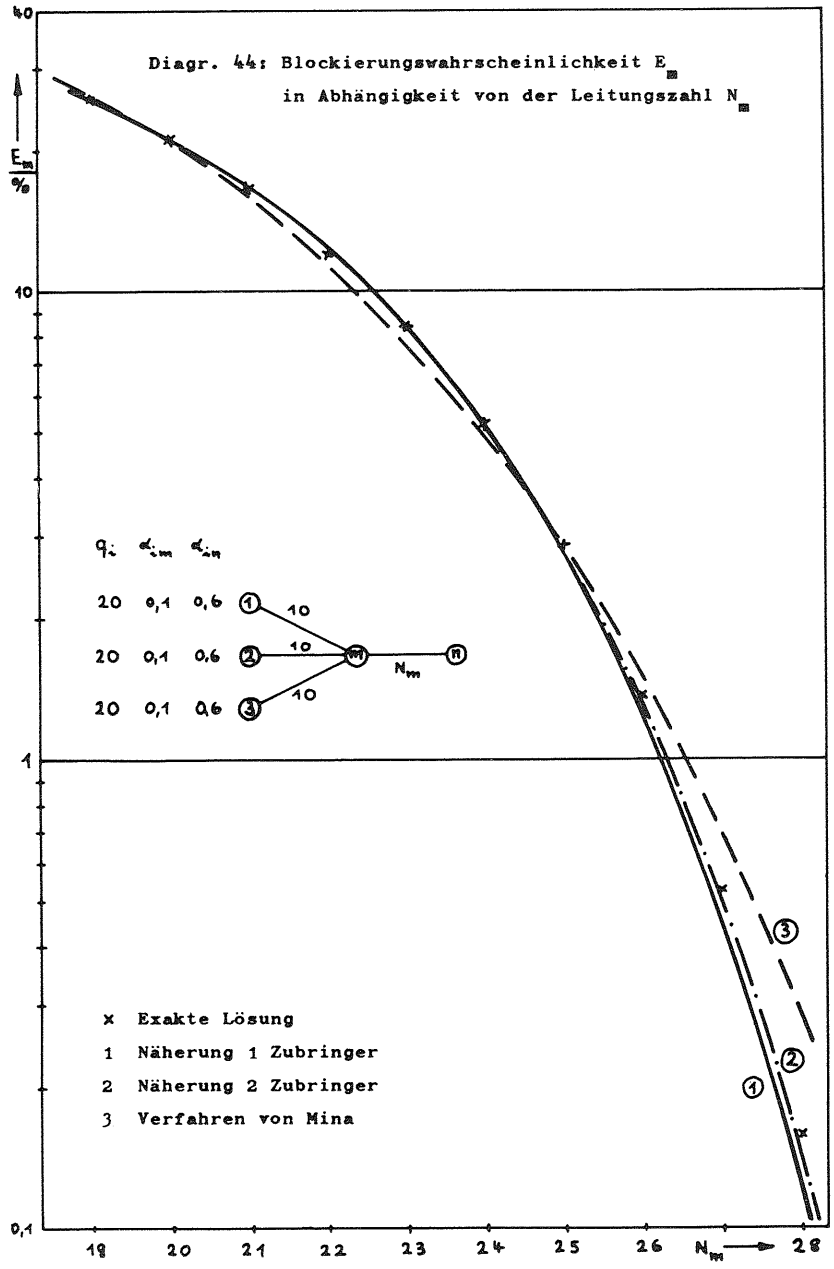

Diagr. 39: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
1
0.1
11
12
13
14
15
16
N_m
18
q_i α_{im} α_{in}
50 0,04 0,14
50 0,04 0,14
10
10
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina

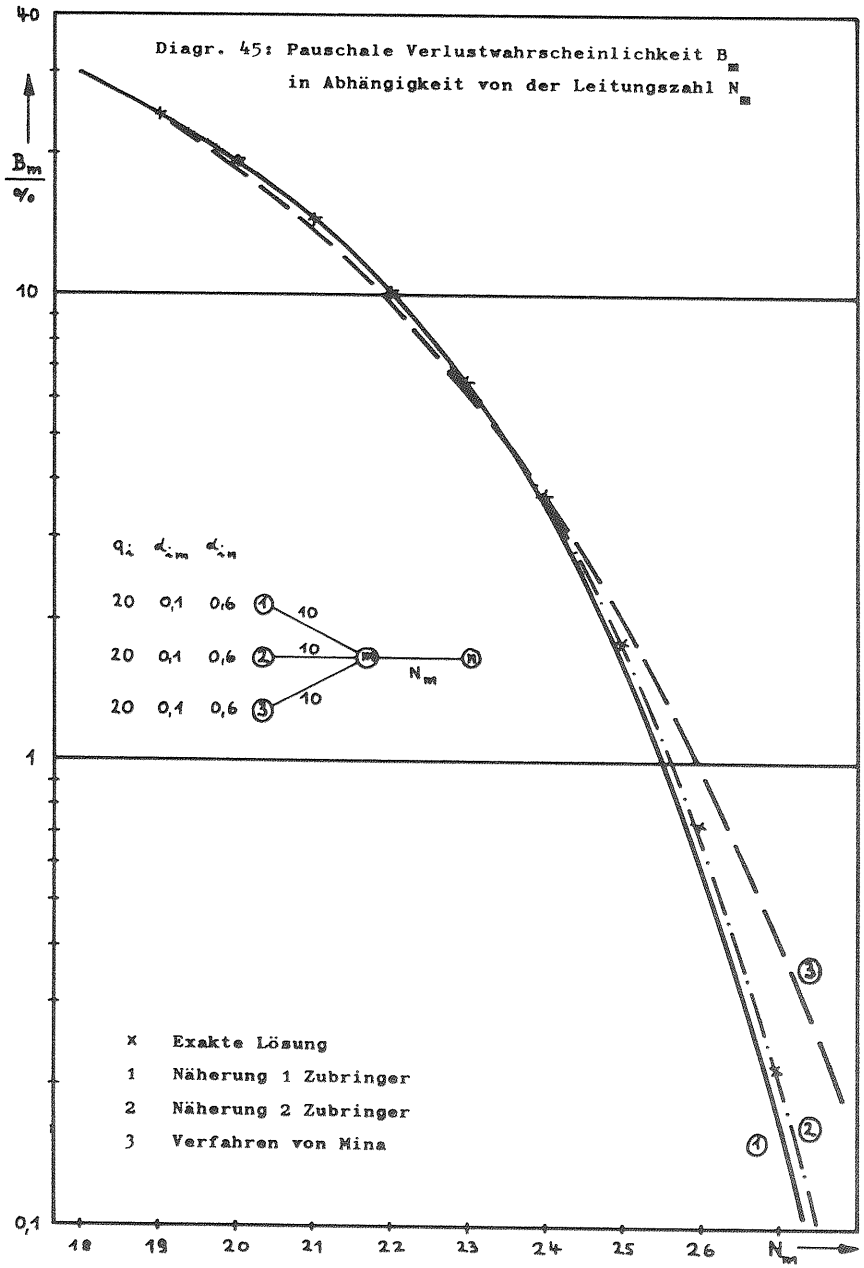

Diagr. 40: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m %
40
10
1
0.1
11
12
13
14
15
16
N_m
18
q_i α_{im} α_{in}
50 0,04 0,14
50 0,04 0,14
10
10
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina

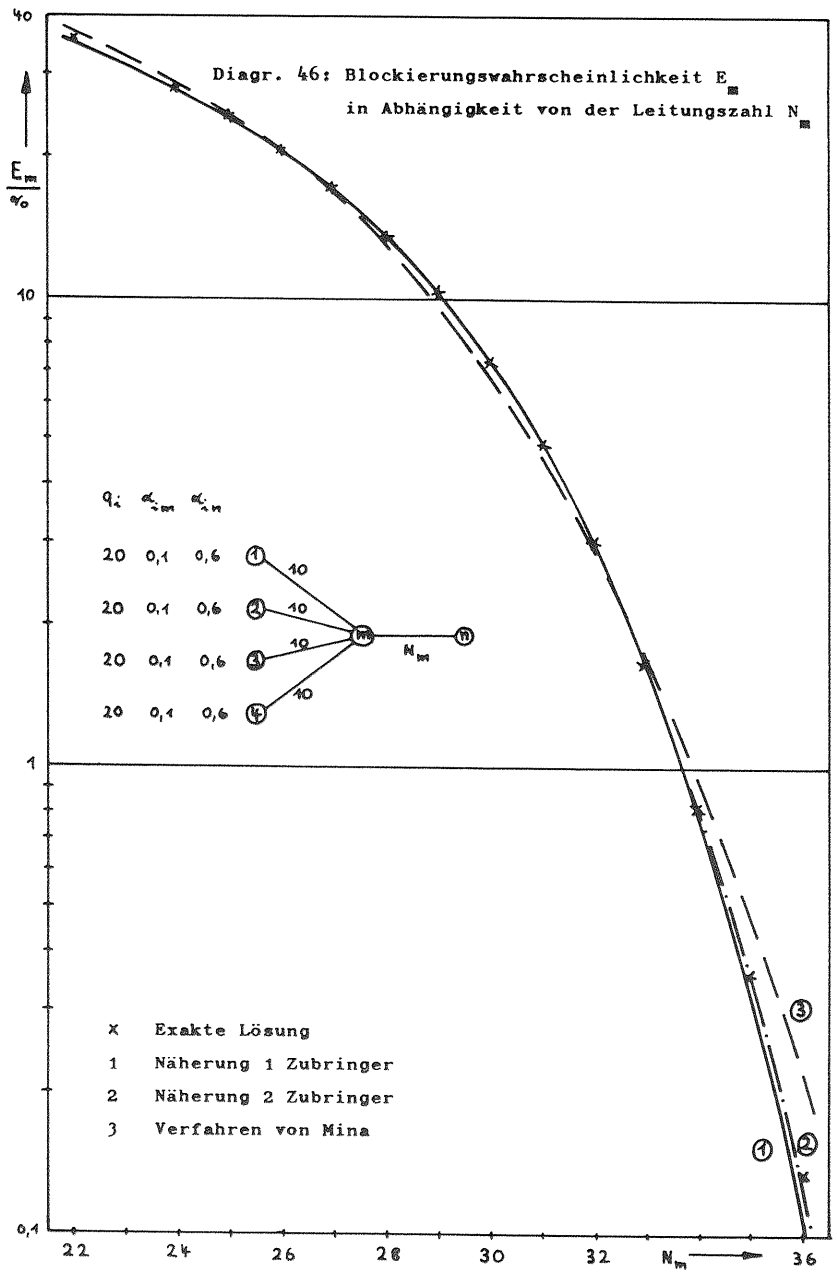

Diagr. 41: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
42
44
46
48
50
52
N_m
56
q_i α_{im} α_{in}
60 0,1 0,7
60 0,1 0,7
30
30
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina

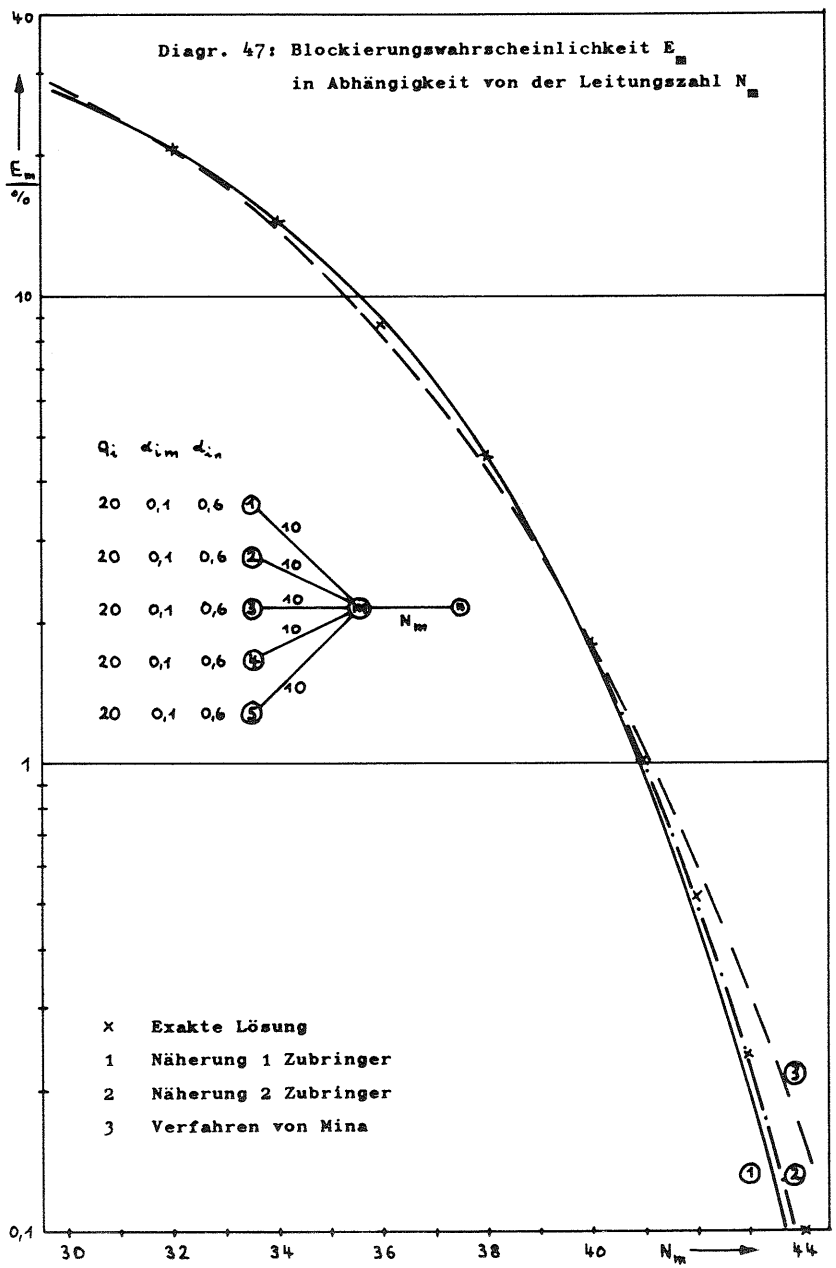

Diagr. 42: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
68
70
72
74
76
78
80
82
84
N_m
88
q_i α_{im} α_{in}
100 0,2 0,8
100 0,2 0,8
50
50
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina

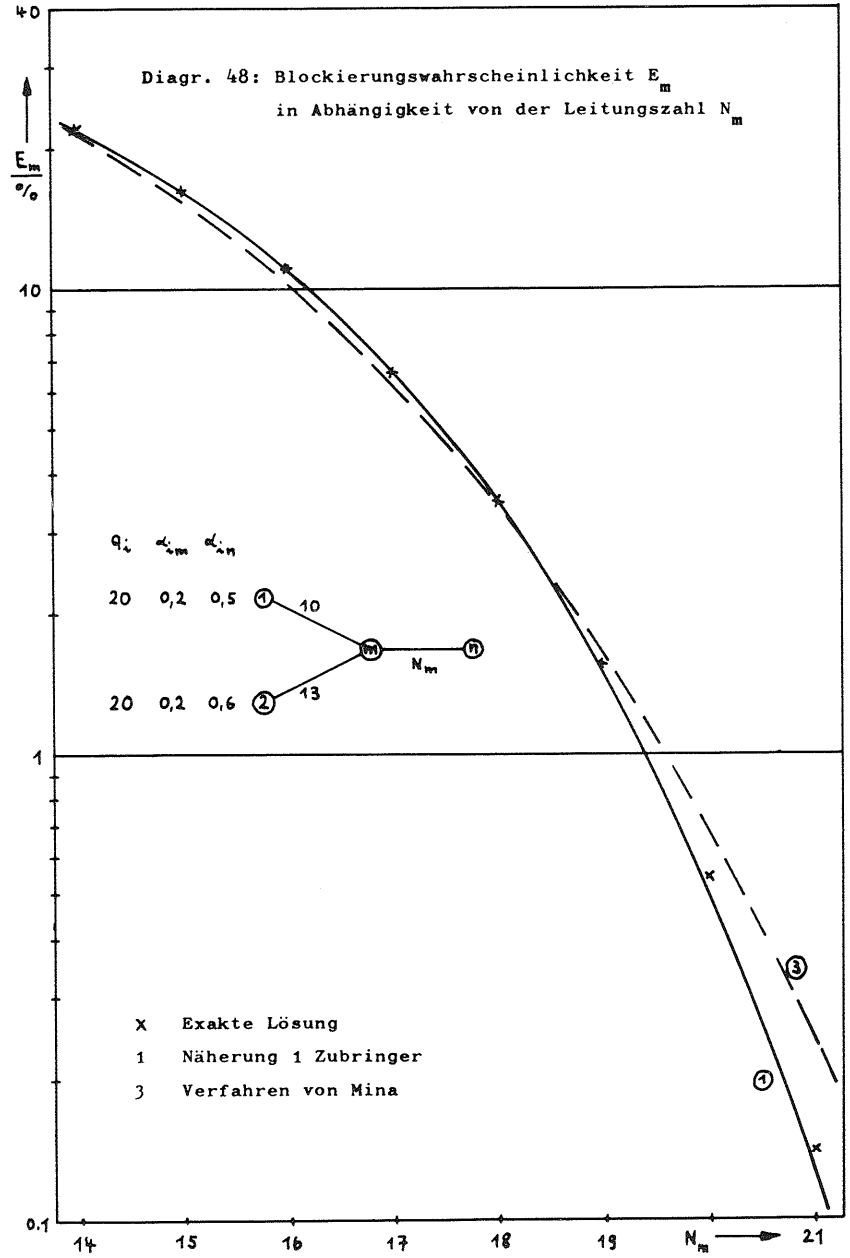

Diagr. 43: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
q_i α_{im} α_{in}
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
10
10
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina
13 14 15 16 17 18 N_m 20

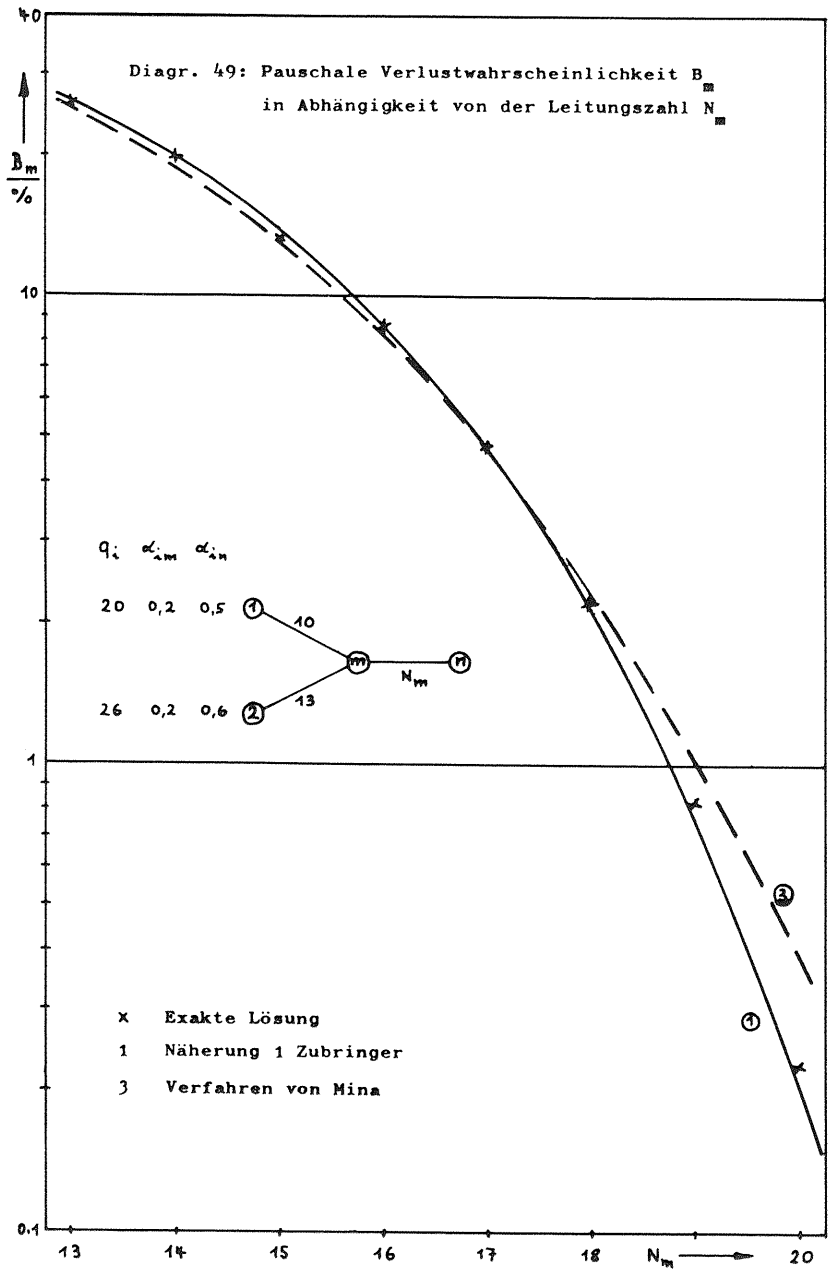

Diagr. 44: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
q_i α_{im} α_{in}
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
10
10
10
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina
19 20 21 22 23 24 25 26 N_m 28

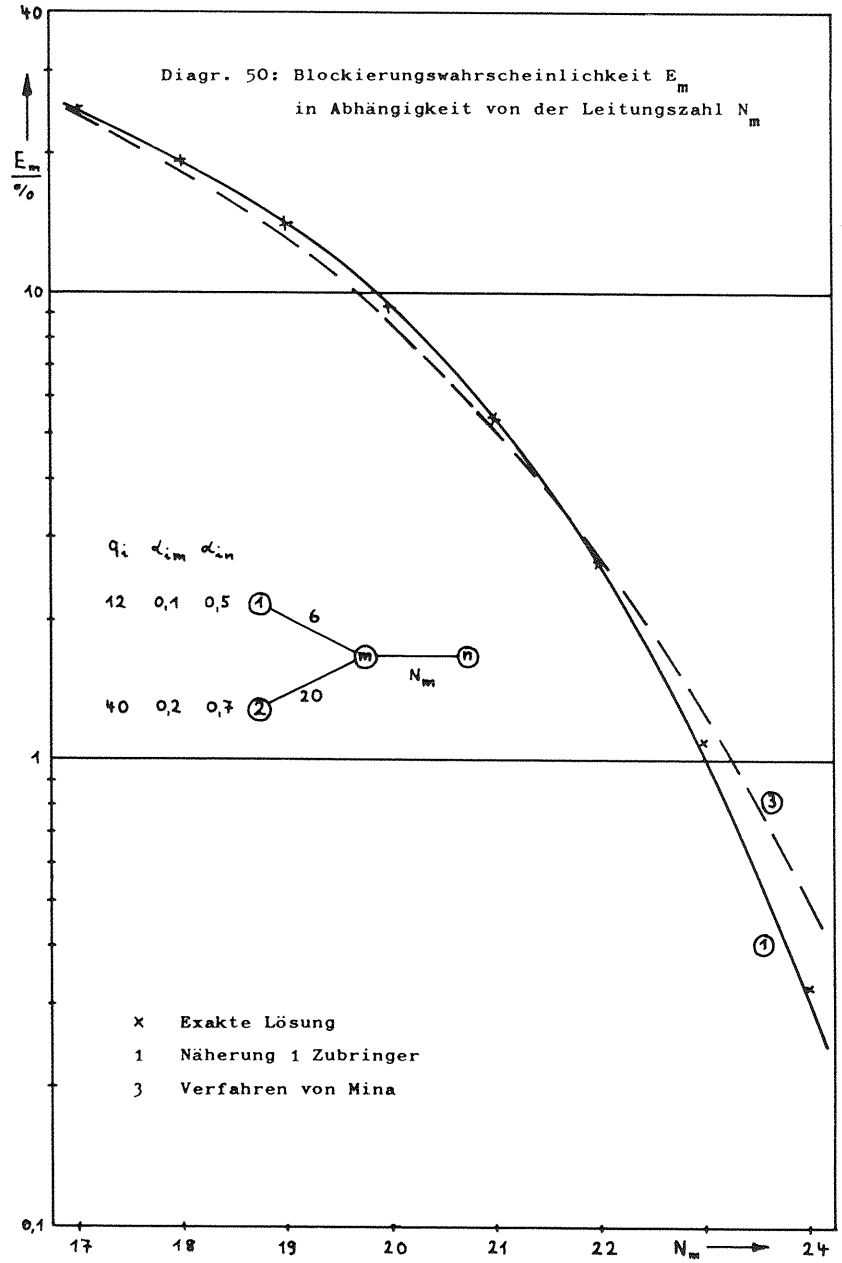

Diagr. 45: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m / %
40
10
1
0,1
18
19
20
21
22
23
24
25
26
N_m
q_i α_{im} α_{in}
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
10
10
10
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina

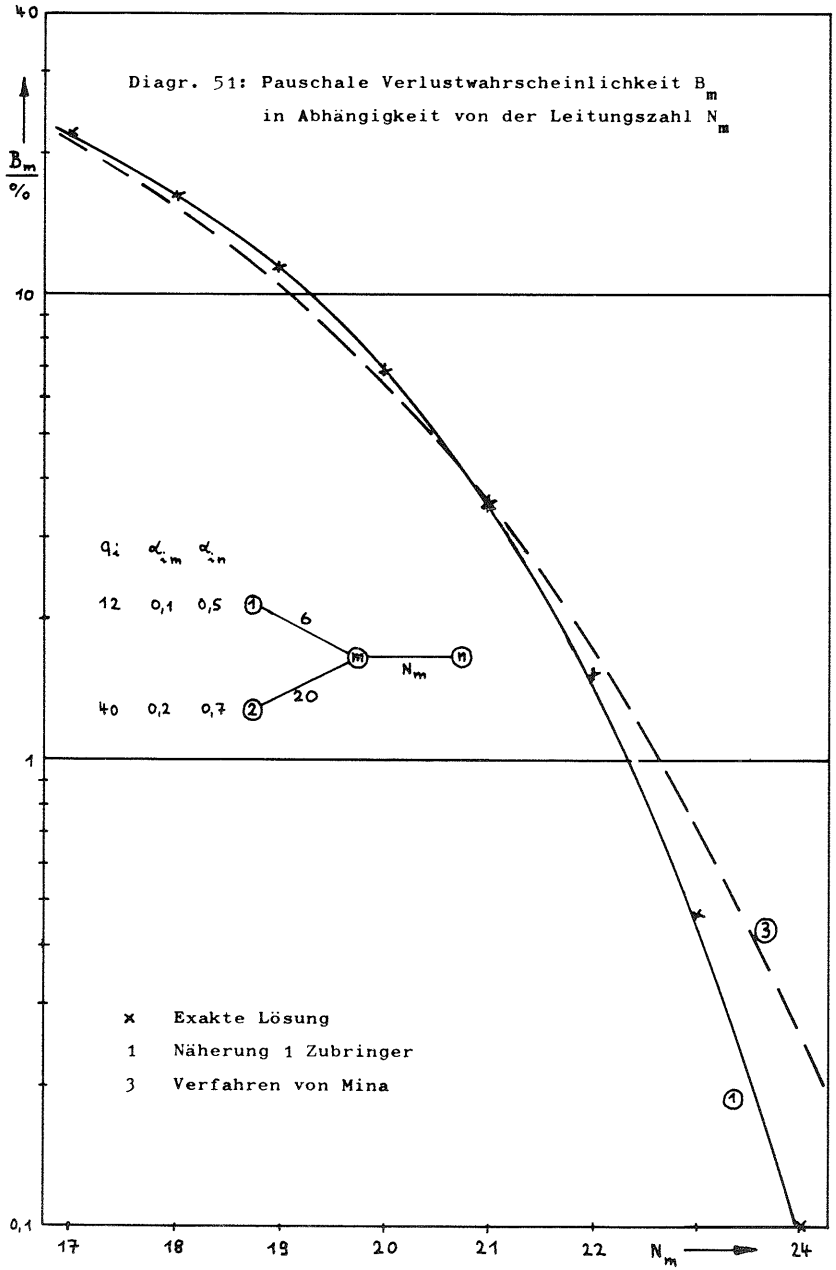

Diagr. 46: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m / %
40
10
1
0,1
22
24
26
28
30
32
36
N_m
q_i α_{im} α_{in}
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
10
10
10
10
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina

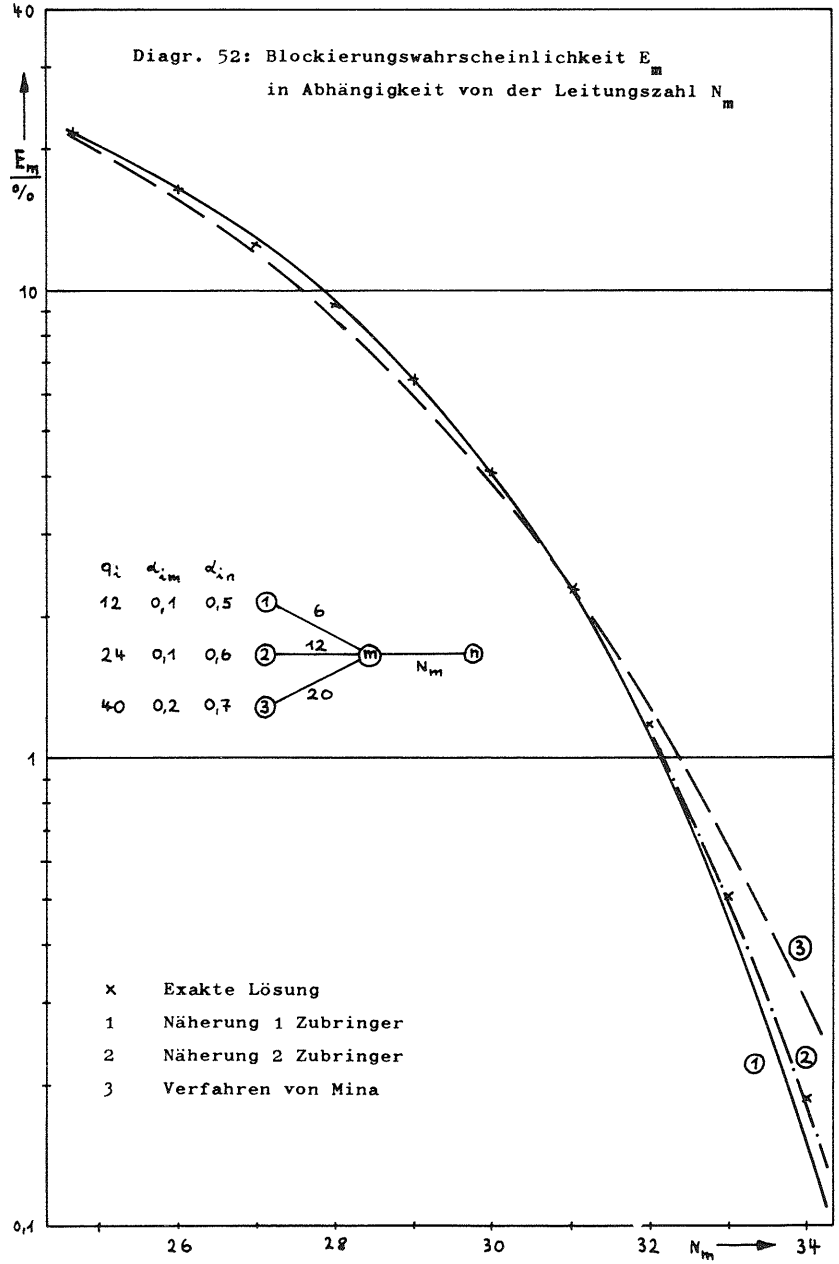

Diagr. 47: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
30
32
34
36
38
40
N_m
44
q_i α_{im} α_{in}
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
20 0,1 0,6
10
10
10
10
10
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina

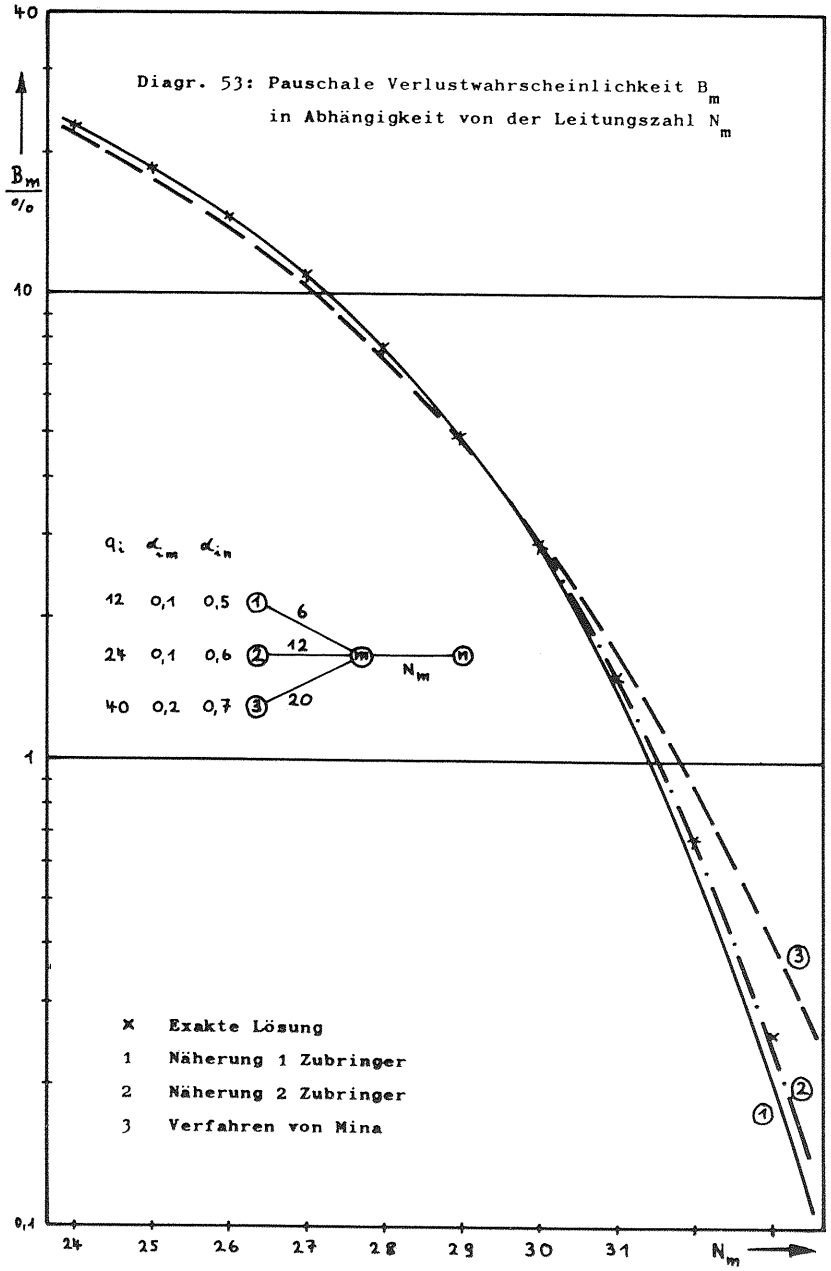

Diagr. 48: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0.1
14
15
16
17
18
19
N_m
21
q_i α_{im} α_{in}
20 0,2 0,5
20 0,2 0,6
10
13
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina

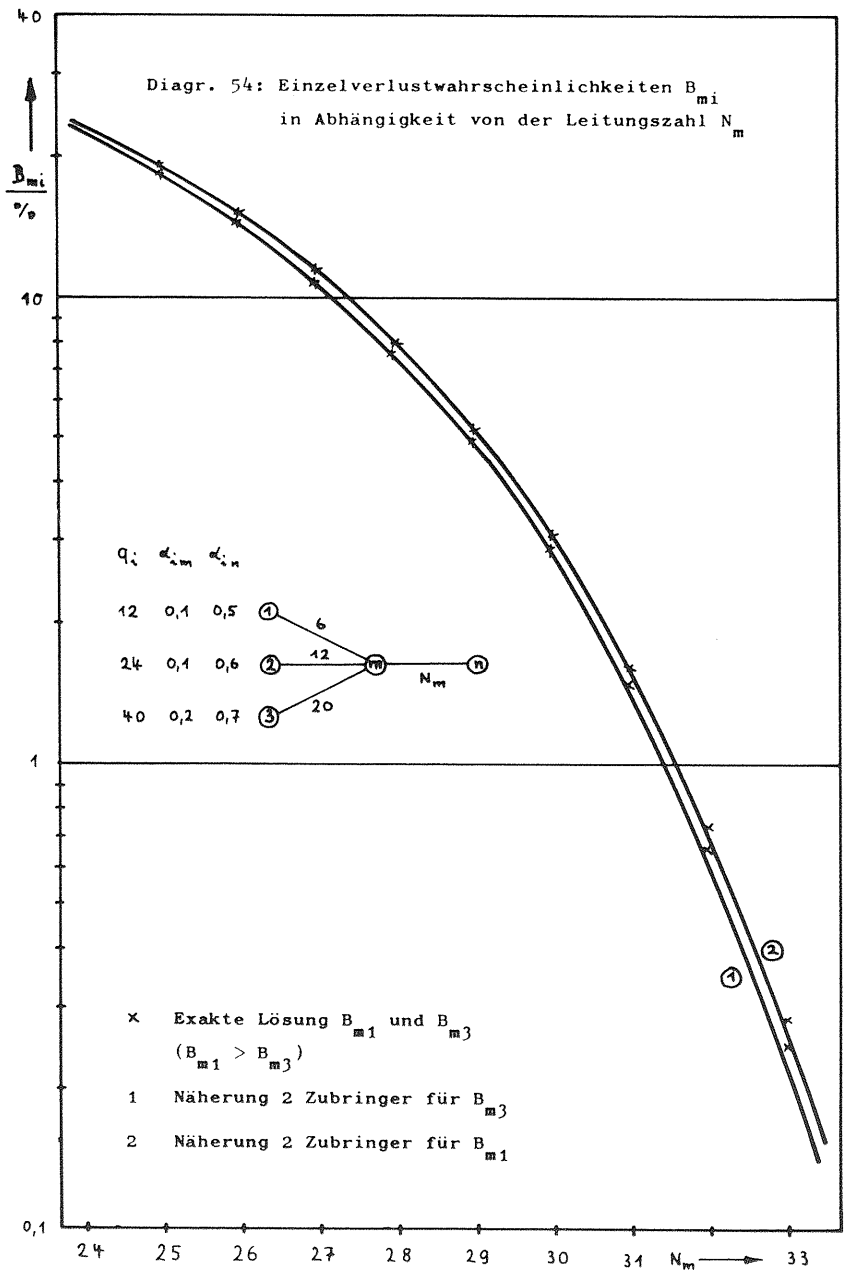

Diagr. 49: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m %
40
10
1
0.1
13
14
15
16
17
18
N_m
20
q_i α_{im} α_{in}
20 0,2 0,5
26 0,2 0,6
10
13
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina


Diagr. 50: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m %
40
10
1
0,1
17
18
19
20
21
22
N_m
24
q_i α_{im} α_{in}
12 0,1 0,5
40 0,2 0,7
6
20
N_m
x Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina


Diagr. 51: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m / %
40
10
1
0,1
17
18
19
20
21
22
N_m
24
q_i α_{im} α_{in}
12 0,1 0,5
40 0,2 0,7
6
20
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
3 Verfahren von Mina


Diagr. 52: Blockierungswahrscheinlichkeit E_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
E_m / %
40
10
1
0,1
26
28
30
32
N_m
34
q_i α_{im} α_{in}
12 0,1 0,5
24 0,1 0,6
40 0,2 0,7
6
12
20
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina


Diagr. 53: Pauschale Verlustwahrscheinlichkeit B_m
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_m %
40
10
1
0,1
24
25
26
27
28
29
30
31
N_m
q_i α_{im} α_{in}
12 0,1 0,5
24 0,1 0,6
40 0,2 0,7
6
12
20
m
n
N_m
× Exakte Lösung
1 Näherung 1 Zubringer
2 Näherung 2 Zubringer
3 Verfahren von Mina


Diagr. 54: Einzelverlustwahrscheinlichkeiten B_{mi}
in Abhängigkeit von der Leitungszahl N_m
B_{mi} %
40
10
1
0,1
24
25
26
27
28
29
30
31
N_m
33
q_i α_{im} α_{in}
12 0,1 0,5
24 0,1 0,6
40 0,2 0,7
6
12
20
m
n
N_m
× Exakte Lösung B_{m1} und B_{m3}
($B_{m1} > B_{m3}$)
1 Näherung 2 Zubringer für B_{m3}
2 Näherung 2 Zubringer für B_{m1}

Tab. 19: Vergleich der exakt berechneten Werte für Mittelwert A_{SG} und Varianz V_{SG} des geglätteten Angebots in den Beispielen Seite 130 bis 149 mit den Näherungswerten von S. Katz

Diagr. Nr.		13	16	19	21	24	25	32
A_{SG}	exakt	10,54	32,47	15,81	21,08	17,44	19,76	25,19
	Katz	10,54	32,47	15,81	21,08	17,44	19,76	25,19
V_{SG}	exakt	7,28	21,69	10,93	14,57	8,71	14,04	13,27
	Katz	9,02	24,96	13,53	18,04	12,09	17,47	18,35